Mitschrieb zu Experimentalphysik III: Optik und Thermodynamik

Prof. Dr. Wegener

Vorlesung Wintersemester 2002/2003

Letzte Aktualisierung und Verbesserung: 26. Dezember 2003

Mitschrieb der Vorlesung Experimentalphysik III
von Herrn Prof. Dr. Wegener im Wintersemester 2002/2003
von Marco Schreck.

Dieser Mitschrieb erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit und Korrektheit.
Kommentare, Fehler und Vorschläge und konstruktive Kritik bitte an Marco.Schreck@gmx.de.

Inhaltsverzeichnis

1 Optik **9**
- 1.1 Literatur . . . 9
- 1.2 Was ist Licht? . . . 9
- 1.3 Der eindimensionale Lorentz-Oszillator . . . 14
- 1.4 Lösung der Wellengleichung . . . 16
- 1.5 Der Lorentz-Oszillator . . . 17

2 Wellenoptik **19**
- 2.1 Reflexion und Brechung von Licht . . . 19
  - 2.1.1 Senkrechter Einfall von Licht auf einen Halbraum . . . 19
  - 2.1.2 Schräger Einfall von Licht auf einen Halbraum . . . 21
- 2.2 Dielektrische Schichtsysteme . . . 24
  - 2.2.1 $\lambda/4$-Antireflexschicht . . . 25
  - 2.2.2 Transfermatrixmethode, Spiegel . . . 26
  - 2.2.3 Fabri-Perot-Interferometer . . . 29
  - 2.2.4 Photonische Kristalle . . . 30
  - 2.2.5 Brillouin-Zone . . . 33
  - 2.2.6 Wellenleiter . . . 36
- 2.3 Doppelbrechung . . . 40
  - 2.3.1 Wellenplättchen . . . 40
  - 2.3.2 Doppelbrechung, Polarisation . . . 42

3 Beugung **45**
- 3.1 Mathematischer Einschub:Fouriertransformation . . . 45
- 3.2 Beugung von Licht . . . 47
  - 3.2.1 Das Huygensche Prinzip . . . 47
  - 3.2.2 Fraunhoferbeugung (Spalt, Doppelspalt, Gitter) . . . 48
  - 3.2.3 Gaußförmige Profile . . . 50
  - 3.2.4 Fresnelbeugung . . . 52

4 Nahfeldoptik **53**
- 4.1 Evaneszente Wellen . . . 53

5 Geometrische Optik **55**
- 5.1 Matrixoptik . . . 57
- 5.2 Optische Geräte . . . 64
  - 5.2.1 Auflösungsvermögen des Mikroskops . . . 66
- 5.3 Fermatsches Prinzip . . . 66

6 Quantenoptik **69**
- 6.1 Das Photon . . . 69
- 6.2 Compton-Effekt . . . 70
- 6.3 Das Plancksche Strahlungsgesetz . . . 73
  - 6.3.1 Weitere experimentelle Evidenzen . . . 73
  - 6.3.2 Herleitung der Planckschen Strahlungsformel nach Einstein . . . 75
  - 6.3.3 Ableitung der Stefan-Boltzmann Gesetzes . . . 76
  - 6.3.4 Ableitung des Wienschen Verschiebungsgesetzes . . . 77
- 6.4 Der LASER . . . 78

7 Nichtlineare Optik **81**
7.1 Die nichtlineare optische Suszeptibilität . . . 82

8 Thermodynamik **85**
8.1 Einführung . . . 85
8.1.1 Der thermodynamische Zustand . . . 85
8.2 Basisgrößen . . . 85
8.3 Das ideale Gas . . . 86
8.4 Das ideale Gasgesetz . . . 87
8.4.1 Die Boltzmann-Konstante . . . 88
8.5 Boltzmann-Verteilung und Maxwell-Verteilung . . . 90
8.6 Entropie . . . 91
8.7 Reversible und irreversible Prozesse . . . 95

9 Die Hauptsätze der Thermodynamik **97**
9.1 Der 1.Hauptsatz . . . 97
9.2 Der 2.Hauptsatz . . . 97
9.3 Der 3.Hauptsatz . . . 97
9.4 Expansion idealer Gase . . . 100
9.4.1 Der Carnotsche Kreisprozeß . . . 102

