HAUPTKLAUSUR PHYSIK III
(WS 2006/07)

5.2.2007 9.00 – 11.00 Uhr

Name :
Vorname :
Matrikel-Nr. :
Studienfach :
Semester :
Übungsgruppe :
Tutor :

Aufgabe	Max. Punktzahl	Erreichte Punktzahl
1	10	
2	10	
3	10	
4	10	
5	10	
Σ	50	

Studierendenausweis oder Personalausweis sind vorzulegen.

Erlaubte Hilfsmittel: keine.

Der Lösungsweg muss nachvollziehbar sein und Endformeln sind herzuleiten.

Aufgabe 1: (10 Punkte)

Elektronen eines Metalls werden durch ein elektrisches Feld der Form $E(t) = E_0 e^{-i\omega t}$ angeregt. Die Elektronen (Dichte N/V, Elementarladung $-e$, Masse m) können dabei als *freie* Elektronen mit vernachlässigbarer Dämpfung betrachtet werden. Stellen Sie für diese Situation die Newtonsche Bewegungsgleichung auf.
Bestimmen Sie hieraus $x(t)$, das Dipolmoment $d(t)$ und die makroskopische Polarisation $P(t)$. Zeigen Sie weiter, dass die dielektrische Funktion $\epsilon(\omega)$ gegeben ist durch

$$\epsilon(\omega) = 1 - \frac{e^2 N/V}{m\epsilon_0\omega^2}.$$

Oberhalb einer bestimmten Frequenz ω_p wird das Metall für die elektromagnetische Strahlung transparent. Drücken Sie ω_p als Funktion der obigen Größen aus.

Bew. gl.: $m\ddot{x} = -e\,E(t) = -e\cdot E_0\cdot e^{-i\omega t}$ $\qquad x(t) = x_0 e^{-i\omega t}$

$\qquad \ddot{x}(t) = -x_0\omega^2 e^{-i\omega t}$

$-m x_0 \omega^2 \cancel{e^{-i\omega t}} = -e E_0 \cancel{e^{-i\omega t}}$

$x_0 = \frac{eE_0}{m\omega^2} \longrightarrow x(t) = \frac{eE_0}{m\omega^2} e^{-i\omega t}$

Dipolmom.: $d(t) = -e\,x(t) = -\frac{e^2 E_0}{m\omega^2} e^{-i\omega t}$

Polarisation: $P(t) = \frac{N}{V} d(t) = n\cdot d(t) = -\frac{n e^2 E_0}{m\omega^2} e^{-i\omega t}$

$\varepsilon = 1 + \chi$

$\chi = \varepsilon - 1$

diel. Funktion: $P(t) = \varepsilon_0 \chi(\omega) E(t) = \varepsilon_0 (\varepsilon(\omega) - 1) E(t)$

$\Rightarrow \varepsilon(\omega) = 1 - \frac{e^2 n}{m\omega^2\varepsilon_0}$

transparent für n = reell $\Leftrightarrow$ $\varepsilon \geq 0$

$1 - \frac{e^2 n}{m\omega^2\varepsilon_0} \geq 0$ $\qquad \omega_p$

$1 - \frac{e^2 n}{m\omega_p^2\varepsilon_0} = 0$ (Grenzfall s. Aufgabentext)

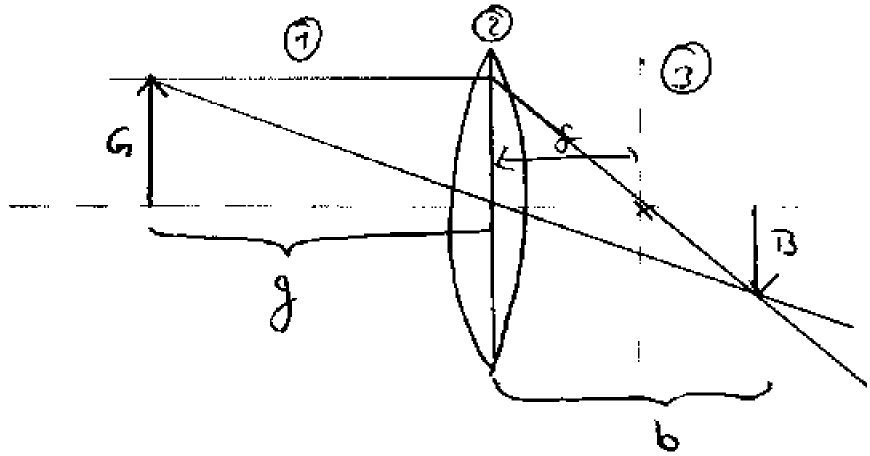
$\omega_p = \sqrt{\frac{e^2 n}{m\varepsilon_0}}$

Aufgabe 2: (10 Punkte)

Vor einer konvexen Linse der Brennweite f befindet sich im Abstand g ein Gegenstand der Größe G. Konstruieren Sie zeichnerisch das Bild des Gegenstands. Berechnen Sie mit Hilfe der Matrixoptik die Bildweite b und die Bildgröße B in der Bildebene in Abhängigkeit von g und G.

