IV. Licht an der Grenzfläche zweier Medien

- Reflexion
- Brechung
- Transmission
- Brewsterwinkel
- Totalreflexion

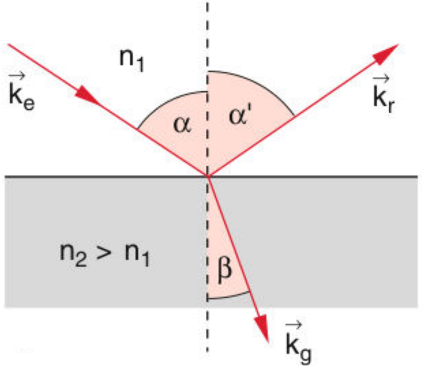
Reflexion und Brechung von Licht

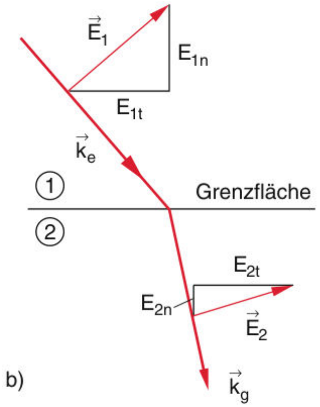
Einfall von Lichtwelle auf Grenzfläche zwischen Medien mit n_1, n_2

- einfallende Welle $\vec{E}_e = \vec{A}_e e^{i(\omega_e t - \vec{k}_e \vec{r})}$
- reflektierte Welle $\vec{E}_r = \vec{A}_r e^{i(\omega_e t - \vec{k}_r \vec{r})}$
- gebrochene Welle $\vec{E}_g = \vec{A}_g e^{i(\omega_g t - \vec{k}_g \vec{r})}$

- suche Beziehungen zwischen $\vec{A}_i, \omega_i, \vec{k}_i$
- Zerlege in Normal- und Tangentialkomponenten

$$\vec{E} = \vec{E}_t + \vec{E}_n \quad \vec{B} = \vec{B}_t + \vec{B}_n$$





Stetigkeitsbedingungen an Grenzflächen

Tangentialkomponenten von $\vec{E}, \vec{H}$ sind an einer Grenzfläche stetig

Tangentialkomponente von $\vec{E}$:

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\partial_t \vec{B}$$

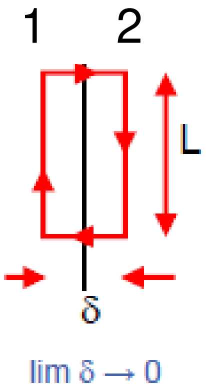
- mit Stokes'schen Satz: $\int \mathrm{rot}\,\vec{E}\, d\vec{A} = \oint \vec{E}\, d\vec{r} = -\partial_t \int \vec{B} d\vec{A}$
- mit $\lim \delta \to 0$: $\oint \vec{E}\, d\vec{r} = L(E_{1t} - E_{2t})$
- da $d\vec{A}_{\lim\,\delta\to 0} = 0$: $L(E_{1t} - E_{2t}) = 0$

$$\to\ E_{1t} = E_{2t}$$

Tangentialkomponente von $\vec{H}$:
analog

$$\mathrm{rot}\,\vec{H} = \partial_t \vec{D}$$

$$\to\ H_{1t} = H_{2t}$$



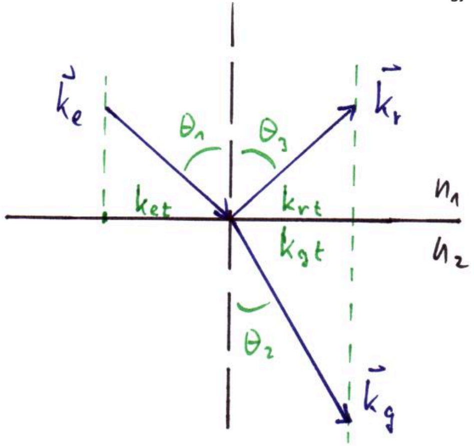
Stetigkeitsbedingungen

- Gesamtfeld in oberem und unterem Halbraum an GF gleich für Tangentialkomponente: $\vec{E}_{et} + \vec{E}_{rt} = \vec{E}_{gt}$ (*)

- damit folgt ($\vec{r} = 0$) $\vec{A}_{et} e^{i\omega_{et} t} + \vec{A}_{rt} e^{i\omega_{rt} t} = \vec{A}_{gt} e^{i\omega_{gt} t}$

