HAUPTKLAUSUR PHYSIK III
(WS 2008/09)

Wegener

3.2.2009 7 30 – 9.30 Uhr

Wa

Name : [redacted]
Vorname : Hendrik
Matrikel-Nr. :
Studienfach :
Semester :
Übungsgruppe :
Tutor : M. Karl

Aufgabe	Max. Punktzahl	Erreichte Punktzahl
1	10	8 MR
2	10	10 M.K.
3	10	9 WM
4	10	10 M.K.
5	10	10 AG
Σ	50	47 M.K.

Studierendenausweis oder Personalausweis ist vorzulegen.

Der Lösungsweg muss nachvollziehbar sein. Vor der Berechnung numerischer Werte ist zunächst die Endformel herzuleiten.

<u>Erlaubte Hilfsmittel</u>: keine.

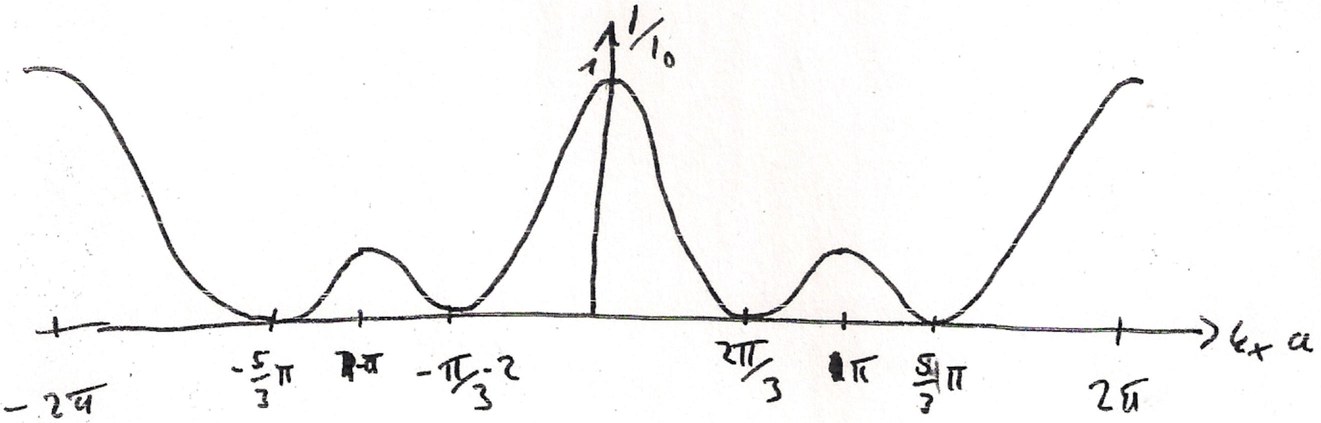
mit Phasenplatte:

$$\frac{I}{I_0} \sim \left| \int_{-\infty}^{\infty} T(x)\, e^{ik_x x}\, dx \right|^2 = \left| \int_{-\infty}^{\infty} \left(\delta(x) e^{i\pi} + \delta(x-a) + \delta(x+a)\right) e^{ik_x x}\, dx \right|^2$$

$$\sim \left| e^{i\pi} \cdot e^{0} + e^{ik_x a} + e^{-ik_x a} \right|^2 = \left| -1 + 2\cos k_x a \right|^2$$

$$\sim \left(1 - 4\cos k_x a + 4\cos^2 k_x a\right)$$

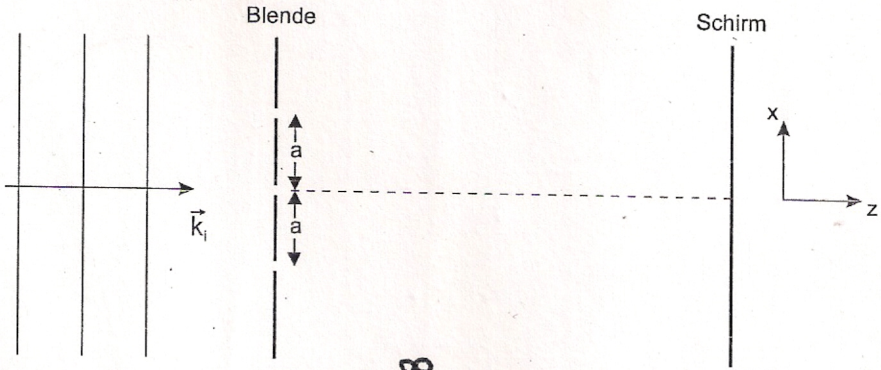
Beugungsbild für $(1+2\cos k_x a)^2$ (ohne Phasenplatte)



