

## VII. Beugung

- Beugung am Spalt
- Beugung an einer Kreisblende
- Beugung am Vielfachspalt, Gitter
- Fresnel und Fraunhofer Beugung
- Fresnel'sche Zonen

# Beugung

Beugung: Ausbreitung von Licht im abgeschatteten Raum

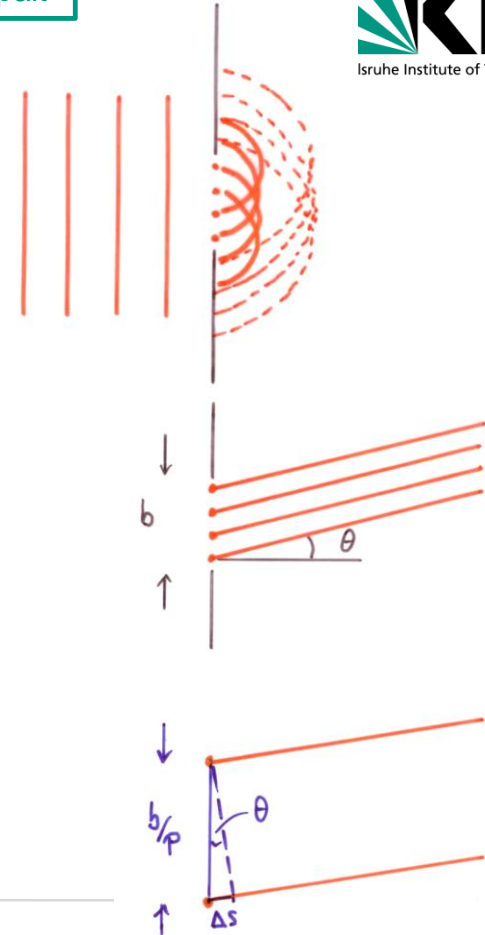
## Beugung am Einfachspalt

Ebene, monochromatische Welle fällt auf Spalt mit Breite  $b$

Huygens Prinzip: Jeder Punkt ist Quelle einer Elementarwelle

- Vereinfachung: Betrachte  $p$  Oszillatoren
- alle Partialwellen haben die selbe Amplitude
- benachbarte Wellen haben Gangunterschied  $\Delta s = \frac{b}{p} \sin \theta$
- Phasenunterschied

$$\Delta\phi = \frac{2\pi\Delta s}{\lambda} = 2\pi \frac{b \sin \theta}{p \lambda}$$

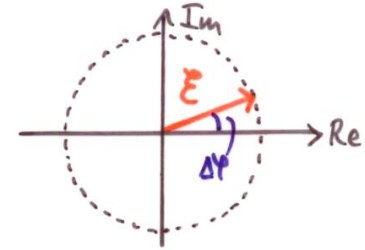


# Beugung am Spalt

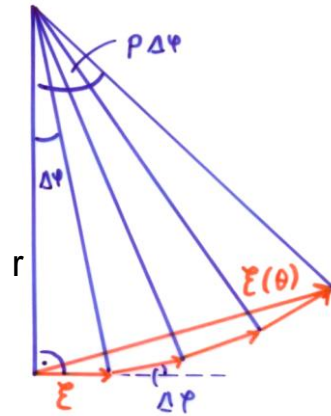
## ■ Gesamtamplitude

$$E(\theta) = E_i e^{i\omega t} (e^0 + e^{i\Delta\phi} + e^{i2\Delta\phi} + \dots + e^{i(p-1)\Delta\phi})$$

Geometrische Serie, Auswertung durch Vektoraddition in komplexer Ebene



$$\Delta\phi \approx \frac{E_i}{r}$$



$$E(\theta) = 2r \sin\left(\frac{p\Delta\phi}{2}\right) = 2 \frac{E_i}{\Delta\phi} \sin\left(\frac{p\Delta\phi}{2}\right)$$

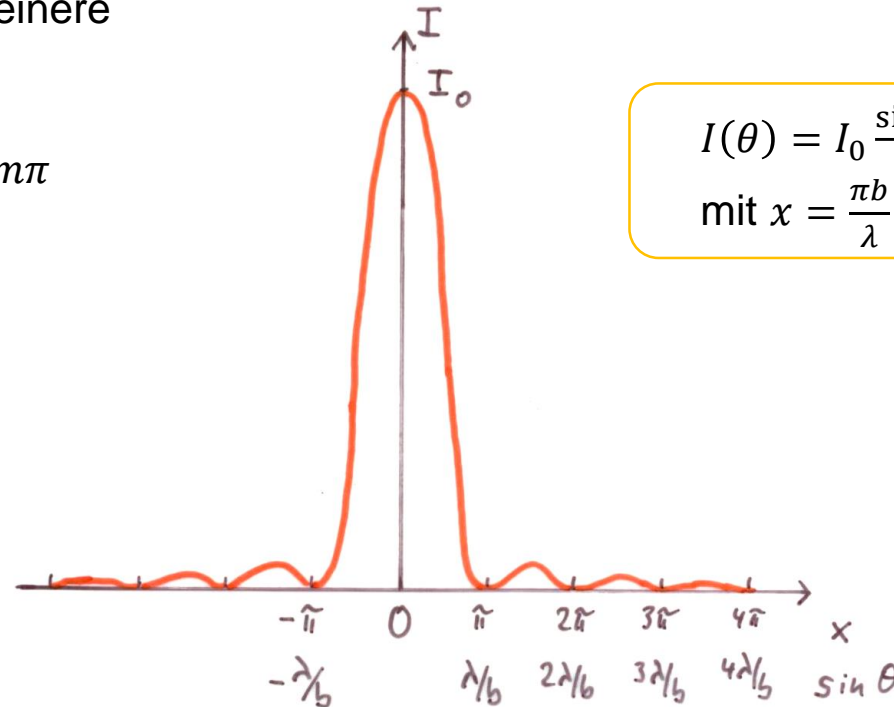
definiere  $E_0 = pE_i$ , und mit  $\Delta\phi = 2\pi \frac{b \sin \theta}{p \lambda}$

$$E(\theta) = \frac{E_0 \sin\left(\frac{\pi b \sin \theta}{\lambda}\right)}{\frac{\pi b}{\lambda} \sin \theta}$$

$$I(\theta) = I_0 \frac{\sin^2 x}{x^2} \quad \text{mit } x = \frac{\pi b}{\lambda} \sin \theta$$

# Beugung am Spalt

- Maximum für  $\theta = 0$  plus kleinere Nebenmaxima
- Minima  $I(\theta) = 0$  für  $x = \pm m\pi$   
bzw  $\sin \theta_m = \pm m \lambda/b$
- Seitenmaxima für  
 $\sin \theta_m = \pm(2m + 1)\lambda/2b$



$$I(\theta) = I_0 \frac{\sin^2 x}{x^2}$$

mit  $x = \frac{\pi b}{\lambda} \sin \theta$

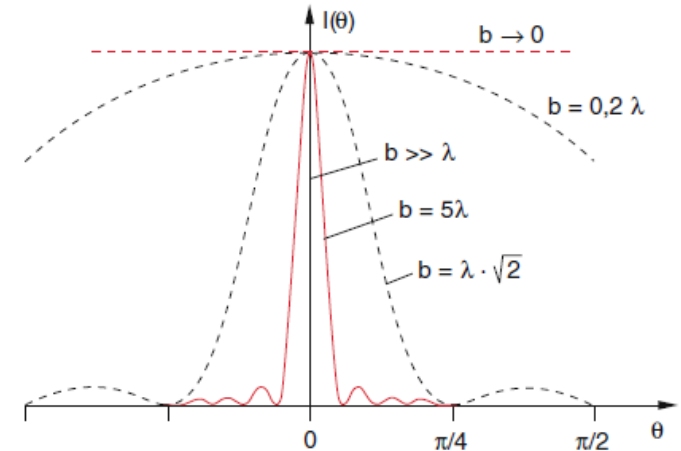
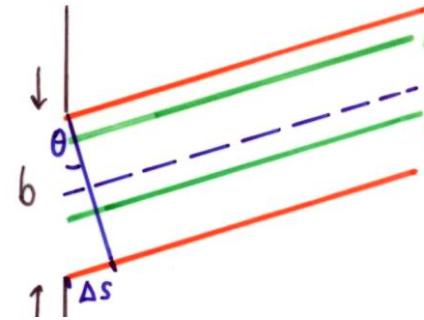
# Beugung am Spalt

## Anschauliche Erklärung

- 1. Minimum für  $\sin \theta_m = \lambda/b \rightarrow \Delta s = \lambda$
- Aufteilung in zwei Teilbündel
- zu jedem Strahl  $i$  gibt es einen Strahl  $j$  mit  $\Delta s = \lambda/2$   
 $\rightarrow$  destruktive Interferenz beider Teilbündel
  
- für  $\Delta s = 3\lambda/2$ : Drei Teilbündel; zwei interferieren destruktiv, eins bleibt übrig  
 $\rightarrow$  1. Nebenmaximum

## Zentrales Maximum

- Für  $b \gg \lambda$  wird Fußbreite  $\Delta\theta = \frac{2\lambda}{b}$  klein  $\rightarrow$  Licht geht hauptsächlich geradeaus
- Für  $b < \lambda$  bleiben keine Minima, zentrales Maximum umspannt ganzen Halbraum



# Beugung an Kreisblende

Experiment: Beugung  
an einer Kreisblende

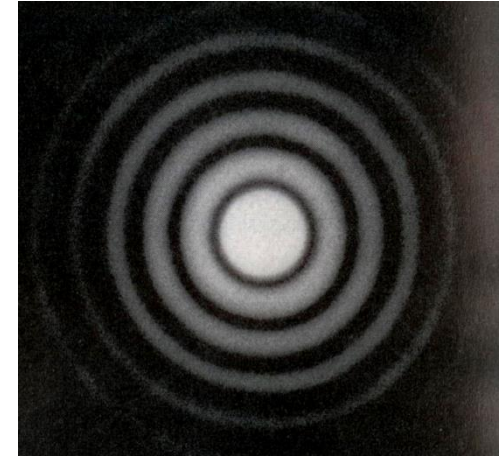
- Beugungsmuster einer Kreisblende mit Durchmesser  $D$

$$I(\theta) = I_0 \left( \frac{2J_1(x)}{x} \right)^2$$

mit  $x = \frac{\pi D}{\lambda} \sin \theta$

$J_1(x)$  Besselfunktion 1. Ordnung

- Ringförmige Beugungsstruktur
- 1. Nullstelle bei  $\sin \theta_1 = 0,61\lambda/D$
- Reflexion an einer spiegelnden Kreisfläche führt zum gleichen Beugungsmuster
- Später: Skizze zur Herleitung



# Beugung am Vielfachspalt

Experiment: Beugung  
am Doppelspalt, Gitter

- Betrachte  $N$  parallele Spalte, beleuchtet mit ebener Welle
- Spaltbreite  $b$ , Spaltabstand  $d$

Intensitätsverteilung: Produkt aus

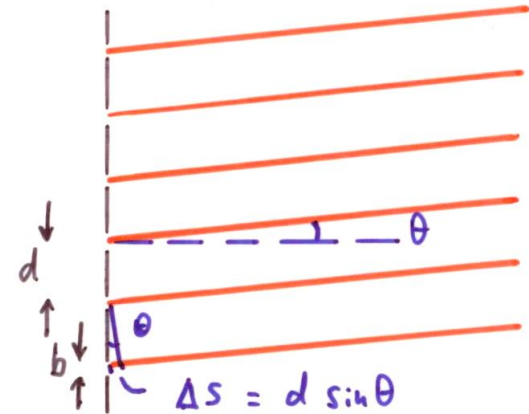
- (1) Interferenz der verschiedenen Spalte
- (2) Beugungsbild eines einzelnen Spaltes

(1) Interferenz von  $N$  Punktquellen

$$E(\theta) = E_i e^{i\omega t} \sum_{j=1}^N e^{i(j-1)\Delta\phi}$$

Geometrische Reihe

$$\sum_{j=1}^N e^{i(j-1)\Delta\phi} = \frac{e^{iN\Delta\phi} - 1}{e^{i\Delta\phi} - 1} = e^{i\frac{(N-1)}{2}\Delta\phi} \frac{e^{i\frac{N}{2}\Delta\phi} - e^{-i\frac{N}{2}\Delta\phi}}{e^{i\Delta\phi/2} - e^{-i\Delta\phi/2}} = e^{i\frac{(N-1)}{2}\Delta\phi} \frac{\sin\left[\left(\frac{N}{2}\right)\Delta\phi\right]}{\sin(\Delta\phi/2)}$$

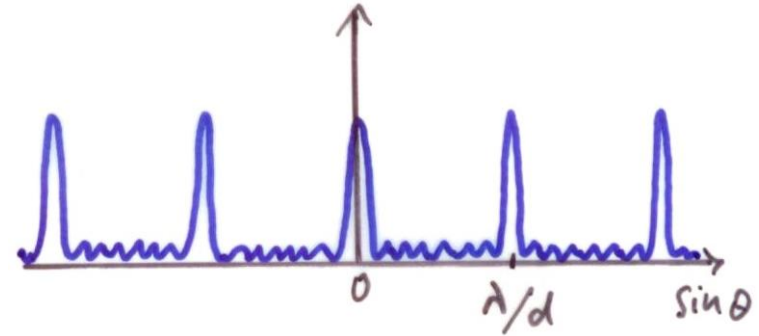


# Beugung am Vielfachspalt

- Interferenz von  $N$  Punktquellen
- mit  $\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta s = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta$

$$I(\theta) = I_0 \frac{\sin^2 \left[ N \frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta \right]}{\sin^2 \left( \frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta \right)}$$

- $I(\theta) = I_0$  falls Nenner = 0  $\rightarrow \sin \theta = \frac{m\lambda}{d}$
- Hauptmaxima plus  $N - 2$  Nebenmaxima
- Doppelspalt  $N = 2$ :  $I(\theta) \sim \cos^2 \left( \frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta \right)$



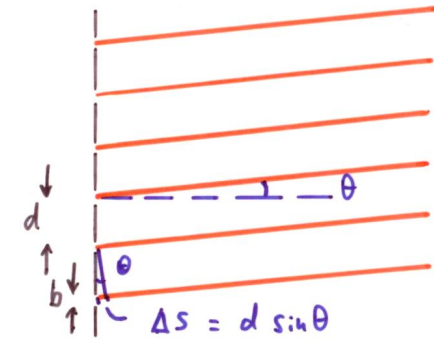
Konstruktive Interferenz für  
 $\Delta s = d \sin \theta = m\lambda$   
 zwischen benachbarten Spalten

# Beugung am Vielfachspalt / Gitter

Intensitätsverteilung: Produkt aus

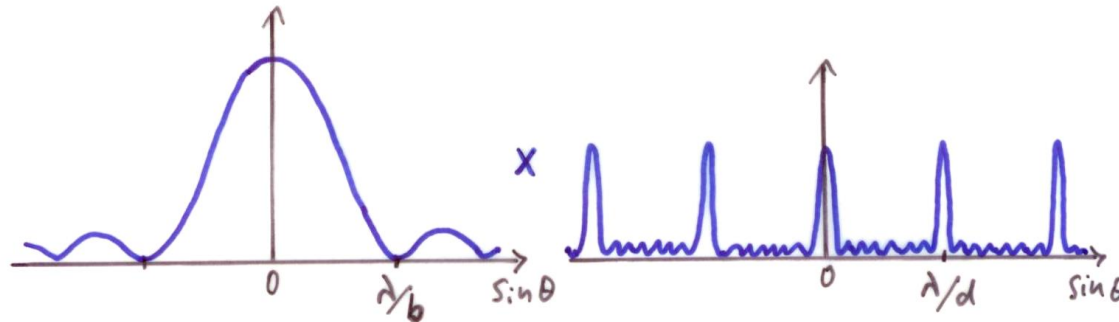
- (1) Interferenz der verschiedenen Spalte
- (2) Beugungsbild eines einzelnen Spaltes

$$I(\theta) = I_0 \frac{\sin^2 \left[ \frac{\pi b}{\lambda} \sin \theta \right]}{\left( \frac{\pi b}{\lambda} \sin \theta \right)^2} \cdot \frac{\sin^2 \left[ N \frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta \right]}{\sin^2 \left( \frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta \right)}$$