10 Reale Gase **107**
10.1 Die Van-der-Walls-Zustandsgleichung . . . 107
10.2 Phasenumwandlungen . . . 110

11 Thermodynamische Potentiale und Extremalbedingungen **117**
11.1 Die freie Energie . . . 117
11.2 Enthalpie und freie Enthalpie . . . 118
11.3 Expansion realer Gase . . . 120
11.3.1 Joule-Thomson-Effekt . . . 120

12 Wärmeleitung und Diffusion **123**
12.1 Wärmeleitung . . . 124
12.2 Diffusion . . . 124

13 Das Plancksche Strahlungsgesetz **127**
13.1 Der Bose-(Planck)-Faktor . . . 128
13.2 Die Zustandsdichte . . . 130

Physikalisches Anfängerpraktikum

Veranstalter

- Prof.Dr.Blümer: Tel.:FZK 3545 (Kurzrufnummer: FZK=1055)
- Dr.Hans Jürgen Simonis: Tel.:FZK 4300
- Dr.Peter Blüm: Tel.:FZK 3516
- Sprechstunden: Montag/Donnerstag 14:00-15:00, Raum: F2-33

Organisation

- Frau Zeckai in Raum F1-25, Tel.:3449

Techniker

- Herr Trapp und Herr Beiner in Raum F1-24, Tel.:3472/6518

Anmeldung

- Unterlagen: Raum F1-15
- Nachzügler: Raum F1-13

Erster Versuchstag

- Montag, den 21.10.2002

Praktikumsdurchführung:

- Das Praktikum wird in Zweiergruppen durchgeführt.
- Es beinhaltet 10 Versuche, davon sind zwei Versuche mit einer ausführlichen Fehlerrechnung durchzuführen.
- Jeder Versuch wird durch einen Assistenten betreut, der Ihnen hilft, Sie ermahnt, wenn Sie nicht ausreichend vorbereitet sind und Ihr Protokoll bewertet.

Ziel des Praktikums

Ihre bisherige passive Experimentalphysikerfahrung durch eigenes Experimentieren zu aktivieren, d.h.

- an ausgesuchten Versuchen das Beobachten, Messen, Bewerten und Darstellen experimenteller Untersuchungen zu üben.
- Meßgeräte und Meßmethoden kennenzulernen.
- sorgfältiges Protokollieren und Experimentieren zu üben.

Versuchsvorbereitung

Schriftlich

- Kurze Beschreibung der Grundlagen des Versuchs
- Diskussion des Meßverfahrens und des Meßprogramms (Planskizzen, Schaltpläne, Strahlengänge, etc.)
- Benötigte Auswertungsformeln

Verbal

- Diskussion des physikalischen Hintergrundes des Versuchs
- Diskussion des Meßverfahrens und des Meßprogramms
- Qualitative Darstellung der erwarteten Ergebnisse

Versuchsdurchführung

- Vertraut machen mit den Geräten
- Aufbau der Meßanordnung in Bezug auf Meßgenauigkeit und Sicherheit
- Nullabgleich und Justierung von Geräten überprüfen und durchführen
- Durchführung der Messungen
- Sorgfältiges Protokollieren:
  - Anfertigung einer Prinzipskizze
  - Meßergebnisse in übersichtlicher Form darstellen
  - Überschlägige Auswertung
  - Mögliche Fehlerquellen im Versuchsaufbau erkennen, beseitigen oder abschätzen

Auswertung

- Ergebnisse zusammenstellen und diskutieren
- Information in Diagramm und/oder Tabellen darstellen, Meßwerte linearisiert darstellen, d.h. geeignete Achsenskalierung, lineare Regression
- Systematische Fehler diskutieren
- Zufällige Fehler berechnen
- Diskussion des Ergebnisses und Vergleich mit dem erwarteten Werten

Nebenbemerkung

- Skript zur Fehlerrechnung, Aufgabenblätter finden Sie unter:
  `http://www-ekp.physik-uni-karlsruhe.de/~bluem/prakt.html`
- Vorlesung am 15.10. und 17.10. im Lehmann-Hörsaal um 14:00-15:30

Protokoll

Das Gesamtprotokoll muß am nächsten Versuchstag beim Assistenten abgegeben werden.