$\Rightarrow$ mit Phasenplatte sind die großen Maxima bei ungeraden Vielfachen von π, die kleinen bei geraden Vielfachen von π und die Nullstellen bei $\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $-\frac{\pi}{3} - 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 1: (10 Punkte)

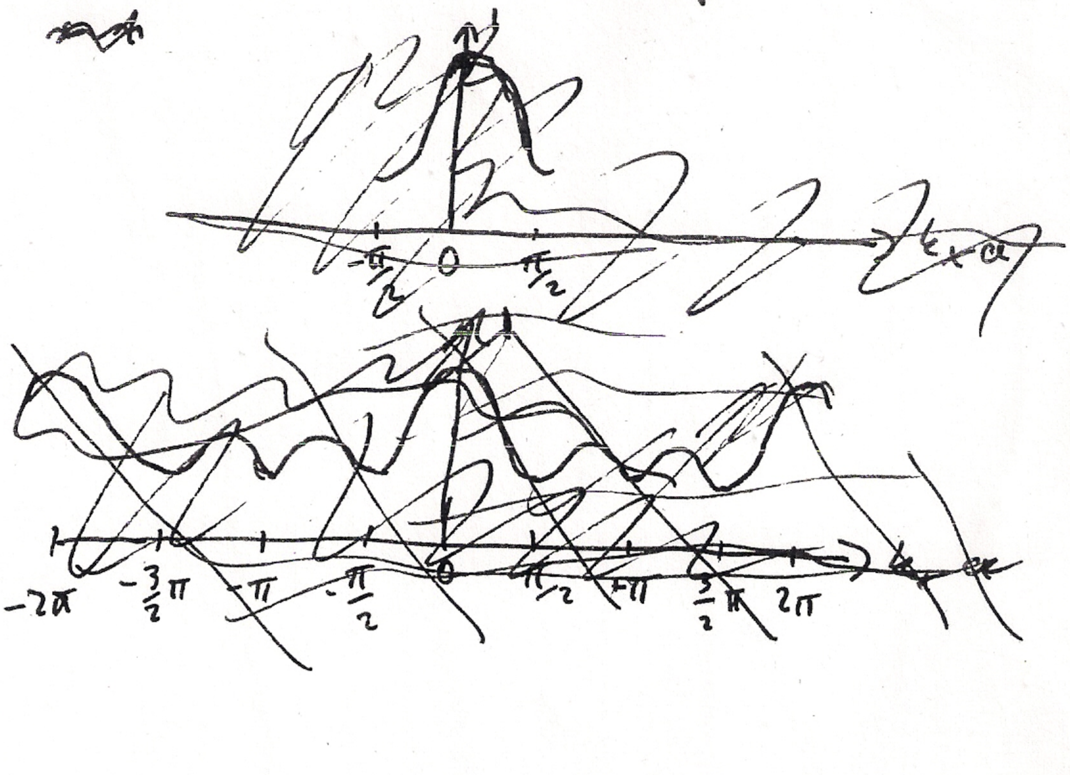
Eine Blende wird durch eine von links einfallende ebene Welle mit Wellenvektor $\vec{k_i}$ beleuchtet. Berechnen Sie für die gezeigte Spalt-Anordnung das Beugungsmuster in Fraunhofer-Näherung. Die Transmissionsfunktionen der einzelnen Spalte können durch Deltafunktionen approximiert werden. Skizzieren Sie anschließend das Beugungsbild als Funktion von $k_x\, a$, worin k_x die x-Komponente des Wellenvektors der gebeugten Welle ist. Wie ändert sich das Beugungsbild, wenn die Phase des Lichts im zentralen Spalt durch eine Phasenplatte um 180° verzögert wird (ohne Skizze)?
Hinweis: Für die Zeichnung der Beugungsfigur reicht es aus, die Minima und Maxima der berechneten Funktion zu betrachten. Es gilt $\cos(\pi/3) = 0.5$ und $\cos(2\pi/3) = -0.5$.