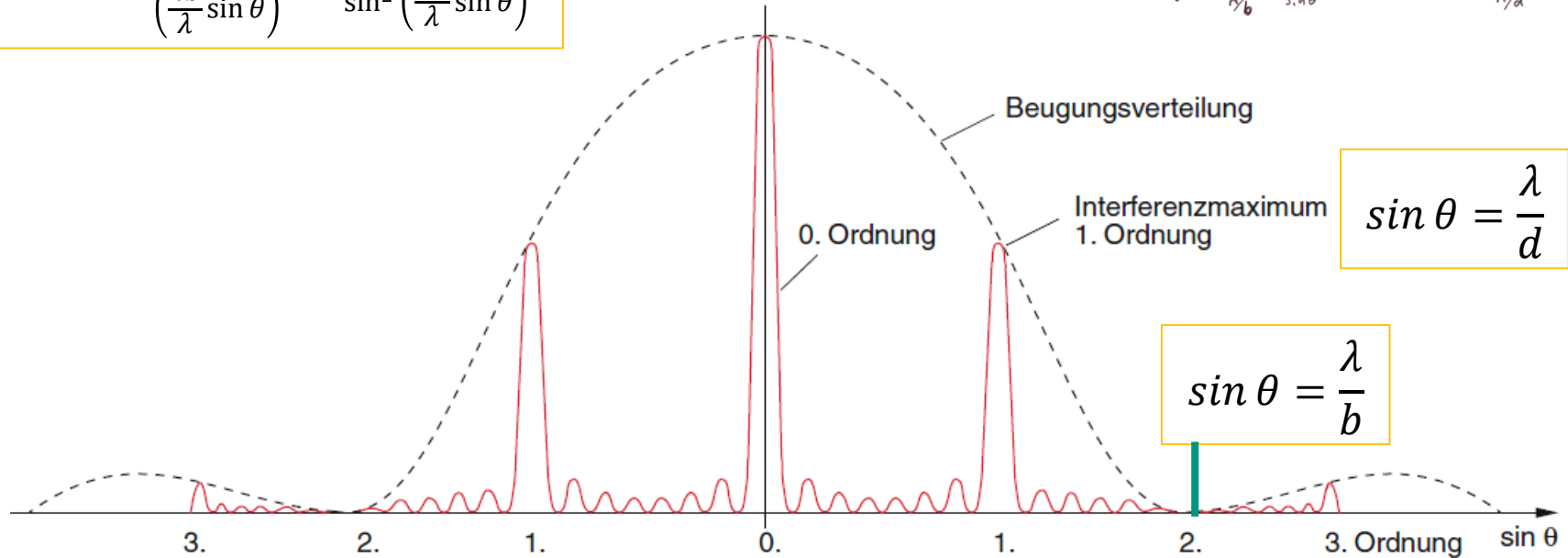
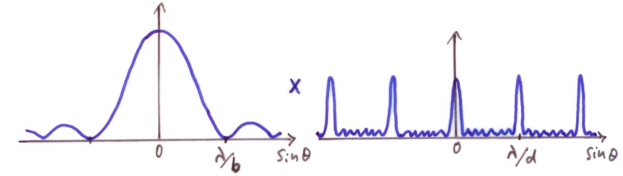
Einhüllende  $\frac{\sin^2[x]}{x^2}$

N Punktquellen  $\frac{\sin^2[Ny]}{\sin^2[y]}$



# Beugung am Vielfachspalt / Gitter

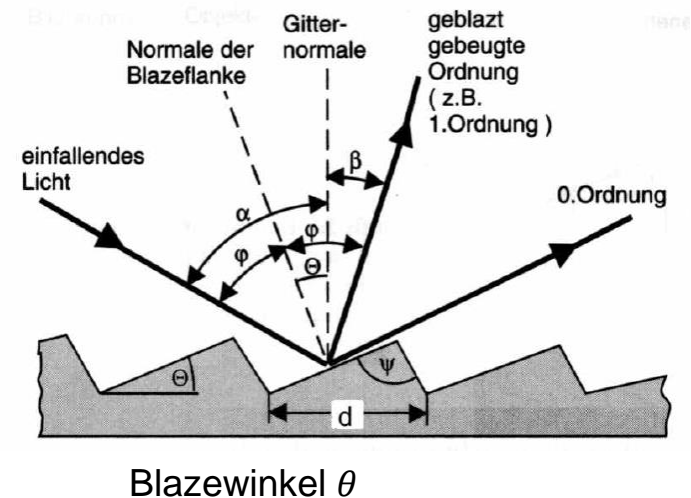
$$I(\theta) = I_0 \frac{\sin^2 \left[ \frac{\pi b}{\lambda} \sin \theta \right]}{\left( \frac{\pi b}{\lambda} \sin \theta \right)^2} \cdot \frac{\sin^2 \left[ N \frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta \right]}{\sin^2 \left( \frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta \right)}$$



# Beugungsgitter

- Optische Gitter für Spektroskopie
- meist in Reflexion, aber auch Transmission möglich
- Typisch: 100 – 2000 Linien/mm
- Geritzte oder holografische Gitter
  
- Hohe Beugungseffizienz in einer Ordnung: **Gebraztes Gitter**  
 Richtung der gebeugten Ordnung ist identisch mit Reflexionsrichtung bei geneigten Furchen

Gangunterschied benachbarter Strahlen:  $\Delta s = d (\sin \alpha + \sin \beta) = m \lambda$

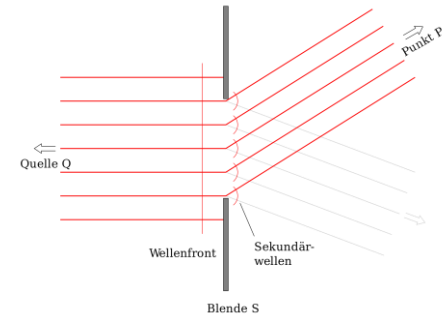


# Fraunhofer- und Fresnelbeugung

Unterscheidung zweier Grenzfälle je nach Geometrie

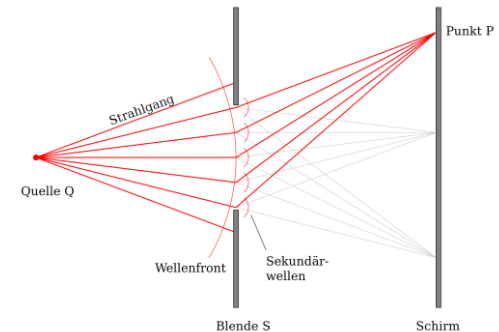
## Fraunhofer Beugung

- parallel ein- und ausfallende Lichtbündel
- Fernfeldnäherung
- alle Teilstrahlen haben definierten Beugungswinkel



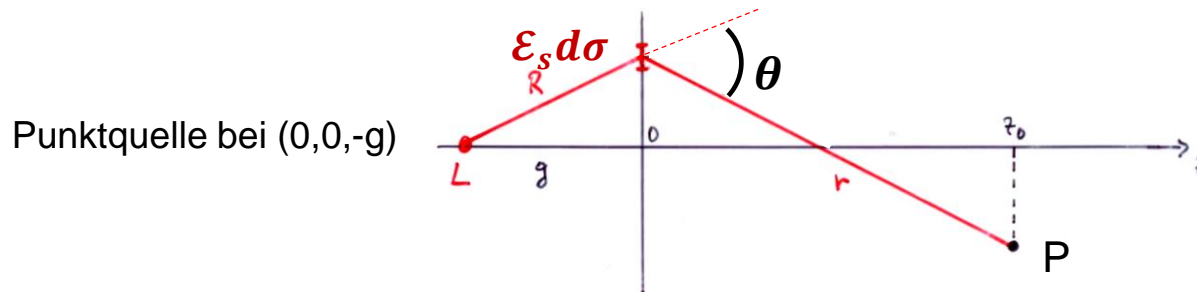
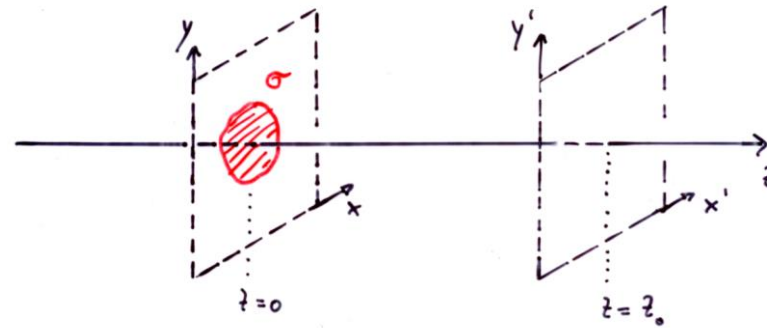
## Fresnel Beugung

- konvergente / divergente Lichtbündel
- Nahfeldnäherung
- verschiedene Beugungswinkel
- verschiedene Wegunterschiede der Teilstrahlen



# Beugungstheorie

- Betrachte beliebige Apertur  $\sigma$  in der  $x - y$  Ebene bei  $z = 0$
- Was ist die Intensitätsverteilung in der  $x' - y'$  Ebene bei  $z = z_0$  wenn  $\sigma$  beleuchtet wird?



# Beugungstheorie

- Feldamplitude des Lichtes in  $x - y$  Ebene

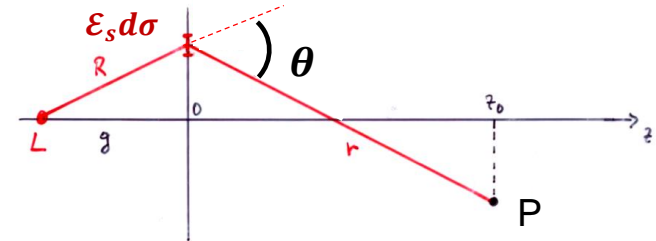
$$E_S = \frac{A}{R} e^{i(\omega t - kR)} \quad \text{Kugelwelle}$$

- Infinitesimales Flächenelement emittiert sekundäre Huygens Welle

- Trägt zur Feldamplitude in  $x' - y'$  Ebene bei gemäß

$$dE_P = \frac{K E_S d\sigma}{r} e^{-ikr}$$

$$\text{mit } K = \frac{i}{\lambda} \cos \theta \quad \text{Neigungsfaktor, } \theta < \pi$$



- Gesamte Feldamplitude in P: Integration über  $d\sigma = dx \cdot dy$

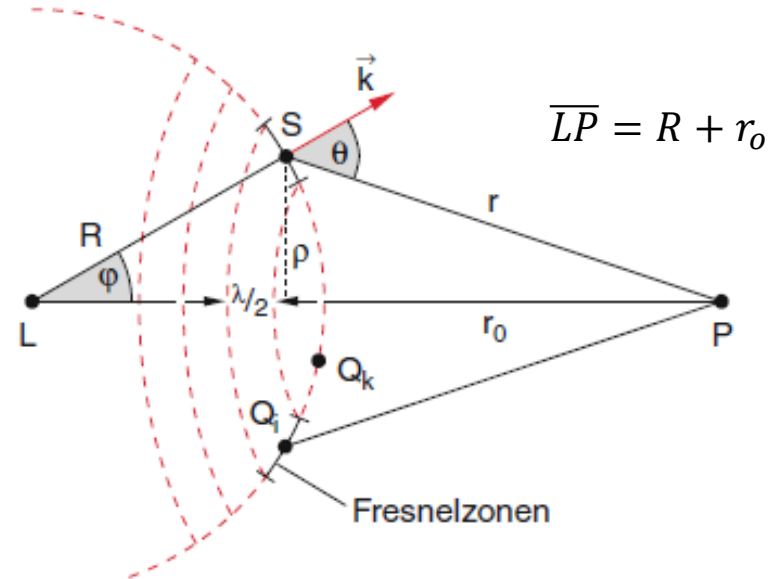
$$E_P = \iint dx dy K E_S \frac{e^{-ikr}}{r}$$

Fresnel-Kirchhoff'sches Beugungsintegral

# Fresnel Zonen

- Punktquelle hat kugelförmige Phasenfront
- Alle Sekundärwellen die von der Phasenfront ausgehen und die mit einer Phase im Punkt P beitragen liegen auf einem Kreis
- Eine Fresnel Zone umfasst alle Punkte in einem Ring für den die Phasenverschiebung  $\Delta\phi < \pi$   
 $\rightarrow r = r_0 + m \cdot \lambda/2$
- Amplituden benachbarter Fresnel Zonen tragen außer Phase in P bei
- Im Grenzfall  $R \rightarrow \infty$  wird die Sphäre zu einer Ebene

$$\rho_m = \sqrt{r^2 - r_0^2} = \sqrt{\left(r_0 + \frac{m\lambda}{2}\right)^2 - r_0^2} \approx \sqrt{mr_0\lambda} \quad \text{für } r_0 \gg \lambda$$



# Fresnel Zonen

- Beitrag der  $m$ -ten Fresnel Zone mit Fläche  $dS_m$  zur Feldstärke der Sekundärwelle in  $P$

$$dE_m = K_m \frac{E_a}{r} e^{-i[k(R+r)-\omega t]} dS_m$$

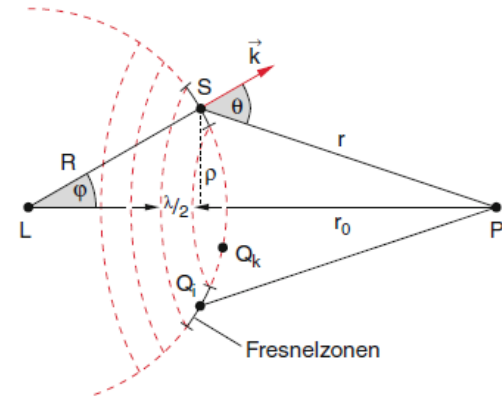
- mit  $E_a = E_0/R$ ,  $K_m$  Neigungsfaktor für  $m$ -te Fresnel Zone

- Kosinussatz im Dreieck LSP:  $r^2 = R^2 + (R + r_0)^2 - 2R(R + r_0) \cos \phi$

- Ableitung nach  $\phi$ :  $2r dr = 2R(R + r_0) \sin \phi d\phi$  (\*)

- Fläche einer Zone:  $dS_m = \overset{\text{Umfang}}{2\pi\rho} \overset{\text{Zonenbreite}}{R d\phi} = 2\pi(R \sin \phi)R d\phi = \overset{(*)}{\frac{2\pi R}{R+r_0}} r dr$

- Integration:  $E_m = K_m E_a \frac{2\pi R}{R+r_0} \int_{r_{m-1}}^{r_m} e^{-i[k(R+r)-\omega t]} dr = \left[ \frac{\lambda K_m E_a R}{i(R+r_0)} e^{-i[k(R+r)-\omega t]} \right]_{r_{m-1}}^{r_m}$



