3. Ausblick in die Quantenmechanik

Klassische Welle $$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = c\nabla^2 u(x,t)$$

$u(x,t)$ ist z.B. eine mechanische Welle.

Wellengleichung ist eine Differentialgleichung zweiter Ordnung im Ort (∇^2) und in der Zeit ($\frac{\partial^2}{\partial t^2}$).

Lösung $$u(x,t) = A_1 \sin(\omega t - kx) + A_2 \cos(\omega t - kx) = \mathrm{Re}\, A e^{i(\omega t - kx + \varphi)}$$

$\omega(k)$: Dispersion

k : Wellenvektor (real)

A_1, A_2 : reelle Werte

A, φ : "

Aus einem Photo der Welle, d.h. $u(x, t=t_0)$ können wir die zeitliche Entwicklung nicht ablesen. Um die zeitliche Entwicklung zu kennen, brauchen wir auch Information über $\dot{u}(x, t=t_0)$.

Wenn wir k als komplexe Amplitude verwenden, so macht nur der Realteil einen Sinn.

⇒ Um die zeitliche Entwicklung zu beschreiben, brauchen wir Informationen von der Gegenwart aber auch der Vergangenheit.

Grundbeobachtungen der Quantenmechanik

Licht erfährt Interferenz und Beugung

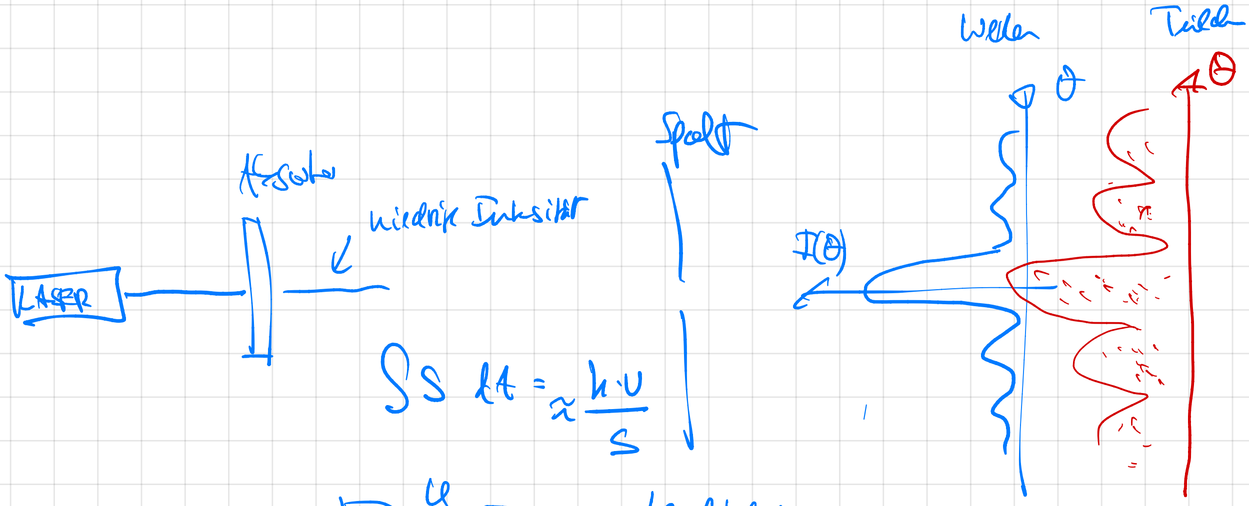
⇒ Licht ist eine Welle

Licht verhält sich auch wie ein Teilchen

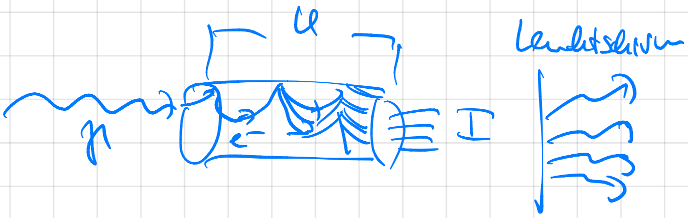
z.B. im Photoeffekt $E = h \cdot \nu$

⇒ Licht kommt in Quanten vor

Gedankenexperiment: Wir führen ein Beugungsexperiment durch, reduzieren aber den Energiefluss (S), so dass immer nur ein einzelnes Photon unterwegs ist.



$$\int S \, dA \approx \frac{h \cdot \nu}{s}$$



Mitteln wir über viele einzelne Ereignisse (Photonen), so ergibt sich in der Statistik ein Bild, was der Wellenoptik entspricht.

