Aufgabe 1:
identisch mit Aufgabe 1 der Klausur von 08/09; also Frauenhoferbeugung bei einem Dreifachspalt, Beugungsmuster berechnen und von -4pi bis 4pi skizzieren. Dann mittlerer Spalt um 180° phasenverzögert.

Aufgabe 2:
Geometrische Optik; eine kovexe Linse, direkt dahinter eine Platte mit Dicke d und Brechzahl n. Es fällt ein achsenparaller Strahl ein. Der Abstand a des Schnittpunktes des Strahles mit der optischen Achse von der Linse sollte berechnet werden. Dazu ist auch eine Matrix für die Brechung an einer Grenzfläche nötig, die angegeben war.

Aufgabe 3:
2 Körper mit konstantem Volumen und Wärmekapazität C und Anfangstemperaturen T_1 und T_2 werden in Kontakt gebracht. Die Gesamtentropie sollte berechnet werden. Dann sollte die Gleichgewichtstemperatur T_0 berechnet werden: a) wenn keine Wärme verloren geht b) wenn die maximal mögliche Arbeit entnommen wird

Aufgabe 4:
Ottomotor

Aufgabe 5:
Ein Quader mit Höhe h im Schwerefeld der Erde, p sei konstant. Darin sind 2 ideale Gase mit einer Differenz der Delta M der molaren Massen. Es soll der Zustand betrachtet werden wenn beide komplett separiert sind oder komplett gemischt. Es sollte die Differenz der inneren Energie und Entropie der beiden extremen Zustände berechnet werden. Dann soll über die freie Energie berechnet werden bei welchem Delta M sich beide gerade noch separieren.

Experimentalphysik III, WS 2010/11

Lösungen der ersten Klausur

Aufgabe 1: (10 Punkte)

Für die winkelabhängige Intensität I/I_0 des Beugungsmusters gilt:

$$\frac{I}{I_0} = \left|\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, T(x)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i} k_x x}\right|^2 .$$

Die Transmissionsfunktion $T(x)$ der gegebenen Spalt-Anordnung ist

$$T(x) = \delta(x+a) + \delta(x-a) + \delta(x-0) .$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned} \frac{I}{I_0} &= \left|\mathrm{e}^{-\mathrm{i} k_x a} + \mathrm{e}^{\mathrm{i} k_x a} + 1\right|^2 \\ &= \left|2\cos(k_x a) + 1\right|^2 . \end{aligned}$$

Die Nullstellen von I/I_0 sind gegeben durch

$$2\cos(k_x a) + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos(k_x a) = -0.5$$

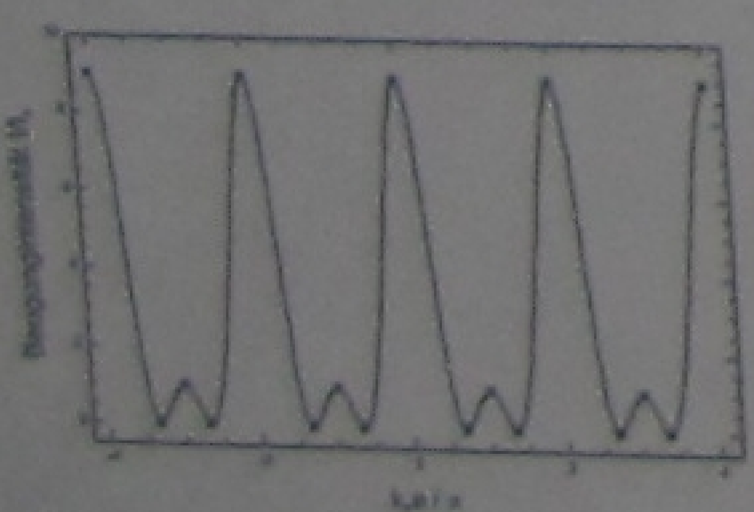
$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad k_x a &= \pm 2/3\pi \pm n \cdot 2\pi \quad , n = 0, 1, 2, 3, \ldots \\ \Rightarrow \quad \pm k_x a &= 2\pi/3,\ 4\pi/3,\ 8\pi/3,\ 10\pi/3,\ \ldots \end{aligned}$$

Die Maxima in der Beugungsfigur bekommt man offenbar für Minima und Maxima des Kosinus. Die Maxima mit $I/I_0 = 9$ liegen bei

$$\begin{aligned} \cos(k_x a) &= 1 \\ \Rightarrow \quad \pm k_x a &= 0,\ 2\pi,\ 4\pi,\ \ldots \end{aligned}$$

und die Maxima mit $I/I_0 = 1$ sind bei

$$\begin{aligned} \cos(k_x a) &= -1 \\ \Rightarrow \quad \pm k_x a &= \pi,\ 3\pi,\ 5\pi,\ \ldots \end{aligned}$$



Mit einer Phasenverschiebung um 180° im zentralen Spalt ist die Transmissionsfunktion

$$T(x) = \delta(x+a) + \delta(x-a) + \delta(x-0) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$$

und man erhält für die Beugungsintensität

$$\begin{aligned} \frac{I}{I_0} &= \left|\mathrm{e}^{-\mathrm{i} k_x a} + \mathrm{e}^{\mathrm{i} k_x a} - 1\right|^2 \\ &= \left|2\cos(k_x a) - 1\right|^2 \\ &= \left|-2\cos(k_x a) + 1\right|^2 \\ &= \left|2\cos(k_x a + \pi) + 1\right|^2 . \end{aligned}$$

Das Beugungsbild ist also im Vergleich zum Beugungsbild ohne Phasenplatte um π verschoben, d.h. die Lage der Maxima bleiben gleich, jedoch sind ihre Intensitäten vertauscht.