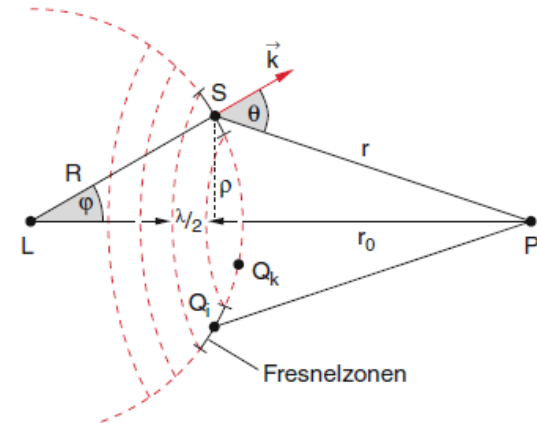
# Fresnel Zonen

- mit  $r_m = r_0 + m \cdot \frac{\lambda}{2}$ :  $E_m = (-1)^{m+1} \frac{2\lambda K_m E_a R}{i(R+r_0)} e^{-i[k(R+r_0) - \omega t]}$
- Vorzeichenwechsel zwischen benachbarten Zonen wg. Weglängenänderung von  $\lambda/2$
- Gesamtfeldstärke ist Summe über alle Fresnel Zonen

$$E(P) = \sum_{m=1}^N E_m = |E_1| - |E_2| + |E_3| - |E_4| + \dots \pm |E_N|$$

- Beiträge hängen nur von  $K_m \sim \cos \theta$  ab, ändern sich also nur sehr langsam

$$|E_m| \approx \frac{1}{2} (|E_{m-1}| + |E_{m+1}|)$$



# Fresnel Zonen

- Wähle Umordnung

$$E(P) = \frac{1}{2}|E_1| + \left(\frac{1}{2}|E_1| - |E_2| + \frac{1}{2}|E_3|\right) + \left(\frac{1}{2}|E_3| - |E_4| + \frac{1}{2}|E_5|\right) + \dots + \frac{1}{2}|E_N|$$

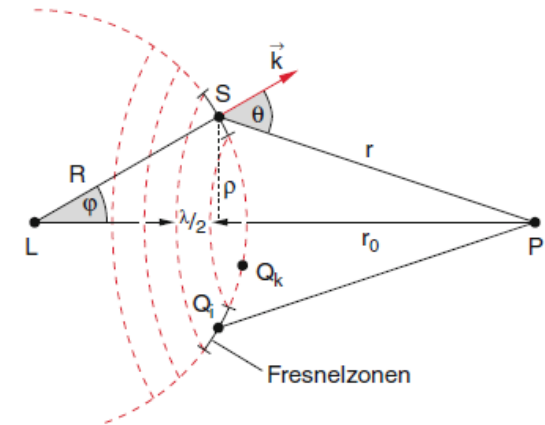
- mit  $|E_m| \approx \frac{1}{2}(|E_{m-1}| + |E_{m+1}|)$  fallen alle mittleren Terme weg

$$\rightarrow E(P) \approx \frac{1}{2}(|E_1| + |E_N|)$$

Wieviel trägt  $|E_N|$  bei?

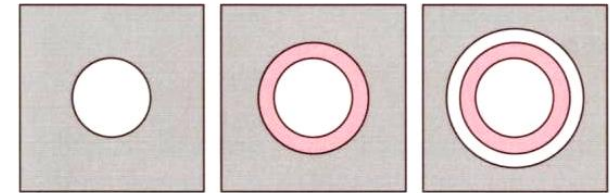
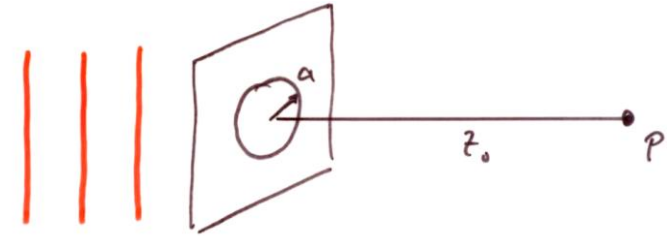
- da  $E_m \sim K_m \sim \cos \theta_m$ ,  $\cos \theta_1 = 1$ ,  $\theta_N = \frac{\pi}{2} \rightarrow E_N = 0$

$$\rightarrow E(P) \approx \frac{1}{2}|E_1|$$



# Fresnel'sche Zonenblenden

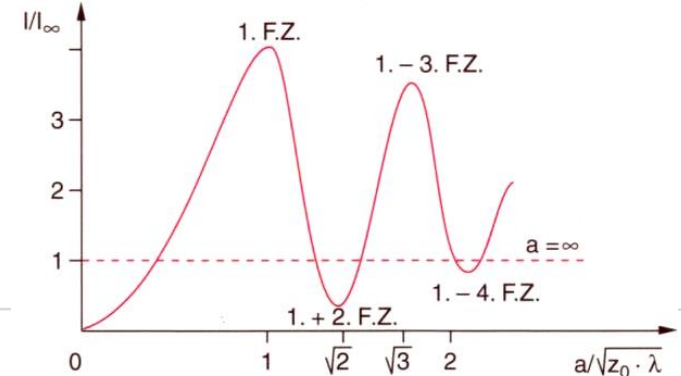
- Betrachte Beugung durch eine kreisförmige Apertur für verschiedene Durchmesser  $a$
- Ist die Flächenöffnung = 1. Fresnel Zone, ist die Intensität 4x erhöht  
→ fehlende destruktive Interferenz der höheren Zonen
- Ist die Flächenöffnung 1. + 2. Fresnel Zone: Intensität 2x verringert  
→ destruktive Interferenz zwischen 1. und 2. Zone
- Zonenblende wirkt wie Linse – divergentes Licht wird teilweise fokussiert



$$a = (z_0 \cdot \lambda)^{1/2}$$

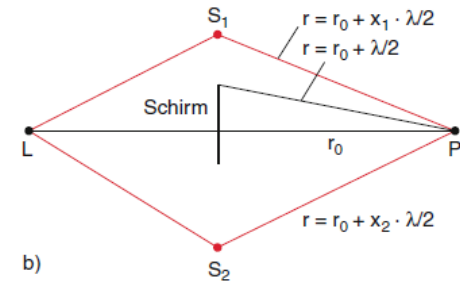
$$a = (2z_0 \cdot \lambda)^{1/2}$$

$$a = (3z_0 \cdot \lambda)^{1/2}$$



# Fresnel'sche Zonenblenden

- Betrachte Beugung an eine kreisförmiger Blende
- Ist die Flächengröße = 1. Fresnel Zone: zweites Glied in der Summe wird nicht mehr zu 0 kompensiert → Licht erscheint im Punkt P
- → Fokussieren von Licht durch Ausblenden von ungeraden Fresnel'schen Zonen
- Gerade Zonen summieren sich in Phase auf
- „Fresnel'sche Zonenplatte“ mit  $\rho_m = \sqrt{mr_0\lambda}$
- Brennweite  $f = r_0 = \frac{\rho_m^2}{m\lambda} = \frac{\rho_1^2}{\lambda}$   
→ wellenlängenabhängige Brennweite



# Fresnel-Näherung des Beugungsintegrals

## ■ Nähere Beugungsintegral

$$E_P = \iint dx dy K E_S \frac{e^{-ikr}}{r}$$

für große Abstände  $r \gg (x - x'), (y - y')$

## ■ grobe Näherung für Term $\frac{1}{r}$

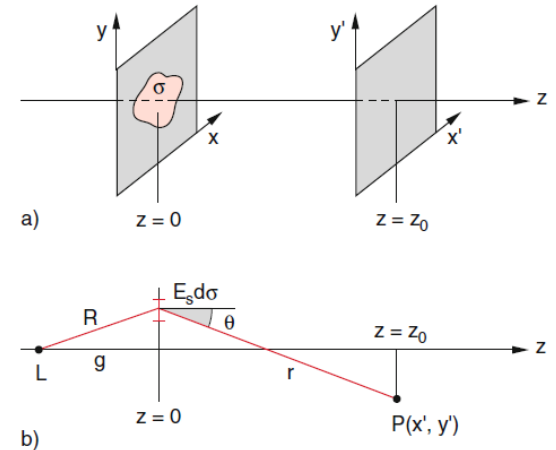
$$r = \sqrt{z_0^2 + (x - x')^2 + (y - y')^2} \approx z_0$$

## ■ Bessere Näherung für Phase $e^{-ikr}$ (Taylor Entwicklung)

$$r \approx z_0 \left( 1 + \frac{(x-x')^2}{2z_0^2} + \frac{(y-y')^2}{2z_0^2} + \dots \right)$$

## ■ mit $K = \frac{i}{\lambda} \cos(\theta) \approx \frac{i}{\lambda}$ da $\cos(\theta) = \frac{z_0}{r} \approx 1$ folgt

$$E(x', y', z_0) = i \frac{e^{-ikz_0}}{\lambda z_0} \iint_{-\infty}^{\infty} E(x, y) \cdot \exp \left[ -\frac{ik}{2z_0} ((x - x')^2 + (y - y')^2) \right] dx dy$$



# Fraunhofer-Näherung des Beugungsintegrals

- Ist der Durchmesser der beugenden Fläche  $\ll z_0$ , so dass

$$z_0 \gg \frac{1}{\lambda}(x^2 + y^2)$$

→ quadratische Terme  $x^2, y^2$  im Exponenten können vernachlässigt werden

$$r \approx z_0 \left( 1 + \frac{(x-x')^2}{2z_0^2} + \frac{(y-y')^2}{2z_0^2} + \dots \right) \approx z_0 \left( 1 - \frac{xx'}{z_0^2} - \frac{yy'}{z_0^2} + \frac{x'^2+y'^2}{2z_0^2} \right)$$

- Damit ergibt sich

$$E(x', y', z_0) = i \frac{e^{-ikz_0}}{\lambda z_0} e^{-ik(x'^2+y'^2)/2z_0} \iint_{-\infty}^{\infty} E(x, y) \cdot \exp \left[ -\frac{ik}{z_0} (xx' + yy') \right] dx dy$$

Beugungsintegral in Fraunhofer Näherung

- Beachte: Die Phase ist linear in  $x$  und  $y$

# Fresnel und Fraunhofer Beugung

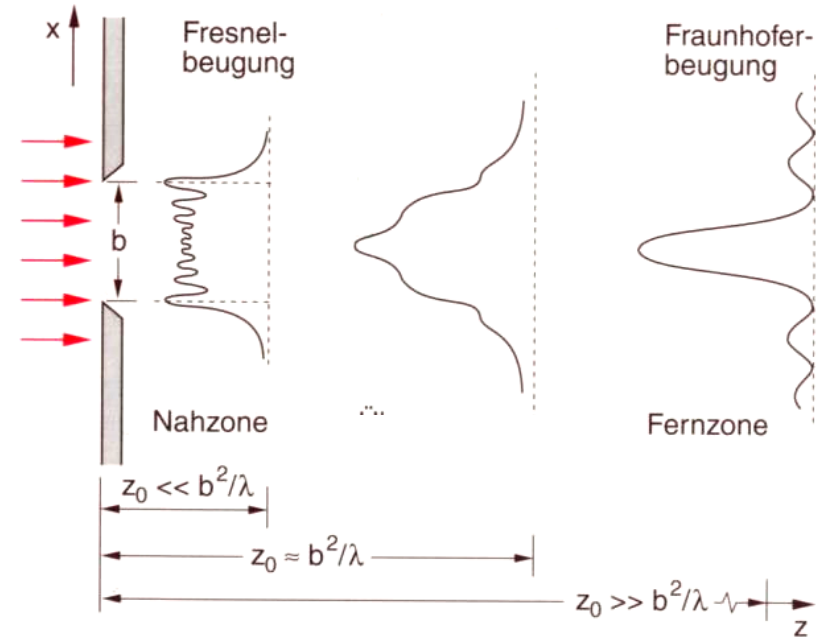
Experiment:  
Fresnel/Fraunhofer

**Fresnel Beugung im Nahfeld**  $z_0 \approx b \gg \lambda$

- viele Fresnel Zonen tragen bei

**Fraunhofer Beugung im Fernfeld**  $z_0 \gg b$

- nur eine Fresnel Zone trägt bei



# Beugung am Spalt

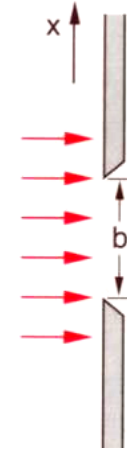
- Paralleles Licht fällt auf Spalt entlang  $y$ , Breite  $\Delta x = b \gg \lambda$

$$E(x', z_0) = K E_s \int_{-b/2}^{b/2} \frac{e^{-ikr}}{r} dx$$

$$\text{mit } r = \sqrt{(x - x')^2 + z_0^2} = z_0 \sqrt{1 + \frac{(x - x')^2}{z_0^2}}$$

- Nahfeld:  $E$  stark abhängig von  $x'$   $\rightarrow$  numerische Integration
- Fernfeld: Fraunhofer Beugung

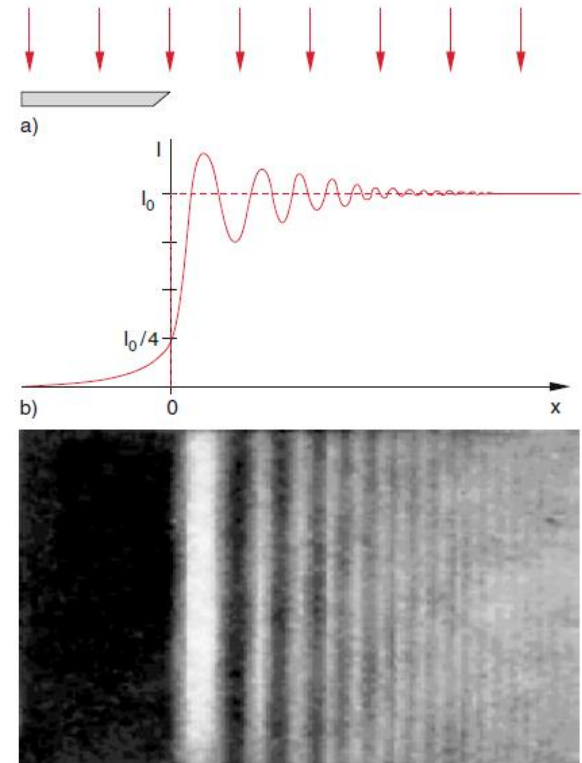
$$E(x', z_0) \sim \frac{1}{z_0} \int_{-b/2}^{b/2} e^{-ik'r} dx = \frac{\sin u}{u} \quad \text{mit } k' = k x' / z_0 \quad \text{und } u = \frac{\pi b}{\lambda} \sin \theta$$



# Fresnel Beugung an einer Kante

- Kante deckt Halbraum ab
- Beugungsintegral für eine Dimension

$$E_P = K E_S \int_0^{\infty} \frac{e^{-ik\sqrt{(x-x')^2+z_0^2}}}{\sqrt{(x-x')^2+z_0^2}} dx$$



# Babinet'sches Theorem

- Feldstärke am Punkt P folgt aus 2D Beugungsintegral

$$E_P = \iint_{\sigma} dx dy K E_S \frac{e^{-ikr}}{r}$$

- Für komplizierte Flächen  $\sigma$ : Nutze das Superpositionsprinzip

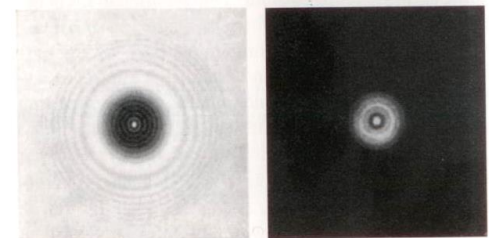
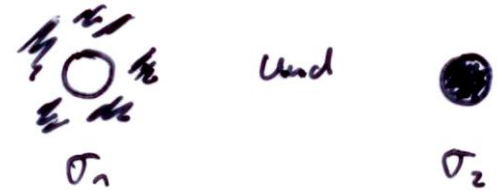
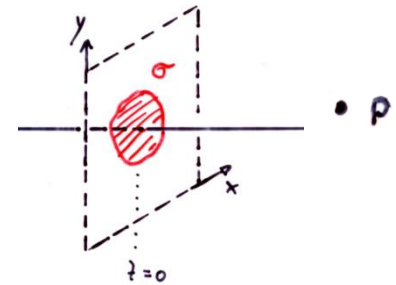
$$E_P(\sigma) = \sum_i E_P(\sigma_i)$$