- Deckblatt
- Aufgabenblatt
- die beiden schriftlichen Vorbereitungen
- Meßprotokoll
- Auswertung

Sicherheitsregeln

- Elektrische Schaltung nur bei zentraler Abschaltung aller Geräte aufbauen oder verändern.
- Die Abnahme der Schaltung durch den Betreuer ist Pflicht!
- Beachten Sie, elektrische Spannung über 50 V ist lebensgefährlich.
- Beim Experimentieren mit evakuierten Glasgefäßen Schutzbrille tragen!
- Beim Experimentieren mit Laserlicht nie in den direkten Strahl schauen!
- Gehen Sie sorgfältig beim Arbeiten mit Chemikalien vor. Entsorgen Sie die Materialien nur in den dafür vorgesehenen Gefäßen.

Kapitel 1

Optik

1.1 Literatur

- Eugene Hecht: OPTIK (Addison-Wesley)
  Dieses Buch ist ausgezeichnet, aber die Themen nichtlineare Optik und Nahfeldoptik fehlen.
- H.Vogel: GERTHSEN PHYSIK (Springer)
  vollständig, aber knapp
- Paul A.Tipler: PHYSIK (Spektrum Akademischer Verlag)
  knapp
- Y.R.Shen: THE PRINCIPLES OF NONLINEAR OPTICS (John Wiley + Sons)
  speziell (nur nichtlineare Optik)

1.2 Was ist Licht?

Licht kann als elektromagnetische Welle oder als Quanten (Photonen) beschrieben werden (Dualität). Man muß unterscheiden, ob eine Lichtquelle hell ist (physikalische Größe) oder uns hell erscheint (physiologische Größen).

Die Basiseinheit der Optik:

- Lichtstärke: 1 Candela (Cd)

  1 Candela ist die Lichtstärke, mit der $\frac{1}{600000}$ Quadratmeter der Oberfläche eines schwarzen Strahlers bei der Temperatur des beim Druck von 101325 Kilogramm durch Meter und durch Sekundenquadrat erstarrenden Platins senkrecht zu seiner Oberfläche leuchtet.

Abgeleitete photometrische Größen:

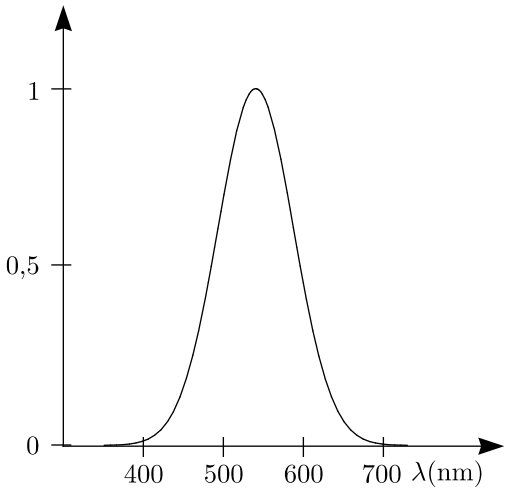
- 1 Lumen (Lm=Cdsr)

  1 Lumen ist gleich dem Lichtstrom, den eine punktförmige Lichtquelle der Lichtstärke 1 Candela gleichmäßig nach allen Richtungen in dem Raumwinkel 1 sr (4π) aussendet.

- 1 Lux (lx)=$\frac{\mathrm{lm}}{\mathrm{m}^2}$

  Über das Plancksche Strahlungsgesetz (schwarzer Strahler) kann 1 Candela mit der physikalischen Größe 1 Watt in Verbindung gesetzt werden. Bei einer Lichtfrequenz von 540 THz ($\hat{=}$ 555 nm der Wellenlänge des Lichts $\hat{=}$ Zitronengelb) gilt.

$$\boxed{1\,\mathrm{Cd} = \frac{1}{683}\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{sr}}}$$



Beispiel:

	physikalisch	physiologisch
$\lambda = 555\,\text{nm}$	$1\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$	683 lx
$\lambda = 750\,\text{nm}$	$1\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$	0,1 lx

