Karlsruhe Institute of Technology

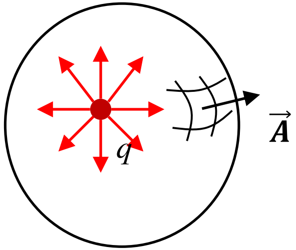
II. Elektromagnetische Wellen im Vakuum

- Maxwell Gleichungen
- Wellengleichung
- Transversalität
- Energiedichte, Energietransport
- Dispersionsrelation
- Lichtgeschwindigkeit
- Elektromagnetisches Spektrum
- Polarisation

Maxwell Gleichungen

Quellen elektrischer Felder

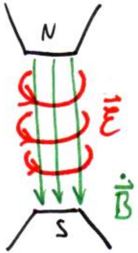
- Statisch: Ladungen

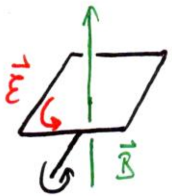


$$\oint \vec{D}\, d\vec{A} = q$$
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$$

Gauß'scher Satz für elektrische Felder

- Dynamisch: veränderlicher magnetischer Fluss





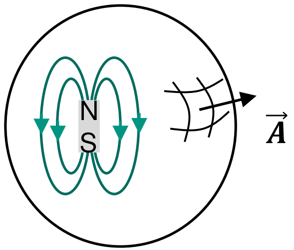
$$U_{ind} = \oint \vec{E} d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B}\, d\vec{A}$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}}$$

Induktionsgesetz

Maxwell Gleichungen

Quellen magnetischer Felder

- Statisch: keine magnetischen Ladungen (Monopole), geschlossene Feldlinien

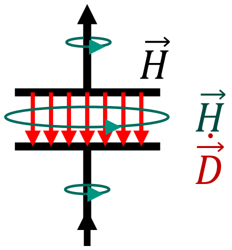


$$\oint \vec{B}\, d\vec{A} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathrm{B}} = 0$$

Gauß'scher Satz für Magnetfelder

- Dynamisch: Strom und veränderliches elektrisches Feld



$$\oint \vec{H} d\vec{s} = I + \frac{d}{dt} \int \vec{D}\, d\vec{A}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathrm{H}} = \vec{j} + \dot{\vec{D}}$$

Ampére-Maxwell Gesetz

Maxwell Gleichungen

Felder

$\vec{E}$	elektrische Feldstärke	[V/m]
$\vec{D}$	dielektrische Ver-schiebungsdichte	[As/m²]
$\vec{H}$	magnetische Feldstärke	[A/m]
$\vec{B}$	magnetische Flussdichte	[T] = [Vs/m²]

Quellen

q	elektrische Ladung	[C]
ρ	elektrische Ladungsdichte	[C/m³]
I	elektrischer Strom	[A]
$\vec{j} = \rho\vec{v}$	el. Stromdichte	[A/m²]

Differential Operator

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix}$$ Nabla

$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = div\,\vec{F}$ skalar

$\vec{\nabla}\phi = grad\,\phi$ Vektor

$\vec{\nabla} \times \vec{F} = curl\,\vec{F}$ Vektor

$\oint \vec{F}\, d\vec{A}$ geschlossenes Oberfl. Int.

$\oint \vec{F}\, d\vec{s}$ geschlossenes Pfadintegral

$\oint \vec{F}\, d\vec{A} = \int \vec{\nabla} \cdot \vec{\boldsymbol{F}}\, dV$ Gauß'scher Satz

$\oint \vec{F}\, d\vec{s} = \int \vec{\nabla} \times \vec{\boldsymbol{F}}\, d\vec{A}$ Stokes'scher Satz

Maxwell Gleichungen

- Dielektrische Verschiebungsdichte

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{D} &= \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E} \\ &= \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}\end{aligned}}$$

ϵ_r relative Permittivität
ϵ_0 Permittivität des Vakuums
$\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}\ As/Vm$
$\vec{P}$ dielektrische Polarisation

- Magnetische Flussdichte

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{B} &= \mu_r \mu_0 \vec{H} \\ &= \mu_0 \left(\vec{H} + \vec{M}\right)\end{aligned}}$$

μ_r relative Permeabilität
μ_0 Permeabilität des Vakuums
$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ Vs/Am$
$\vec{M}$ Magnetisierung