Aufgabe 2: (10 Punkte)

Es wird zunächst die Matrix M_g für den Durchgang durch die Glasplatte bestimmt. Mit $n_1 = 1$ und $n_2 = n$ ist

$$M_g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & d/n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dies entspricht einer freien Propagation des Strahls über eine scheinbare Strecke d/n.

Da $l = a - d$ der Abstand zwischen Platte und Schnittpunkt des Strahls mit der optischen Achse ist, berechnet sich die Gesamtmatrix zu

$$\begin{aligned} M_{ges} &= M_l \cdot M_g \cdot M_f \\ &= \begin{pmatrix} 1 & a-d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & d/n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & a-d+d/n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1-(a-d+d/n)/f & a-d+d/n \\ -1/f & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Somit gilt für den Strahlverlauf

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-(a-d+d/n)/f & a-d+d/n \\ -1/f & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h \\ 0 \end{pmatrix}$$

und als Bestimmungsgleichung für a erhalten wir

$$0 = \left[1 - \frac{1}{f}\left(a - d + \frac{d}{n}\right)\right] \cdot h$$

$$\Rightarrow a = f + d\,\frac{\Delta n}{n} \quad \text{mit } \Delta n = n - 1$$

ohne Berücksichtigung der trivialen Lösung $h = 0$. Einsetzen der Werte $n = 1.5$, $f = 5\,\mathrm{cm}$ und $d = 3\,\mathrm{cm}$ ergibt schließlich

$$a = 6\,\mathrm{cm} .$$

Aufgabe 3: (10 Punkte)

Die Entropieänderung eines Körpers K bei Änderung seiner Temperatur von T_K nach T_0 ist

$$\Delta S_K = \int_{T_K}^{T_0} \frac{\delta Q}{T} \,.$$

Da der Körper keine Volumenänderung erfährt, gilt mit dem 1. Hauptsatz

$$\delta Q = dU = C\,dT$$

und somit

$$\Delta S_K = C \int_{T_K}^{T_0} \frac{dT}{T} = C \ln \frac{T_0}{T_K} \,.$$

Nach dem Wärmeaustausch der beiden Körper K_1 und K_2 ist die Gesamtentropieänderung also

$$\begin{aligned} \Delta S_{ges} &= \Delta S_1 + \Delta S_2 \\ &= C\left(\ln\frac{T_0}{T_1} + \ln\frac{T_0}{T_2}\right) \\ &= C \ln \frac{T_0^2}{T_1 T_2} \,. \end{aligned}$$

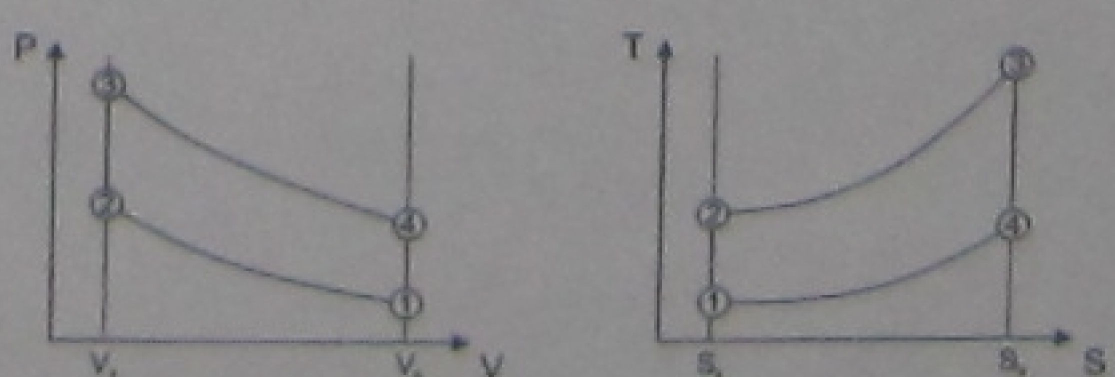
a) Ohne Entnahme von Energie folgt mit dem 1. HS

$$\begin{aligned} CT_1 + CT_2 &= 2CT_0 \\ \Rightarrow \quad T_0 &= \frac{T_1 + T_2}{2} = 500\,\mathrm{K} \,. \end{aligned}$$

b) Die maximal mögliche Arbeit wird nur bei reversiblen Prozessen entzogen, also für $\Delta S_{ges} = 0$. Mit der oben abgeleiteten Gleichung folgt dann

$$\begin{aligned} \ln \frac{T_0^2}{T_1 T_2} = 0 \quad &\Rightarrow \quad T_0 = \sqrt{T_1 T_2} \\ &\Rightarrow \quad T_0 = 400\,\mathrm{K} \,. \end{aligned}$$

