Ex III WS 2016/17

Prof. Dr. Wegener, PD Dr. Naber

Hauptklausur

Aufgabe 1. 12 P.

In etwa so (siehe auch WS 02/03 Klausur 1 Aufg. 1 bzw. WS 06/07 Klausur 1 Aufg. 1):
Elektronen eines Metalls werden durch ein elektrisches Feld der Form $E(t) = E_0 e^{-i\omega t}$ angeregt. Die Elektronen (Dichte ρ, Elementarladung $-e$, Masse m) können dabei näherungsweise als freie Elektronen mit vernachlässigbarer Dämpfung betrachtet werden. Stellen Sie für diese Situation die Newtonsche Bewegungsgleichung auf. Bestimmen Sie $x(t)$, das Dipolmoment $d(t)$ und die makroskopische Polarisation $P(t)$. Zeigen Sie, dass die dielektrische Funktion $\epsilon(\omega)$ gegeben ist durch $\epsilon(\omega) = 1 - \frac{e^2\rho}{m\epsilon_0\omega^2}$.
Oberhalb einer bestimmten Kreisfrequenz ω_p wird das Metall für die elektromagnetische Strahlung transparent. Drücken Sie ω_p als Funktion der obigen Größen aus.
Das Metall ist eine Metallplatte der Dicke L, die in der xz-Ebene *(oder so ähnlich)* ausgedehnt ist. Bestimmen Sie das elektrische Feld bei der Frequenz ω_p außerhalb des Metalls. Was ist die Ursache (der Grund) für das elektrische Feld im Metall?

Aufgabe 2. 12 P.

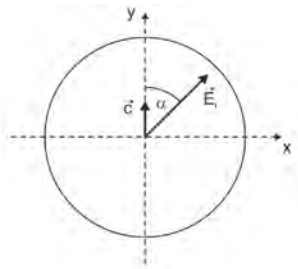
Gleiche Aufgabe wie WS 10/11 Aufgabe 2

Aufgabe 3. 12 P.

In etwa folgendermaßen:
Linear polarisiertes Licht der Wellenlänge $\lambda = 632nm$ (?) fällt senkrecht auf einen doppelbrechenden Kristall der Dicke d mit den Brechzahlen $n_\perp = 1,5$ und $n_\parallel = 1,49$ (?). Das Licht tritt zirkular polarisiert aus dem Kristall aus.

1. Geben Sie das elektrische Feld hinter dem Plättchen an (ohne Rechnung). Was muss für den Winkel α gelten?

2. Leiten Sie eine Formel für die Dicke des Plättchens her und bestimmen Sie die minimale Dicke.



Aufgabe 4. 10 P.

Sie haben als Überraschung für Ihre WG einen großen Topf mit Bohnensuppe vorbereitet, die Sie auf einer elektischen Warmhalteplatte bei $T_S = 40°\text{C}$ temperieren. Nach einer Stunde Warten lesen Sie aus Langeweile am Stromzähler ab, dass Sie 0.001kWh elektrische Energie für das Warmhalten verbraucht haben.

a) Um welchen Wert ändert sich die Entropie der Suppe (ohne Berücksichtigung der Zersetzungsprozesse)?

b) Wie ändert sich durch den Prozess die Gesamtentropie der Küche (einschließlich Heizplatte und Suppe), wenn die Raumtemperatur $T = 20°\text{C}$ in guter Näherung konstant bleibt?

Begründen Sie Ihre Antworten! Runden Sie die zu berechnenden Werte auf ganze Zahlen.

Aufgabe 5. 14 P.