Elektromagnetische Wellen

- Maxwell Gleichungen in Vakuum: $\mu_r = 1,\ \epsilon_r = 1,\ j = 0,\ \rho = 0$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathrm{E}} = -\mu_0 \dot{\vec{H}} \quad /\cdot\, \vec{\nabla} \times$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathrm{H}} = \epsilon_0 \dot{\vec{E}} \quad /\cdot\, \frac{\partial}{\partial t}$$

$$\underbrace{\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E})}_{= \underbrace{\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{E})}_{=0} - \Delta \vec{E}} = -\mu_0 \vec{\nabla} \times \dot{\vec{H}} = -\epsilon_0 \mu_0\, \ddot{\vec{E}}$$

$$\boxed{\Delta \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \ddot{\vec{E}} = 0}$$

Wellengleichung für Elektromagnetische Wellen

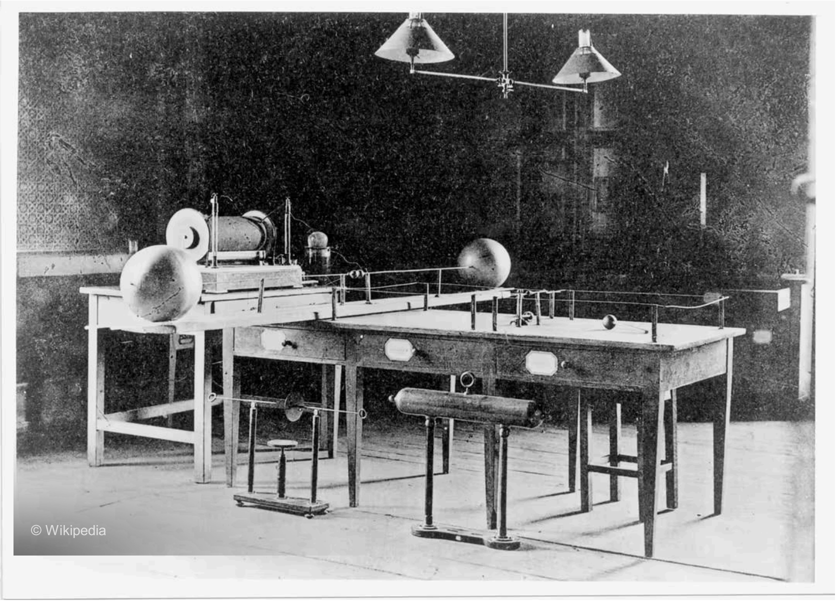
$$\boxed{v_{ph} = \frac{\omega}{k} = c_0 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}}$$

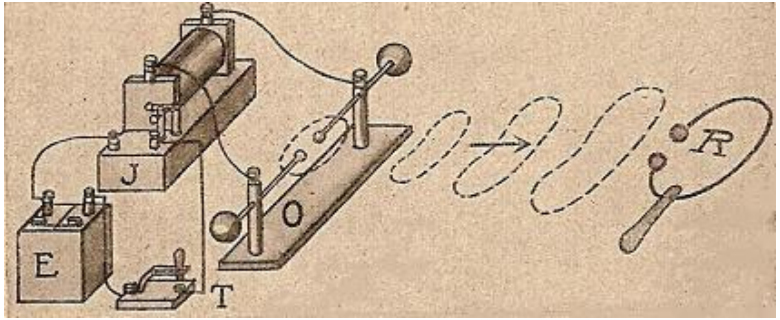
Lichtgeschwindigkeit in Vakuum

Experimenteller Nachweis

Heinrich Hertz

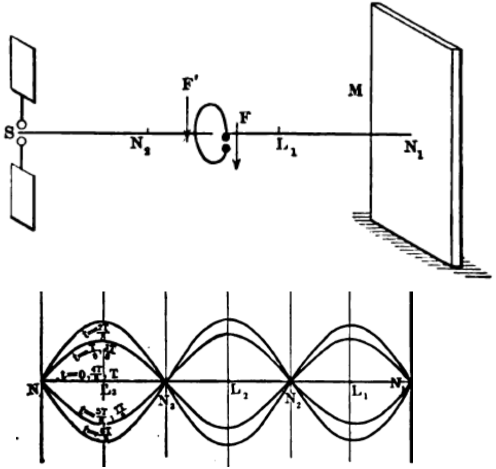
1886 erster Nachweis elektromagnetischer Wellen