Hinweis: Überlegen Sie, welche der unten dargestellten Matrizen M_1 und M_2 in welcher Reihenfolge verwendet werden müssen. Durch welche Bedingung wird die Bildebene charakterisiert?

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix}; \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} G \\ \varphi_g \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} B \\ \varphi_b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} B \\ \varphi_b \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{3} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix}}_{2} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & g \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{1} \begin{pmatrix} G \\ \varphi_g \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1-\frac{b}{f} & b \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & g \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} G \\ \varphi_g \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1-\frac{b}{f} & g-b(\frac{g}{f}-1) \\ -\frac{1}{f} & -\frac{g}{f}+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} G \\ \varphi_g \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad B = (1-\frac{b}{f})G + [g-b(\frac{g}{f}-1)]\varphi_g$$

für Bildebene muss B unabh. von φ_g, also [ ] = 0 sein:

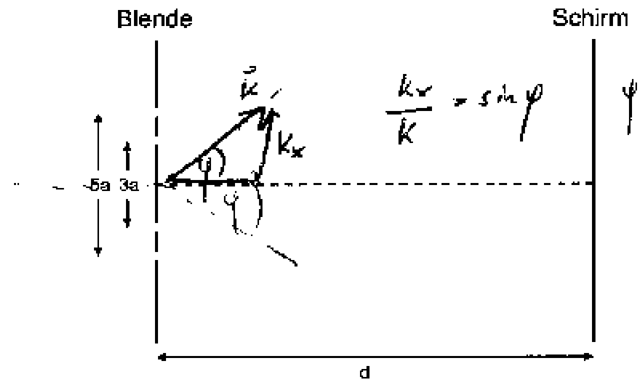
$$g = b(\frac{g}{f}-1) \Rightarrow b = \frac{g}{g/f-1} = \frac{g\cdot f}{g-f}$$

$$\Rightarrow \quad B = \left(1-\frac{1}{\cancel{f}}\cdot\frac{g\cdot\cancel{f}}{g-f}\right)G = \left(\frac{g-f-g}{g-f}\right)G = \frac{f}{f-g}G$$

Aufgabe 3: (10 Punkte)

→ wichtiger: φ klein, d.h. $a \gg \lambda$

Berechnen und skizzieren Sie für die gezeigte Anordnung von Spalten das Beugungsbild auf einem Schirm im Abstand $d \gg \lambda$. Für die Breite b der einzelnen Spalte können Sie $b \ll \lambda \ll a$ annehmen. Die Spalte werden durch eine von links einfallende, ebene monochromatische Welle der Wellenlänge λ beleuchtet.



φ klein $\rightarrow \frac{k_x}{k} \approx \varphi$

$k_x = \frac{2\pi}{\lambda}\varphi$

$k_x a \stackrel{!}{=} m\pi$ f. Max

$\Rightarrow \varphi_{max} = m\frac{\lambda}{2a}$

Fraunhoferbeugung & δ-Spalte:

$$\frac{I}{I_0} = \left| \int_{-\infty}^{\infty} T(x)\, e^{ik_x x}\, dx \right|^2 \quad \text{mit } T(x) = \delta\left(x - \frac{5a}{2}\right) + \delta\left(x + \frac{5a}{2}\right) + \delta\left(x - \frac{3a}{2}\right) + \delta\left(x + \frac{3a}{2}\right)$$

$$= \left| e^{-ik_x \frac{5a}{2}} + e^{ik_x \frac{5a}{2}} + e^{-ik_x \frac{3a}{2}} + e^{+ik_x \frac{3a}{2}} \right|^2$$

$$= \left| 2\cos\left(k_x \frac{5a}{2}\right) + 2\cos\left(k_x \frac{3a}{2}\right) \right|^2$$

Add th.