Komplementäre Beugungsflächen

- z.B.  $\sigma_1$  transmittiert Licht wo  $\sigma_2$  es blockiert
- Für  $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$  passiert keine Beugung und alles wird geblockt

$$E_P(\sigma) = 0 \rightarrow E_P(\sigma_1) = -E_P(\sigma_2)$$

→ komplementäre Beugungsflächen ergeben das gleiche Beugungsbild  
(Nach Subtraktion der ungebeugten, direkten Intensität)



# Fraunhofer Beugung an einer Kreisapertur

- Rotationssymmetrie: Polarkoordinaten  
 $(x, y) \rightarrow (a, \psi), \quad (x', y') \rightarrow (\rho, \varphi)$
- Beugungsintegral für homogene Beleuchtung

$$\mathcal{E}(\rho) = i \mathcal{E}_S \frac{e^{-ikz_0}}{\lambda z_0} \int_0^{d/2} a da \int_0^{2\pi} d\psi e^{-i\frac{k\rho a}{2z_0} \cos(\varphi - \psi)}$$

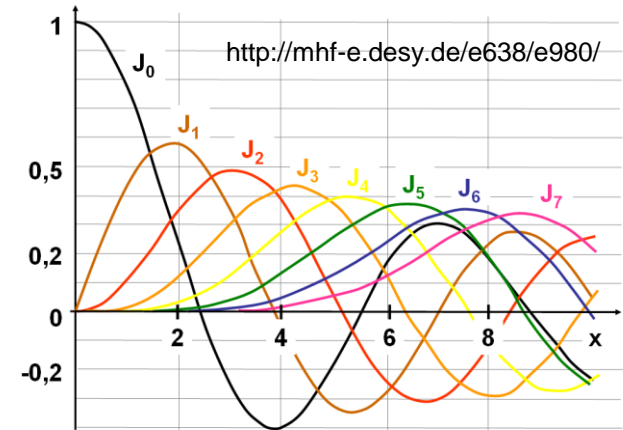
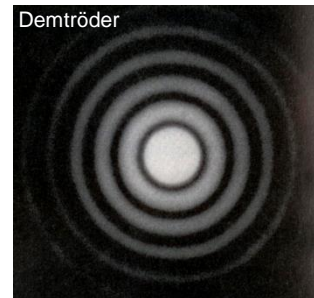
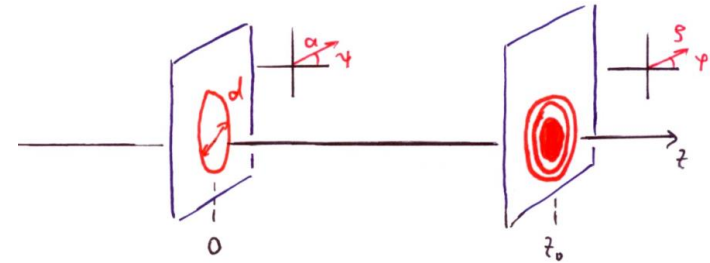
- mit den mathematischen Beziehungen für Besselfunktionen

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ix \cos \psi} d\psi$$

$$\int_0^x x' J_0(x') dx' = x J_1(x)$$

- damit:

$$\mathcal{E}(\rho) = i \mathcal{E}_S e^{-ikz_0} \frac{kd^2}{4z_0} \frac{J_1(x)}{x} \quad \text{mit } x = \frac{kd\rho}{2z_0}$$



# Fraunhofer Beugung an einer Kreisapertur

- Intensität

$$I(\rho) = I_0 \left( \frac{2J_1(x)}{x} \right)^2$$

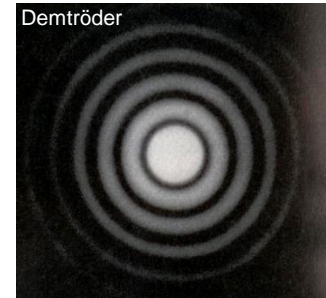
- Erste Nullstelle der Besselfunktion:

$$J_1(x = 3.83) = 0$$

$$\text{mit } x = kd \frac{r_{\text{Airy}}}{2z_0} = 3.83 = \pi \cdot 1.22$$

$$r_{\text{Airy}} = 1.22 \frac{z_0 \lambda}{d}$$

Radius des Airy Scheibchens



# Fouriertransformation und Fourier Optik

- Zwei Funktionen  $f(x)$  und  $\mathcal{F}(u)$  werden *Fourier Paar* genannt wenn

$$\mathcal{F}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) e^{-i2\pi ux} \quad \text{oder respektive} \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} du \mathcal{F}(u) e^{i2\pi ux}$$

- Die Variablen  $x$  und  $u$  werden *Fourier-konjugierte Variablen*
- Fraunhofer Beugung ist äquivalent zu einer zweidimensionalen Fouriertransformation:

$$\mathcal{F}(u, v) = \iint_{-\infty}^{+\infty} dx dy f(x, y) e^{-i 2\pi (ux+vy)}$$

$$f(x, y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} du dv \mathcal{F}(u, v) e^{i 2\pi (ux+vy)}$$

- falls  $f(x, y)$  separabel, d.h.  $f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y) \rightarrow \mathcal{F}(u, v) = \mathcal{F}_1(u) \cdot \mathcal{F}_2(v)$   
 mit  $\mathcal{F}_1(u)$  Fouriertransformierte von  $f_1(x)$   
 $\mathcal{F}_2(v)$  FT von  $f_2(y)$

# Fouriertransformation und Fourier Optik

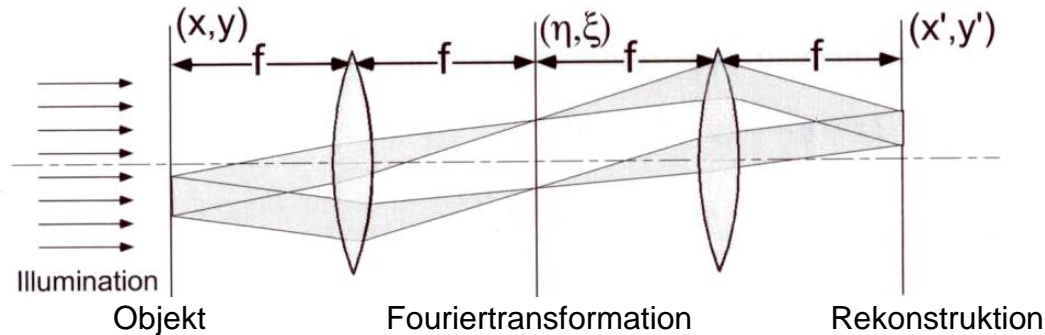
- Betrachte Beugung an einer Fläche  $\sigma$  bei  $z = 0$  mit Transmissionsfunktion  $\tau(x, y)$  und einfallender Lichtfeldstärke  $E_e(x, y)$
- z.B. Blende:  $\tau(x, y) = 1$  innerhalb,  $\tau(x, y) = 0$  außerhalb
- Feldverteilung bei  $z = 0$ :  $E(x, y) = E_e(x, y)\tau(x, y)$
- Feldverteilung in  $x' - y'$  Ebene bei  $z_0$  aus Beugungsintegral (Fraunhofer)

$$E(x', y', z_0) = \frac{ie^{ikz_0}}{\lambda z_0} e^{-ik(x'^2 + y'^2)/2z_0} \iint_{-\infty}^{\infty} E(x, y) \cdot \exp\left[-\frac{ik}{z_0}(xx' + yy')\right] dx dy$$

- Mit  $u = x'/\lambda z_0$ ,  $v = y'/\lambda z_0$  Wellenzahlen = Ortsfrequenzen
- Fraunhofer Beugungsbild  $E(x', y')$  ist proportional zur Fouriertransformation der Feldverteilung  $E(x, y)$  in der beugenden Öffnung (Aperturfunktion)

# Fouriertransformation und Fourier Optik

- Fouriertransformation einer Linse: FT der Amplitudenverteilung in der Objektebene beobachtet in der Brennebene

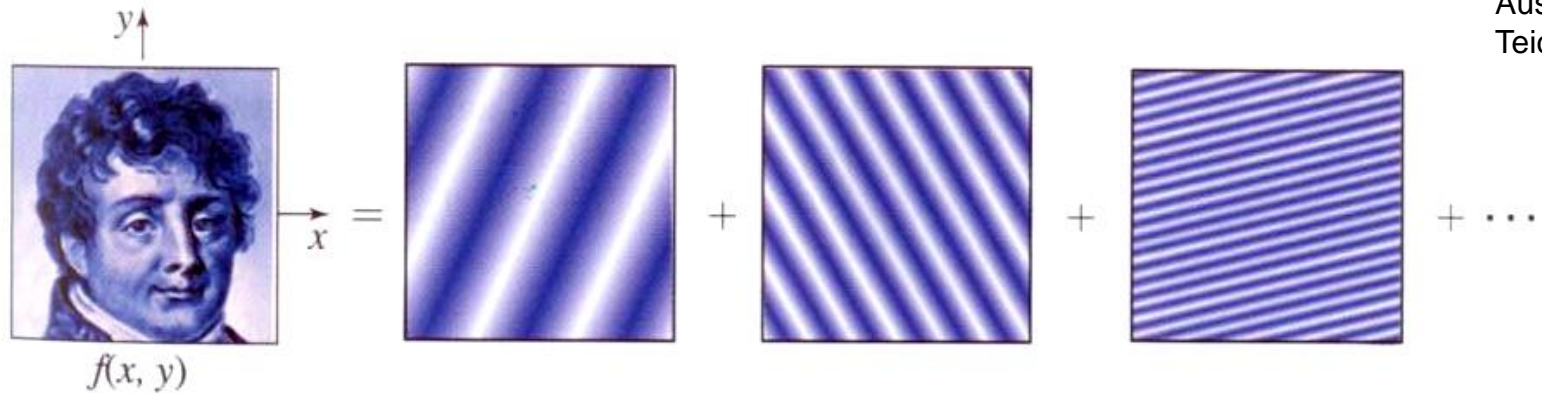
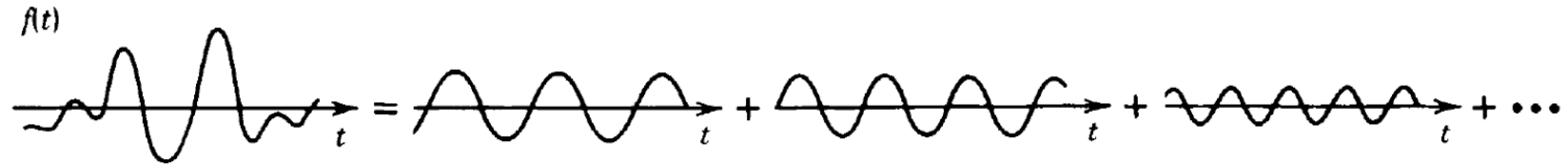


Aus:  
Meschede

- 4-f Abbildungssystem: Zweite Linse erzeugt inverse FT: Bild des Objekts
- Bild kann in der Fourierebene manipuliert werden durch räumliches Filtern von Fourier Komponenten

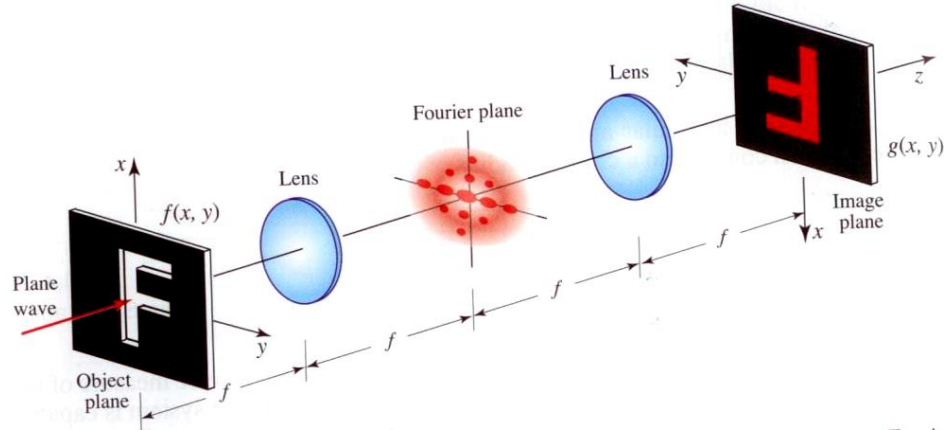
# Fouriertransformation und Fourier Optik

- Ortsfrequenz: räumliche Perioden pro Einheitslänge

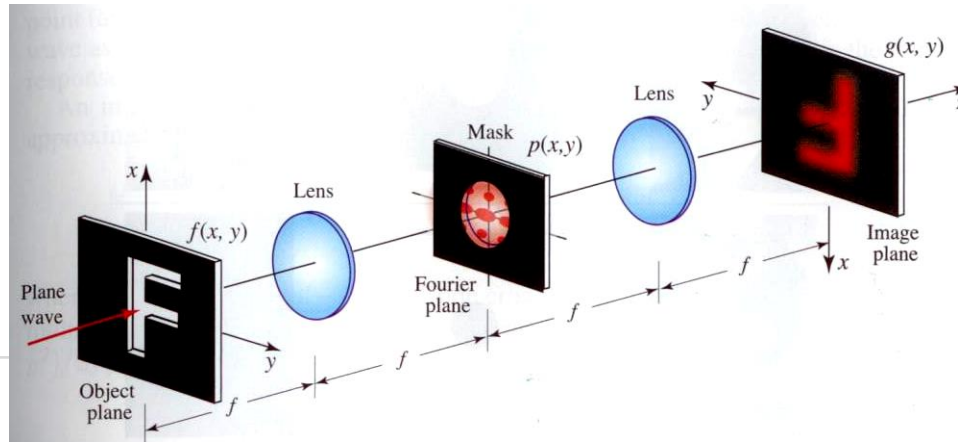


Aus: Saleh,  
Teich

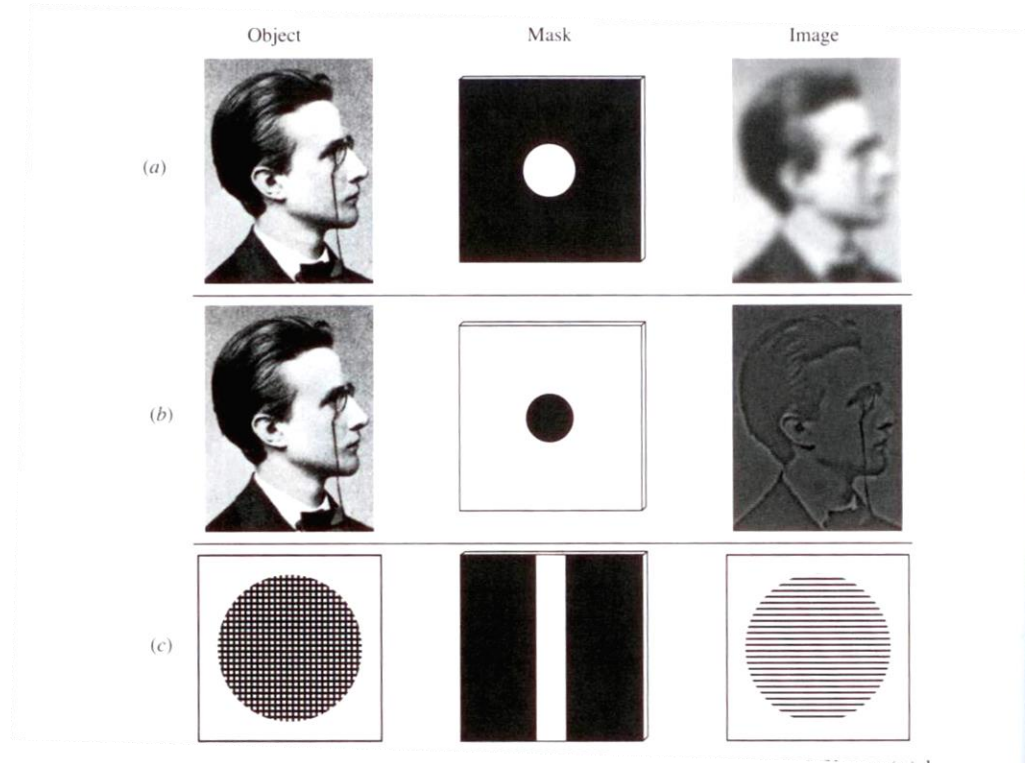
# Fouriertransformation und Fourier Optik