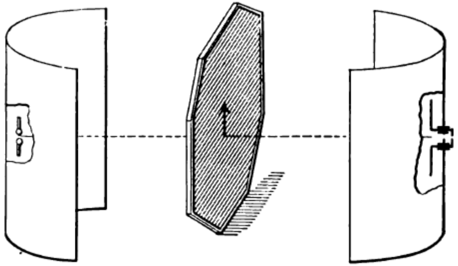


Nachweis der Welleneigenschaften

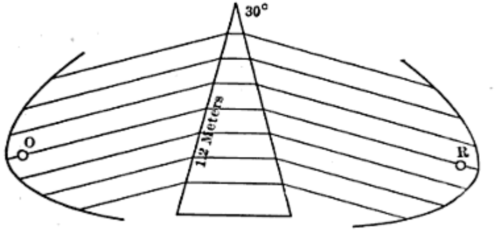
Stehwellen



Kollimation, Polarisationsfilterung



Brechung



600kg pitch prism

G. W: Pierce: Principles of wireless telegraphy, McGraw-Hill Book Company, London (1910)

Ebene elektromagnetische Wellen

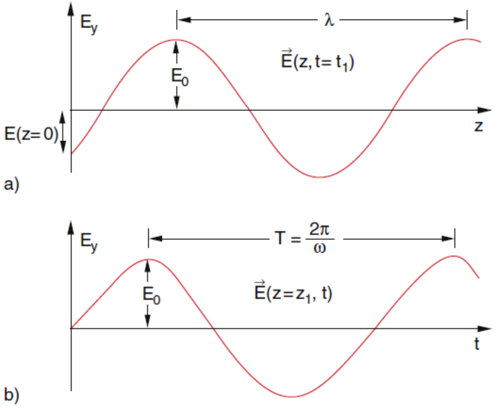
Karlsruhe Institute of Technology

- Spezielle Lösung der Wellengleichung:
  Ebene, monochromatische Welle

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos\left(\omega t - \vec{k}\vec{r}\right)$$

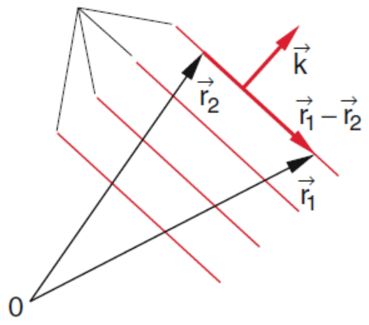
$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}$$

komplexe Darstellung;
beachte: Felder sind reell
betrachte nur Realteil



- Phasenfronten sind Ebenen $\vec{k} \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = 0$
  → $\vec{k}\vec{r} = const.$ für alle Punkte einer Ebene $\perp \vec{k}$
  → Wellenvektor $\vec{k}$ steht senkrecht auf Phasenfronten

$$\left|\vec{k}\right| = k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{Wellenzahl}$$



Transversalität elektromagnetischer Wellen

- Maxwellgleichung im Vakuum für ebene Welle:

  $$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$$

  $$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{E}_0\, e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}\right) = i\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$$ erfüllt falls $\vec{k} \perp \vec{E}$

  → ebene Welle im freien Raum ist transversal

- Für magnetisches Feld $\vec{B} = \vec{B}_0\, e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}$

  $$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}} = -i\omega\vec{B}$$

  $$\vec{k} \times \vec{E} = \omega\vec{B}$$ → $\vec{B}$ und $\vec{E}$ sind in Phase und senkrecht zueinander

  $$\boxed{\vec{B} = \frac{1}{\omega}\left(\vec{k} \times \vec{E}\right)}$$

  Die Vektoren $\vec{k}, \vec{E}, \vec{B}$ bilden ein Rechts-System

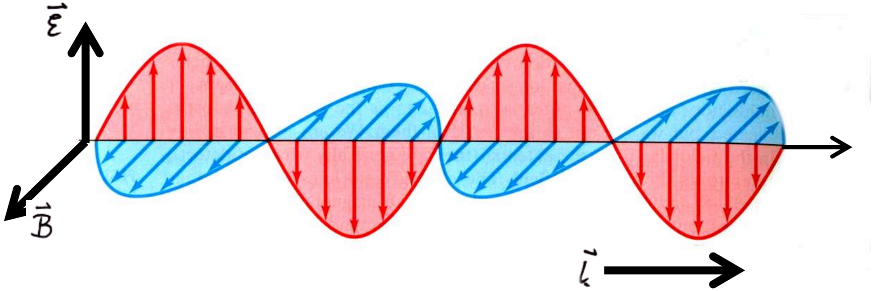
- Dispersionsrelation: $$\frac{|\vec{E}|}{|\vec{B}|} = \frac{\omega}{|\vec{k}|} = c$$

