III. Elektromagnetische Wellen im Medium

- Wellengleichung im Medium
- Lorentz Oszillator Modell
- Absorption und Dispersion

Wellengleichung im Medium

Annahmen für das Medium

- Isolator $j = 0$
- ungeladen $\rho = 0$
- unmagnetisch: $\mu_r = 1$

ϵ_r relative Dielektrizitätskonstante
besser: dielektrische Funktion
$$\epsilon_r = \epsilon_r(\omega, k)$$

- Maxwell Gleichungen:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathrm{E}} = -\dot{\vec{B}} \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathrm{D}} = 0 \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathrm{B}} = 0$$

- Mit dielektrischer Verschiebungsdichte

$$\vec{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\ddot{\vec{E}} = \mu_0 \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}$$

$$\Delta\vec{E} - \epsilon_r \epsilon_0 \mu_0 \ddot{\vec{E}} = 0$$

Wellengleichung im Medium

Wellengleichung im Medium

- Lösung: monochromatische, ebene Welle $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}$
- Einsetzen der Lösung in die Wellengleichung $\Delta\vec{E} - \epsilon_r\epsilon_0\mu_0\ddot{\vec{E}} = 0$: $k^2 - \epsilon_r\epsilon_0\mu_0\omega^2 = 0$

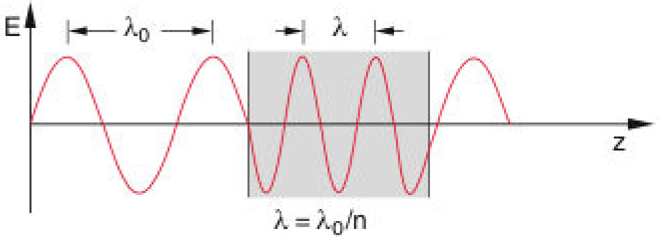
$\omega = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_r}} k = \frac{c_0}{n} k$ Dispersionsrelation im transparenten Medium

$n = \sqrt{\epsilon_r}$ Brechungsindex

$v_{ph} = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n}$ Phasengeschwindigkeit

$k_{med} = \frac{\omega\sqrt{\epsilon_r}}{c_0} = k_{vac}\, n$ Wellenzahl

$\lambda_{med} = \lambda_{vac}/n$ Wellenlänge



Anschauliches Modell:

- Elektrisches Feld der Lichtwelle regt Dipol-Schwingungen an
- Dipole strahlen e.m. Wellen ab
- Phasenversatz zwischen erregender und erzwungener Schwingung
- überlagerte Welle propagiert langsamer

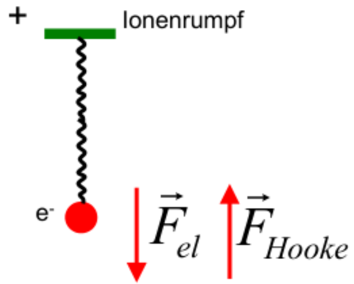
$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\ddot{\vec{E}} = \mu_0 \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}$$

Lorentz Oszillator Modell

Mikroskopisches, mechanisches Modell für Licht – Medium Wechselwirkung

Kräfte auf Elektron

- Elektrisches Feld $\vec{F}_{el} = q\vec{E} = -e\,\vec{E}$
- Rückstellkraft $\vec{F}_{Hooke} = -kx$



- erzeugt ein Dipolmoment $p = -ex$
- Polarisation $P = -exN$ *N* Dichte der Oszillatoren

- Bewegungsgleichung eines getriebenen, gedämpften, harmonischen Oszillator (z.B. Polarisation in x, Propagation in z, an Stelle z=0):

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = -eE_0 e^{i\omega t}$$

Lorentz Oszillator Modell

- Lösungsansatz

$$x(t) = x_0 e^{i\omega t}\text{, und } \omega_0^2 = \frac{D}{m},\ \gamma = \frac{b}{m}$$

- Einsetzen:

$$-m\omega^2 x_0 e^{i\omega t} + i\omega\gamma m x_0 e^{i\omega t} + m\omega_0^2 x_0 e^{i\omega t} = -eE_0 e^{i\omega t}$$

