KLAUSUR PHYSIK III

WS 2007/08 7. Februar 2008 15^{00} - 17^{00} Uhr

Name	Vorname

Zahl der Zusatzblätter [ ] Übungsgruppen-Nr. [ ]

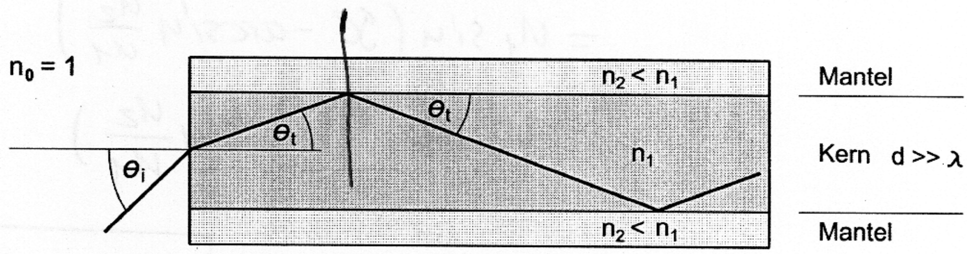
Aufgabe	max. Punktzahl	erreichte Punktzahl
1	7	
2	7	
3	7	
4	7	
5	7	
Σ	35	

Bitte Personalausweis oder Studentenausweis bereitlegen

Erlaubte Hilfsmittel: keine

Aufgabe 1 **(7 Punkte)**

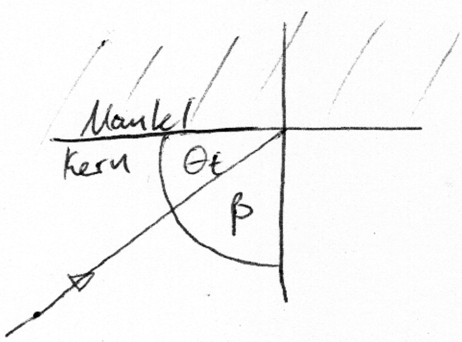
Ein Schichtwellenleiter habe einen Kern mit Brechungsindex $n_1 > 1$ und einen Mantel mit Brechungsindex $n_2 < n_1$.



a) Wie groß ist der maximale Einfallswinkel $\Theta_{i,\,max}$, den auf die Stirnseite einfallendes Licht haben darf, damit es im Wellenleiter noch geführt wird? ($\Theta_{i,\,max} = ...$)

b) Verwenden Sie $\sin(90° - x) = \cos x$ und $(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$, um damit $n_0 \sin\Theta_{i,\,max}$, die sogenannte *numerische Apertur des Wellenleiters*, als Funktion der Brechungsindices n_1, n_2 so auszudrücken, dass diese Funktion keine trigonometrische Funktionen mehr enthält.

a) Totalreflexion $\boxed{\sin\alpha_G = \frac{n_{dünn}}{n_{dick}} = \frac{n_2}{n_1}}$



Bedingung $\beta \overset{!}{\geq} \alpha_G$ sein

$$\beta_{min} = \alpha_G \Rightarrow \sin\beta_{min} = \sin(90° - \Theta_{t,max}) = \sin\alpha_G = \frac{n_2}{n_1}$$

$$\Rightarrow \Theta_{t,max} = 90° - \arcsin\frac{n_2}{n_1}$$

dann mit Snellius

$$n_0 \sin\Theta_{i,max} = n_1 \sin\Theta_{t,max}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\Theta_{i,max}}} = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_0}\sin\Theta_{t,max}\right)$$

$$= \arcsin\left\{\frac{n_1}{n_0}\left[\sin\left(90° - \arcsin\frac{n_1}{n_0}\right)\right]\right\}$$

zu Aufgabe 1

b) Snellius:

$$n_0 \sin \theta_{i,max} = n_1 \sin \theta_{t,max}$$

$$= n_1 \sin\left(90° - \arcsin \frac{n_2}{n_1}\right)$$

$$= n_1 \cos\left(\arcsin \frac{n_2}{n_1}\right)$$

mit $(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1 \Rightarrow \cos x = \sqrt{1-(\sin x)^2}$

$$\Rightarrow n_0 \sin \theta_{i,max} = n_1 \sqrt{1-\left(\sin\left(\arcsin \frac{n_2}{n_1}\right)\right)^2}$$

$$= n_1 \sqrt{1-\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}$$

$$\Rightarrow n_0 \sin \theta_{t,max} = n_1 \sqrt{1-\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2} = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$$

Aufgabe 2 **(7 Punkte)**

Ein 6 mm breites Transmissionsbeugungsgitter mit 100 äquidistanten Spalten wird von einem roten Laser bestrahlt (senkrechter Einfall) und das Beugungsbild auf einem Schirm in $L = 1\,\text{m}$ Entfernung aufgefangen. Der Abstand der Hauptmaxima nahe der Achse auf dem Schirm betrage $\Delta x = 10\,\text{mm}$.

a) Berechnen Sie die Wellenlänge λ_0 des roten Lasers (Zahlenwert in nm).