Transversale elektromagnetische Welle

- Es gilt

  $\vec{k} \perp \vec{E} \perp \vec{B}$

  $|\vec{B}| = \frac{1}{c}|\vec{E}|$



- Beispiel: $\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}$, $\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ B_y \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}$

- Beispiel: Stärke des B-Feldes im Sonnenlicht

  Spektralintervall von 1nm bei 500nm

  ~ 4W/m² auf der Erdoberfläche

  $|\vec{E}| \sim 40 \frac{V}{m}$

  $|\vec{B}| \sim 1 \times 10^{-7} T = 10^{-3} G \quad \ll 0.2$ G (Erdmagnetfeld)

→ Das B-Feld spielt in der Optik meist keine Rolle!

Energiedichte und Energietransport

- Energiedichte

$$w = \frac{1}{2}\left(\vec{D}\cdot\vec{E} + \vec{B}\cdot\vec{H}\right) = \frac{1}{2}\epsilon_0\left(\vec{E}^2 + c^2\vec{B}^2\right) = \epsilon_0 E^2$$

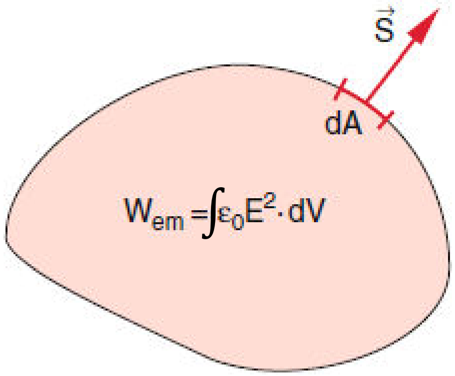
im Vakuum

- Energie innerhalb eines Volumens V

$$W = \int \epsilon_0 E^2 dV$$

- Energiefluss durch Oberfläche: Poynting Vektor S

$$-\frac{\partial}{\partial_t}\int \epsilon_0 E^2 dV = \oint \vec{S}\, d\vec{A} = \int_V \mathrm{div}\, S\, dV$$



Energietransport und Intensität

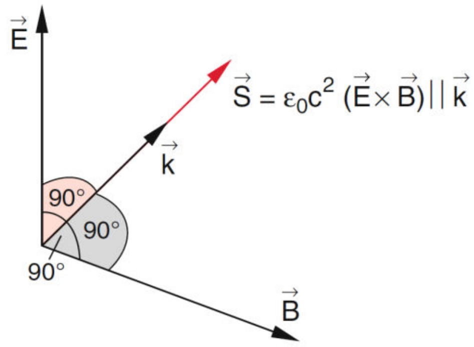
- Energiefluss beschrieben durch **Poynting Vektor** $\vec{S}$

  $$\boxed{\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}} = \epsilon_0 c^2 \vec{E} \times \vec{B}$$

  $$S = |\vec{S}| = \epsilon_0 c\, E^2 = c \cdot w \qquad [S] = W/m^2$$

  $\vec{S} \parallel \vec{k}$ im Vakuum

- $\vec{S}$: Energie, die pro Zeit durch eine zu $\vec{k}$ senkrechte Flächeneinheit transportiert wird – Energiestromdichte



Linear polarisierte Welle $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r})\,, S \propto E^2$ oszilliert mit 2ω

zeitliche Mittelung: $\boxed{I = \langle S(t) \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 c\, E_0^2}$ Intensität