$$\frac{I}{I_0} \approx \left| \int_{-\infty}^{\infty} T(x)\, e^{ik_x x}\, dx \right|^2 = \left| \int_{-\infty}^{\infty} \left(\delta(x)+\delta(x-a)+\delta(a+x)\right) e^{ik_x x}\, dx \right|^2$$

$$\frac{I}{I_0} \sim \left| e^{ik_x \cdot 0} + e^{ik_x a} + e^{-ik_x a} \right|^2 = \left| 1 + 2\cos k_x a \right|^2$$

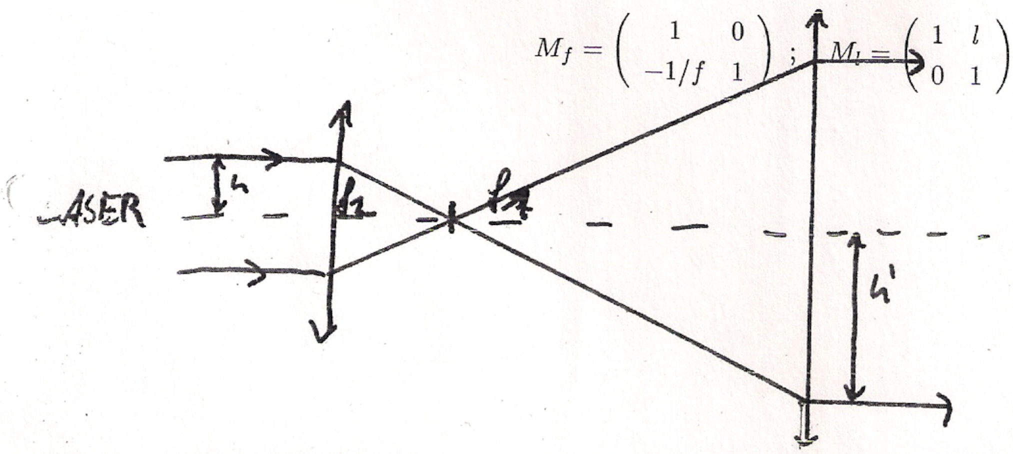
$$\sim 1 + 4\cos k_x a + 4\cos^2 k_x a$$



Aufgabe 2: (10 Punkte)

Ein Teleskop ist eine Anordnung aus zwei konvexen Linsen, mittels derer der Strahldurchmesser eines achsenparallelen Laserstrahls ohne Richtungsänderung vergrößert werden kann. Hier sei ein Laserstrahl von 2 mm Durchmesser mit zwei konvexen Linsen mit Brennweiten $f_1 = 100\,\mathrm{mm}$ und $f_2 = 50\,\mathrm{mm}$ aufzuweiten. Berechnen Sie mit Hilfe der Matrixoptik auf welchen Enddurchmesser der Laserstrahl vergrößert wird. Skizzieren Sie den optischen Aufbau und den Strahlverlauf.
Hinweis: Die Matrix M_f für eine Linse mit Brennweite f und die Matrix M_l für die Propagation des Lichts um einen Weg l lauten:

$$M_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix}; \quad M_l = \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Zur Vergrößerung von achsenparallelen Strahlen muss die Brennweite der ersten Linse kleiner, als die der zweiten sein:

$$\begin{pmatrix} h' \\ \varphi' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & f_1+f_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ \varphi \end{pmatrix} \quad \text{wobei } \varphi = 0$$

$$\begin{pmatrix} h' \\ \varphi' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & f_1+f_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ -h/f_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h - h\left(\frac{f_1+f_2}{f_2}\right) \\ -h/f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -h\frac{f_1}{f_2} \\ -h/f_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -h\frac{f_1}{f_2} \\ +\frac{h f_1}{f_1 f_2} - \frac{h}{f_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -h\frac{f_1}{f_2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