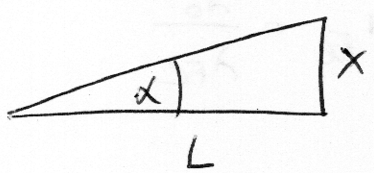
b) Über einen Strahlteiler wird das Gitter zusätzlich mit einem grünen Laser bestrahlt. Das rote Hauptmaximums fünfter Ordnung falle gerade mit dem grünen Hauptmaximum sechster Ordnung zusammen. Welche Wellenlänge hat der grüne Laser? (Zahlenwert in nm)

c) Die Anordnung wird in ein Flüssigkeitsbad eingetaucht. Dabei verringern sich die Abstände der roten Hauptmaxima auf $\Delta x_W = 8\,\text{mm}$. Wie groß ist der Brechungsindex der Flüssigkeit? (Zahlenwert)

a) Hauptmaxima beim Gitter

(1) $m\dfrac{\lambda}{g} = \sin\alpha_m \overset{\alpha > 10^\circ \text{ (klein)}}{\approx} \alpha_m$, $g =$ Spaltabstand $= \dfrac{6\,\text{mm}}{100}$

Geometrie:



(2) $\dfrac{x}{L} = \tan\alpha \overset{\alpha > 10^\circ \text{ (klein)}}{\approx} \alpha$

$\Rightarrow$ Maxima bei $x_m = m\Delta x \Rightarrow \alpha_m = \dfrac{x_m}{L} = \dfrac{m\Delta x}{L}$

$(1) \overset{!}{=} (2) \Rightarrow m\dfrac{\lambda}{g} = \dfrac{m\Delta x}{L} \Rightarrow \boxed{\lambda = g\dfrac{\Delta x}{L}}$

$\Rightarrow \lambda = 600\,\text{nm}$

zu Aufgabe 2

b)

$$x_{5,\text{rot}} = 5\frac{\lambda_{\text{rot}}}{g} \overset{!}{=} x_{6,\text{grün}} = 6\frac{\lambda_{\text{grün}}}{g}$$

$$\Rightarrow \lambda_{\text{grün}} = \lambda_{\text{rot}}\frac{5}{6} = 600\,\text{nm}\cdot\frac{5}{6} = \underline{\underline{500\,\text{nm}}}$$

c)

$$\lambda_{Fl} = g = \frac{\Delta x_{Fl}}{L}$$

$$n_{Fl} \Rightarrow \text{aus } \omega = ck = c\frac{2\pi}{\lambda} = c_0\frac{2\pi}{\lambda}$$

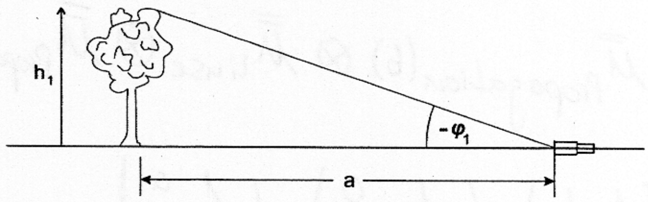
$$= \frac{2\pi}{\lambda_{Fl}}c_{Fl} = \frac{c_0}{n_{Fl}}\frac{2\pi}{\lambda_{Fl}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\lambda_0} = \frac{1}{n_{Fl}}\frac{1}{\lambda_{Fl}} \Rightarrow n_{Fl} = \frac{\lambda_0}{\lambda_{Fl}}$$

$$\Rightarrow n_{Fl} = \frac{g\cdot\frac{\Delta x}{L}}{g\cdot\frac{\Delta x_{Fl}}{L}} = \frac{\Delta x}{\Delta x_{Fl}} = \underline{\underline{1{,}25}}$$