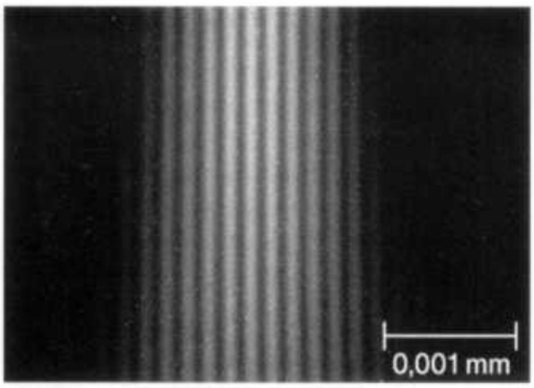
Wahrscheinlichkeit $\Leftrightarrow$ Intensität

Die Wahrscheinlichkeit wird durch eine Wellengleichung beschrieben.

$$I \propto |\vec{E}|^2 \propto \text{Wahrscheinlichkeit} \times h \cdot \nu$$

Dies Bild vereinigt Teilcheneigenschaften (Wahrscheinlichkeit) mit Welleneigenschaften (kontinuierliche Größen).

Elektronen zeigen auch Beugungseffekte



50keV Elektronen
1µm Gitter

Vergrößert auf
Leuchtschirm

Jönsson, Z. Für Physik (1961)

Beugung am Doppelspalt

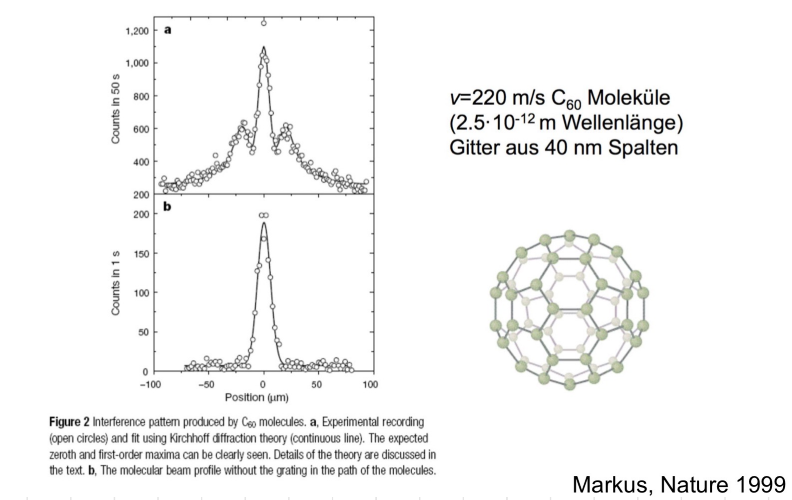
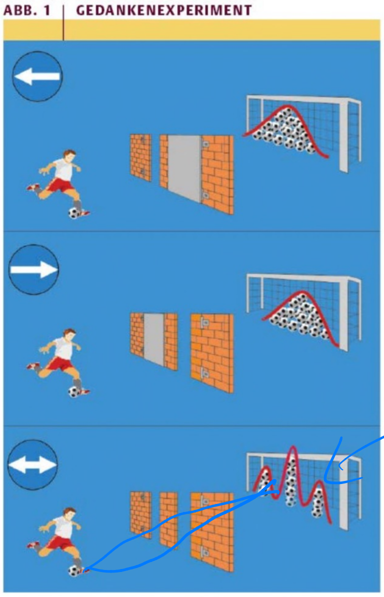


Figure 2 Interference pattern produced by C_{60} molecules. **a**, Experimental recording (open circles) and fit using Kirchhoff diffraction theory (continuous line). The expected zeroth and first-order maxima can be clearly seen. Details of the theory are discussed in the text. **b**, The molecular beam profile without the grating in the path of the molecules.

Markus, Nature 1999

ABB. 1 | GEDANKENEXPERIMENT



Interferenz (Welleneigenschaften)
Beugung am Doppelspalt.

Arnd et al.,
Physik in unserer Zeit
2006

Die Objekte der Quantenmechanik verhalten sich wie Wellen, und das Quadrat der „Wellenfunktion" beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass ein einzelnes Ereignis gemessen wird.

Die Schrödingergleichung ist die Wellengleichung für die Wellenfunktion ψ.

Klassische Mechanik

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} = \hat{H}\,\psi(x,t)$$ Schrödingergleichung

$$\hbar = \frac{h}{2\pi}$$

$\psi(x,t)$ ist die Wellenfunktion

$\hat{H}$ ist der Hamilton Operator

H beschreibt die Gesamtenergie des Systems

$$\hat{H}_c = \frac{m}{2}v^2 = \frac{p^2}{2m} \qquad p = -i\hbar\nabla$$

Freie Elektronen $$i\hbar \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} = \frac{(-i\hbar\nabla)^2}{2m}\psi(x,t)$$

Ableitung erster Ordnung in der Zeit.