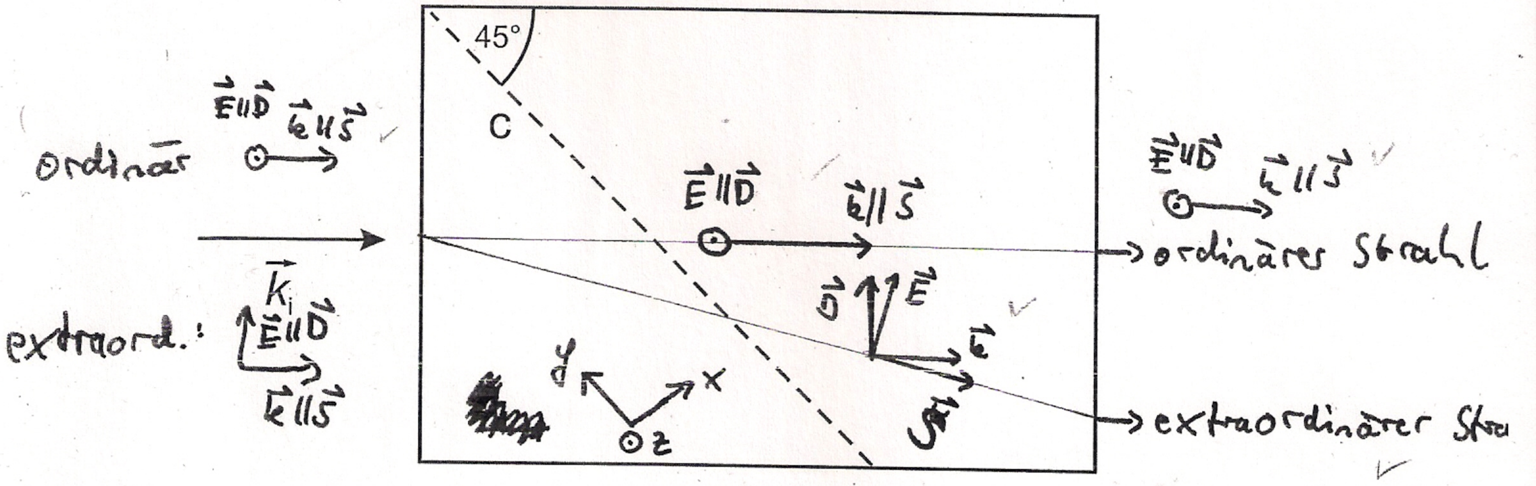
$$\Rightarrow h' = -h\frac{f_1}{f_2} \Rightarrow \frac{d_{vergrößert}}{2} = \left| -\frac{d_{vorher}}{2}\frac{f_1}{f_2} \right|$$

$$\Rightarrow d_{vergrößert} = \frac{100\,\mathrm{mm}}{50\,\mathrm{mm}} \cdot 2\,\mathrm{mm} = \underline{\underline{4\,\mathrm{mm}}}$$

(10)

Aufgabe 3: (10 Punkte)

Ein doppelbrechender Kristall (TiO_2) mit $n_\perp = 2.616$ und $n_\| = 2.903$ wird von links mit einer ebenen, unpolarisierten Welle mit Wellenvektor $\vec{k_i}$ beleuchtet (siehe Skizze). Vervollständigen Sie die Skizze, indem Sie den Verlauf für den ordinären und den extraordinären Strahl im und hinter dem Kristall einzeichnen (zunächst ohne Berücksichtigung der korrekten Ablenkungsrichtung). Tragen Sie die Richtungen von Wellenvektor $\vec{k}$, dielektrische Verschiebung $\vec{D}$, elektrisches Feld $\vec{E}$ und Poynting-Vektor $\vec{S}$ für beide Strahlen ein und begründen Sie jeweils ihre Wahl. Leiten Sie schließlich ab, in welche Richtung der extraordinäre Strahl tatsächlich abgelenkt wird.
Tip: Betrachten Sie dafür die Komponenten von $\vec{E}$ und $\vec{D}$ entlang und senkrecht zur Hauptachse.



ordinär: · Normalkomp. von $\vec D$ stetig → bleibt 0

· Tangentialkomp. von $\vec E$ stetig → bleibt konstant

⇒ aus $\vec D = \underset{\text{Tensor}}{\varepsilon} \vec E$ folgt, dass $\vec D$ und $\vec E$ beim Eintritt in TiO_2 die Richtung nicht ändern, da sie ausschließlich in z-Richtung zeigen. (x, y, z sind die ausgezeichneten Achsen des Kristalls)