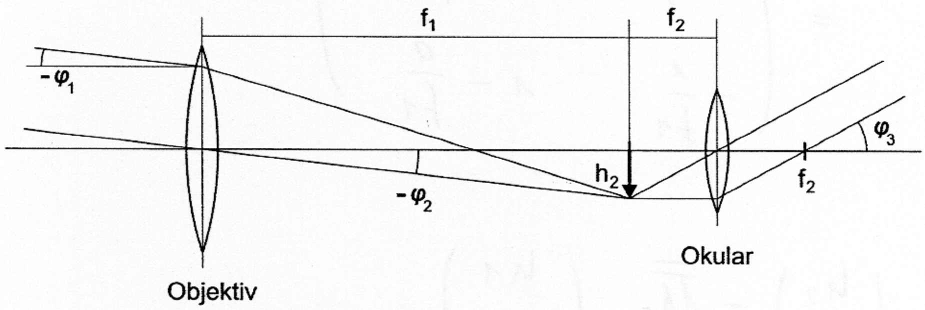
Aufgabe 3 **(7 Punkte)**

Mit einem Fernrohr wird ein Objekt h_1 betrachtet, das sehr viel größer ist als die Öffnungsweite des Objektivs. Der Winkel φ_1 ist zwar klein, aber größer Null: $\varphi_1 > 0$.



Die Zeichnung ergibt: $-\varphi_1 = h_1/a$ (Minuszeichen, da der Winkel φ_1 von der nach rechts laufenden Achse nach oben gezählt wird.) Die Näherung der Matrixoptik $\tan\varphi = \varphi$ sei auch im Folgenden immer gültig.

Die Objektivlinse des Fernrohrs (Brennweite f_1) bildet das Objekt in ein reelles Zwischenbild ab, das wegen der Größe des Abstands a nahezu in der Brennebene f_1 steht. Das Zwischenbild wird mit dem Okular (Brennweite f_2) betrachtet. Für entspanntes Sehen (parallel austretende Strahlen) befindet sich das Zwischenbild auch in der Brennebene f_2 des Okulars.



a) Berechnen Sie die Abbildungsmatrix $\overline{\overline{M}}$ der Objektivabbildung und aus $\begin{pmatrix} h_2 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \overline{\overline{M}} \begin{pmatrix} h_1 \\ \varphi_1 \end{pmatrix}$ die Bildgröße $h_2 = f(h_1, \varphi_1)$ und den Winkel $\varphi_2 = f(h_1, \varphi_1)$.

Hinweis: $\overline{\overline{M}}_{Propagation} = \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\overline{\overline{M}}_{Linse} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_1} & 1 \end{pmatrix}$.

b) Rechnen Sie φ_2 mit dem gegebenen φ_1 aus. Vergleichen Sie mit der Zeichnung.

c) Setzen Sie $-\varphi_2$ mit der Objektivbrennweite f_1 und der Bildgröße h_2 in Beziehung und berechnen Sie die Winkelvergrößerung φ_3/φ_2.

Die (Winkel-) Vergrößerung M des Fernrohrs ist das Verhältnis des Winkels φ_3, mit dem das Auge das Zwischenbild durch das Okular sieht, zum Winkel φ_1, mit dem das Auge das Objekt ohne Fernrohr sieht. Wie groß ist M?

Aufgabe 3

a) <u>Matrixoptik:</u>

$$\bar{\bar{M}}_{Ges} = \bar{\bar{M}}_{Propagation}(b) \otimes \bar{\bar{M}}_{Linse} \otimes \bar{\bar{M}}_{Propagation}(a)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_1} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ -\frac{1}{f_1} & -\frac{a}{f_1}+1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1-\frac{b}{f_1} & a-\frac{ba}{f_1}+b \\ -\frac{1}{f_1} & 1-\frac{a}{f_1} \end{pmatrix}$$

mit $\begin{pmatrix} h_2 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \bar{\bar{M}}_{Ges} \begin{pmatrix} h_1 \\ \varphi_1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \quad h_2 = \left(1-\frac{b}{f_1}\right) h_1 \quad$ und $\quad \varphi_2 = -\frac{h_1}{f_1} + \left(1-\frac{a}{f_1}\right)\varphi_1$

b) mit $\varphi_1 = -\frac{h_1}{a}$

und von a) $\varphi_2 = -\frac{h_1}{f_1} + \left(\frac{h_1}{a} - \left(\frac{a}{f_1}\right)\left(\frac{h_1}{a}\right)\right) = -\frac{h_1}{a} = \varphi_1$