- Stationäre Oszillationsamplitude

$$x_0 = -\frac{e/m}{(\omega_0^2-\omega^2)+i\gamma\omega} E_0$$

- Polarisierbarkeit $\alpha(\omega) = \frac{p}{E_0} = -\frac{e x_0}{E_0} = \frac{e^2/m}{\omega_0^2-\omega^2+i\gamma\omega}$
- Dielektrische Polarisation $P = N\alpha(\omega)E = \frac{Ne^2/m}{\omega_0^2-\omega^2+i\gamma\omega} E$
- Dielektrische Verschiebungsdichte $\vec{D} = \epsilon_0\vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0\left(1 + \frac{Ne^2/m\epsilon_0}{\omega_0^2-\omega^2+i\gamma\omega}\right)\vec{E}$

Dielektrische Funktion

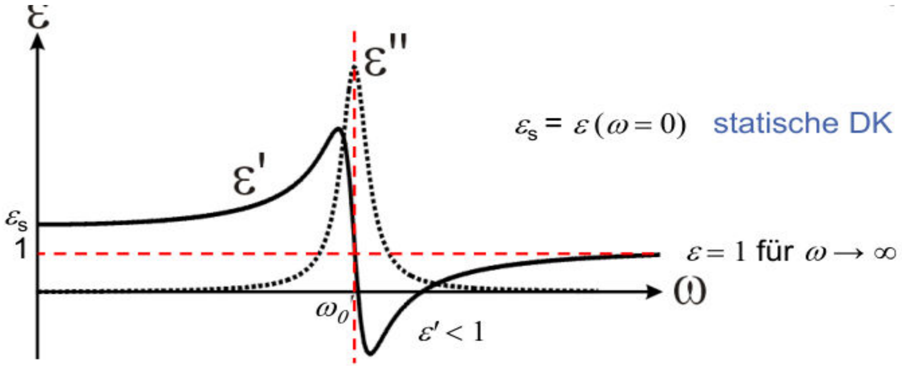
- Dielektrische Funktion

$$\epsilon_r(\omega) = 1 + \frac{Ne^2/m\epsilon_0}{\omega_0^2-\omega^2+i\gamma\omega}$$ erweitern mit komplex konjugiertem Nenner

$$= 1 + \frac{Ne^2}{m\epsilon_0}\left(\underbrace{\frac{\omega_0^2-\omega^2}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+\gamma^2\omega^2}}_{\substack{\text{reell}\\ \epsilon'}} - \underbrace{\frac{i\gamma\omega}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+\gamma^2\omega^2}}_{\substack{\text{imaginär}\\ \epsilon''}}\right)$$

Realteil: Dispersion

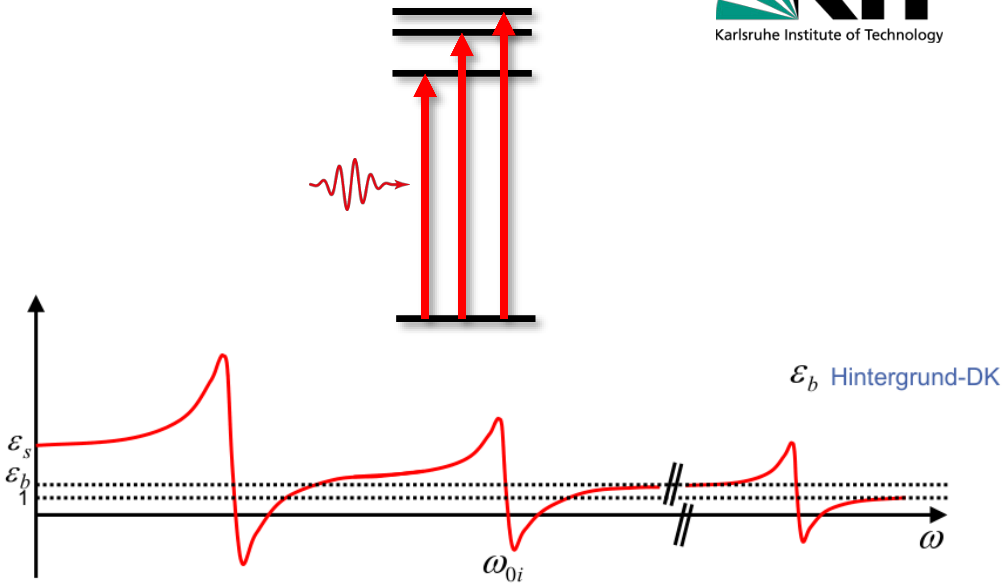
Imaginärteil: Absorption



Dielektrische Funktion

Resonanzen assoziiert mit elektronischen und vibronischen Übergängen

- transparent im sichtbaren Bereich
- elektronische Übergänge im UV
- vibronische Übergänge im IR