- muss für alle Zeiten gelten $\rightarrow \omega_e = \omega_r = \omega_g$
- Für alle Orte auf der Grenzfläche

$$k_{et} = k_{rt} = k_{gt}$$

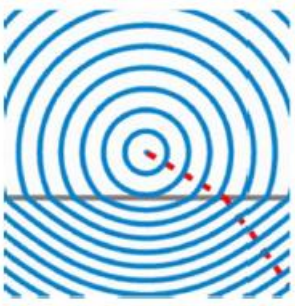


Aus den anderen Maxwellgleichungen ($\mathrm{div}\,\vec{D} = 0, \mathrm{div}\vec{B} = 0$) folgt

- **Normalkomponenten von $\vec{D}, \vec{B}$ sind stetig**

$$\vec{D}_{en} = \vec{D}_{gn} \quad \rightarrow \quad \frac{E_{en}}{E_{gn}} = \frac{\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1}} = \frac{n_2^2}{n_1^2}$$

$\vec{B}_{en} = \vec{B}_{gn}$ und mit $\mu_r = 1 \rightarrow B_{et} = B_{gt}$



Reflexions und Brechungsgesetz

- Für die Wellenzahl $\left|\vec{k}\right|$ wissen wir

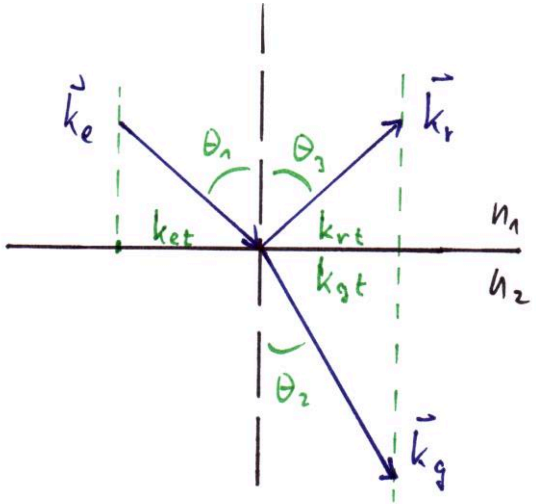
$$k_e = n_1 \frac{\omega}{c_0} = k_r$$
$$k_g = n_2 \frac{\omega}{c_0}$$

$$k_{et} = k_e \sin\theta_1 \,, k_{rt} = k_r \sin\theta_3 \,, k_{gt} = k_g \sin\theta_2$$

$$k_{en} = -k_{rn}$$

$\theta_1 = \theta_3$ Reflexionsgesetz

$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{n_2}{n_1}$ Brechungsgesetz



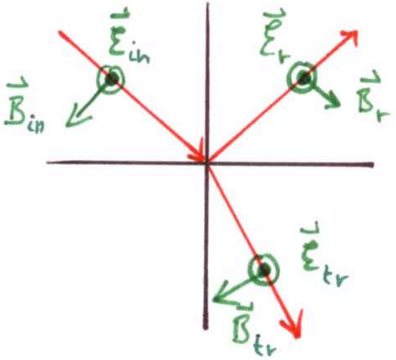
Amplitude und Polarisation

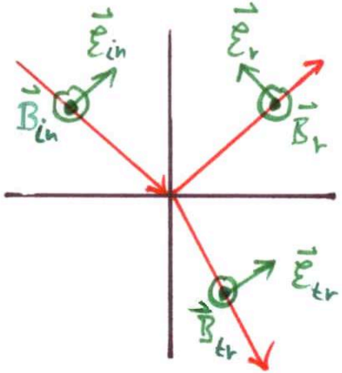
- Betrachte $\vec{A} = \vec{A}_{\parallel} + \vec{A}_{\perp}$

  $\parallel$ parallel (p)

  $\perp$senkrecht (s) zur Einfallsebene

- Spezialfälle s-Polarisation p-Polarisation



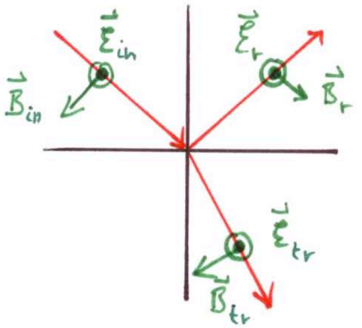


Amplitude und Polarisation

Karlsruhe Institute of Technology

Betrachte s-Polarisation

- nur tangentiale Komponente $\rightarrow \vec{E}_g = \vec{E}_e + \vec{E}_r, \quad k_{et} = k_{rt} = k_{gt}$
- Reflexionsgesetz $\quad k_{en} = -k_{rn}$
- Magnetfeld aus $\nabla \times E = -\partial_t B \qquad H_{i,t} = \frac{E_{i,t}}{\mu_0 \omega} k_{i,n}$