Zirkular polarisierte Welle: $S = \epsilon_0 c\, E^2$ ist zeitlich konstant

Impulsdichte

$$\vec{\pi} = \vec{D} \times \vec{B}$$

$$\vec{\pi} \parallel \vec{k}$$

Strahlungsdruck

Dispersionsrelation und Lichtgeschwindigkeit

Einsetzen der Lösung

$$\vec{E}_0 \; e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}$$

in die Wellengleichung $\Delta\vec{E} - \mu_0\epsilon_0\ddot{\vec{E}} = 0$

$$-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = 0$$

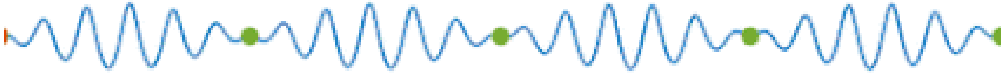
$$\rightarrow \boxed{\omega = c\,k}$$

Dispersionsrelation im Vakuum

$$v_{ph} = \frac{\omega}{k} = v_{Gruppe} = \frac{d\omega}{dk} = c$$

Phasen- und Gruppengeschwindigkeit für alle Frequenzen gleich, es gibt keine Dispersion!

- Beispiel für $v_{ph} \neq v_{Gruppe}$

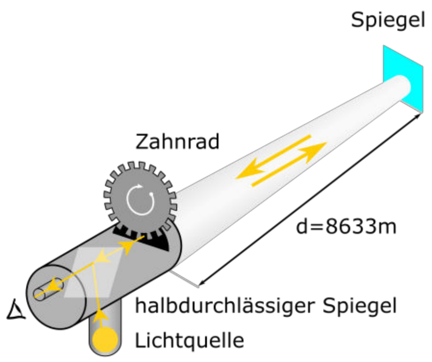


Messung der Lichtgeschwindigkeit

Experimentelle Methoden

Zahnradmethode von Fizeau (1849): Zahnrad blockiert transmittiertes und reflektiertes Licht

$$c = 315\,000 \text{ km/s}$$



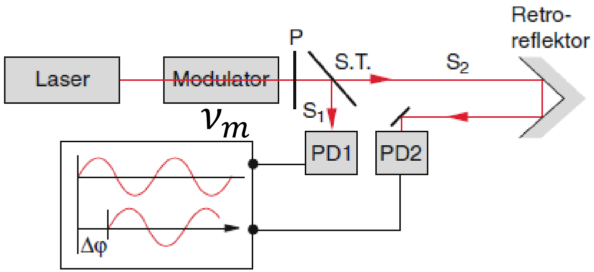
Hertz (1886)**:** Bestimmung aus Wellenlänge und Frequenz