· Es gilt $S \sim E \times B$ (μ ist 1)

→ S zeigt immer in die selbe Richtung

· $\vec k, \vec B, \vec D$ stehen senkrecht aufeinander → $\vec k$ zeigt immer in die selbe Richtung und ist parallel zu $\vec S$ ⇒ $\vec k$ und $\vec S$ zeigen immer nach rechts

extraord.: · Normalkomp. von $\vec D$ stetig → bleibt 0

· Tangentialkomp. von $\vec E$ stetig → bleibt konstant

⇒ aus $\vec D = \varepsilon \vec E$ folgt, dass $\vec D$ beim Übergang aus/in TiO_2

seine Richtung zwar nicht ändert $\vec{E}$, aber schon, da es Komponenten in x und y-Richtung hat. (natürlich immer unter der Voraussetzung der Stetigkeitsbedingungen)

- aus $\vec{S} \sim \vec{E} \times \vec{B}$ folgt, dass $\vec{S}$ seine Richtung auch ändert ($\vec{B}$ bleibt von diesem Kristall gänzlich unbeeindruckt, da $\mu = 1$)
- da $\vec{k}, \vec{B}, \vec{D}$ senkrecht aufeinander stehen ändert $\vec{k}$ seine Richtung nicht

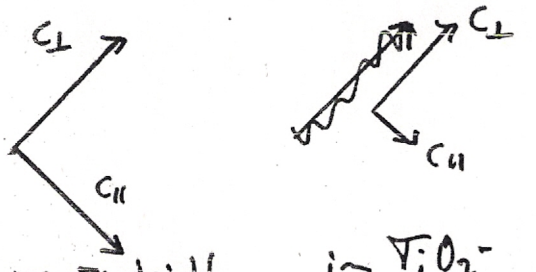
Die Lichtgeschwindigkeit ist richtungsabhängig (zumindest im TiO_2-Kristall):

in x und z: $c_\perp = \frac{c_0}{n_\perp}$

in y : $c_\parallel = \frac{c_0}{n_\parallel}$

da $n_\perp < n_\parallel$ folgt: $c_\perp > c_\parallel$

Man kann den ankommenden extraordinären Strahl zerlegen in eine Komponente in x und y-Richtung, da $c_\perp > c_\parallel$ wird sich ~~die y-Komponente~~ der Strahl in y-Richtung langsamer ausbreiten als in x-Richtung



vor Eintritt

im TiO_2-Kristall (nicht maßstäblich)

$\Rightarrow$ der extraordinäre Strahl wird also (im Gegensatz zur Zeichnung auf der anderen Seite) nach <u>oben</u> (positive x-y) abgelenkt.

Aufgabe 4: (10 Punkte)

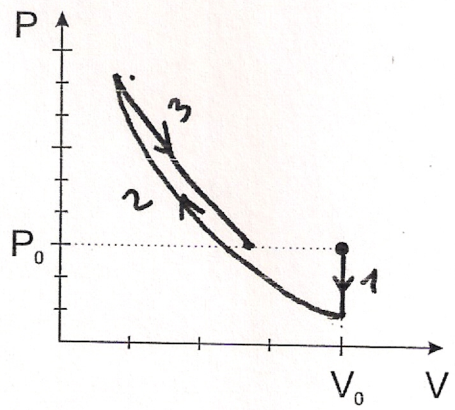
Ein mit einem beweglichen Kolben verschlossenes Zylindergefäß enthalte anfangs ein ideales Gas mit Druck P_0, Volumen V_0, Temperatur $T_0 = 600\,\mathrm{K}$ und Adiabatenexponent $\kappa = 1.5$. Die nachfolgenden Prozesse werden reversibel durchgeführt:

1. Das Gas wird bei konstantem Volumen auf $T_1 = 200\,\mathrm{K}$ abgekühlt. Wie groß ist sein Druck P_1 in Einheiten von P_0?

2. Das Gas wird anschließend adiabatisch komprimiert, bis seine Temperatur den Wert $T_2 = 400\,\mathrm{K}$ erreicht. Wie groß ist sein Volumen V_2 in Einheiten von V_0? Wie groß ist sein Druck P_2 in Einheiten von P_0?