Stetigkeit von $H_t \rightarrow k_{gn} E_g = k_{en} E_e + k_{rn} E_r = k_{en}(E_e - E_r) \qquad$ (I)

$$E_g = E_e + E_r \qquad \text{(II)}$$

- Setze (II) in (I) ein, löse nach E_r auf
- $E_r = \frac{k_{en} - k_{gn}}{k_{en} + k_{gn}} E_e$ und analog $E_g = \frac{2k_{en}}{k_{en} + k_{gn}} E_e$

- Reflexionskoeffizient $r = \frac{E_r}{E_e} = \frac{n_1 \cos\theta_1 - n_2 \cos\theta_2}{n_1 \cos\theta_1 + n_2 \cos\theta_2}$

Fresnel Formeln

$$r_s = \frac{E_r}{E_e} = \frac{n_1 \cos\theta_1 - n_2 \cos\theta_2}{n_1 \cos\theta_1 + n_2 \cos\theta_2}$$

$$t_s = \frac{E_g}{E_e} = \frac{2n_1 \cos\theta_1}{n_1 \cos\theta_1 + n_2 \cos\theta_2} \qquad t_s = 1 + r_s$$

$$r_p = \frac{E_r}{E_e} = \frac{n_2 \cos\theta_1 - n_1 \cos\theta_2}{n_1 \cos\theta_2 + n_2 \cos\theta_1}$$

$$t_p = \frac{E_g}{E_e} = \frac{2n_1 \cos\theta_1}{n_1 \cos\theta_2 + n_2 \cos\theta_1} \qquad t_p = \frac{n_1}{n_2}\left(1 + r_p\right)$$

- geben Amplitude, Phase und Polarisation der reflektierten und transmittierten Welle
- Winkel θ_2 folgt aus Snellius

Leistungsreflektivität und -transmittivität

- Intensität in einem Medium

$$I = \epsilon_r \epsilon_0 c \, \langle E^2 \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_r \epsilon_0 c A^2 = \frac{1}{2} n \epsilon_0 c_0 A^2$$

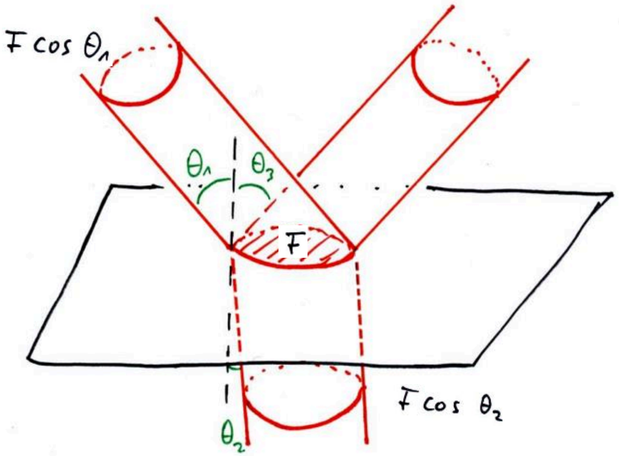
- Intensität = Leistung / Fläche

- Reflektivität

$$R = \frac{I_r \cos\theta_3}{I_e \cos\theta_1} = \frac{I_r}{I_e} = \frac{A_r^2}{A_e^2} = r^2$$

- Transmittivität

$$T = \frac{I_g \cos\theta_2}{I_e \cos\theta_1} = t^2 \frac{n_2 \cos\theta_2}{n_1 \cos\theta_1}$$