$$c = \lambda\nu$$

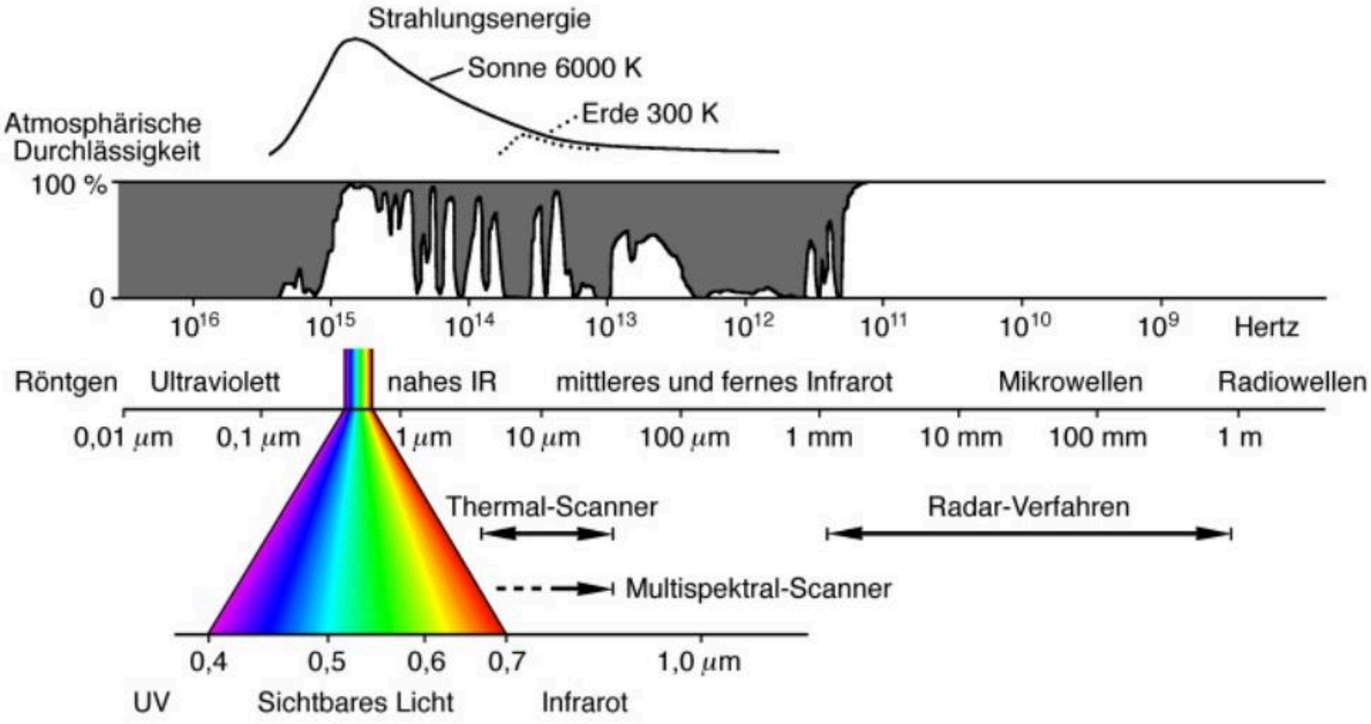
Phasenmethode

Amplitudenmodulation eines Laserstrahls

$$c = \frac{L}{\Delta t} = \frac{L}{\Delta\phi/2\pi\nu_m}$$ Messfehler ~ 0.1%



Das elektromagnetische Spektrum



http://www.demarine.de/lr/web/guest/em-spektrum

Polarisation

Karlsruhe Institute of Technology

- Die Polarisation ist definiert durch die Richtung des elektrischen Feldvektors $\vec{E}$

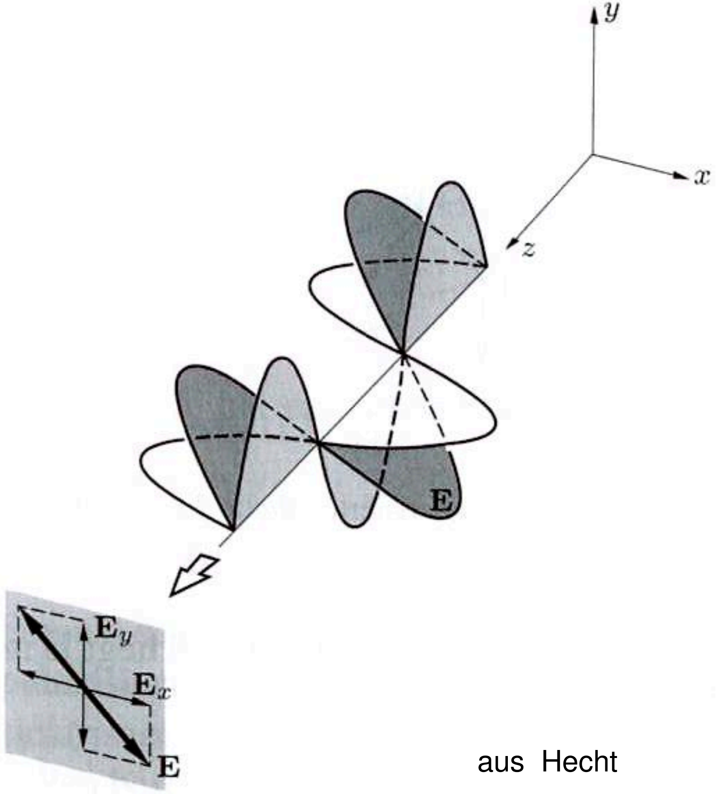
Linear polarisierte Welle

- Welle in z-Richtung: $\vec{E}_0 \; e^{i(\omega t - kz)}$
- Richtung von $\vec{E}_0$ zeigt stets in die gleiche Richtung

$$\vec{E}_0 = E_{0x}\hat{e}_x + E_{0y}\hat{e}_y$$

- x- und y-Komponente schwingen in Phase

$$\vec{E}_x = E_{0x}e^{i(\omega t - kz)}$$
$$\vec{E}_y = E_{0y}e^{i(\omega t - kz)}$$



