

V. Licht in anisotropen Medien

- Doppelbrechung
- Brechzahl-Ellipsoid
- Polarisatoren, Wellenplatten
- Optische Aktivität
- Induzierte Anisotropie
- Akusto-optischer Effekt
- Elektro-optischer Effekt
- Magneto-optischer Effekt

Doppelbrechung

Brechungsindex hängt von der Polarisierung und der Propagationsrichtung ab

Optisch anisotrope Materialien
z.B. kristalline Materialien mit niedriger Symmetrie

Bsp: Kalkspat / Calcit
(CaCO_3)

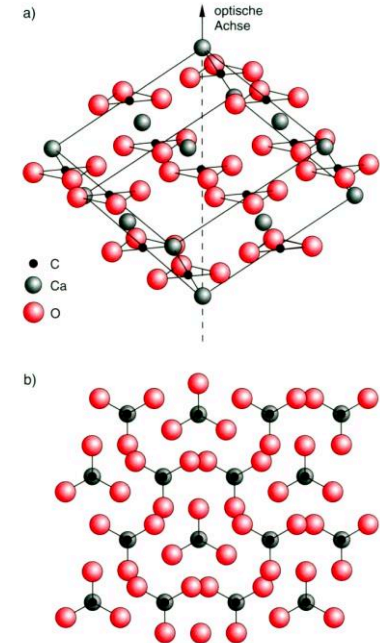


Abb. 8.24. (a) Kristallstruktur von Kalkspat CaCO_3 ; räumliche Anordnung der Atome. (b) Ebener Schnitt senkrecht zur optischen Achse durch einen CaCO_3 -Kristall

Dielektrizitätstensor

Optisch anisotropes Medium:

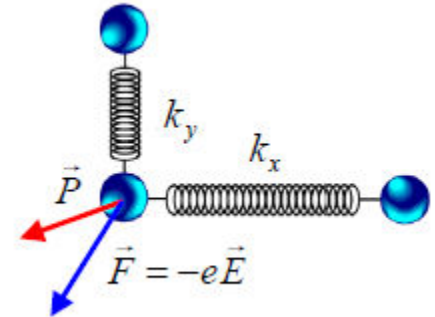
Rückstellkraft beim Lorentz-Oszillator hängt von der Schwingungsrichtung ab
 → Schwingungsrichtung der Oszillatoren i.A. nicht parallel zu Feldpolarisation

$$\vec{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 (1 + \chi) \vec{E}$$

Im Allgemeinen: Dielektrische Funktion ϵ_r und Suszeptibilität χ sind Tensoren

$$\tilde{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix}$$

→ im Allgemeinen: $\vec{D} \nparallel \vec{E}$ and $\vec{P} \nparallel \vec{E}$



Anmerkung: Lineare und nichtlineare Optik

- Lineare Optik: Rückstellkraft linear mit Auslenkung (gilt nur für kleine Auslenkungen)

$$\vec{P} = \epsilon_0 \tilde{\chi} \vec{E} = \epsilon_0 (\tilde{\epsilon} - \tilde{1}) \vec{E}$$

$$\text{bzw } P_i = \epsilon_0 \sum_j \chi_{ij} E_j$$

- Nichtlineare Optik: Nichtlineare Rückstellkraft, nicht-harmonische Schwingung bei großen Feldstärken (gepulste Laser)

$$P_i = \epsilon_0 \left(\sum_j \chi_{ij}^{(1)} E_j + \sum_j \sum_k \chi_{ijk}^{(2)} E_j E_k + \sum_j \sum_k \sum_l \chi_{ijkl}^{(3)} E_j E_k E_l + \dots \right)$$

- Beispiel: zweiter Term bewirkt optische Frequenzverdoppelung wegen

$$\cos^2(\omega t) = \frac{1}{2} (1 + \cos(2\omega t))$$

Feldvektoren in anisotropen Medien

- Aus den Maxwellgleichungen (keine Ladungen, Ströme)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0 \quad \rightarrow \vec{D} \cdot \vec{k} = 0 \quad \rightarrow \vec{D} \perp \vec{k}$$

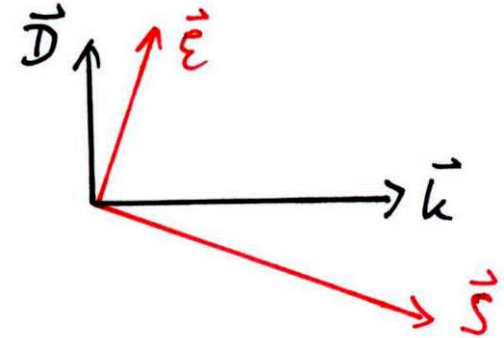
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \rightarrow \vec{B} \cdot \vec{k} = 0 \quad \rightarrow \vec{B} \perp \vec{k}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{\omega} (\vec{k} \times \vec{E}) \quad \rightarrow \vec{B} \perp \vec{E}$$

$$\vec{S} = 1/\mu_0 (\vec{E} \times \vec{B}) \quad \rightarrow \vec{S} \perp \vec{E}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \dot{\vec{D}} \quad \rightarrow \vec{B} \perp \vec{D}$$

$\rightarrow \vec{k}, \vec{E}, \vec{D}, \vec{S}$ liegen in einer Ebene
 Mit $\vec{E} \perp \vec{S}$ und $\vec{D} \perp \vec{k} \rightarrow$ i.A. $\vec{S} \nparallel \vec{k}$



\rightarrow Energiefluss \vec{S} und Propagationsrichtung \vec{k} i.A. nicht parallel