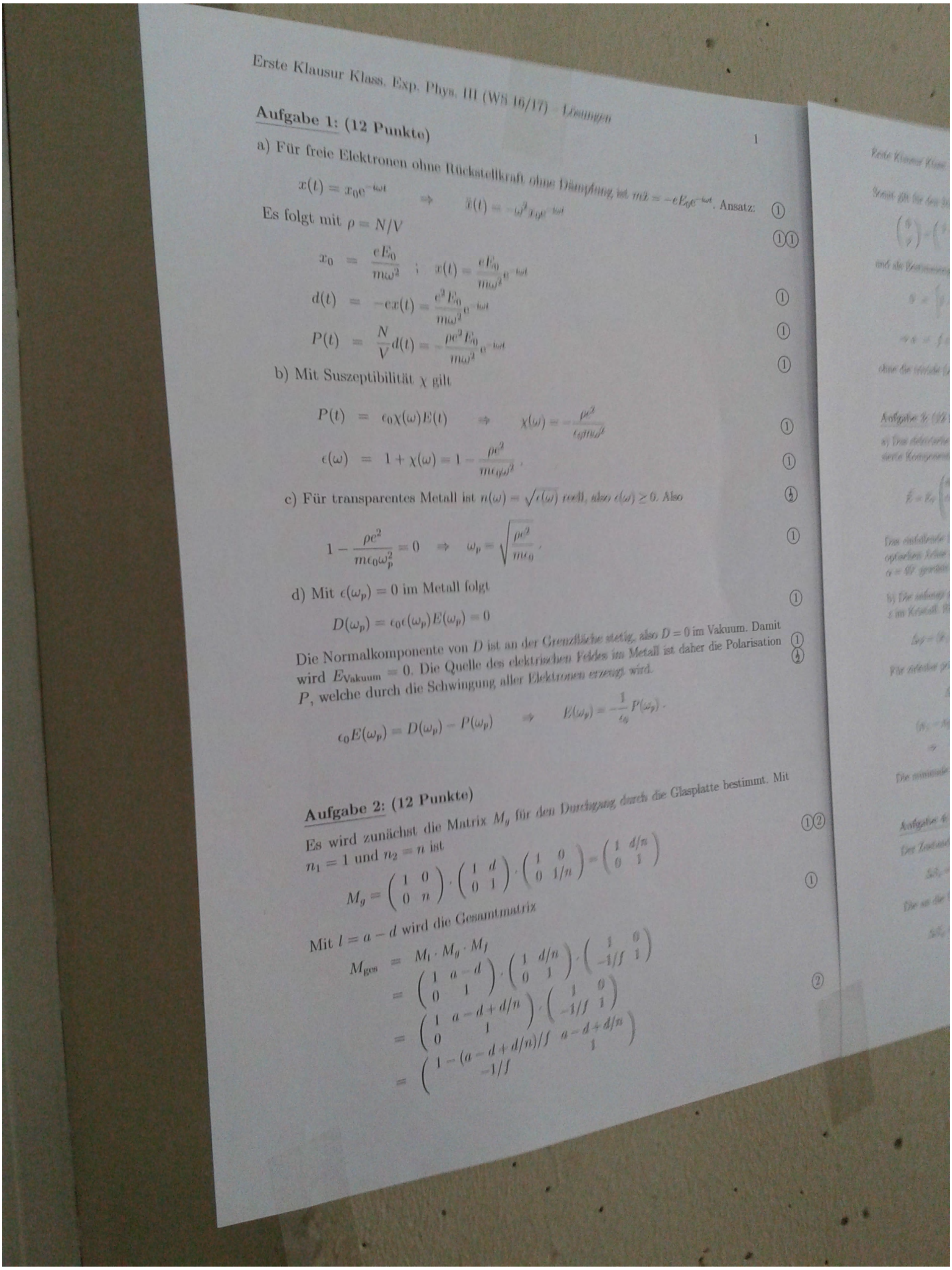
(14 Punkte)

Beim Joule-Thomson-Prozess wird ein Gas der Temperatur T_1 aus einem Behälter unter dem konstanten Druck P_1 in einen zweiten Behälter unter dem konstanten Druck $P_2 < P_1$ gepresst und dabei expandiert. Die Behälter sind gegeneinander sowie nach aussen thermisch isoliert; das Gas wird beim Übertritt gedrosselt, so dass der Prozess sehr langsam verläuft.

a) Zeigen Sie, dass die Enthalpie H eines beliebigen Gases beim Joule-Thomson-Prozess erhalten bleibt.

b) Berechnen Sie H für ein ideales Gas und bestimmen Sie seine Temperaturänderung $\Delta T = T_2 - T_1$. Weisen Sie nach, dass der Prozess irreversibel ist.

c) Ein Gas aus „harten" elastischen Kugeln mit nichtverschwindenem Kovolumen b gehorcht näherungsweise der Gasgleichung $P(V - nb) = nRT$ (Van-der-Waals-Gas mit $a = 0$). Bestimmen Sie seine Enthalpie H und leiten Sie für den Joule-Thomson-Prozess ΔT als Funktion der Druckdifferenz $\Delta P = P_2 - P_1$ her. Wird das Gas bei dem Prozess wärmer oder kälter?