Aus: Saleh, Teich



# Fouriertransformation und Fourier Optik

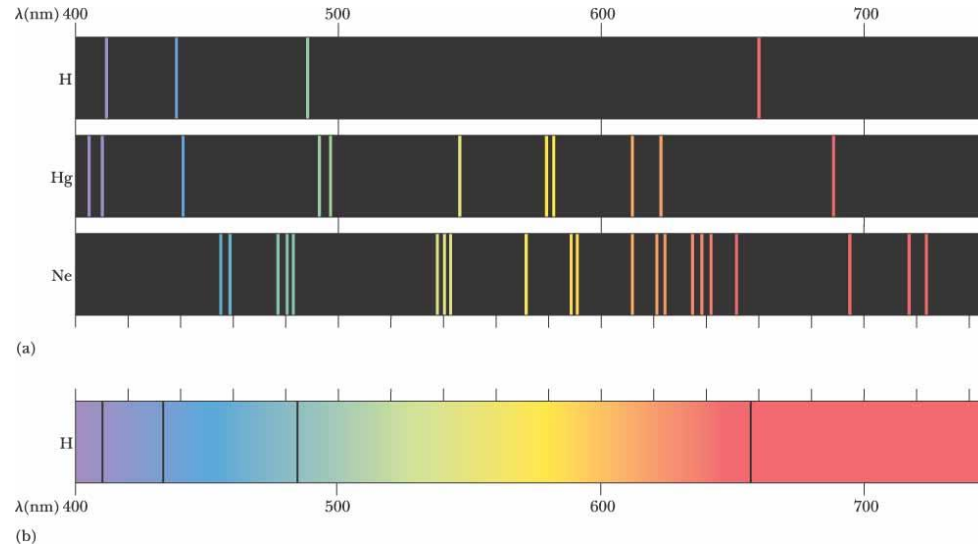


Aus: Saleh, Teich

# Anwendungen der Beugung

## Spektrometer

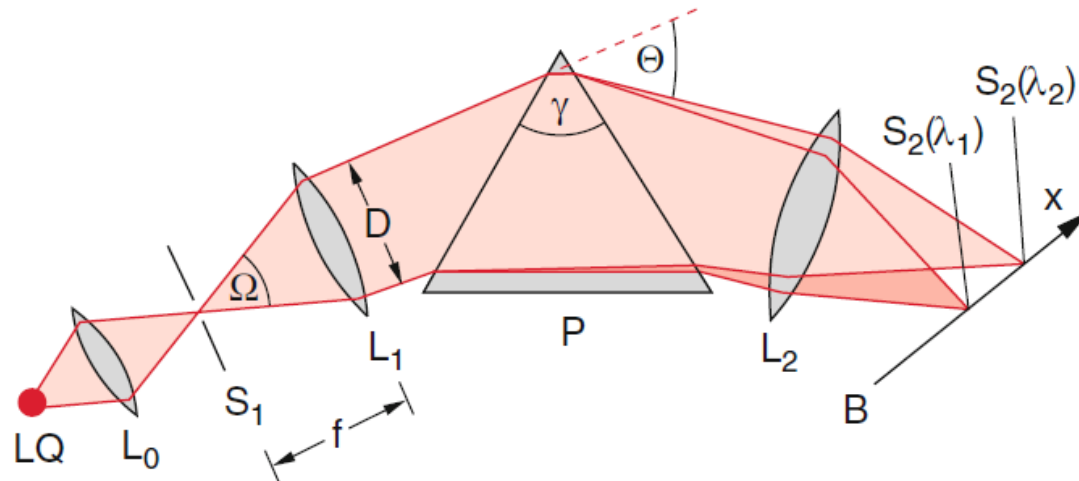
- Charakterisierung des Spektrums  $S(\lambda)$  einer Lichtquelle



# Spektrometer

## Aufbau eines Spektrometers

- Abbildung eines Eingangsspalt über ein dispersives Element auf eine Beobachtungsebene
- Zweiter Spalt in Beobachtungsebene: Monochromator – lässt je nach Breite  $\Delta x$  ein begrenztes Wellenlängenintervall durch:  $\Delta\lambda = \left(\frac{d\lambda}{dx}\right) \Delta x$  mit Dispersion  $dx/d\lambda$



# Prismenspektrometer

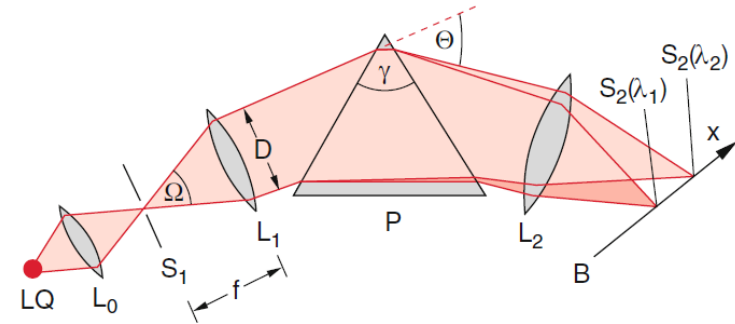
- Ablenkwinkel  $\theta(\lambda)$  hängt von Apexwinkel  $\gamma$  und von der Dispersion  $dn/d\lambda$  des Prismenmaterials ab:

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{2 \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)}{\sqrt{1-n^2 \sin^2\left(\frac{\gamma}{2}\right)}} \cdot \frac{dn}{d\lambda}$$

- Räumliche Trennung  $\Delta x$  hängt von Brennweite  $f_2$  der zweiten Linse  $L_2$  ab:

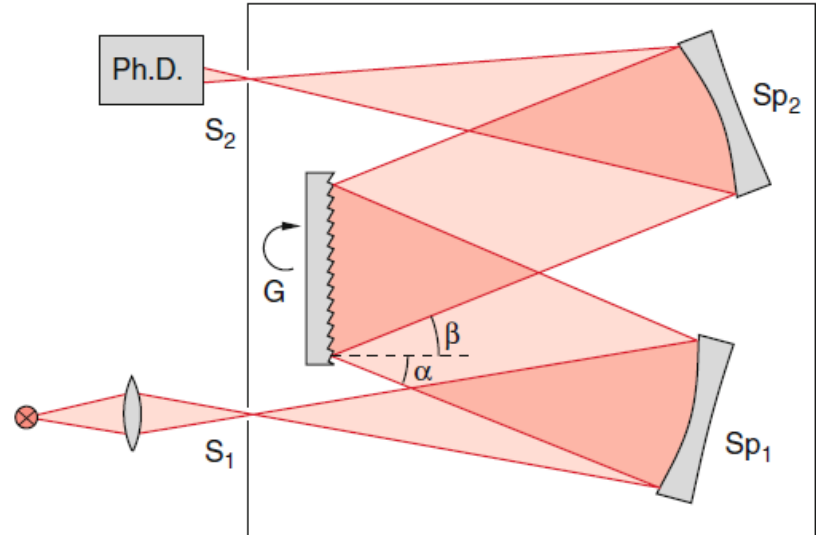
$$\Delta x = f_2 \frac{d\theta}{d\lambda} \Delta\lambda$$

Vorteile: kompakt, hohe Transmission, nur ein Spektrum  
 Nachteile: Geringe Dispersion und spektrale Auflösung



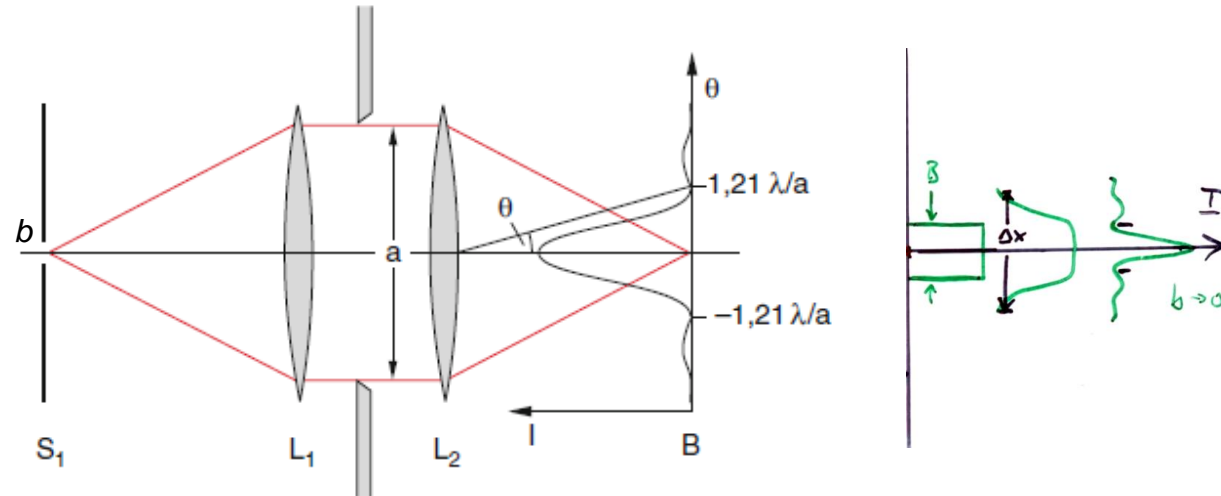
# Gitterspektrometer / -monochromator

- z.B. Cerny-Turner Geometrie
- Beugung (konstruktive Interferenz) für
 
$$d(\sin \alpha + \sin \beta) = m\lambda$$
- Winkeldispersion
 
$$\frac{d\beta}{d\lambda} = \frac{m}{d \cos \beta}$$
- Nimmt für zunehmende Beugungsordnung  $m$  kleinere Gitterkonstante zu



# Gitterspektrometer – spektrale Auflösung

- Kleinster Wellenlängenabstand  $\Delta\lambda$  der noch aufgelöst werden kann



- Spektrometer erzeugt Bild des Eingangsspalt in der Detektorebene

$$B = f_2/f_1 b$$

$$\text{meist } f_1 = f_2 \rightarrow B = b$$

# Gitterspektrometer – spektrale Auflösung

- Beugung an den endlichen Durchmessern der Spiegel oder des Gitters → verbreitert Abbildung

$$\Delta x = B + 2 f_2 \lambda / D$$

$$\text{für } b \rightarrow 0 \quad \Delta x = 2 f_2 \lambda / D$$

- Beugung am Eingangsspalt führt zu Intensitätsverlust wenn zentrales Beugungsmaximum größer als der Akzeptanzwinkel  $\alpha$  wird, also

$$b < 2 f_1 \lambda / D$$

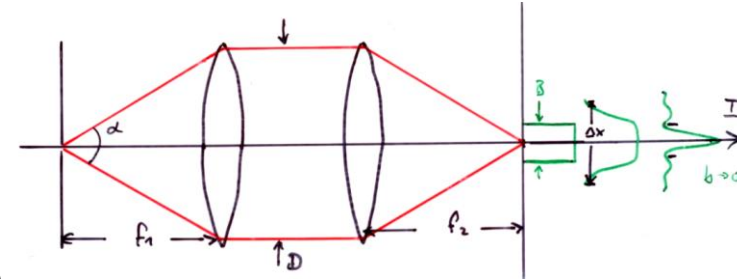
- Spektrale Auflösung ist gegeben durch Breite des Spaltbildes  $\Delta x$  und der spektralen Dispersion des Gitters

$$\text{Halbe Fußpunktsbreite} \quad \frac{\Delta x}{2} = \frac{b}{2} + \frac{f \lambda}{D} \quad \text{und mit} \quad \Delta x = f_2 \frac{d\theta}{d\lambda} \Delta \lambda$$

$$\text{entspricht Wellenlängenabstand } \Delta \lambda = \frac{d\lambda}{dx} \Delta x / 2 = \frac{1}{f} \frac{d\lambda}{d\theta} \Delta x / 2$$

- Für minimale sinnvolle Spaltbreite  $b = 2 f \lambda / D$ :

- Für  $b \rightarrow 0$ :  $\frac{\lambda}{\Delta \lambda} = D \frac{d\theta}{d\lambda}$  (Lichtverlust!)



$$\frac{\lambda}{\Delta \lambda} = \frac{D}{2} \frac{d\theta}{d\lambda}$$

# Spektrometer

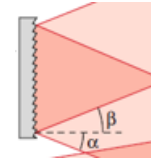
**Prismenspektrometer** mit  $\gamma = 60^\circ$ ,  $\sin \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2}$

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{1}{4} \frac{L}{\sqrt{1-n^2/4}} \frac{dn}{d\lambda}$$

## Gitterspektrometer

■ Mit Durchmesser  $D = d \cdot N$  gegeben durch Linienabstand und Linienanzahl findet man

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} \leq D \frac{d\beta}{d\lambda} = d N \cos \beta \frac{m}{d \cos \beta} = N \cdot m \quad \text{mit } m \text{ Beugungsordnung}$$



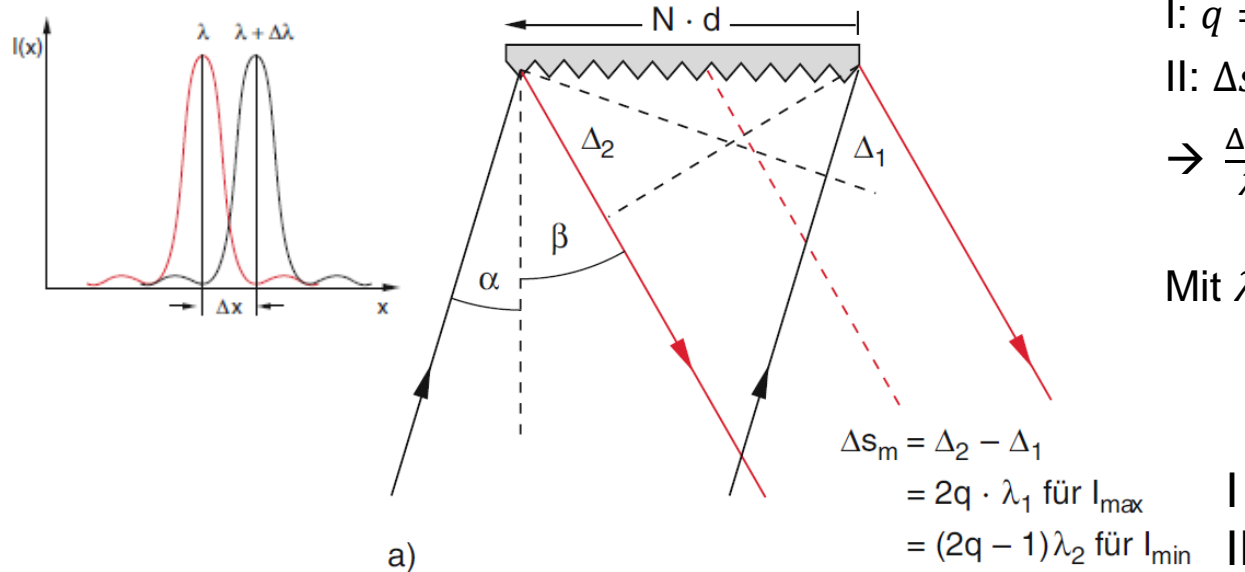
## Beispiele

■ Prisma: Länge  $L = 10\text{cm}$ ,  $n = 1.47$ ,  $\frac{dn}{d\lambda} = 1100\text{cm}^{-1}$   $\rightarrow \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = 4 \cdot 10^3$