Aus Zeichnung folgt auch:

$$\underline{\underline{\varphi_1 = \varphi_2}}$$

noch für Aufgabe 3

c) aus Zeichnung:

$$-\varphi_2 \approx \tan(-\varphi_2) = \frac{h_2}{f_1}$$

$$\varphi_3 \approx \tan(\varphi_3) = \frac{h_2}{f_2}$$

$$\Rightarrow \frac{\varphi_3}{\varphi_1} = \frac{h_2}{h_1} \cdot \left(-\frac{f_1}{h_2}\right) = -\frac{f_1}{f_2}$$ (– heißt, dass das Bild auf dem Kopf steht)

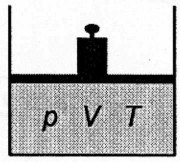
Das Auge sieht das Objektiv unter dem Winkel φ_1

mit b) $\Rightarrow \varphi_1 = \varphi_2 \Rightarrow M = \frac{\varphi_3}{\varphi_1} = \frac{\varphi_3}{\varphi_2} = -\frac{f_1}{f_2}$

d.h. Gesamtvergrößerung $\stackrel{!}{=}$ Winkelvergrößerung

Aufgabe 4 **(7 Punkte)**

Ein mit einem beweglichen Kolben verschlossenes Zylindergefäß enthalte ein ideales Gas mit dem Ausgangszustand Druck p_0, Volumen V_0 und Temperatur $T_0 = 300\,\mathrm{K}$. Die nachfolgenden Prozesse seien alle reversibel geführt.

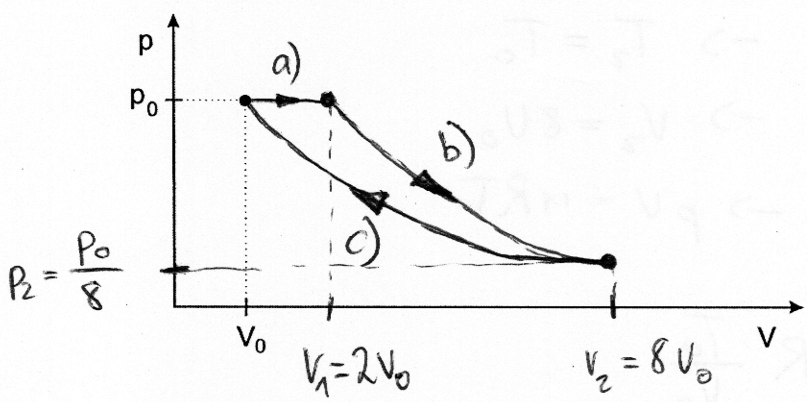


a) Das Gas werde auf $T_1 = 600\,\mathrm{K}$ erwärmt.
Welches Volumen V_1 nimmt es dann ein (in Einheiten von V_0)?

b) Das Gas werde nun adiabatisch expandiert, so dass seine Temperatur auf $T_2 = T_0 = 300\,\mathrm{K}$ fällt.
Welches Volumen V_2 hat das Gas dann (in Einheiten von V_0)? Der Adiabatenexponent betrage $C_p/C_V = 1,5$.
Welchen Druck p_2 hat das Gas (in Einheiten von p_0)?

c) Das Gas werde nun isotherm komprimiert, bis wieder der ursprüngliche Druck p_0 erreicht ist.
Wie groß ist sein Volumen V_3 (in Einheiten von V_0)?

d) Zeichnen Sie die drei Prozesswege in ein p-V-Diagramm.



a) ideales Gas $\boxed{pV = nRT} = k_B N T$

Isobare Expansion $\Rightarrow p = \text{const}$

mit den idealen Gas Gleichungen folgt:

$$\frac{V_1}{V_0} = \frac{T_1}{T_0} \Rightarrow V_1 = V_0 \frac{T_1}{T_0} = 2\,V_0$$

zu Aufgabe 4

b) Adiabatische Expansion mit $\kappa = 1,5 = \frac{c_p}{c_v}$

• 1) $V_2 = ?$ $\rightarrow$ Poissongl. $T V^{\kappa-1} = const$

$\rightarrow T_2 = T_0$

$$\Rightarrow T_0 V_2^{\kappa-1} = T_1 V_1^{\kappa-1} \Rightarrow \frac{T_1}{T_0} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\kappa-1}$$

$$\Rightarrow V_2 = V_1 \left(\frac{T_1}{T_0}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}}$$

$$= \underline{\underline{8 V_0}}$$

• 2) $p_2 = ?$ $\rightarrow T_2 = T_0$

$\rightarrow V_2 = 8 V_0$

$\rightarrow pV = nRT$

$$\Rightarrow p_2 = nR \frac{T_0}{V_2}$$

$$nR = \frac{p_0 V_0}{T_0} \Rightarrow p_2 = \frac{p_0 V_0 T_0}{T_0 V_2} = p_0 \frac{V_0}{V_2}$$