- Für $\omega \ll \omega_{0i}$ liefert Resonanz ω_{0i} einen konstanten Beitrag zu $\epsilon_r(\omega)$
- nahe einer isolierten Resonanz *j* gilt dann

$$\epsilon_r(\omega) = \epsilon_b \left(1 + \frac{Ne^2/m\epsilon_0\epsilon_b}{\omega_{0j}^2 - \omega^2 + i\gamma_j\omega}\right)$$

- quantenmechanische Behandlung ergibt zusätzliche Oszillatorenstärke f_k

$$\epsilon_r(\omega) = 1 + \frac{e^2}{m\epsilon_0}\sum \frac{N_k f_k}{\omega_{0k}^2 - \omega^2 + i\gamma_k\omega} \text{ mit } \sum_k f_k = 1$$

Komplexer Brechungsindex

$\tilde{n}(\omega) = \sqrt{\epsilon_r(\omega)}$ komplexer Brechungsindex

$\epsilon_r(\omega) = \epsilon'(\omega) + i\epsilon''(\omega)$

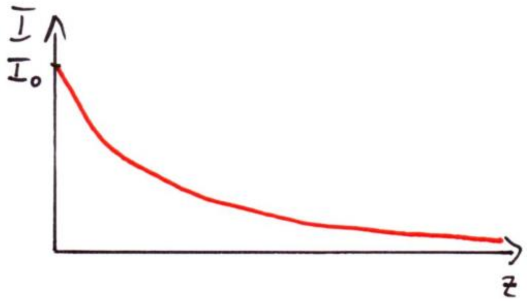
$\tilde{n}(\omega) = n(\omega) - i\kappa(\omega)$

- Was bedeutet ein komplexes $\tilde{n}$?

$$\vec{E}(z,t) = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - k_z z)}$$

mit $k_z = \tilde{n}(\omega) k_{vac} = n(\omega)\frac{\omega}{c_0} - i\kappa\frac{\omega}{c_0}$

$$\vec{E}(z,t) = \vec{E}_0 e^{i\left(\omega t - \frac{n(\omega)}{c_0}\omega z\right)} e^{-\kappa\frac{\omega}{c_0}z}$$



$I(z) \sim E^2 \quad \rightarrow \quad \boxed{I = I_0 e^{-\alpha z}}$ Lambert-Beer Gesetz

mit $\alpha = 2\kappa(\omega)\,\omega/c_0$ Absorptionskoeffizient

Absorption und Dispersion

Karlsruhe Institute of Technology

- Aus $\epsilon_r(\omega)$ folgt mit $\epsilon_r(\omega) = (n - i\kappa)^2$

$$\boxed{\epsilon_r'(\omega) = n^2 - \kappa^2}$$

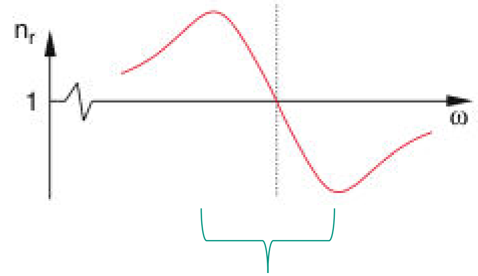
- für vernachlässigbare Absorption

$$n(\omega) = \sqrt{\epsilon_r(\omega)}$$

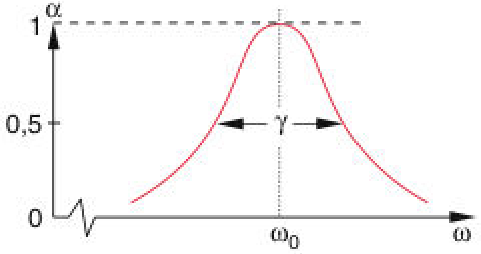
- normale Dispersion: n wächst mit ω
- anormale Dispersion: n nimmt mit ω ab
- Beachte: für $n < 1$ ist $c > c_0$

$$\boxed{\epsilon_r''(\omega) = 2n\kappa,\ \alpha(\omega) = 2k_0\kappa}$$

- Absorption $\alpha(\omega)$ zeigt Lorentz-förmige Resonanz



anormale Dispersion



Phasen und Gruppengeschwindigkeit

- Phasengeschwindigkeit aus $\phi = (\omega t - kz) = const \rightarrow$ $\frac{d}{dt}[\omega t - kz] = 0 \ \rightarrow \omega - k\frac{dz}{dt} = 0$