■ Gitter: Länge  $L = 10\text{cm}$ , 1200 Linien/mm,  $m = 2$   $\rightarrow \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = 2 \cdot 10^5$

# Allgemeine Betrachtung des Auflösungsvermögens

**Rayleigh Kriterium** für die räumliche Trennung zweier Spektrallinien:  
 Maximum der Beugungsverteilung  $I(\lambda_1)$  fällt auf ein Minimum von  $I(\lambda_1)$



$$I: q = \Delta s_m / 2\lambda_1$$

$$II: \Delta s_m = \left( \frac{\Delta s_m}{\lambda_1} - 1 \right) \lambda_2$$

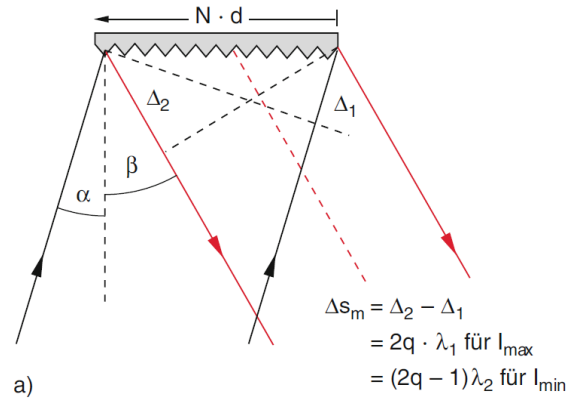
$$\rightarrow \frac{\Delta s_m}{\lambda_2} = \frac{\Delta s_m}{\lambda_1} - 1; \frac{\Delta s_m(\lambda_2 - \lambda_1)}{\lambda_1 \lambda_2} = 1$$

$$\text{Mit } \lambda = \sqrt{\lambda_1 \lambda_2}, \quad \Delta \lambda = \lambda_2 - \lambda_1$$

$$\frac{\lambda}{\Delta \lambda} = \frac{\Delta s_{\max}}{\lambda}$$

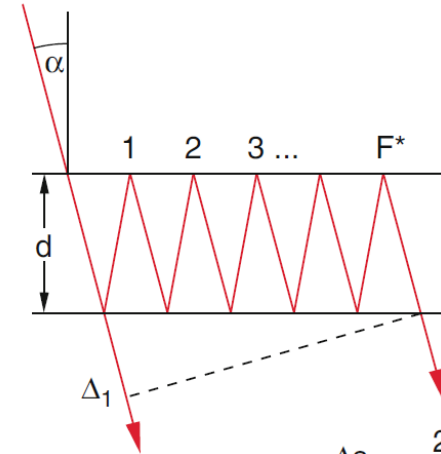
# Allgemeine Betrachtung des Auflösungsvermögens

Gitter



$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{\Delta s_{max}}{\lambda}$$

Interferometer



$$\Delta s_m = \frac{2F^*d}{\cos \alpha} - \Delta_1$$

mit  $\Delta s_m = c \Delta T_{max}$  und  $\lambda = \frac{c}{\nu}$ ,  $\left| \frac{\lambda}{\Delta\lambda} \right| = \left| \frac{\nu}{\Delta\nu} \right| \rightarrow \left| \frac{\nu}{\Delta\nu} \right| \leq \nu \frac{\Delta s_m}{c} = \nu \Delta T_{max} = 2F^*d \cdot \cos \alpha$

$$\Delta\nu \geq \frac{1}{\Delta T_{max}}$$

# Beugungsbegrenzte Auflösung

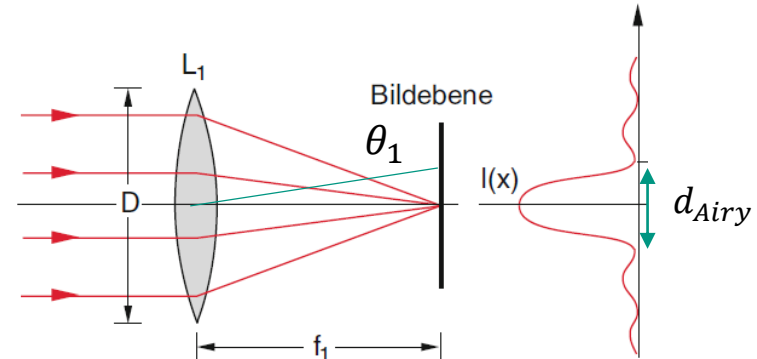
# Beugungsbegrenzte räumliche Auflösung

Betrachte punktförmige Lichtquelle (z.B. Stern) mit einem optischen Instrument.

- Das abbildende Element (z.B. Linse) hat eine Eintrittsöffnung  $D$ , die als Lochblende wirkt und Beugung hervorruft
- Das Bild einer punktförmigen Quelle ist ein Beugungsscheibchen (Airy Scheibchen, Bessel Funktion)
- Durchmesser des Airy Scheibchens

$$d_{Airy} = 2 f \sin \theta_1 \approx 2.44 f \frac{\lambda}{D}$$

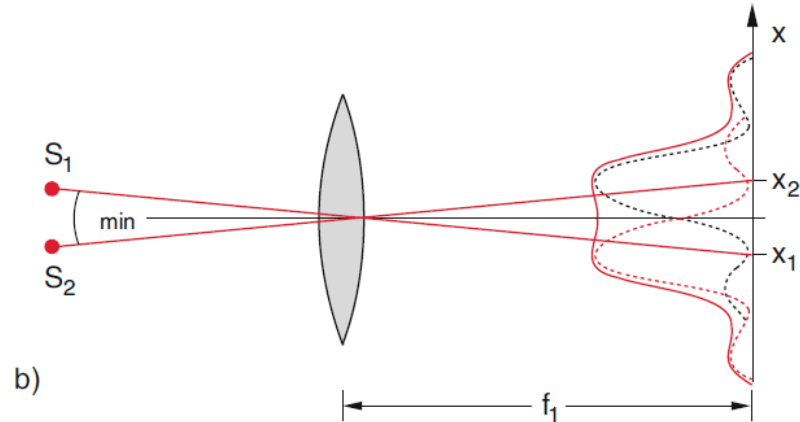
- mit  $\theta_1$  Winkel unter dem erstes Minimum erscheint



# Beugungsbegrenzte räumliche Auflösung

## Rayleigh Kriterium der Bildauflösung

Zwei punktförmige Lichtquellen lassen sich in der Bildebene gerade noch trennen, falls das Maximum des einen Beugungsscheibchens auf das 1. Minimum des anderen fällt



Kleinster noch auflösbarer Winkelabstand:

$$\delta = \sin \theta_1 = 1.22 \lambda / D$$

Summe der beiden Airy-Scheibchen hat noch erkennbares Zwischenminimum

$$I(x = 0) \approx 0.85 I_{max}$$

# Optische Instrumente

Optische Instrumente erweitern den Wahrnehmungsbereich des Auges

- Vergrößerung / höhere räumliche Auflösung
- Verstärkung der Intensität
- Erweiterung des Spektralbereichs

Beispiel: **Das Auge**

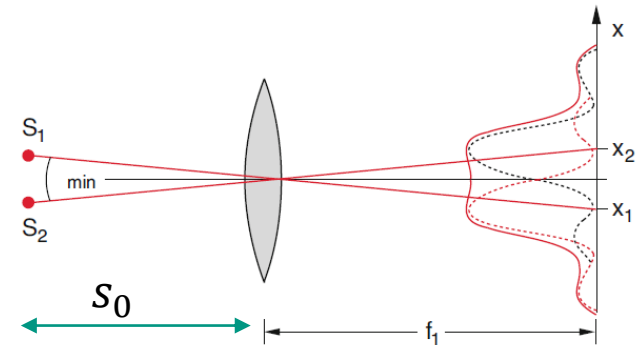
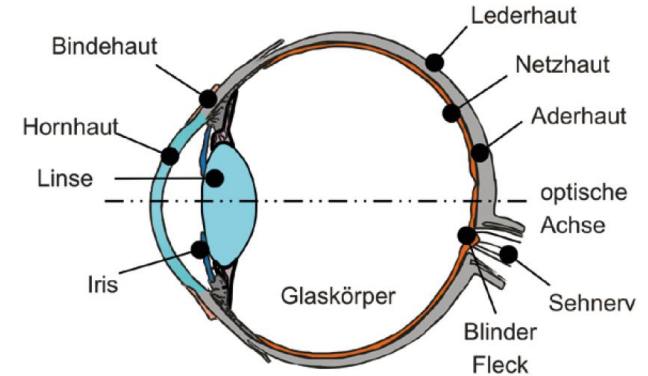
- Pupille:  $D = 1 - 8\text{mm}$
- Augendurchmesser = Brennweite  $f = 2.4\text{ cm}$
- Brechungsindex  $n = 1.33$

$$d_{\text{Airy}} = 2.44 \frac{\lambda_0 f}{n D} \approx 10\mu\text{m}$$

entspricht Abstand der Sehzäpfchen

- Gegenstandsweite für schärfstes Sehen bei  $s_0 = 25\text{ cm}$

$$\Delta x_m = s_0 \delta_m \approx 70\mu\text{m} \text{ minimal sichtbarer Abstand}$$



# Lupe

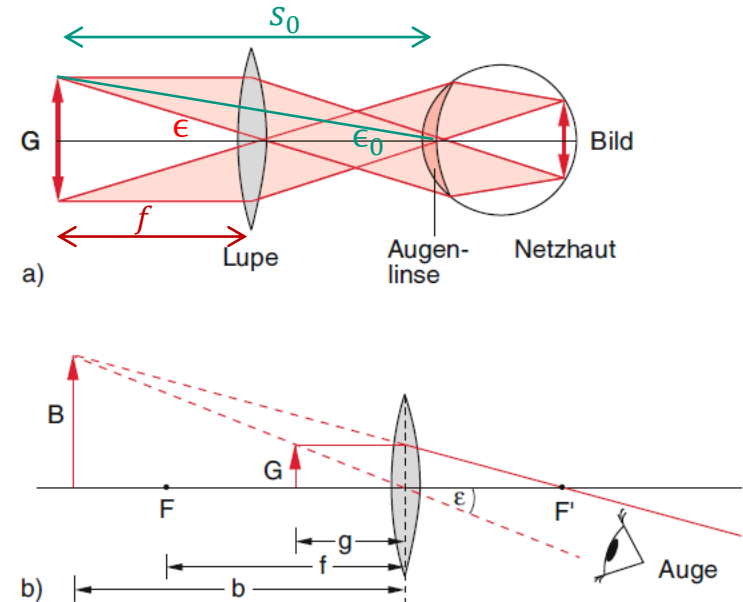
## Winkelvergrößerung

$$V = \frac{\text{Sehwinkel } \epsilon \text{ mit Instrument}}{\text{Sehwinkel } \epsilon_0 \text{ ohne Instrument}}$$

- $V$  ist i.A. nicht der Abbildungsmaßstab  $B/G$
- Sammellinse mit kurzer, fester Brennweite  $f$
- Gegenstand in Brennebene  $\rightarrow$  paralleles Licht fällt ins Auge, Gegenstand erscheint im Unendlichen
- Virtuelles Bild unter Sehwinkel  $\epsilon = G/f$
- Ohne Lupe: Gegenstand bei  $s_0$  mit  $\epsilon_0 = G/s_0$
- Vergrößerung der Lupe

$$V_L = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = \frac{G}{f} \cdot \frac{s_0}{G} = \frac{s_0}{f}$$

Man kann  $V_L$  noch weiter vergrößern wenn  $g < f$ , das virtuelle Bild erscheint dann im endlichen Abstand  $b$



# Das Mikroskop

- Kombination von zwei Linsen: eine kurzbrennweitige Linse (Objektiv) erzeugt ein reelles Zwischenbild  $B_1$  in der Brennebene des Okulars (Lupe)
- Abbildung der ersten Linse

$$\frac{B_1}{G} = \frac{b}{g}$$

- Linsengleichung

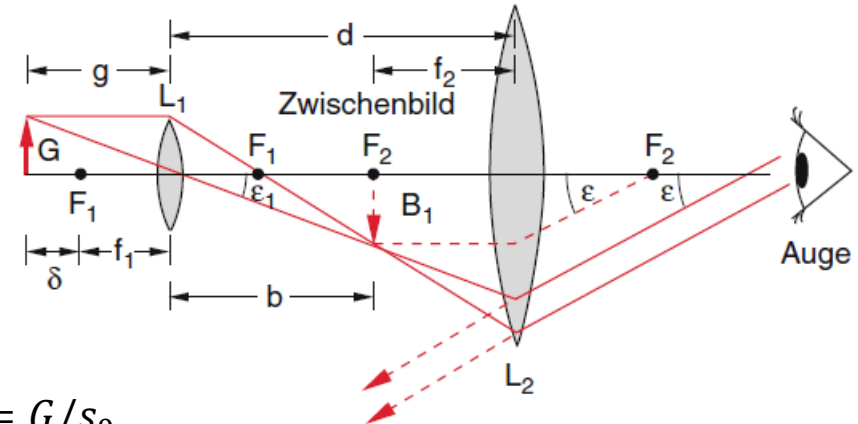
$$\frac{1}{f_1} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b} \rightarrow b = \frac{gf_1}{g-f_1} = \frac{gf_1}{\delta}$$

- Ist  $\delta$  klein wird  $B_1 \gg G$
- Das Okular wirkt als Lupe für  $B_1$

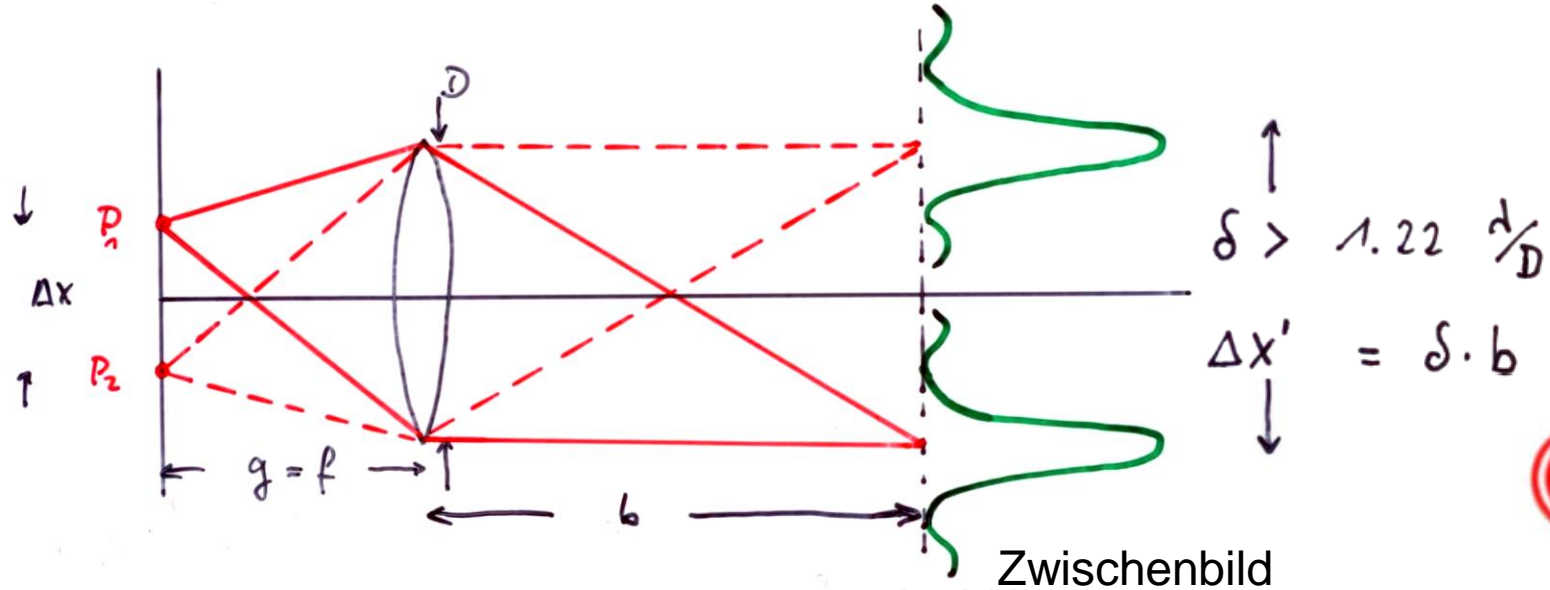
$$\epsilon = \frac{B_1}{f_2} = \frac{G b}{g f_2}$$