Brechungsindex Ellipsoid

- In nicht absorbierenden und nicht optisch aktiven Medien sind ϵ_{ik} reell und symmetrisch ($\epsilon_{ik} = \epsilon_{ki}$)
- Diagonalisierung durch Hauptachsentransformation

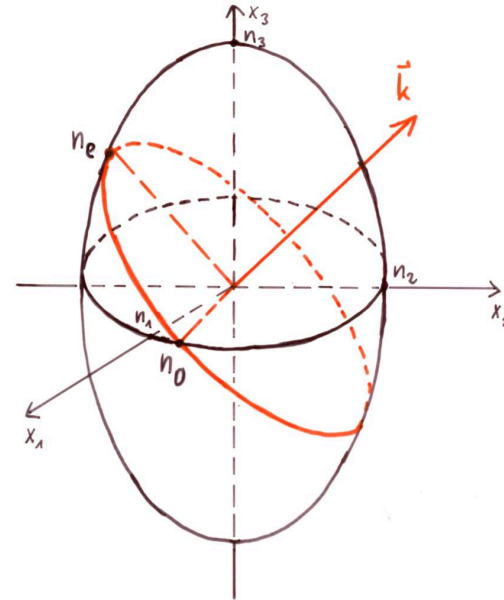
$$\tilde{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{pmatrix}$$

→ drei Brechzahlen $n_1 = \sqrt{\epsilon_1}$, $n_2 = \sqrt{\epsilon_2}$, $n_3 = \sqrt{\epsilon_3}$

- Vektor vom Ursprung $\vec{r} = n_1 \hat{x}_1 + n_2 \hat{x}_2 + n_3 \hat{x}_3$ beschreibt Ellipsoid

$$\frac{x_1^2}{n_1^2} + \frac{x_2^2}{n_2^2} + \frac{x_3^2}{n_3^2} = 1$$

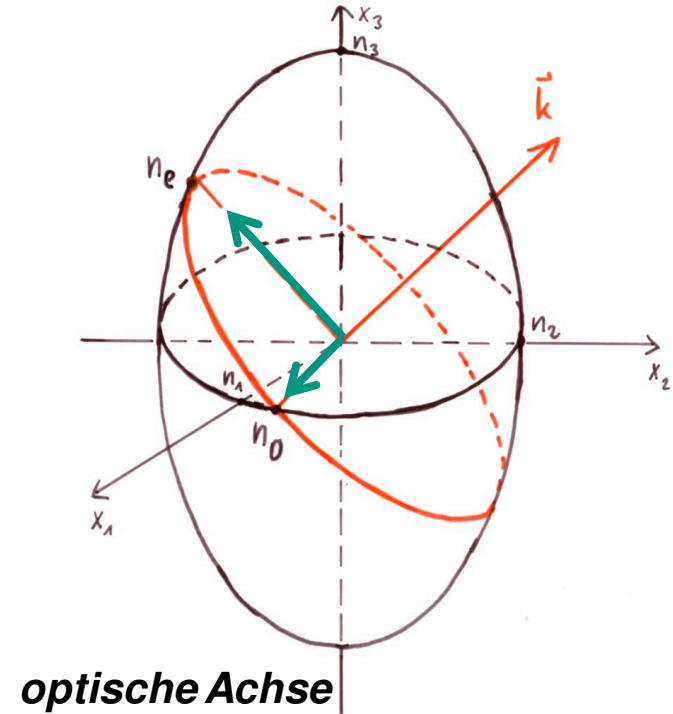
Brechungsindex Ellipsoid



Index Ellipsoid eines einachsigen Kristalls

- \vec{D} liegt in einer Ebene \perp zu \vec{k}
- Schnittlinie der Fläche mit dem Ellipsoid ist Ellipse
- kleine und große Hauptachse definiert Orientierung des \vec{D} Vektors
- Brechungsindizes entlang der Hauptachsen:

n_0	ordentlicher Strahl
n_e	außerordentlicher Strahl



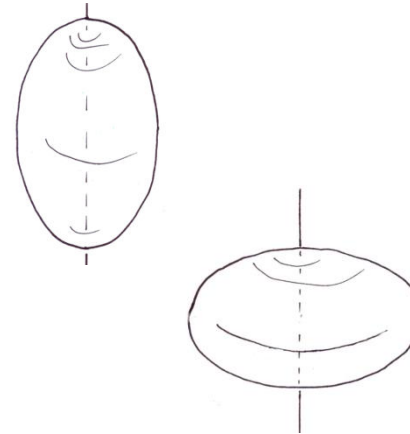
Index Ellipsoid eines einachsigen Kristalls

Allgemeiner Fall: $n_1 \neq n_2 \neq n_3$

- für genau zwei Richtungen ergeben die Schnittflächen Kreise
→ optische Achsen
- für Wellen mit $\vec{k} \parallel$ optische Achse: Brechungsindex und Phasengeschwindigkeit hängt nicht von Orientierung von \vec{D} ab, $\vec{D} \parallel \vec{E}$

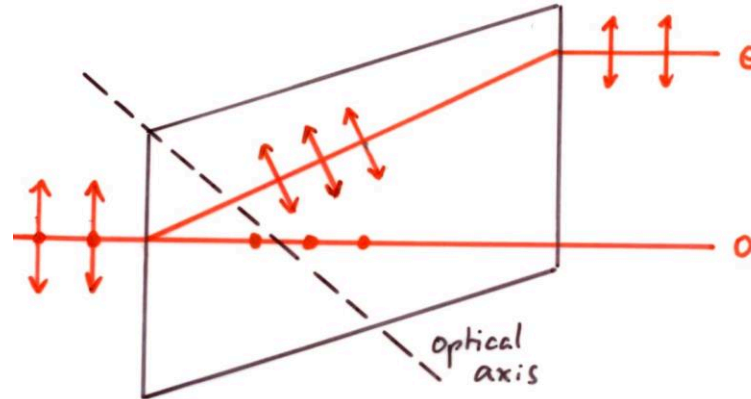
Optisch einachsiger Kristall: $n_1 = n_2 \neq n_3$