Die Energieflußdichte, die mit der elektromagnetischen Welle verknüpft ist gegeben durch den Poynting-Vektor $\vec{S}$ mit

$$\boxed{\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}}$$

$$[S] = \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

Bei schwachen elektromagnetischen Wellen im Vakuum gilt weiterhin:

$$\frac{|\vec{E}|}{|\vec{H}|} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = \text{Vakuumimpedanz } Z_0$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = \frac{1,256 \cdot 10^{-6}}{8,854 \cdot 10^{-12}} \approx 376\,\Omega$$

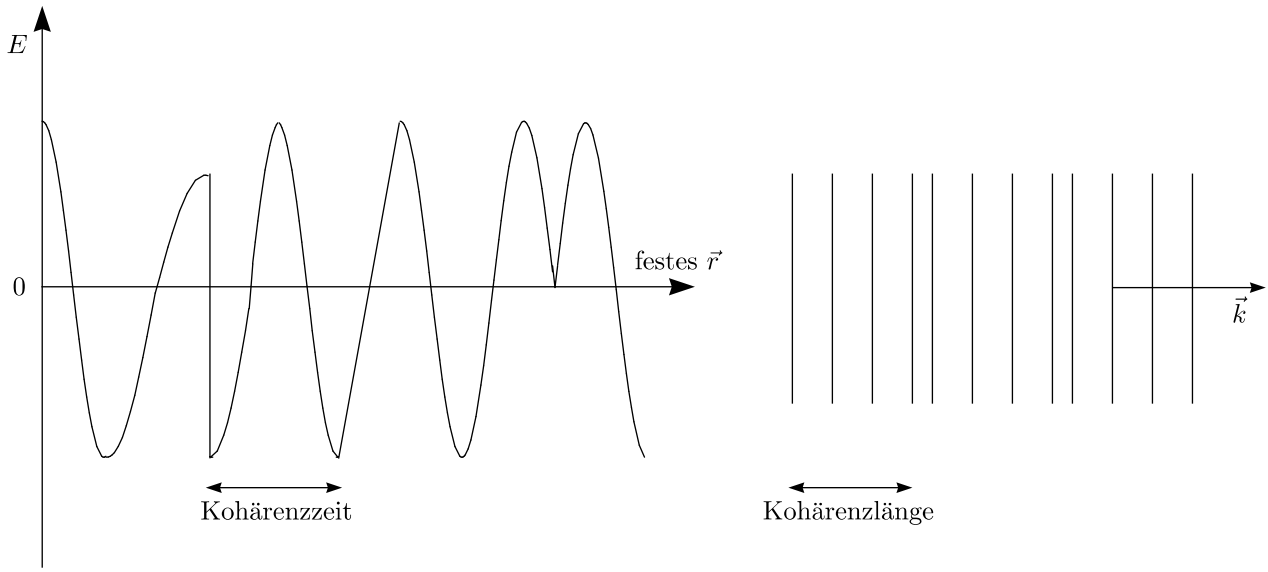
Somit gilt nun:

$$|\vec{S}| = |\vec{E}|^2 \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \text{ mit } \vec{S} \parallel \vec{k}$$

Oszilliert $\vec{E}$ mit der Frequenz ω, so oszilliert auch $|\vec{S}|$. Mittelt man über diese zeitliche Oszillation, spricht man von der Intensität I des Lichts.

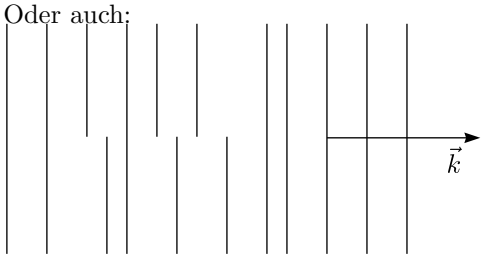
$$\boxed{I = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}|\vec{E}|^2 \propto |\vec{E}|^2}$$

Das Licht einer Glühlampe weist eine endliche Kohärenzzeit auf und eine unendliche Kohärenzlänge.