aus Hecht

Polarisation

Zirkulare Polarisation

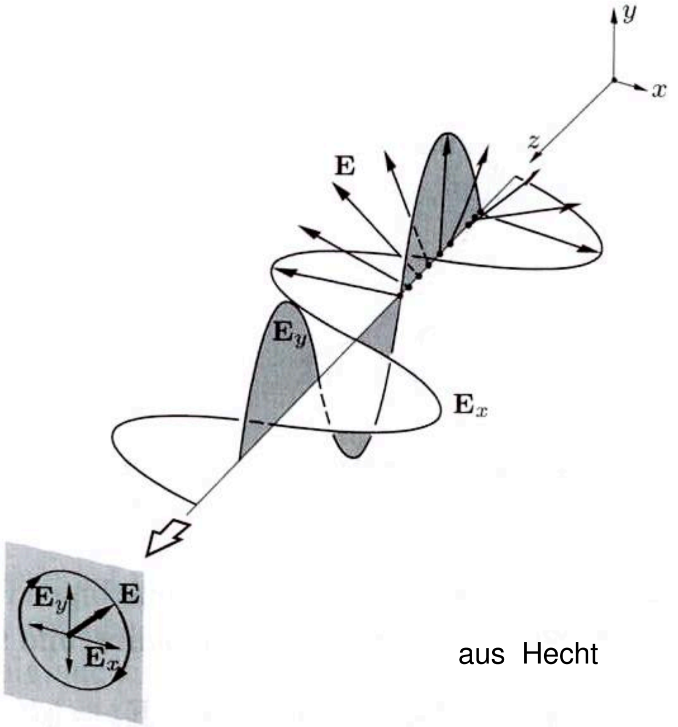
- es gilt $E_{0x} = E_{0y} = E_0$
- Phasendifferenz von $\frac{\pi}{2}$ zwischen Einzelschwingungen

$$E_x = E_0 e^{i(\omega t - kz)}$$
$$E_y = E_0 e^{i(\omega t - kz - \pi/2)}$$

$\rightarrow \vec{E}(z=0,t)$ rotiert in x, y – Ebene mit Frequenz ω
$\vec{E}(z,t)$ bewegt sich auf einer Kreisspirale um die z-Achse

Rechts zirkular $+\pi/2$ σ^- polarisiert
Links zirkular $-\pi/2$ σ^+ polarisiert

Drehimpuls: für $\sigma^+ \parallel \vec{k}$, für σ^- antiparallel zu $\vec{k}$



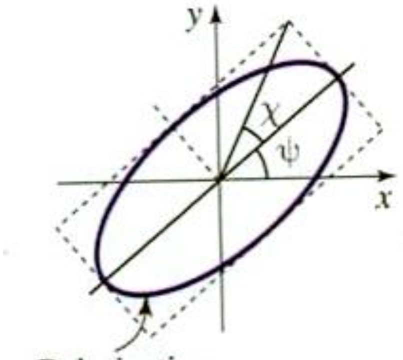
aus Hecht

Polarisation

Karlsruhe Institute of Technology

Elliptische Polarisation

- Allgemeine Superposition zweier orthogonal polarisierten Wellen führt zu elliptischer Polarisation
- Zustand beschrieben durch Neigungswinkel ψ und Grad der Elliptizität χ



Unpolarisiertes Licht

- Zufällig fluktuierende Polarisation („natürliches Licht, z.B. Sonnenlicht, Glühlampe)

Teilweise polarisiertes Licht

- Polarisationsgrad

$$LPD = \frac{I_{\parallel} - I_{\perp}}{I_{\parallel} + I_{\perp}}$$

Linearer Polarisationsgrad
mit $I_{\parallel}, I_{\perp}$ Intensität $\parallel, \perp$ zu Referenzachse

Jones Vektoren und Matrizen

Karlsruhe Institute of Technology

Vektor und Matrix Form für Polarisationsbeschreibung

- Propagation in z- Richtung

$$\vec{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_x \\ \mathcal{E}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_{0x}\, e^{i\varphi_x} \\ \mathcal{E}_{0y}\, e^{i\varphi_y} \end{pmatrix} \quad \text{with } |\vec{\mathcal{E}}| = \sqrt{\mathcal{E}_x^2 + \mathcal{E}_y^2}$$

Definiere **Jones Vektor**

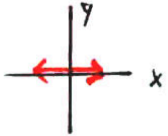
- nur relative Phasen relevant
  → wähle $\varphi_x = 0$

$$\vec{J} = \begin{pmatrix} J_x \\ J_y \end{pmatrix} = \frac{1}{|\mathcal{E}|} \begin{pmatrix} \mathcal{E}_{0x}\, e^{i\varphi_x} \\ \mathcal{E}_{0x}\, e^{i\varphi_y} \end{pmatrix}$$