- Vergleiche ohne Mikroskop mit  $G$  bei  $s_0, \epsilon_0 = G/s_0$

$$V_M = \frac{G b s_0}{G g f_2} = \frac{b s_0}{g f_2} \quad \text{mit } d = b + f_2 \text{ und } g \approx f_1 \rightarrow V_M = \frac{(d-f_2)s_0}{f_1 f_2}$$

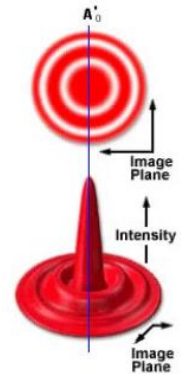


# Beugungsbegrenzung im Mikroskop



Abstand  $\Delta x$  zwischen Gegenständen P

$$\Delta x = \Delta x' \frac{g}{b} \rightarrow \Delta x_{min} = 1.22 \lambda \frac{g}{D} = 1.22 \lambda \frac{f}{D}$$



# Beugungsbegrenzung im Mikroskop

- Maximaler Öffnungswinkel des Objektivs ( $2\alpha$ ) ist gegeben durch die Bedingung

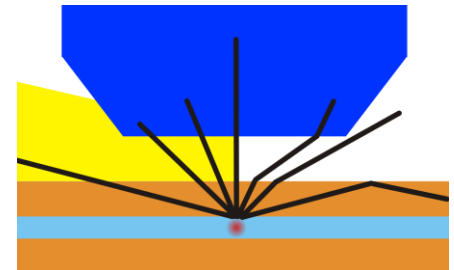
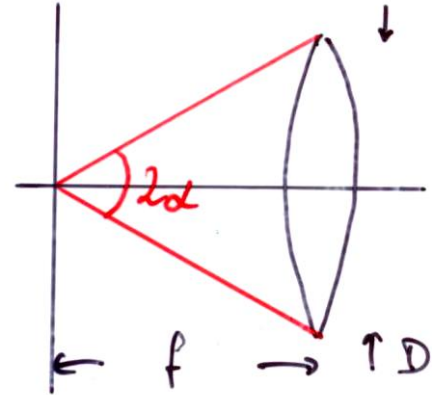
$$2 \sin \alpha = \frac{D}{f}$$

- Falls man ein Medium zwischen Objektiv und Objekt mit  $n > 1$  verwendet wird  $\lambda = \lambda_0/n$  und

$$\Delta x_m = 1.22 \frac{\lambda_0}{2n \sin \alpha} = 0.61 \frac{\lambda_0}{NA}$$

$NA = n \sin \alpha$                       Numerische Apertur

- Auflösung kann durch Immersionsflüssigkeiten verbessert werden



Wikipedia

# Optische Auflösung - Kriterien

- Rayleigh Kriterium: Abstand = Radius

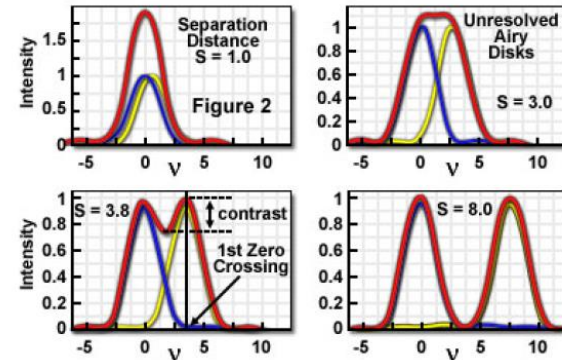
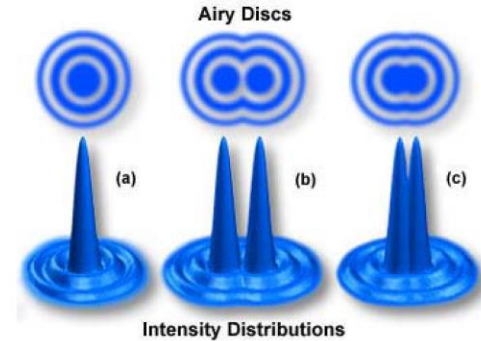
$$\Delta x_m = 0.61 \frac{\lambda_0}{NA}$$

- Sparrow Kriterium: Kontrast 0 (flat top)

$$\Delta x_m = 0.47 \frac{\lambda_0}{NA}$$

- Axiale Auflösung

$$\Delta z_m = \frac{2\lambda_0 n}{NA^2}$$



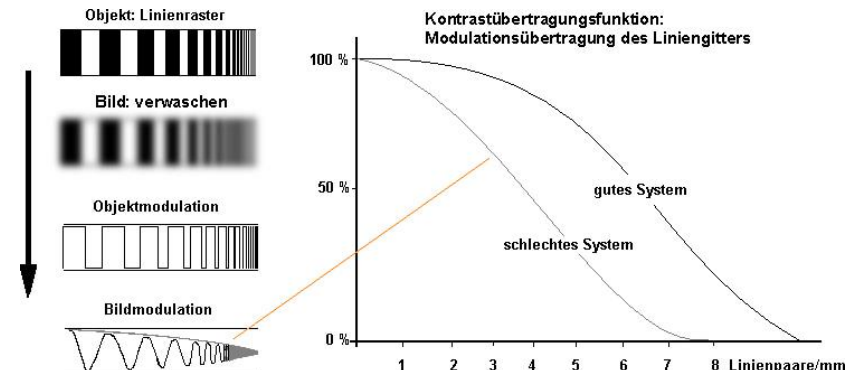
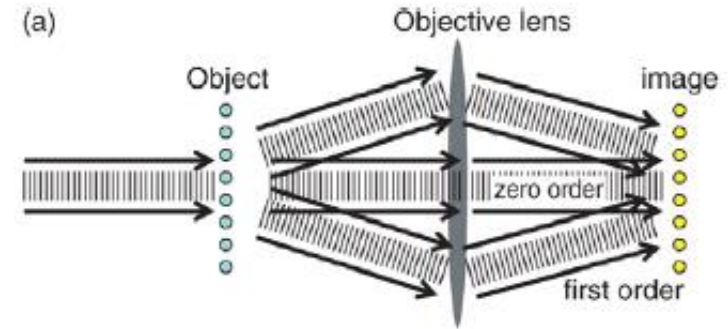
# Abbe'sche Abbildungstheorie

- Abbe (1873) betrachtete das Objekt als Superposition periodischer Strukturen die Beugungserscheinungen verursachen
- Die 0te Beugungsordnung enthält keine Information
- Das Objektiv muss mindestens die +1ste und -1ste Beugungsordnung unter Winkel  $\theta_1$  aufsammeln
- Spaltabstand  $d \rightarrow NA = n \sin \alpha > n \sin \theta_1 = \frac{\lambda}{d}$   
 $\rightarrow d \geq \lambda/NA$

## Modulationstransferfunktion

- Kontrast von Strukturen im Bild vs Gegenstand

$$MTF(v) = \frac{\text{Bildkontrast}(v)}{\text{Objektkontrast}(v)}, v \text{ Ortsfrequenz}$$



# Das Kepler Fernrohr

Vergrößerung von weit entfernten Gegenständen  
 Zwei Sammellinsen mit gemeinsamer Brennebene

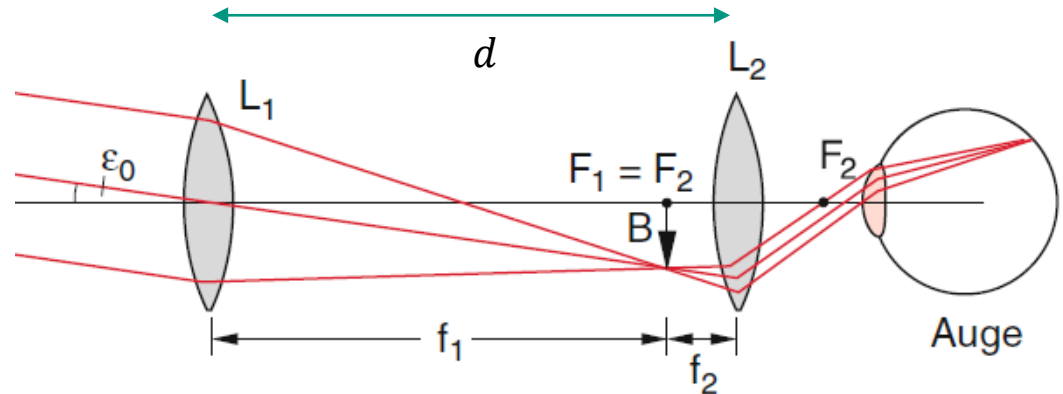
$$d = f_1 + f_2$$

- Das Objektiv hat eine sehr große Brennweite
- Reelles Zwischenbild in der Brennebene des Okulars
- Das Auge sieht ein umgekehrtes Bild im Unendlichen
- Vergrößerung

$$\epsilon = \frac{B}{f_2}$$

$$\epsilon_0 = \frac{B}{f_1}$$

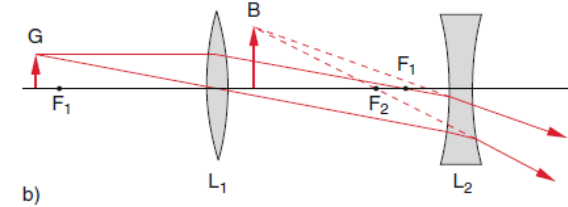
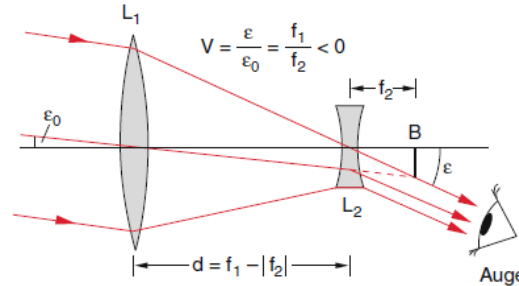
$$V_F = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = f_1/f_2$$



# Galilei'sches Fernrohr und Spiegelteleskope

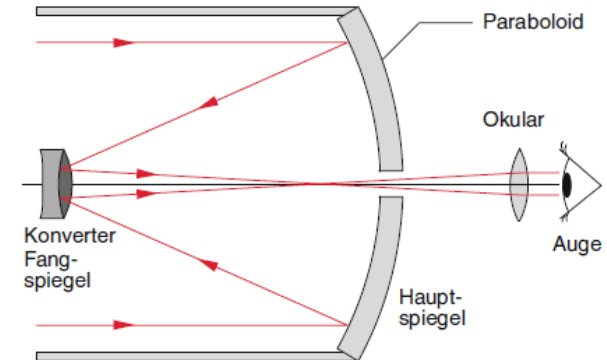
## Galilei'sches Fernrohr

- Zerstreuungslinse als Okular
- Aufrechtes Bild
- Kompaktere Bauweise



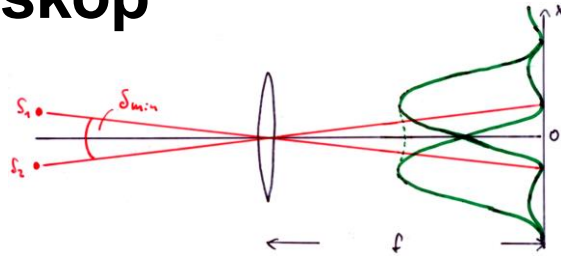
## Spiegelteleskope

- Hohlspiegel können größer hergestellt werden  
→ größere Lichtstärke
- Bsp: Cassegrain Teleskop



# Auflösungsgrenze Teleskop

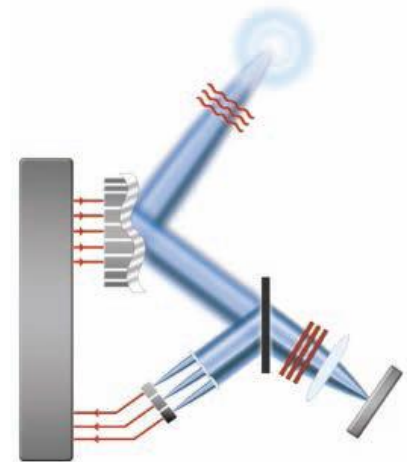
$$\delta_m = \sin \theta_1 = 1.22 \frac{\lambda}{D}$$



## ■ Hubble Space Telescope

$$D = 2.4 \text{ m} \rightarrow \delta_m = 0.052' \text{ bei } \lambda = 500 \text{ nm}$$

- entspricht beugungsbegrenzter Auflösung für  $\Delta x = 100 \text{ m}$  auf dem Mond (Abstand 380000km)
- Turbulenzen in der Atmosphäre verringern Auflösung um Faktor 10 – 100
- Adaptive Optik: Korrektur der deformierten Wellenfront durch verformbaren Spiegel  $\rightarrow$  ermöglicht beugungsbegrenzte Astronomie auf der Erde
- Wellenfrontsensor: Mikrolinsenarray  
Wellenfrontdeformation führt zu Fokusverschiebung



# Anwendungen der Beugung II

- Diffraktive Optik
- Holographie

# Diffraktive Optik

- Ablenkung und Fokussierung durch Beugung statt durch Brechung

## Phasengitter

- Strukturierte Glas- / Polymerplatte
- Streifen mit Breite  $b$ , Höhe  $h$
- periodische Phasenmodulation, fungiert als Beugungsgitter
- Konstruktive Interferenz zwischen benachbarten Strahlen

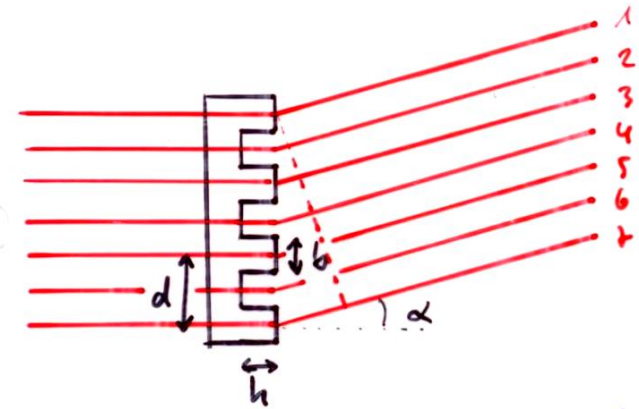
$$\Delta\phi = m \cdot 2\pi, \Delta s = m\lambda$$

- Übernächste Nachbarn (geradzahlig / ungeradzahlig):

$$\Delta s_1 = d \sin \alpha = m_1 \lambda \quad (m_1 = 0, 1, 2, \dots)$$

- Nächste Nachbarn

$$\Delta s_2 = (n - 1)h + \frac{d}{2} \sin \alpha = m_2 \lambda \quad (m_2 = 0, 1, 2, \dots)$$