Erste Klausur Klass. Exp. Phys. III (WS 16/17) – Lösungen

1

Aufgabe 1: (12 Punkte)

a) Für freie Elektronen ohne Rückstellkraft ohne Dämpfung ist $m\ddot{x} = -eE_0e^{-i\omega t}$. Ansatz: 1

$$x(t) = x_0 e^{-i\omega t} \quad \Rightarrow \quad \ddot{x}(t) = -\omega^2 x_0 e^{-i\omega t}$$

Es folgt mit $\rho = N/V$ 1 1

$$x_0 = \frac{eE_0}{m\omega^2} \; ; \; x(t) = \frac{eE_0}{m\omega^2}e^{-i\omega t}$$

$$d(t) = -ex(t) = -\frac{e^2E_0}{m\omega^2}e^{-i\omega t}$$ 1

$$P(t) = \frac{N}{V}d(t) = -\frac{\rho e^2E_0}{m\omega^2}e^{-i\omega t}$$ 1

1

b) Mit Suszeptibilität χ gilt

$$P(t) = \epsilon_0\chi(\omega)E(t) \quad \Rightarrow \quad \chi(\omega) = -\frac{\rho e^2}{\epsilon_0 m\omega^2}$$ 1

$$\epsilon(\omega) = 1 + \chi(\omega) = 1 - \frac{\rho e^2}{m\epsilon_0\omega^2}\,.$$ 1

c) Für transparentes Metall ist $n(\omega) = \sqrt{\epsilon(\omega)}$ reell, also $\epsilon(\omega) \geq 0$. Also ½

$$1 - \frac{\rho e^2}{m\epsilon_0\omega_p^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_p = \sqrt{\frac{\rho e^2}{m\epsilon_0}}\,.$$ 1

d) Mit $\epsilon(\omega_p) = 0$ im Metall folgt 1

$$D(\omega_p) = \epsilon_0\epsilon(\omega_p)E(\omega_p) = 0$$

Die Normalkomponente von D ist an der Grenzfläche stetig, also $D = 0$ im Vakuum. Damit wird $E_{\text{Vakuum}} = 0$. Die Quelle des elektrischen Feldes im Metall ist daher die Polarisation P, welche durch die Schwingung aller Elektronen erzeugt wird. 1 ½

$$\epsilon_0E(\omega_p) = D(\omega_p) - P(\omega_p) \quad \Rightarrow \quad E(\omega_p) = -\frac{1}{\epsilon_0}P(\omega_p)\,.$$

Aufgabe 2: (12 Punkte)

Es wird zunächst die Matrix M_g für den Durchgang durch die Glasplatte bestimmt. Mit $n_1 = 1$ und $n_2 = n$ ist 1 2

$$M_g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & d/n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ 1

Mit $l = a - d$ wird die Gesamtmatrix

$$\begin{aligned} M_{\text{ges}} &= M_l \cdot M_g \cdot M_f \\ &= \begin{pmatrix} 1 & a-d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & d/n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & a-d+d/n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1-(a-d+d/n)/f & a-d+d/n \\ -1/f & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$ 2

gilt für den Strahlverlauf

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-(a-d+d/n)/f & a-d+d/n \\ -1/f & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h \\ 0 \end{pmatrix}$$

und als Bestimmungsgleichung für a erhalten wir ①①

$$0 = \left[1-\frac{1}{f}\left(a-d+\frac{d}{n}\right)\right] \cdot h$$

$$\Rightarrow a = f + d\frac{\Delta n}{n} \quad \text{mit } \Delta n = n-1$$ ①

ohne die triviale Lösung $h=0$. Einsetzen der Werte ergibt $a = 6\,\text{cm}$. ② ①

Aufgabe 3: (12 Punkte)

a) Das elektrische Feld zirkular polarisierten Lichts wird in zwei orthogonale linear polarisierte Komponenten gleicher Amplitude mit Phasenverschiebung 90° zerlegt,

$$\vec{E} = E_0 \begin{pmatrix} \sin(kz-\omega t) \\ \cos(kz-\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} .$$ ①①①

Das einfallende linear polarisierte Licht wird in Komponenten parallel und senkrecht zur optischen Achse $\vec{c}$ zerlegt. Damit die beiden Komponenten gleiche Amplituden haben, muss $\alpha = 45°$ gewählt werden. Die Winkel $-45°$ und $\pm 135°$ sind dazu äquivalent. ① ① ①

b) Die anfangs gleichen Phasen der Komponenten sind abhängig vom durchlaufenden Weg z im Kristall. Hinter dem Plättchen der Dicke d ist ①①

$$\Delta\varphi = (k_\perp - k_\parallel)\, d = \frac{2\pi}{\lambda}(n_\perp - n_\parallel)\, d .$$