Aufgabe 4: (10 Punkte)



Bei isentroper Kompression oder Expansion gilt $dU = \delta W$, somit $W = c_v \Delta T$ für ein Mol ideales Gas. Bei isochoren Prozessen ist $\delta W = 0$, also $Q = c_v \Delta T$. Folglich gilt für die zugeführten Wärmen und die geleisteten Arbeiten bei den einzelnen Schritten im Otto-Kreisprozess für 1 Mol Gas:

$1 \rightarrow 2$: Isentrope Kompression

$$Q_{12} = 0 \qquad W_{12} = c_v\,(T_2 - T_1)$$

$2 \rightarrow 3$: Isochore Wärmezufuhr

$$Q_{23} = c_v\,(T_3 - T_2) \qquad W_{23} = 0$$

$3 \rightarrow 4$: Isentrope Expansion

$$Q_{34} = 0 \qquad W_{34} = c_v(T_4 - T_3)$$

$4 \rightarrow 1$: Isochore Wärmeabfuhr

$$Q_{41} = c_v\,(T_1 - T_4) \qquad W_{23} = 0$$

Bei isochoren Prozessen gilt für die Änderung der Entropie

$$\Delta S = c_v \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = c_v \ln \frac{T_2}{T_1} \,.$$

Da die Summe der Entropiedifferenzen in dem Kreisprozess Null ist, folgt also

$$\Delta S_{ges} = c_v \ln \frac{T_3}{T_2} + c_v \ln \frac{T_1}{T_4} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{T_3}{T_2} = \frac{T_4}{T_1} \,.$$

Der Wirkungsgrad ist somit gegeben durch

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{|W_{12} + W_{34}|}{Q_{23}} \\ &= \frac{T_1 - T_2 + T_3 - T_4}{T_3 - T_2} \\ &= 1 + \frac{T_1 - T_4}{T_3 - T_2} \\ &= 1 - \frac{T_4}{T_3} \,. \end{aligned}$$

Ähnlich wie beim Carnotprozess ist der Wirkungsgrad gegeben durch die minimale und maximale Temperatur des Arbeitsschritts. Umrechnung auf die gegebenen Volumina mittels allgemeinem Gasgesetz und Adiabatengesetz $PV^\kappa = \mathrm{const}$ ergibt schließlich

$$\begin{aligned} \eta &= 1 - \frac{P_4 V_b}{P_3 V_a} \\ &= 1 - \left(\frac{V_a}{V_b}\right)^{\kappa - 1} \,. \end{aligned}$$

Aufgabe 5: (10 Punkte)

Der Zustand größtmöglicher Vermischung sei Zustand 1, der separierte Zustand sei Zustand 2. Wegen der konstanten Temperatur ist $\Delta U = U_2 - U_1$ allein abhängig von der Lage der Gase im Gravitationsfeld. Im Zustand 1 liegt der Schwerpunkt beider Gase bei $h/2$. Wegen der gleichen Molzahl n und $P = \mathrm{const}$ sind die Volumina beider Gase im Zustand 2 gleich groß; das schwerere Gas A nimmt die untere Hälfte mit Schwerpunkt $h/4$ ein, das leichtere Gas B die obere Hälfte mit Schwerpunkt bei $3h/4$. Mithin ist

$$\begin{aligned} \Delta U &= nM_A\,g\left(\frac{h}{4} - \frac{h}{2}\right) + nM_B\,g\left(\frac{3h}{4} - \frac{h}{2}\right) \\ &= -n\Delta M \frac{gh}{4} \,. \end{aligned}$$

Da sich die Volumina beider Gase beim Übergang von Zustand 1 nach 2 halbieren, gilt bei konstanter Temperatur

$$\begin{aligned} \Delta S = S_2 - S_1 &= 2nR \ln \frac{V_2}{V_1} \\ &= -2nR \ln 2 \, , \end{aligned}$$

wobei von der Entropie eines idealen Gases Gebrauch gemacht wurde.

Bei konstanter Temperatur, also z.B. mit Hilfe eines Wärmebades, strebt das System im thermodynamischen Gleichgewicht ein Minimum der Freien Energie $F = U - TS$ an. Der Zustand 2 wird daher nur angenommen, wenn $\Delta F = F_2 - F_1 < 0$. Wir erhalten daher als Bedingung für die Massendifferenz ΔM:

$$\begin{aligned} \Delta F &= \Delta U - T\Delta S \\ &= -n\Delta M \frac{gh}{4} + 2nRT \ln 2 < 0 \\ \Rightarrow \Delta M &> \frac{8RT \ln 2}{gh} \, . \end{aligned}$$

Für $g \approx 10\,\mathrm{m/s^2}$, $h = 1000\,\mathrm{m}$, $RT \approx 2500\,\mathrm{J/mol}$ und $\ln 2 \approx 0.7$ erhält man so

$$\Delta M > 1400 \,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}} \, .$$