- Index-Ellipsoid rotationssymmetrisch um z
 - $n_1 = n_2 < n_3$ optisch positiv einachsiger
 - $n_1 = n_2 > n_3$ optisch negativ einachsiger



Doppelbrechung

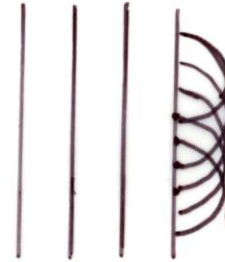
- unpolarisiertes Licht wird in doppelbrechendem Material in zwei Strahlen mit orthogonaler Polarisation aufgespalten
- ordentlicher Strahl – gehorcht Snelliischem Brechungsgesetz
- außerordentlicher Strahl - Strahlversatz



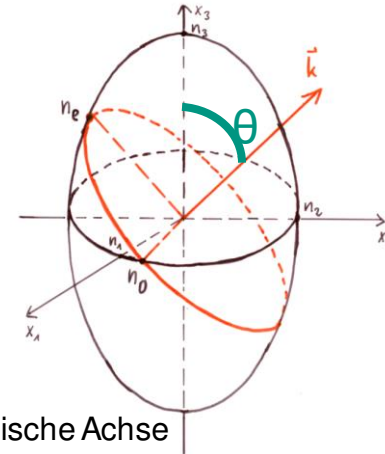
experiment:
Doppelbrechung

Doppelbrechung

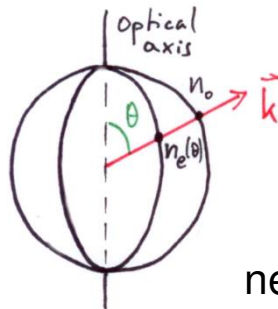
Erklärung mit Huygensschem Prinzip:
 Jeder Punkt ist Quelle einer Elementarwelle



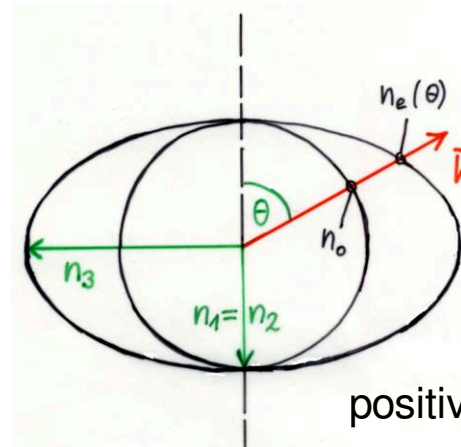
Betrachte $x_2 - x_3$ Ebene = Hauptebene
 $n_o(\theta)$ Kreis (Polarisation senkrecht zu Hauptebene)
 $n_e(\theta)$ Ellipse (Polarisation in Hauptebene)
 → Elementarwellen sind Ellipsen



optische Achse



negativ uniaxial

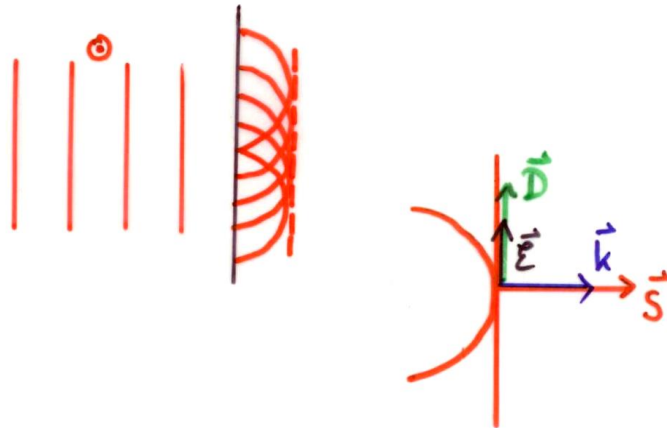


positiv uniaxial

Doppelbrechung

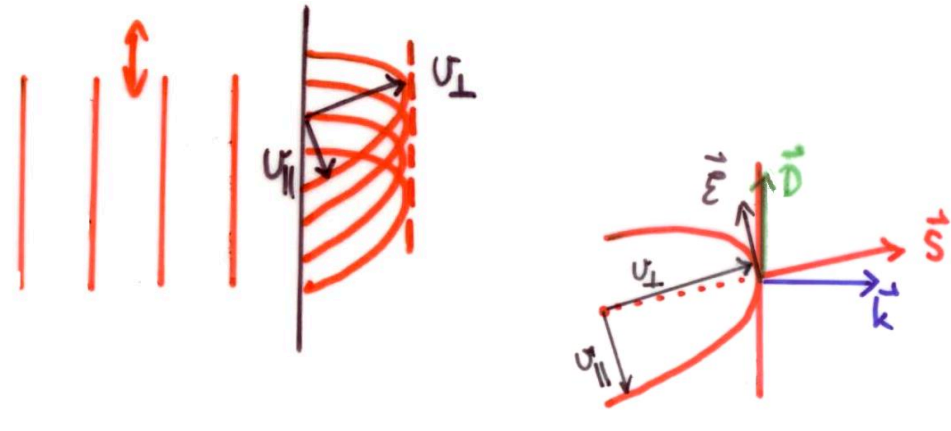
Ordentlicher Strahl

- Polarisation senkrecht zur optischen Achse
- Elementarwellen sind kreisförmig



Außerordentlicher Strahl

- Polarisation in Hauptebene
- Elliptische Elementarwellen da \mathbf{E} Vektor Komponenten parallel und senkrecht zur optischen Achse hat