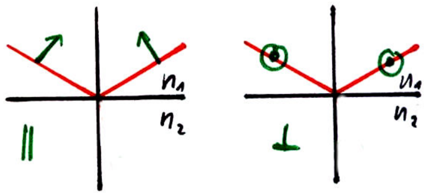


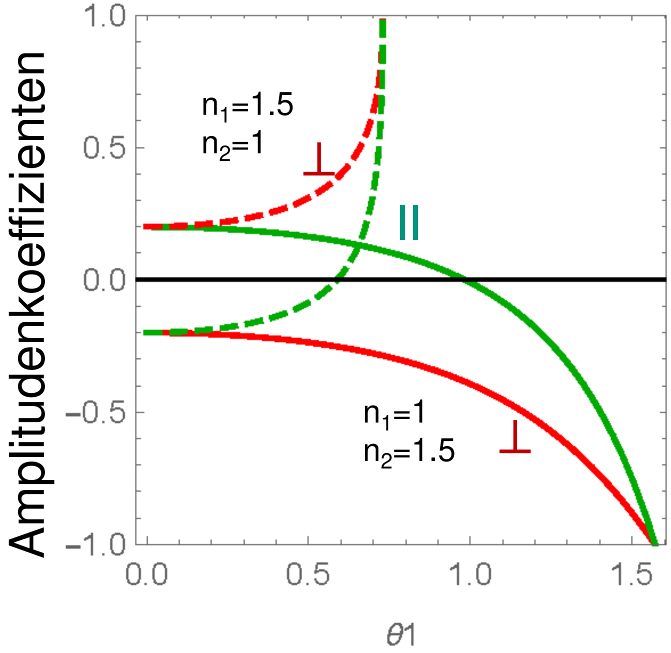
$$T + \mathrm{R} = 1, \qquad T_{s,p} + R_{s,p} = 1$$

$$R(\theta_1 = 0) = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2$$

$$T(\theta_1 = 0) = \frac{4 n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2}$$

Fresnel Koeffizienten

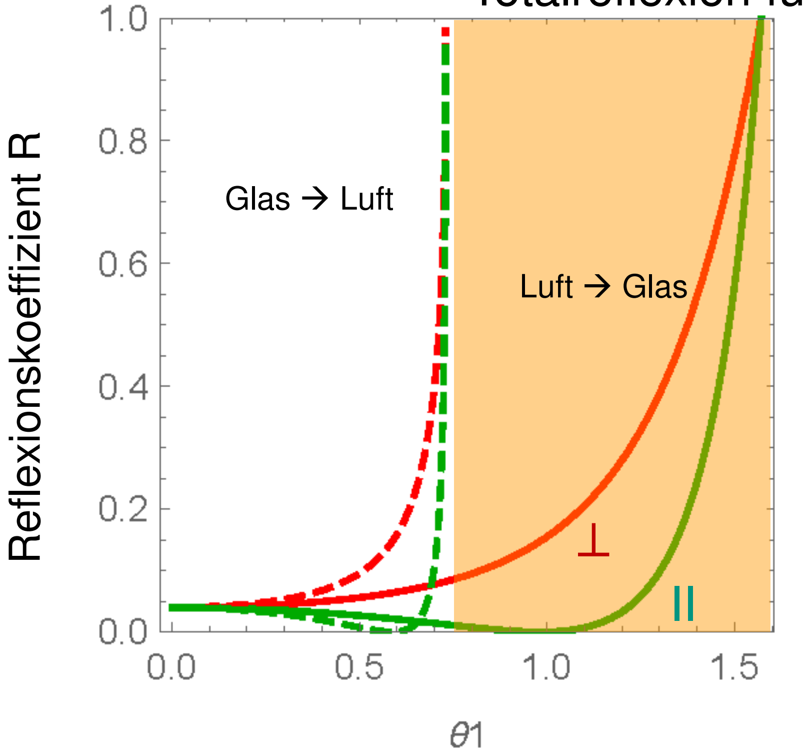




- $r_s < 0$: Phasensprung von 180° für s-Welle bei Reflexion an dichtem Medium
- hohe Reflektivität unter flachen Winkeln
- $r_{s,p} = 1$ Brechung an dünnerem Medium für $\theta_1 > \theta_c$ - totale interne Reflexion
- $r_p = 0$ für Brewster Winkel

Fresnel Koeffizienten

Totalreflexion für $n_1 > n_2$



Brewster Winkel

- aus Fresnel Formeln

$$r_p = \frac{\tan(\theta_1 - \theta_2)}{\tan(\theta_1 + \theta_2)} = 0 \text{ wenn } \theta_1 + \theta_2 = 90°$$

- Mit Snellius

$$n_1 \sin\theta_B = n_2 \sin(90° - \theta_B) = n_2 \cos\theta_B$$

$$\boxed{\tan\theta_B = \frac{n_2}{n_1}}$$

- Erklärung: Induzierte Dipole strahlen nicht entlang Dipolachse

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} + \partial_t \vec{D}$$
$$i\vec{k} \times \vec{H} = \vec{j} - i\omega\vec{D} \quad \rightarrow \vec{j} \perp \vec{k}$$