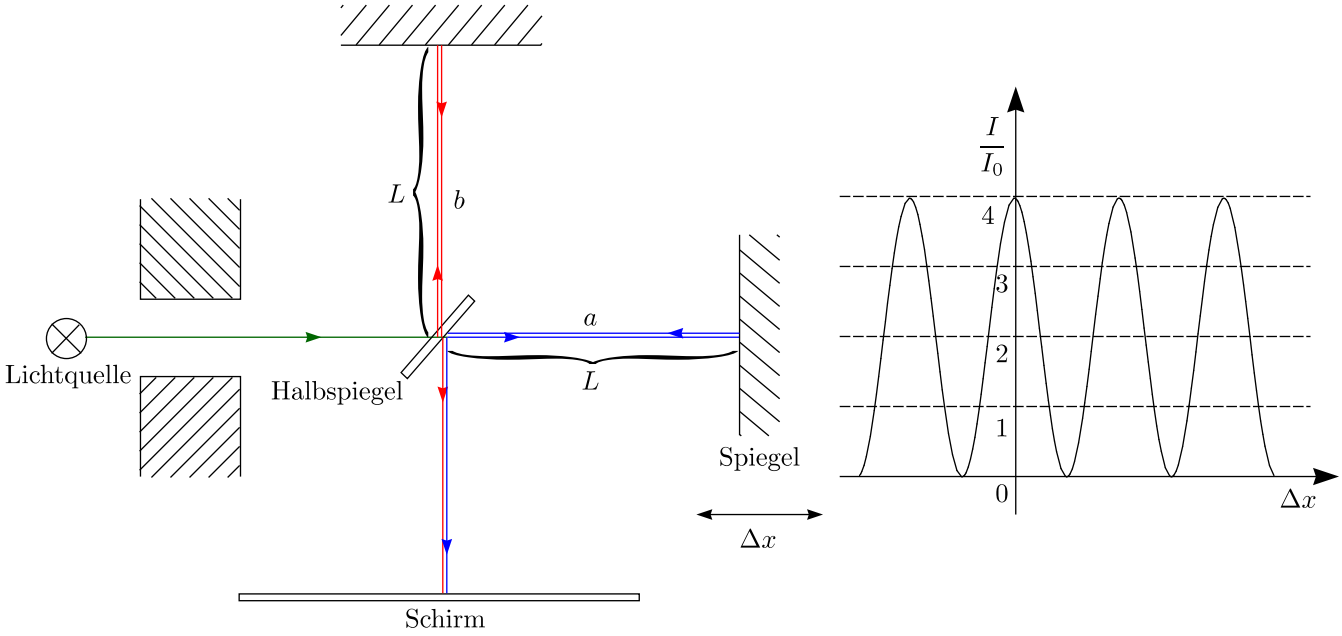


$$\text{Kohärenzzeit} = \frac{\text{Kohärenzlänge}}{\text{Lichtgeschwindigkeit}}$$

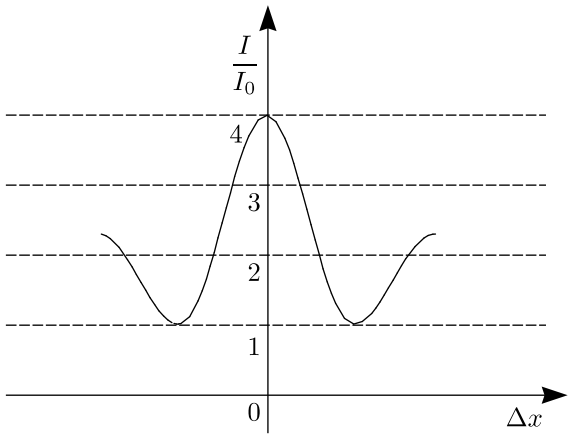
Oder auch:



Michelson-Interferometer:



Glühlampe:



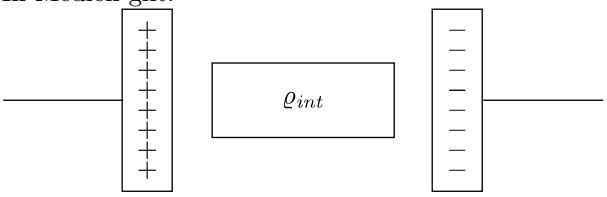
Wiederholung:Maxwellsche Gleichungen

Das System aus Differentialgleichungen, welches die Maxwellschen Gleichungen beinhaltet, lautet:

$\mathrm{div}\vec{D} = \varrho \quad \mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} \qquad \vec{D} = \vec{E} \cdot \varepsilon_0$

$\mathrm{div}\vec{B} = 0 \quad \mathrm{rot}\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{D} \quad \vec{B} = \vec{H} \cdot \mu_0$

In Medien gilt:



$\varrho = \varrho_{int} + \varrho_{ext}$

$j = j_{int} + j_{ext}$

j_{int} ist fast nie von Bedeutung in der Optik.