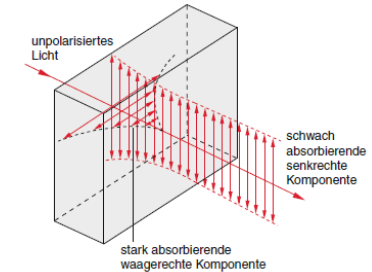
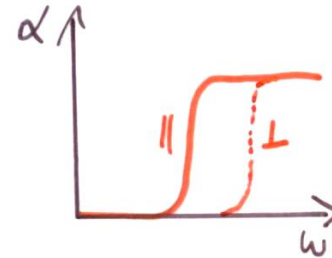
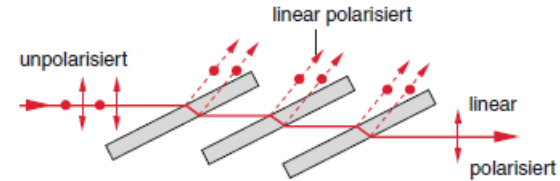


Erzeugung von polarisiertem Licht

Experiment:
Streuung,
Polarisatoren

Erzeugung von linear polarisiertem Licht

- Reflexion unter Brewster Winkel
- Elastische Streuung (Rayleigh Streuung)
- Dichroismus
 - Absorption hängt von Polarisation ab
 - Medium zeigt immer auch Doppelbrechung
 - Polaroid Filter: lange, ausgerichtete Molekülketten absorbieren mehr entlang der Achse



Polarisatoren – Gesetz von Malus

- Erster Polarisationsfilter erzeugt aus unpolarisiertem Licht linear polarisiertes Licht, \rightarrow elektrisches Feld E_0
- Zweiter Filter lässt nur Komponente

$$E(\vartheta) = E_0 \cos \vartheta$$

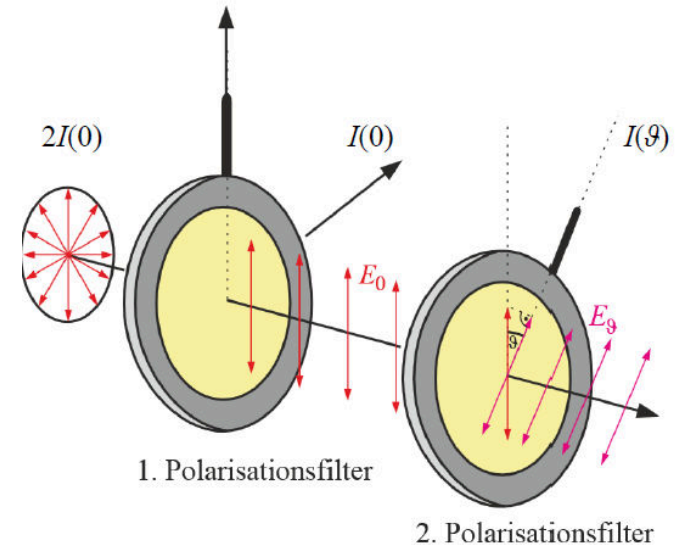
transmittieren

- Intensität:

$$I(\vartheta) = I_0 \cos^2 \vartheta$$

Gesetz von Malus

Experiment:
Polarisatoren



Doppelbrechende Polarisatoren

Glan-Thompson Polarisator

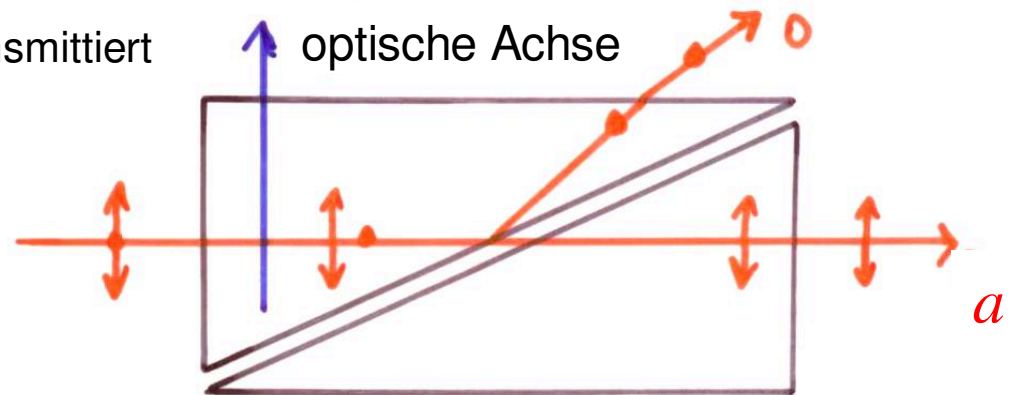
- Negativ optisch einachsiger Rhomboederkristall, $n_o > n_a$
- Kristall parallel zu optischer Achse geschnitten
- mit transparentem Kleber zusammengefügt