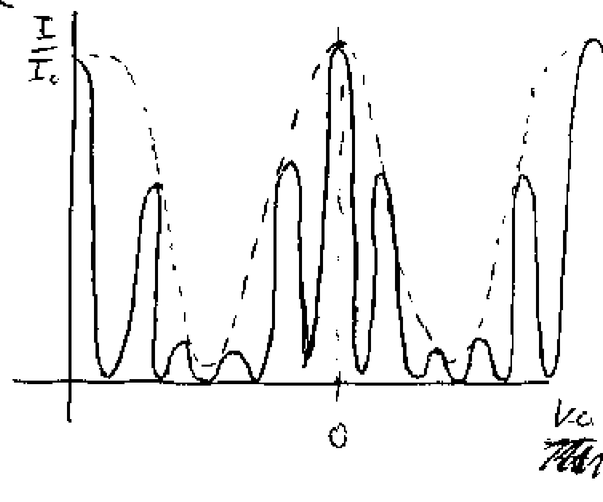
$\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2 \cdot \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$

$$= 16 \left| \cos\left(\frac{k_x}{2}\left(\frac{5a}{2} - \frac{3a}{2}\right)\right) + \cos\left(\frac{k_x}{2}\left(\frac{5a}{2} + \frac{3a}{2}\right)\right) \right|^2$$

$$= 16 \left| \cos\left(\frac{k_x}{2}\left(\frac{2a}{2}\right)\right) + \cos\left(\frac{k_x}{2}\left(\frac{8a}{2}\right)\right) \right|^2$$

$$= 16 \left| \cos\left(\frac{k_x}{2} \cdot a\right) + \cos\left(\frac{k_x}{2} \cdot 4a\right) \right|^2$$

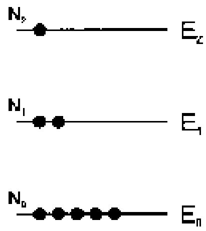
$$= 16 \cdot \cos^2\left(\frac{k_x a}{2}\right) + \cos^2(2k_x a)$$



Aufgabe 4: (10 Punkte)

Insgesamt N Partikel seien auf drei diskrete Energiezustände der Energien $E_0 = 0$, $E_1 = kT$ und $E_2 = 2kT$ verteilt. Im thermischen Gleichgewicht habe das System eine Gesamtenergie von $1000kT$. Berechnen Sie daraus die Anzahl der Partikel $N = N_0 + N_1 + N_2$.

(*Hinweis:* Leiten Sie zunächst die Endformel ab und nähern Sie schließlich zur numerischen Berechnung von N die Eulersche Zahl durch $e \approx 3$.)



im therm. Glgew.: $\frac{N_1}{N_0} = e^{-\frac{\Delta E}{kT}}$ $\qquad \frac{N_2}{N_1} = e^{-\frac{\Delta E}{kT}}$ $\qquad$ hier $\Delta E = \text{const.} = kT$

$$\Rightarrow \frac{N_1}{N_0} = e^{-1} \qquad \frac{N_2}{N_1} = e^{-1}$$

$$\Rightarrow \frac{N_2}{N_0} = e^{-2}$$

$\hookrightarrow$ $\quad N = N_0 + N_1 + N_2 = \left(1 + e^{-1} + e^{-2}\right) N_0 \qquad (*)$

$$E_{ges} = N_0 \cdot E_0 + N_1 \cdot E_1 + N_2 \cdot E_2$$
$$= 0 + N_1\, kT + N_2 \cdot 2kT$$
$$= \left(e^{-1} + 2e^{-2}\right) kT \cdot N_0 \quad \Rightarrow N_0 = \frac{1}{\left(e^{-1} + 2e^{-2}\right)} \cdot \frac{E_{ges}}{kT}$$

einsetzen in $(*)$: $\quad N = \left(1 + e^{-1} + e^{-2}\right) / \left(e^{-1} + 2e^{-2}\right) \cdot \frac{E_{ges}}{kT}$

$$= \frac{1 + \frac{1}{e} + \frac{1}{e^2}}{\frac{1}{e} + \frac{2}{e^2}} \cdot \frac{E_{ges}}{kT}$$

$$= \frac{1 + e + e^2}{e + 2} \cdot \frac{E_{ges}}{kT}$$

einsetzen mit $e \approx 3$: $\quad N \approx \frac{13}{5} \cdot 1000 \cancel{kT} = 2600 \cancel{kT}$

$E_g = 1000\,kT$

Aufgabe 5: (10 Punkte)