$\mathrm{div}\varepsilon_0\vec{E} = \varrho_{int} + \varrho_{ext}$

$\mathrm{div}\varepsilon_0\vec{E} - \underbrace{\varrho_{int}}_{\mathrm{div}\vec{P}} = \varrho_{ext}$

$\mathrm{div}\underbrace{\left(\varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}\right)}_{\vec{D}} = \varrho_{ext}$

Also gilt nun:

$\vec{D} = \varrho_{ext}$ (wobei ϱ_{ext} oft weggelassen wird)

$\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\vec{D} - \vec{P}\right)$

$\mathrm{div}\vec{P} = -\varrho_{int}$

$\vec{P}$ wird Polarisation genannt. Die Einheit der Polarisation ist:

$[P] = [D] = \frac{\mathrm{As}}{\mathrm{m}^2} = \frac{\mathrm{As} \cdot \mathrm{m}}{\mathrm{m}^3} \triangleq \frac{\text{Dipolmoment}}{\text{Volumen}}$

In $\vec{P}$ steckt die gesamte Information über die optischen Eigenschaften des Materials. Demnach verwendet man meistens auch andere Größen:

$\varepsilon, \chi, n, \alpha, \ldots$

Zur Erinnerung:

Der Poynting-Vektor $\vec{S}$. Energiedichte des elektromagnetischen Feldes w:

$$w = \frac{1}{2}\left(\vec{D}\cdot\vec{E} + \vec{B}\cdot\vec{H}\right); [w] = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^3}$$

Wir berechnen die zeitliche Änderung von w ($\hat{=}$ Zu- oder Abflüssen + Umwandlung)

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{2}\left(\dot{\vec{D}}\cdot\vec{E} + \vec{D}\cdot\dot{\vec{E}} + \dot{\vec{B}}\cdot\vec{H} + \vec{B}\cdot\dot{\vec{H}}\right)$$

Im Vakuum gilt mit den Maxwellschen Gleichungen $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E}$ und $\vec{B} = \mu_0\vec{H}$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial t} &= \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0\dot{\vec{E}}\cdot\vec{E} + \varepsilon_0\vec{E}\cdot\dot{\vec{E}} + \mu_0\dot{\vec{H}}\cdot\vec{H} + \mu_0\vec{H}\cdot\dot{\vec{H}}\right) = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\varepsilon_0\vec{E}\cdot\dot{\vec{E}} + \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\mu_0\vec{H}\cdot\dot{\vec{H}} \\ &= \varepsilon_0\vec{E}\cdot\dot{\vec{E}} + \mu_0\cdot\vec{H}\cdot\dot{\vec{H}}\end{aligned}$$

Nun gilt ja:

$$\boxed{\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\dot{\vec{B}} \Rightarrow \dot{\vec{B}} = -\vec{\nabla}\times\vec{E}}$$

$$\boxed{\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{j} + \dot{\vec{D}} \Rightarrow \dot{\vec{D}} = \vec{\nabla}\times\vec{H} - \vec{j}}$$

Wir setzen dies oben ein und erhalten:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \varepsilon_0\vec{E}\cdot\dot{\vec{E}} + \mu_0\cdot\vec{H}\cdot\dot{\vec{H}} = \vec{E}\cdot\dot{\vec{D}} + \vec{H}\cdot\dot{\vec{B}} = \vec{E}\left(\vec{\nabla}\times\vec{H} - \vec{j}\right) - \vec{H}\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)$$

Mit $\mathrm{div}\left(\vec{a}\times\vec{b}\right) = -\vec{a}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{b}\right) + \vec{b}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{a}\right)$ erhält man schlußendlich:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\mathrm{div}\left(\vec{E}\times\vec{H}\right) - \vec{j}\cdot\vec{E} =: \vec{S}$$