$$n_o > n_{Kleber} > n_a$$

ordentlicher Strahl erfährt Totalreflexion

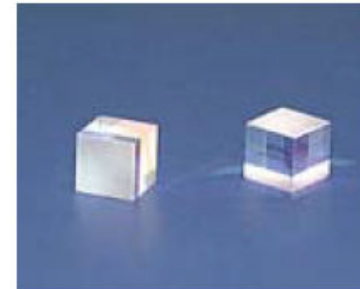
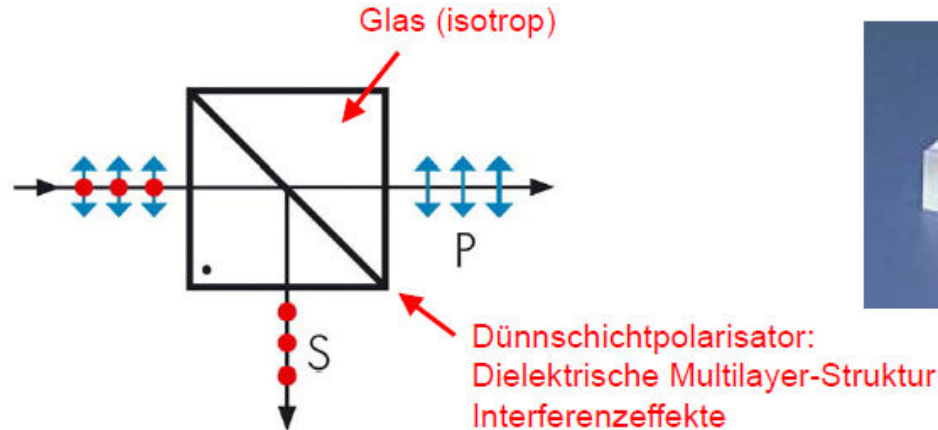
- außerordentlicher Strahl wird teilw. transmittiert
- hoher Polarisationskontrast

$$1 - LPD = 10^{-6}$$



Polarisierender Strahlteilerwürfel

- kein Strahlversatz
- beide Polarisierungen nutzbar
- moderater Kontrast (1:300)



Wellenplatten

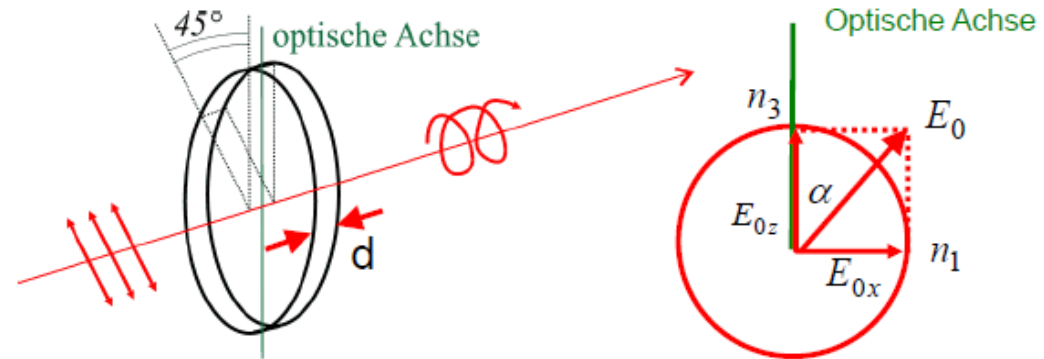
- Dünne planparallele Platten aus doppelbrechendem Material, optische Achse in der Ebene
- zwei orthogonal polarisierte Eigenmoden mit Phasengeschwindigkeit

$$v_{ph1} = \frac{c_0}{n_1}, v_{ph2} = \frac{c_0}{n_3}$$

- Phasenverschiebung zwischen E_{0x} und E_{0z}

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda_0} d (n_3 - n_1)$$

- transmittierte Welle i.A. elliptisch polarisiert



Wellenplatten

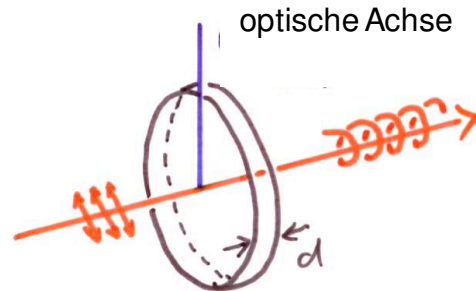
$\lambda/4$ - Plättchen

Dicke so gewählt dass

$$d (n_3 - n_1) = \frac{\lambda_0}{4}$$

$$\Delta\phi = \pi/2$$

zirkulare Polarisation für $\alpha = 45^\circ$



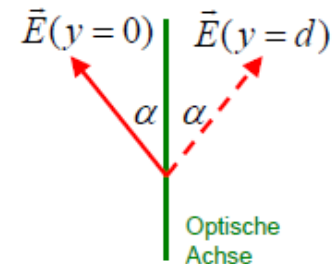
$\lambda/2$ - Plättchen

Dicke so gewählt dass

$$d (n_3 - n_1) = \frac{\lambda_0}{2}$$

$$\Delta\phi = \pi$$

Lineare Polarisation wird
um 2α gedreht



Optische Aktivität

- Eigenmoden sind zirkular polarisierte Wellen, rechts und links zirkulare Wellen sehen unterschiedliche Brechzahlen

$$n^+, n^-$$

- Linear polarisiertes Licht wird gedreht

- Beschreibe lineare Polarisation $\vec{E} = \hat{e}_x E_{0x} e^{i(\omega t - kz)}$