(\*)

(\*\*)

# Diffraktive Optik

(\*) - (\*\*)

$$(n-1)h - \frac{d}{2} \sin \alpha = (m_2 - m_1)\lambda$$

$$\text{für } (m_2 - m_1) = 0 \quad \rightarrow \sin \alpha_0 = \frac{2(n-1)h}{d}$$

$$\text{für } (m_2 - m_1) = \pm 1 \quad \rightarrow \sin \alpha_0 = \frac{(n-1)h \mp \lambda}{d/2}$$

**Beispiel:** Für  $n = 1.5$ ,  $h = 1 \mu\text{m}$ ,  $b = 1 \mu\text{m}$ ,  $d = 2 \mu\text{m}$

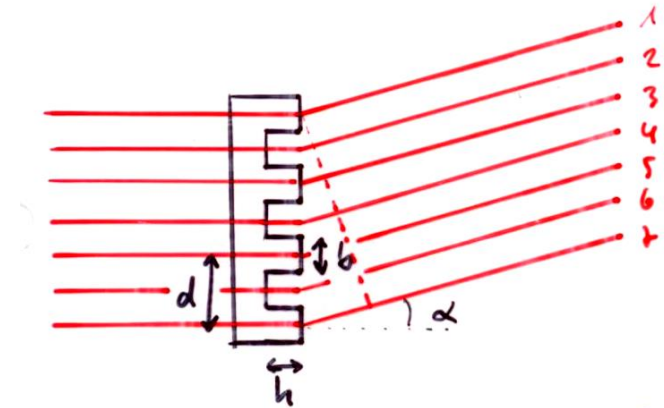
$$(m_2 - m_1) = 0: \sin \alpha_0 = 0.5 \rightarrow \alpha_0 = 30^\circ$$

■ Unabhängig von  $\lambda$  (bis auf  $n(\lambda)$ )

$$(m_2 - m_1) = 1: \quad \alpha_1 = 0^\circ \quad \lambda = 500\text{nm}$$

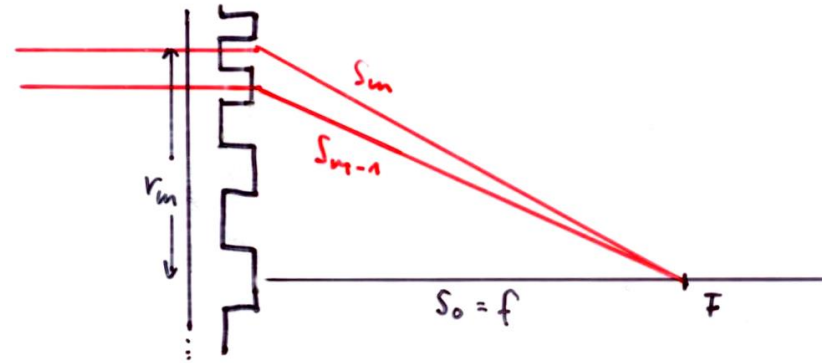
$$(m_2 - m_1) = -1 \quad \alpha_{-1} = 90^\circ$$

→ gerade transmittierter Strahl +  $30^\circ$  abgelenkter Strahl

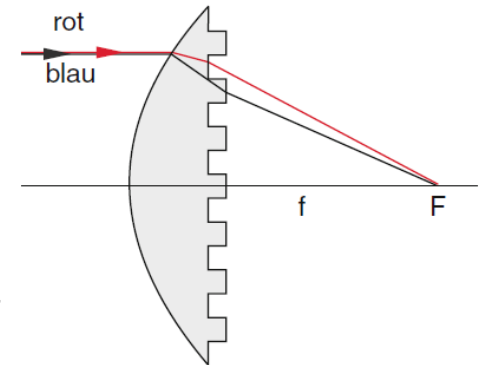


# Fresnel Linse

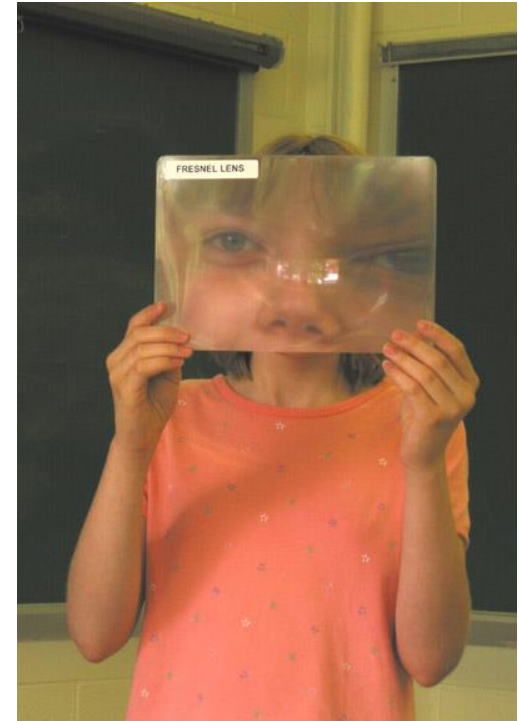
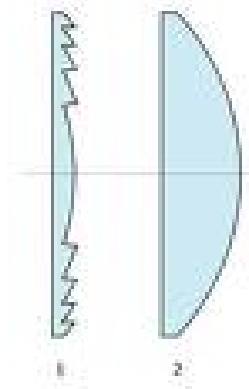
- Konzentrische Vertiefungen / Stege
- Geometrische Weglängendifferenz zwischen benachbarten Zonen  $s_m, s_{m+1}$  ist  $\lambda/2$  (wie Fresnel Zonen)
- Vertiefungen ergeben optische Weglängendifferenz von  $\lambda/2$ :  $(n - 1)h = \lambda/2$
- Resultat: Alle Partialwellen interferieren konstruktiv in  $F$
- Linse mit Brennweite  $f = s_0 = r_1^2 / \lambda$
- Brennweite einer Fresnel Linse wird kleiner mit größerer Wellenlänge (im Gegensatz zu normalen Linsen)



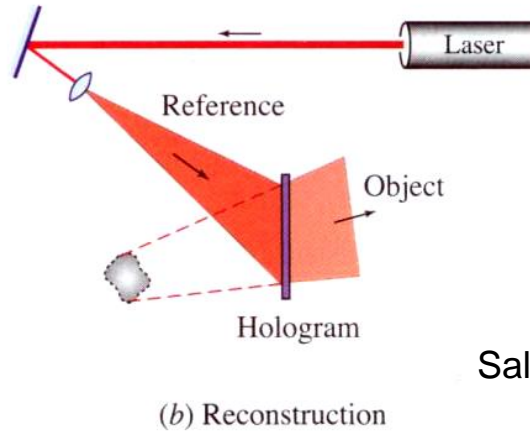
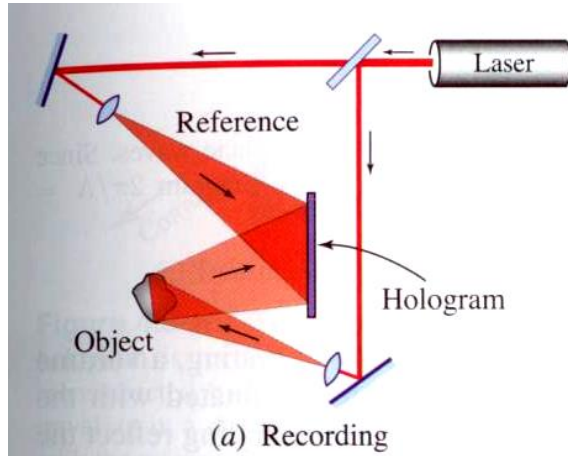
→ Kombination refraktiver und diffraktiver Linsen für achromatische Abbildung



# Fresnel Linse - Beispiele



# Holographie



Dennis Gabor (1900-1979)

Saleh/Teich

**Aufnahme:** - Beleuchtung eines Objekts mit kohärentem Licht  
- Interferenz von Objekt- und Referenzwelle belichtet Film → komplexe Transmission, enthält Phaseninformation

**Rekonstruktion:** Beugung der Referenzwelle am Interferenzmuster erzeugt 3D Bild des Objekts

# Holographie

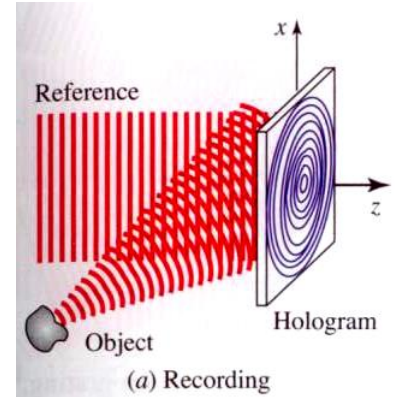
$$E_{ref} = A_{ref} e^{i(\omega t - \vec{k}_{ref} \cdot \vec{r})} \quad \text{Referenzwelle}$$

$$E_{obj} = A_{obj} e^{i(\omega t - \phi_{obj}(x,y))} \quad \text{Objektwelle}$$

- Phase  $\phi_{obj}(x, y)$  hängt von Position der Objektpunkte ab
- Transmissionsfunktion des Hologramms

$$\begin{aligned} t(x, y) &\sim |E_{obj} + E_{ref}|^2 = |E_{obj}|^2 + |E_{ref}|^2 + E_{obj}^* E_{ref} + E_{obj} E_{ref}^* \\ &= I_{obj} + I_{ref} + 2 \sqrt{I_{obj} I_{ref}} \cos(\vec{k}_{ref} \cdot \vec{r} - \phi(x, y)) \end{aligned}$$

Information über Abstand der  
Objektpunkte relativ zur x,y-Ebene



# Holographie

- Jedes Element des Hologramms enthält Information über das gesamte Objekt!
- Rekonstruktion: verwende Referenzwelle um das Hologramm zu beleuchten

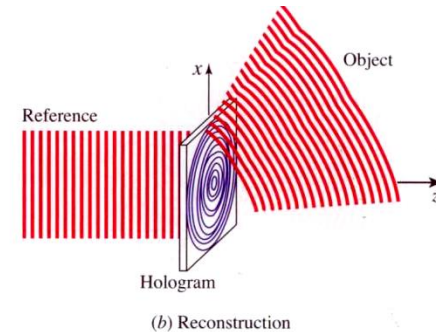
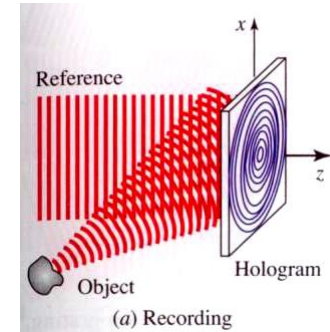
$$E_{rec} = t(x, y)E_{ref} \sim E_{ref} I_{ref} + E_{ref} I_{obj} + I_{ref} E_{obj} + E_{ref}^2 E_{obj}^*$$

- Referenzwelle ist eine ebene Welle entlang z, also konstant in x,y

$$E_{ref}(x, y) = const$$

- teile  $E_{rec}$  durch  $E_{ref}$

$$E(x, y) \sim I_{ref} + I_{obj} + \sqrt{I_{ref}} E_{obj}(x, y) + \sqrt{I_{ref}} E_{obj}^*(x, y)$$



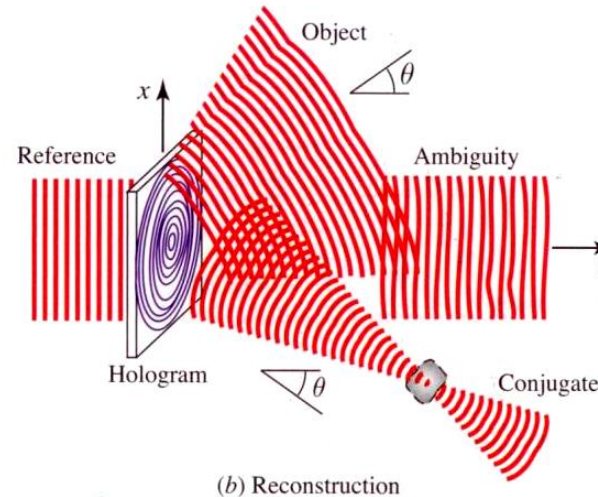
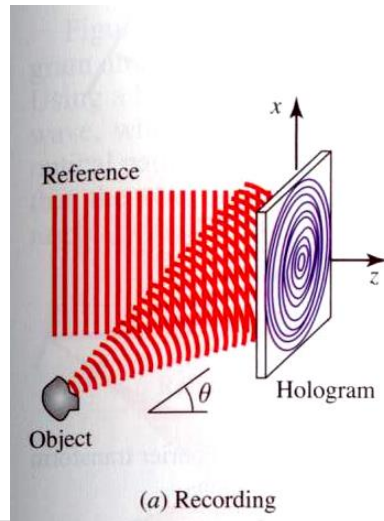
# Holographie

originale Objektwelle  $\rightarrow$  virtuelles Bild

$$E(x, y) \sim \underbrace{I_{ref} + I_{obj}}_{\text{Modulierte Referenzwelle}} + \underbrace{\sqrt{I_{ref} E_{obj}(x, y)}}_{\text{virtuelles Bild}} + \underbrace{\sqrt{I_{ref} E_{obj}^*(x, y)}}_{\text{reelles Bild}}$$

Modulierte Referenzwelle

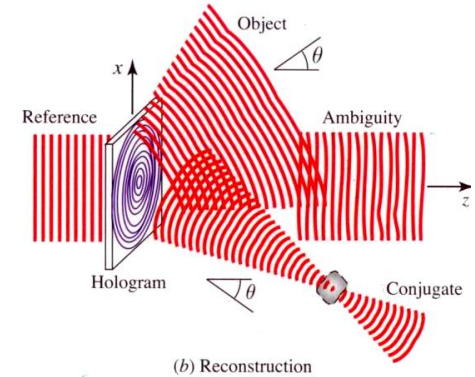
konjugierte Objektwelle  $\rightarrow$  reelles Bild



# Holographie

- Verschiedene Wellen müssen räumlich getrennt werden:  
→ Beleuchtung unter Winkel
- Betrachte Objektwelle mit komplexer Amplitude  

$$E_{obj}(x, y) = A_{obj} e^{ikx \sin \theta}$$
- Phasenfaktor für verkippte Welle mit Winkel  $\theta$
- Für langsam variierende Einhüllende  $A_{obj}(x, y)$



$$E(x, y) \sim I_{ref} + |A_{obj}|^2 + \underbrace{\sqrt{I_{ref}} A_{obj}(x, y) e^{-ikx \sin \theta}}_{\text{originale Objektwelle} \rightarrow \text{Winkel } \theta} + \underbrace{\sqrt{I_{ref}} A_{obj}^*(x, y) e^{+ikx \sin \theta}}_{\text{konjugierte Objektwelle} \rightarrow \text{Winkel } -\theta}$$

originale Objektwelle  $\rightarrow$  Winkel  $\theta$

konjugierte Objektwelle  $\rightarrow$  Winkel  $-\theta$

# Weißlichtholographie

**Erzeugung:** Beleuchtung mit Laser in spezieller Konfiguration

- Objekt und Referenzwelle aus entgegengesetzten Richtungen
- Interferenz führt zu parallelen geschwärzten Schichten

**Rekonstruktion:** inkohärentes Weißlicht möglich

- Bragg Beugung an periodischem Gitter selektiert passende Wellenlänge und erzeugt Hologramm
- Ändert man den Einfallswinkel, so ändert sich die Farbe

**Farbige Hologramme:** verwende verschiedene Laserfarben (rot, grün, blau) zur Erzeugung in verschiedenen Tiefen

- → additive Farbmischung bei Beleuchtung mit Weisslicht