Ableitung 2. Ordnung im Raum

$\psi(x,t) \in \mathbb{C}$ Wellenfunktion ist komplex

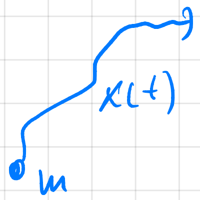
Wahrscheinlichkeit $|\psi|^2$

Achtung: Real- und Imaginärteil sind gleich berechtigt!

Um die zeitliche Entwicklung zu beschreiben, brauchen wir nur Informationen über Kenntnis von $\psi(x,t)$ zu einem beliebigen Zeitpunkt eindeutige Bestimmung von $\psi(x,t)$ für alle Zeiten.

Klassische Mechanik

H

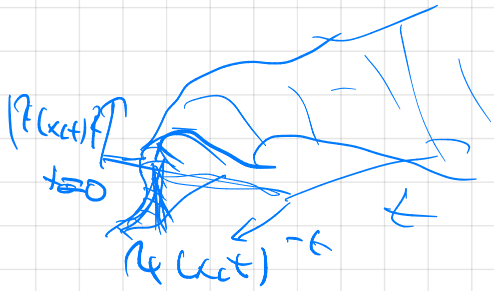


Anfangsbedingung : $x(t=0)$

$\dot{x}(t=0)$

Deterministisch

Quantenmechanik

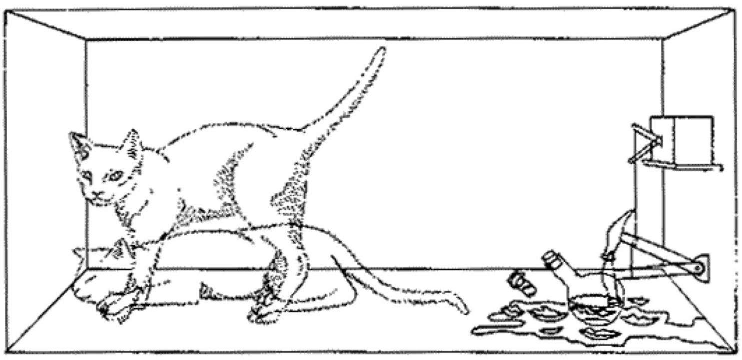


$|\psi(x,t)|^2 \hat{=}$ Wahrscheinlichkeit, das Teilchen am Ort x zum Zeitpunkt t zu finden

$\psi(x,t)$ als Anfangsbedingung

Wahrscheinlichkeiten

Schrödingers Katze

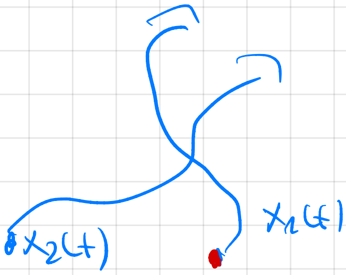


2 Teilchen

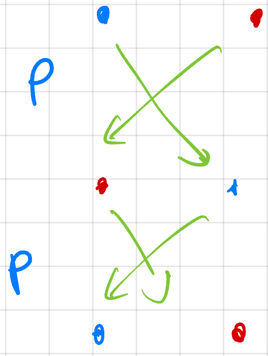
$\psi(x_1, x_2, t)$

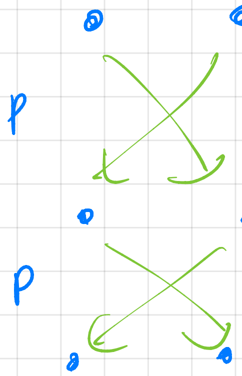
$|\psi(x_1,x_2,t)|^2 \hat{=}$ Wahrscheinlichkeit das eine Teilchen zu x_1 und das andere Teilchen zu x_2 zu finden.

Ununterscheidbarkeit der Teilchen.



Bei Welle wird es problematisch mit der Unterscheidbarkeit





$\psi(x_1, x_2, t)$

$\psi(x_2, x_1, t)$

$\psi(x_1, x_2, t)$

$P^2 = \mathbb{1}$ $\qquad$ $P^2 = \mathbb{1}$

$$P^2 \psi = \mathbb{1} \psi$$

$$P \psi = \pm 1 \psi$$

$$P \psi = -\psi \qquad \psi(x_1, x_2, t) = -\psi(x_2, x_1, t)$$

$$x_1 = x_2$$

$$\psi(x_1, x_1, t) = -\psi(x_1, x_1, t)$$

$$\Rightarrow \psi(x_1, x_1, t) = 0$$

Fermionen können nicht am selben Ort sein $(P = -1)$

Bosonen können am gleichen Ort sein $(P = 1)$

2 Teilchen können nicht am gleichen Ort sein.