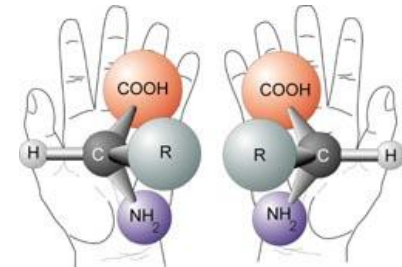
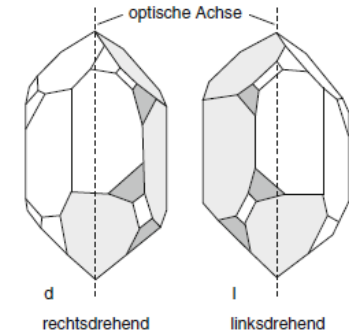
durch zwei entgegengesetzt zirkular polarisierte Wellen

$$\vec{E}^+ = \frac{1}{2} (\hat{e}_x E_{0x} + i \hat{e}_y E_{0y}) e^{i(\omega t - kz)}$$

$$\vec{E}^- = \frac{1}{2} (\hat{e}_x E_{0x} - i \hat{e}_y E_{0y}) e^{i(\omega t - kz)}$$

- propagieren mit unterschiedlicher Phasengeschwindigkeit
- Nach Strecke d : Drehung der Polarisationsebene um Winkel

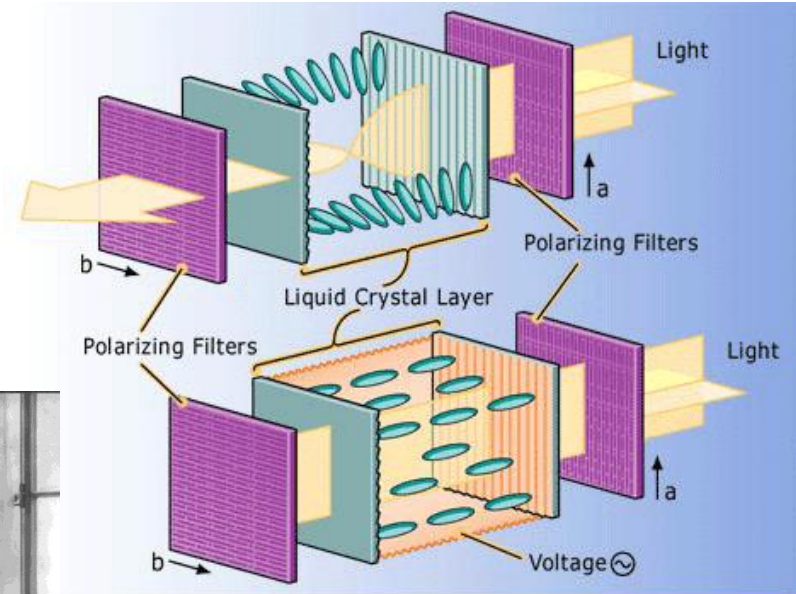
$$\alpha = \frac{\pi}{\lambda_0} d (n^- - n^+)$$



Bsp: α – Quarz,
Zucker, DNA, Proteine...

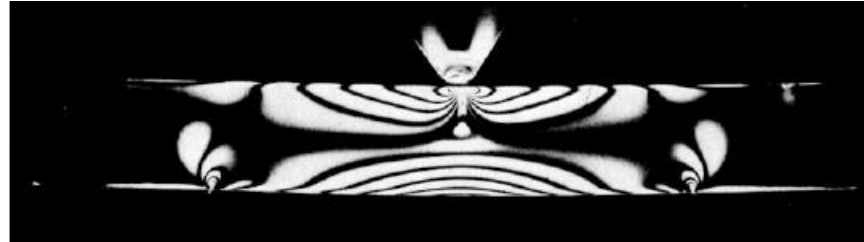
Flüssigkristallanzeigen

- LCD Display
basiert auf Schadt-Helfrich Zelle (1970)
„nematische Drehzelle“
- elektrische Spannung dreht
stäbchenförmige Moleküle
- Pionierarbeit zu Flüssigkristallen von
Otto Lehmann (1889) in Karlsruhe



Spannungsdoppelbrechung

- Verspannung führt zu Doppelbrechung → **photoelastischer Effekt**
- Beobachtung durch gekreuzte Polarisatoren
- Visualisierung der Spannungsverteilung in Bauteilen



Akusto-optischer Modulator (AOM)

- Bragg Beugung einer Lichtwelle von einem Brechungsindex Gitter, das durch eine Schallwelle in einem Medium erzeugt wird
- betrachte Schallwelle in x-Richtung

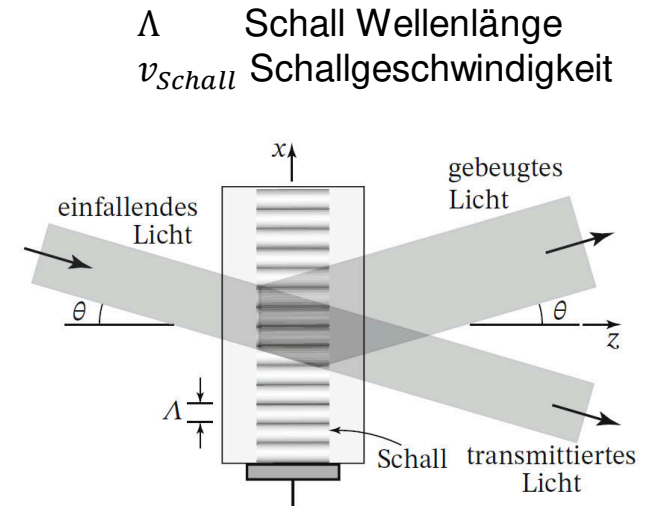
$$s(x, t) = s_0 \cos(\Omega t - qx) \quad \text{Deformation}$$

$$\Omega = 2\pi \frac{v_{\text{Schall}}}{\Lambda} \quad q = \frac{2\pi}{\Lambda} \text{ Wellenzahl}$$