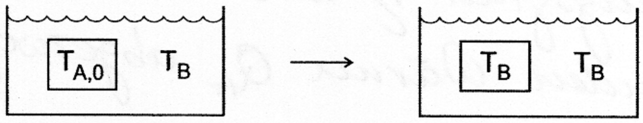
$$= p_0 \frac{V_0}{8 V_0} = \underline{\underline{\frac{1}{8} p_0}}$$

c) Isotherme Kompression ($T = const$) $\rightarrow pV = const$

$$\Rightarrow p_3 V_3 = p_2 V_2 \Rightarrow V_3 = V_2 \frac{p_2}{p_3} = V_2 \frac{p_2}{p_0} = 8 V_0 \frac{p_0/8}{p_0} = \underline{\underline{V_0}}$$

Aufgabe 5 **(7 Punkte)**

Ein Körper A (innere Energie $U_A = C \cdot T_A$) mit Anfangstemperatur $T_{A,0}$ wird in Kontakt mit einem Wärmebad B der Temperatur $T_B < T_{A,0}$ gebracht. Die Temperatur des Wärmebads bleibe dabei konstant. Die Wärmekapazität C des Körpers sei temperatur- und volumenunabhängig.



Anfangszustand Endzustand

a) Der Temperaturausgleich sei zunächst ein völlig irreversibler Prozess ohne Entnahme von Arbeit, bei dem jedoch jederzeit sowohl innerhalb des Körpers als auch innerhalb des Wärmebads jeweils ein thermisches Gleichgewicht vorliege.
Berechnen Sie die Entropieänderungen ΔS_A des Körpers und ΔS_B des Wärmebads zwischen Anfangs- und Endzustand.

b) Der Temperaturausgleich findet nun reversibel statt und es wird die maximal mögliche Arbeit ΔW entnommen.
Berechnen Sie ΔW.
Geben Sie die Entropieänderung ΔS_{Ges} des Gesamtsystems an.

Hinweis zu a) und b): Betrachten Sie zunächst *differentielle* Größen bei (quasi-)konstanter Temperatur und integrieren Sie anschließend.

a) Differentielle Größen

$$\delta Q = C \cdot dT \quad \text{und} \quad dS = \frac{\delta Q}{T}$$

Körper

$$\Delta S_A = \int_{T_{A,0}}^{T_B} dS_A = \int_{T_{A,0}}^{T_B} \frac{\delta Q_A}{T_A} \overset{C \neq C(T)}{=} C \ln T_A \Big|_{T_{A,0}}^{T_B} = C \ln \frac{T_B}{T_{A,0}}$$

Wasserbad

$$\delta Q_B = -\delta Q_A$$

$$\Rightarrow \Delta S_B = \int_{T_{A,0}}^{T_B} dS_B = -\int_{T_{A,0}}^{T} \frac{\delta Q_A}{T_B} = -\int_{T_{A,0}}^{T_B} \frac{C}{T_B} dT_B = -\frac{C}{T_B}(T_B - T_{A,0}) = C\left(\frac{T_{A,0}}{T_B} - 1\right)$$

zu Aufgabe 5

b) die Arbeit wird mit dem Wirkungsgrad η aus der abfließenden Wärme Q_A abgezweigt:

differentiell: $\delta Q_A = C\, dT_A$, $\quad dW = \eta\, \delta Q_A$

reversibeler Prozess:

$$\eta = \eta_{carnot} = 1 - \frac{T_B}{T_A}$$

$$\Rightarrow dW = \left(1 - \frac{T_B}{T_A}\right) C\, dT_A$$

$$\Rightarrow \Delta W = \int_{T_{A,0}}^{T_B} dW = \int_{T_{A,0}}^{T_B} C\left(1 - \frac{T_B}{T_A}\right) dT_A$$

$$= C\left\{\left(T_B - T_{A,0}\right) - T_B \ln \frac{T_B}{T_{A,0}}\right\}$$

Die Entropieänderung des Gesamtsystems ist $\boxed{\Delta S_G = 0}$, da der Prozess reversibel ist.

Im Gegensatz zum irreversibelen Prozess mit $\boxed{\Delta S_G = \Delta S_A + \Delta S_B > 0}$