Beispiele

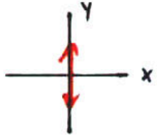
- horizontal polarisiertes Licht

$$\mathcal{E}_y = 0 \qquad \vec{J}_h = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



- vertikal polarisiertes Licht

$$\mathcal{E}_x = 0 \qquad \vec{J}_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

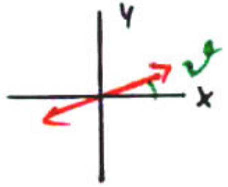


Jones Vektoren

- linear polarisiertes Licht

$$\varphi_y = \varphi_x = 0 \qquad \vec{J}_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos\vartheta \\ \sin\vartheta \end{pmatrix}$$

e.g. $\vartheta = 45°$ $\rightsquigarrow$ $\vec{J}_{45°} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$



- zirkular polarisiertes Licht

$$\mathcal{E}_{0x} = \mathcal{E}_{0y} = |\mathcal{E}|/\sqrt{2} \qquad \varphi_x - \varphi_y = \pm \pi/2$$

- rechts zirkular (σ^-)

$$\vec{J}_r = \frac{1}{|\mathcal{E}|} \begin{pmatrix} \mathcal{E}_{0x} \\ \mathcal{E}_{0y}\, e^{i\pi/2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

- links zirkular (σ^+)

$$\vec{J}_l = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

- elliptisch polarisiertes Licht

$$\vec{J} = \frac{1}{|\vec{\mathcal{E}}|} \begin{pmatrix} \mathcal{E}_{0x} \\ \mathcal{E}_{0y}\, e^{-i\varphi} \end{pmatrix}$$

Jones Matrizen

- Polarisationsänderne optische Elemente beschrieben durch **Jones Matrizen**

$$\vec{J}_2 = T\,\vec{J}_1$$

- Linearer Polarisator (entlang x)

$$T_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \curvearrowright \vec{J}_{trans} = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_{tx} \\ \mathcal{E}_{ty} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathcal{E}_x \\ \mathcal{E}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_x \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Linearer Polarisator (arbiträrer Winkel)

$$T_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos^2\vartheta & \sin\vartheta\cos\vartheta \\ \sin\vartheta\cos\vartheta & \sin^2\vartheta \end{pmatrix}$$

- Polarisations Rotator

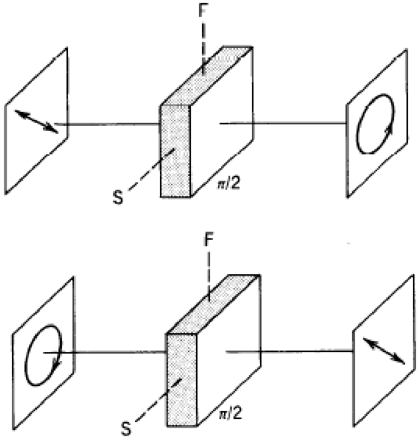
  transformiert Polarisation $\begin{pmatrix} \cos\theta_1 \\ \sin\theta_1 \end{pmatrix}$ in $\begin{pmatrix} \cos\theta_2 \\ \sin\theta_2 \end{pmatrix}$ mit $\theta_2 = \theta_1 + \vartheta$

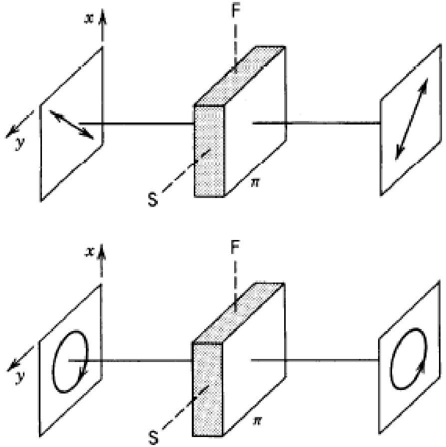
$$T_{rot} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

Jones Matrizen

- Wellenplatten

$$T_{retard} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\Gamma} \end{pmatrix}$$





Saleh/Teich

$\frac{\lambda}{4}$ – Plättchen $\Gamma = \frac{\pi}{2}$

$\frac{\lambda}{2}$ – Plättchen: $\Gamma = \pi$