- induziert periodisches Brechzahl Gitter

$$n(x, t) = n - \Delta n \cos(\Omega t - qx)$$

- mit Amplitude $\Delta n = -\frac{1}{2}pn^3s_0$ p photoelastischer Koettizient



Akusto-optischer Modulator

- einfallende Welle $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}$ wird gebeugt
- maximale Reflexion wenn Bragg Bedingung erfüllt wird:
konstruktive Interferenz zwischen reflektierten Partialwellen an Phasenfronten der Schallwelle

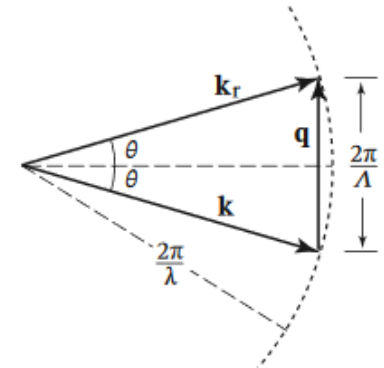
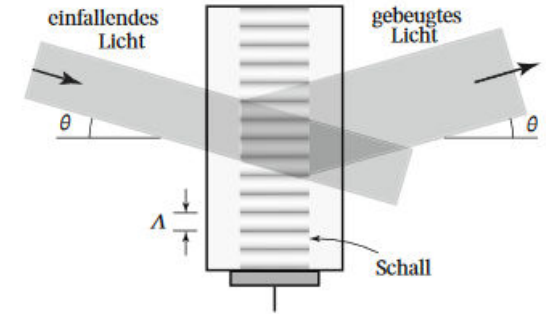
$$\sin \theta_B = \frac{\lambda}{2\Lambda}$$

- äquivalent zu

$$\vec{k}_r = \vec{k} + \vec{q}$$

- bewegte Schallwelle führt zu Frequenzverschiebung

$$\omega_r = \omega + \Omega$$

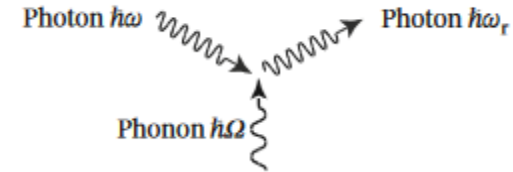


Akusto-optischer Modulator

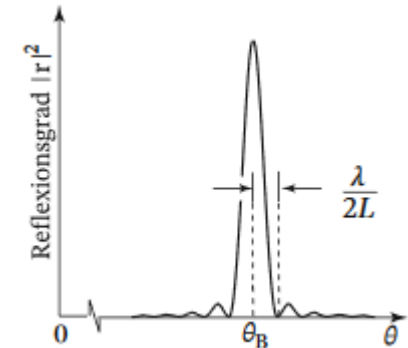
- Interpretation im Teilchenbild: **Photonen** werden gestreut durch Absorption oder Emission von **Phononen**; Energie und Impulserhaltung

$$\hbar \vec{k}_r = \hbar \vec{k} \pm m \hbar \vec{q}$$

$$\hbar \omega_r = \hbar \omega \pm m \hbar \Omega$$

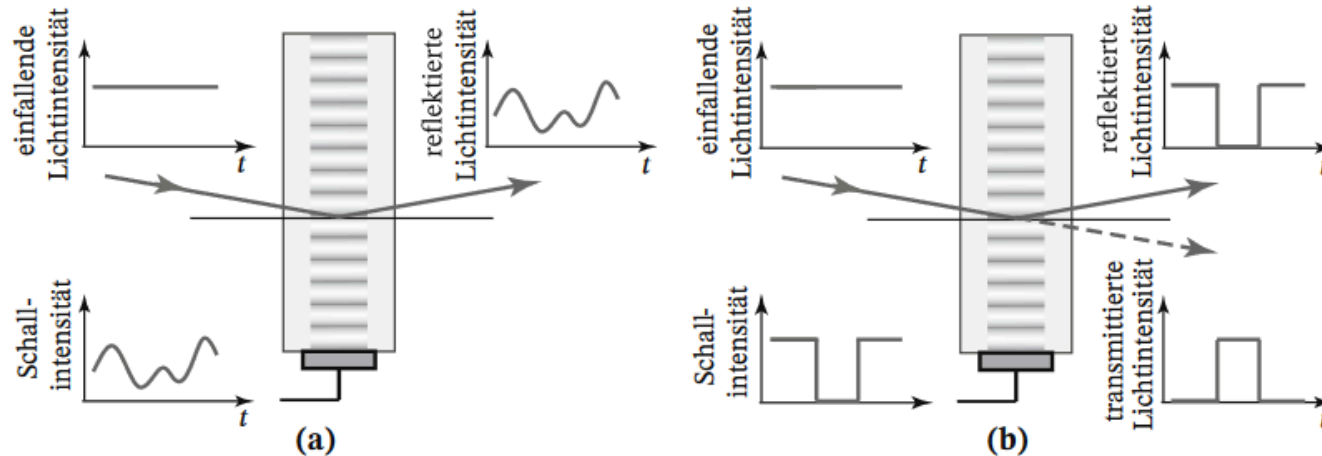


- mehrere gebeugte Strahlen möglich – Beugungsordnungen
- falls erste gebeugte Ordnung in Richtung der Reflexion erfolgt ist Beugungseffizienz bis zu 90% möglich



Akusto-optischer Modulator

- Anwendung: Modulator und optischer Schalter



Elektro-optischer Effekt

- In elektro-optischen Materialien findet man $n = n(E)$
- Entwickle in Taylor Reihe:

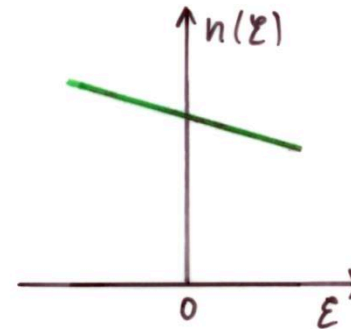
$$n(E) = n + a_1 E + \frac{1}{2} a_2 E^2 + \dots$$

mit $r = -2a_1/n^3$ Pockels Koeffizient

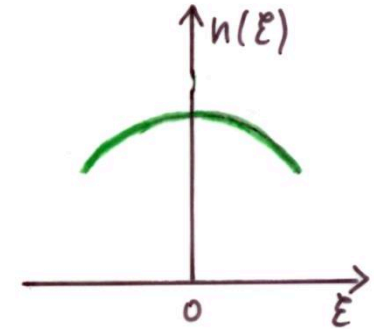
$s = -a_2/n^3$ Kerr Koeffizient

findet man

$$n(E) = n - \frac{1}{2} r n^3 E - \frac{1}{2} s n^3 E^2 + \dots$$



Pockels Medium



Kerr Medium

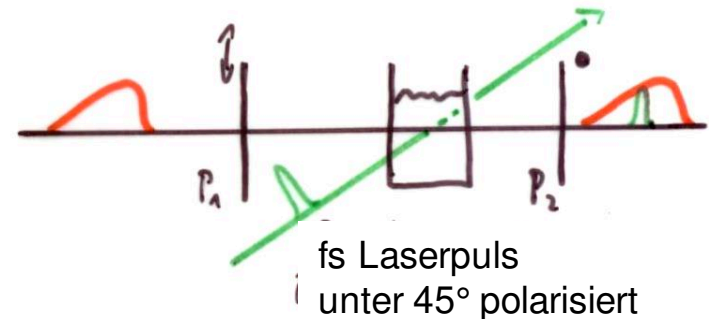
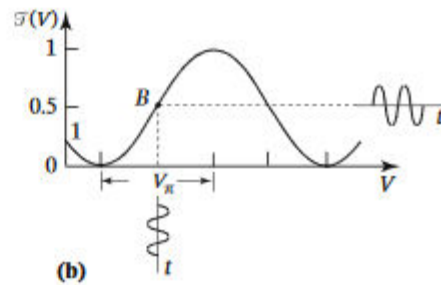
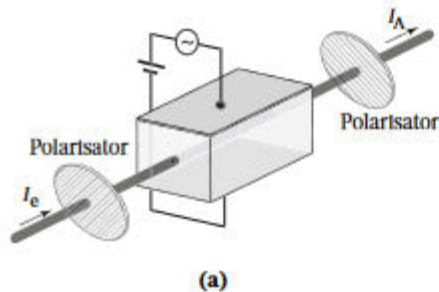
Kerr Effekt

- In zentrosymmetrischen Medien (Flüssigkeiten, Gase, bestimmte Kristalle)
- Elektro-optischer Effekt: invariant bezüglich Umkehrung von E
- der lineare Term muss also verschwinden

$$n(E) = n - \frac{1}{2}sn^3E^2$$

- Anwendung: Kerr Modulator oder Schalter

ultraschneller Schalter

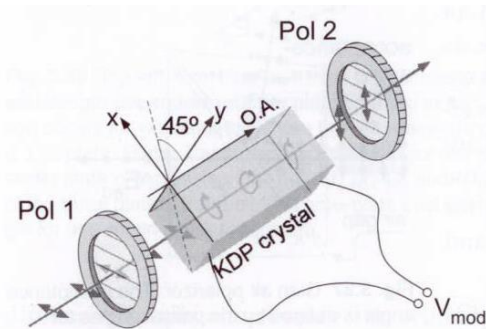


Pockels Effekt

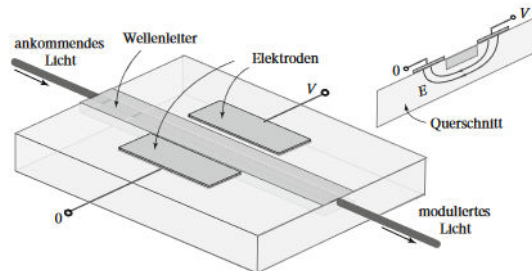
- In Materialien ohne Inversionssymmetrie (piezoelektrische Kristalle, oft doppelbrechend), z.B. LiNbO₃, KTP, BBO, KDP, ADP
- Linearer Effekt in E dominant, quadratischer Term vernachlässigbar:

$$n(E) = n - \frac{1}{2} r n^3 E$$

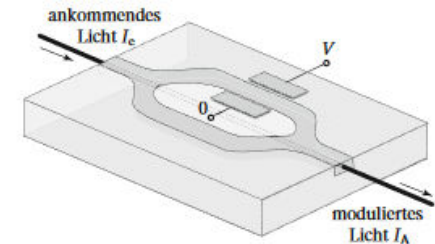
- Anwendung: Elektro-optischer Modulator (EOM)
Amplituden und Phasenmodulator, Schalter



Integriert-optischer Phasenmodulator



Integriert-optischer Amplitudenmodulator



Magneto-optischer Effekt

Faraday Effekt

- Magnetfeld in Propagationsrichtung führt zu Polarisationsrotation
- Im Gegensatz zu optischer Aktivität ist der **Faraday Effekt nicht reziprok**:
- Dreht sich nicht um wenn Propagationsrichtung umgekehrt wird → Rotationen addieren sich
- Drehwinkel β gegeben durch Probenlänge d und Verdet Konstante V

$$\beta = V B d$$

- Mikroskopischer Ursprung: Optisches elektrisches Feld setzt Elektronen in Bewegung, diese wird durch Magnetfeld beeinflusst