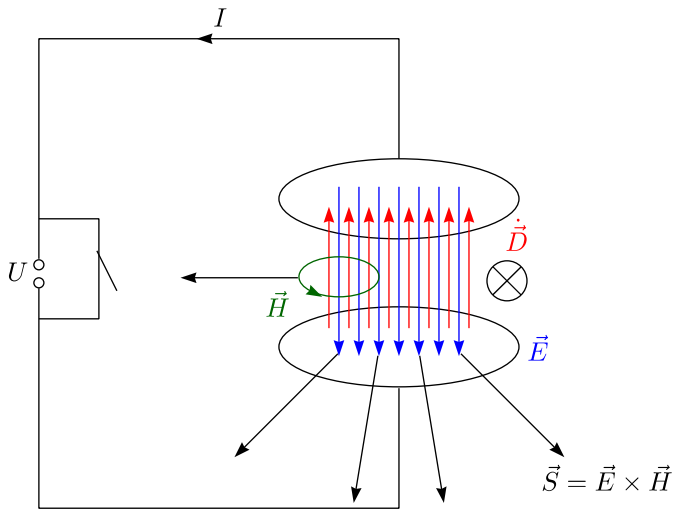
Also folgt:

$$\boxed{\frac{\partial w}{\partial t} = -\mathrm{div}\vec{S} - \vec{j}\cdot\vec{E}}$$

$\mathrm{div}\vec{S} \hat{=}$ Abschaltung

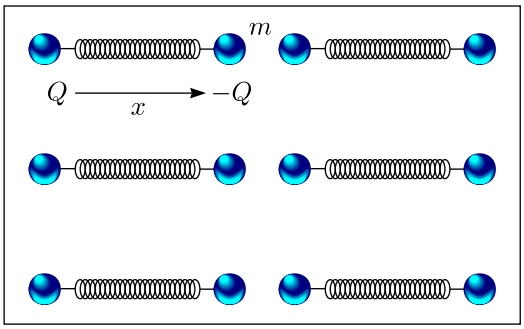
$\vec{j}\cdot\vec{E} \hat{=}$ Umwandlung in Wärme (Ohmsches Gesetz)

Beispiel:



Der Poynting-Vektor zeigt also die Richtung des Energieflusses an. Der Betrag gibt die Größe des Energieflusses an.

1.3 Der eindimensionale Lorentz-Oszillator



Im Volumen V befinden sich N Oszillatoren. Das Dipolmoment p eines Oszillators ist:

$$p = -Qx$$

Damit wird die Polarisation zu:

$$P = \frac{N}{V} \cdot p = -\frac{NQx}{V}$$

Die Newtonschen Bewegungsgleichungen sind:

$$m\ddot{x} = -QE - \left(D_1 x + D_2 x^2 + D_3 x^3 + \ldots\right)$$

Die nichtlinearen Terme werden vernachlässigt, da die Auslenkungen sehr klein sind, und wir erhalten:

$$m\ddot{x} = -QE - Dx$$

Dies ist der harmonische Oszillator, d.h. E ist klein und x ist klein. Das Hookesche Gesetz gilt. Abweichungen davon gibt es jedoch in der nichtlinearen Optik (siehe Kapitel 7.1).
Mit $E = E_0 \cos(\omega t)$ und $x = x_0 \cos(\omega t)$ folgt:

$$x_0 = \frac{-QE_0}{D - m\omega^2}$$

Oder mit der Eigenfrequenz $\Omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$ ergibt sich:

$$x_0 = -\frac{\frac{QE_0}{m}}{\Omega^2 - \omega^2}$$

Daraus resultiert die Polarisation des Mediums:

$$P = -\frac{NQx}{V} = \frac{NQ^2}{Vm} \cdot \frac{1}{\Omega^2 - \omega^2} \cdot E =: \varepsilon_0 \chi E$$

Mit der optischen Suszeptibilität $\chi(\omega)$:

$$\boxed{\chi = \frac{NQ^2}{Vm\varepsilon_0} \frac{1}{\Omega^2 - \omega^2}}$$

Mit $D = \varepsilon_0 E + P$ folgt weiterhin:

$$D = \varepsilon_0 E + \varepsilon_0 \chi E = \varepsilon_0 \underbrace{(1 + \chi)}_{=:\varepsilon_r} E$$