3. Das Gas wird in einem dritten Schritt bei gleichbleibender Temperatur bis zum Ausgangsdruck P_0 expandiert. Wie groß ist sein Volumen V_3 in Einheiten von V_0?

Zeichnen Sie die Prozessschritte in das P-V-Diagramm ein.



1) V = konst $V = \frac{nRT}{P}$

$\Rightarrow \frac{nRT_0}{P_0} = \frac{nRT_1}{P_1} \Rightarrow P_1 = \frac{T_1}{T_0} P_0 = \frac{1}{3} P_0$

2) $pV^{\kappa} =$ konst.

$P_1 V_1^{\kappa} = P_2 V_2^{\kappa}$

$p = \frac{nRT}{V} \Rightarrow T_1 V_1^{\kappa-1} = T_2 V_2^{\kappa-1} \Rightarrow V_2 = \left(\frac{T_1}{T_2} V_1^{\kappa-1}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}} = \left(\frac{200}{400} V_0^{0,5}\right)^2 = \frac{1}{4} V_0$

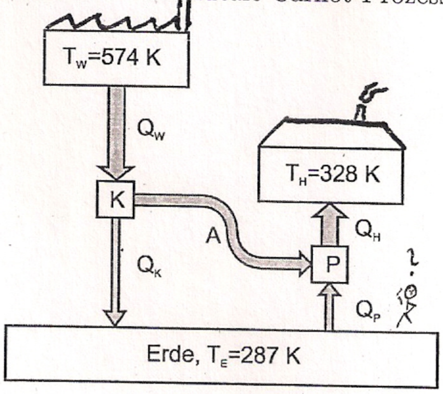
$\Rightarrow P_2 = P_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\kappa} = \frac{1}{3} P_0 \left(\frac{V_0}{\frac{1}{4} V_0}\right)^{3/2} = \frac{8}{3} P_0$

3) T = konst. $T = \frac{pV}{nR}$

$\Rightarrow \frac{P_2 V_2}{nR} = \frac{P_0 V_3}{nR} \Rightarrow V_3 = \frac{P_2}{P_0} V_2 = \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{4} V_0 = \frac{2}{3} V_0$

Aufgabe 5: (10 Punkte)

Zu Heizzwecken wird in einem Mehrfamilienhaus eine Wärmepumpe P installiert, die mittels der zugeführten mechanischen Arbeit A dem umgebenen Erdreich der Temperatur T_E die Wärme Q_P entzieht und dem Heizreservoir die Wärme Q_H bei der Temperatur T_H zuführt. Die Arbeit A wird durch eine gleichfalls installierte Wärmekraftmaschine K erzeugt, die ihre Energie Q_W aus einem Wärmereservoir der Temperatur T_W bezieht und die Abwärme Q_K in die Erde abführt (vgl. Skizze). Berechnen Sie den Wirkungsgrad $\eta = Q_H/Q_W$ für den Fall, dass sowohl die Wärmepumpe P als auch die Wärmekraftmaschine K durch ideale Carnot-Prozesse beschrieben werden können.



Hinweis: Das numerische Ergebnis ist eine ganze Zahl.

für K: $\eta_K = \frac{A}{Q_W} = \frac{T_W - T_E}{T_W}$ $\boxed{I}$

für P: $\eta_P = \frac{A}{Q_H} = \frac{T_H - T_E}{T_H}$ $\boxed{II}$

$\boxed{I} : \boxed{II} \Rightarrow \eta = \frac{Q_H}{Q_W} = \frac{T_W - T_E}{T_W} \cdot \frac{T_H}{T_H - T_E}$

$\Rightarrow \eta = \left(1 - \frac{287K}{574K}\right) \cdot \frac{1}{1 - \frac{287K}{328K}}$

$= \frac{1}{2} \cdot 8 = 4$

$\frac{1}{1 - \frac{287K}{328K}} = \frac{328}{328 - 287} = \frac{328}{41} = 8$

~~328 − 287 =~~

$$\begin{array}{r} 328 \\ -287 \\ \hline 41 \end{array}$$

$\frac{328}{41} = 8$