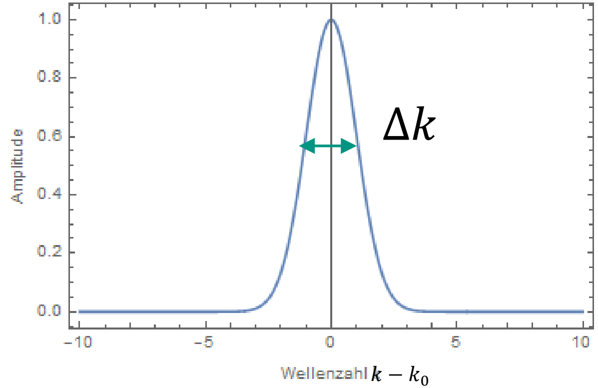
$$v_{ph} = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{k_0 n(\omega)}$$ Dispersionsrelation

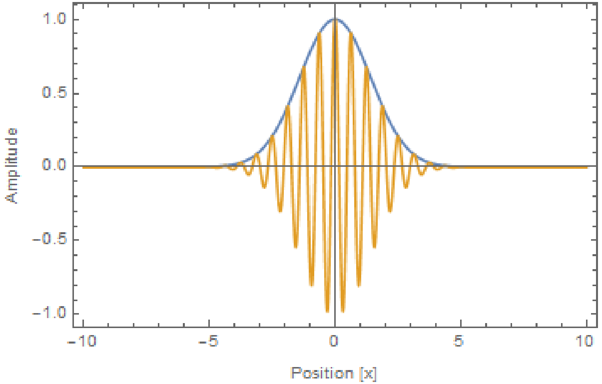
Wellenpaket: Überlagerung unendlich vieler Wellen

- führt zu Wellenpaket mit Trägerfrequenz ω_0 und Einhüllender mit Phase $\phi = (\Delta\omega t - \Delta k\ z)$
- Gruppengeschwindigkeit = Geschwindigkeit der Einhüllenden

$$v_{gr} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{dk/d\omega} = \frac{1}{d/d\omega(\frac{n\omega}{c})} = \frac{c}{n+\omega\ dn/d\omega}$$

- Bei anomaler Dispersion: $v_{gr} > c_0$oder $v_{gr} < 0$ möglich, aber Energiefluss- & Signalgeschwindigkeit immer $< c_0$





Herleitung Gruppengeschwindigkeit

Karlsruhe Institute of Technology

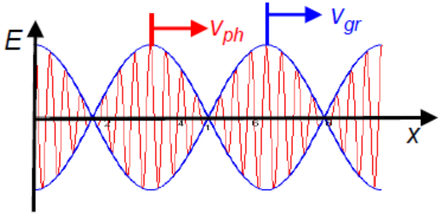
Zwei ebene Wellen mit ähnlicher Frequenz:

$$E_1(x,t) = A\cos(k_1 x - \omega_1 t)$$
$$E_2(x,t) = A\cos(k_2 x - \omega_2 t)$$

$$\frac{\omega_1}{k_1} = v_1 \qquad \frac{\omega_2}{k_2} = v_2$$

Die Superposition beider Wellen ist wieder eine Welle:

$$\begin{aligned} E(x,t) &= E_1(x,t) + E_2(x,t) \\ &= A\left(\cos(k_1 x - \omega_1 t) + \cos(k_2 x - \omega_2 t)\right) \\ &= 2A\cos\left(\frac{k_1+k_2}{2}x - \frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right)\cos\left(\frac{k_1-k_2}{2}x - \frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right) \\ &= 2A\cos(k\,x - \omega t)\cos(\Delta k\,x - \Delta\omega t) \end{aligned}$$



t = const.

$$\cos\underbrace{(k\,x - \omega t)}_{=\text{ const.}} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = v_{ph}$$

Phasengeschwindigkeit

$$\cos\underbrace{(\Delta k\,x - \Delta\omega t)}_{=\text{ const.}} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = v_{gr}$$

Gruppengeschwindigkeit

$$\frac{\Delta\omega}{\Delta k} \Rightarrow \frac{d\omega}{dk} = v_{gr}$$