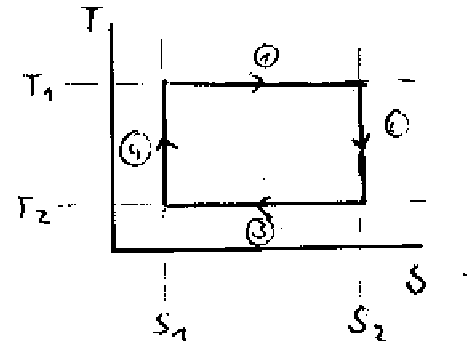
In der Vorlesung wurde eine periodisch arbeitende Wärmekraftmaschine durch einen idealisierten Kreisprozess mit vier Prozessschritten beschrieben (Carnot-Maschine).

a) Erläutern Sie die Prozessschritte in einem T-S-Diagramm (Temperatur T gegen Entropie S) und beginnen Sie dabei im komprimierten Zustand (Druck p_1, Volumen V_1) hoher Temperatur T_1.

b) Wie groß sind laut 1. Hauptsatz die Änderungen der inneren Energie dU und der zugeführten Wärme δQ in jedem der Teilschritte?

c) Skizzieren Sie den Kreisprozess in einem p-V-Diagramm. Welchen funktionellen Verlauf hat der Druck p als Funktion des Volumens V bei 1) isothermer Prozessführung und 2) adiabatischer Prozessführung für ein ideales monoatomares Gas? (Fassen Sie jeweils die konstanten Größen in eine einzige Konstante zusammen)

a)



(1) isotheme Expansion: ~~(konstant)~~ $dU = \cancel{\text{const}}\ 0$ — $p_1 \to p_2$, $V_1 \to V_2$, $T_1 \to T_1$, $S_1 \to S_2$

(2) adiabatische Expansion: ~~(konstant)~~ $\cancel{dS = \text{const}}\ \delta Q = 0$ — $p_2 \to p_3$, $V_2 \to V_3$, $T_1 \to T_2$, $S_2 \to S_2$ (Abkühlung)

(3) isoth. Kompression — $p_3 \to p_4$, $V_3 \to V_4$, $T_2 \to T_2$, $S_2 \to S_1$

(4) adiab. Kompression — $p_4 \to p_1$, $V_4 \to V_1$, $T_2 \to T_1$ (Erwärmung), $S_1 \to S_1$

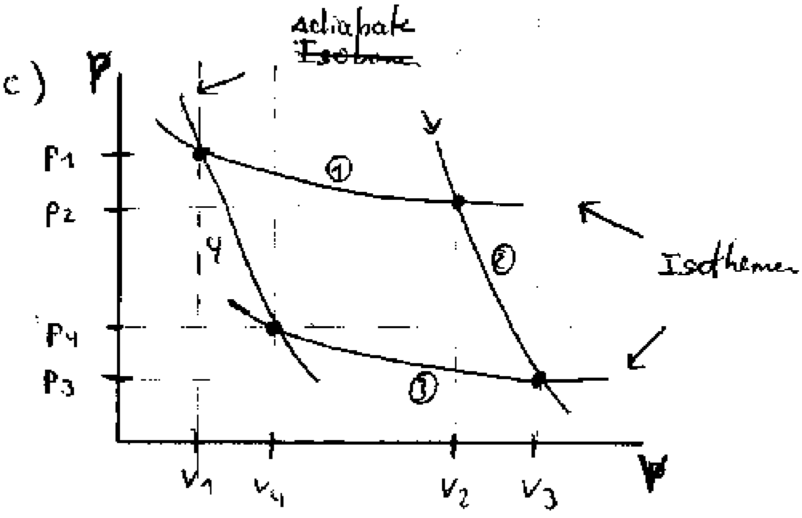
b) 1. HS: $dU = \delta Q + \delta A$

(1) $dU = 0 \Rightarrow \delta Q = -\delta A = p\,dV$

(2) $\delta Q = 0 \Rightarrow dU = \delta A = -p\,dV$

(3), (4) analog.

c)



Isotheme (1, 3):

$$pV \overset{\text{IG}}{=} nRT \Rightarrow p = \frac{C_1}{V} = C_1 \cdot V^{-1}$$

Adiabate ~~Isobare~~ (1, 3)

$$pV^{\kappa} = C_2 \quad \text{mit } \kappa = \frac{c_p}{c_V} = \frac{f+2}{f} = \frac{5}{3}$$

$$p = \frac{C_2}{V^{5/3}} = C_2 \cdot V^{-5/3}$$