Für zirkular polarisiertes Licht wird eine Phasendifferenz von $\pm 90°$ gefordert: ①

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= (2j+1)\frac{\pi}{2} \quad ; \quad j = 0,1,2,\ldots \\ (n_\perp - n_\parallel)\, d &= (2j+1)\frac{\lambda}{4} \\ \Rightarrow \quad d &= (2j+1) \cdot 15.8\,\mu\text{m}. \end{aligned}$$ ① ① ①

Die minimale Dicke des Plättchens ist also $D_{min} = 15.8\,\mu\text{m}$. ①①

Aufgabe 4: (10 Punkte)

Der Zustand der Suppe bleibt ungeändert. Da die Entropie eine Zustandsgröße ist, folgt ①

$$\Delta S_s = 0 .$$

Die an die Umgebung abgegebene Wärme ΔQ führt wegen konstanter Temperatur zu ②

$$\Delta S_u = \frac{\Delta Q}{T} .$$

Klass. Exp. Phys. III (WS 16/17) – Lösungen

... (12 Punkte)

... lineare polarisierte Licht wird in Komponenten parallel und senkrecht zur ... Achse ... zerlegt. Damit die beiden Komponenten gleiche Amplituden haben, muss ... gewählt werden. Die Winkel −45° und ±135° sind dazu äquivalent.

... Hinter dem Plättchen der Dicke d ist

... polarisiertes Licht wird eine Phasendifferenz von ±90° gefordert.

... Dicke des Plättchens ist also $d_{min} = ... \mu m$.

... 4: (10 Punkte)

... stand der Suppe bleibt ungeändert. Da die Entropie eine Zustandsgröße ist, folgt

$$\Delta S_s = 0$$

... die Umgebung abgegebene Wärme ΔQ führt wegen konstanter Temperatur zu

$$\Delta S_u = \frac{\Delta Q}{T}$$

Erste Klausur Klass. Exp. Phys. III (WS 16/17) – Lösungen

ΔQ entspricht der verbrauchten elektrischen Energie W_{el}, also

$$\Delta Q = 0.01\,\mathrm{kWh} = 36\,\mathrm{kJ}$$

$$\Delta S_u = 123\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}$$

Die elektrische Energie hat die Entropie $\Delta S_d = 0$. Die Temperatur der Heizplatte ist konstant, also $\Delta S_h = 0$. Die Entropieänderung des Gesamtprozesses ist

$$\Delta S_{ges} = \Delta S_s + \Delta S_u + \Delta S_h + \Delta S_d = 123\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}$$

Aufgabe 5: (14 Punkte)

a) Da der Prozess adiabatisch ist, $Q = 0$, gilt

$$U_2 = U_1 + P_1V_1 - P_2V_2 + Q \quad \Rightarrow \quad U_2 + P_2V_2 = U_1 + P_1V_1$$

so dass mit der Definition der Enthalpie $H = U + PV$ folgt $H_1 = H_2$.

b) Für ein ideales Gas gilt mit den molaren Wärmekapazitäten c_v und c_p

$$H = nc_vT + nRT = nc_pT$$

Wegen $\Delta H = 0$ folgt unmittelbar $\Delta T = 0$. Damit wird

$$\Delta S = nc_v \ln\frac{T_2}{T_1} + nR\ln\frac{V_2}{V_1} = nR\ln\frac{P_1}{P_2}$$

Wegen $P_1 > P_2$ ist $\Delta S > 0$ – der Prozess ist irreversibel.

c) Für ein Van-der-Waals-Gas ist die innere Energie

$$U_{vdw} = nc_vT - a\frac{n^2}{V}$$

so dass mit $a = 0$ für das Gas aus harten Kugeln folgt

$$\begin{aligned} U &= nc_vT \\ P(V - nb) &= nRT \quad \Rightarrow \quad PV = nRT + nbP \\ H &= nc_vT + nRT + nbP = nc_pT + nbP \end{aligned}$$

Mit $\Delta T = T_2 - T_1$ und $\Delta P = P_2 - P_1$ erhält man

$$\Delta H = nc_p\Delta T + nb\Delta P = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta T = -\frac{b}{c_p}\Delta P$$

Aufgrund $\Delta P < 0$ folgt sofort $\Delta T > 0$.