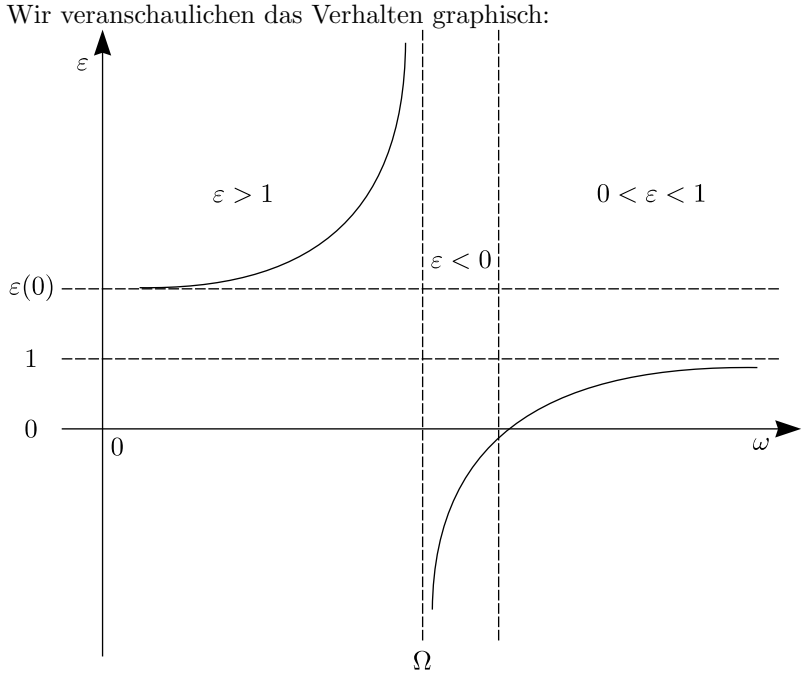
Der Index r bei ε_r wird oft weggelassen. $\varepsilon(\omega)$ ist die optische dielektrische Funktion.

$$\boxed{\varepsilon = 1 + \chi}$$

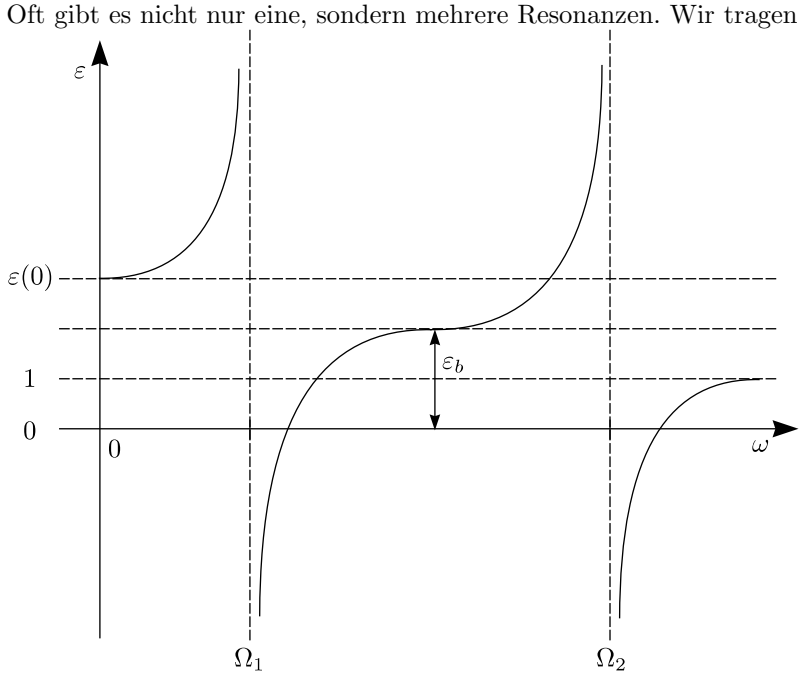
Also ist:

$$\boxed{\varepsilon = 1 + \frac{NQ^2}{Vm\varepsilon_0} \frac{1}{\Omega^2 - \omega^2}}$$

Wir veranschaulichen das Verhalten graphisch:



Oft gibt es nicht nur eine, sondern mehrere Resonanzen. Wir tragen auch dies wieder graphisch auf:



Will man höherfrequente Resonanzen(hier nur Ω_2) zusammenfassen, so schreibt man mit der Hintergrund-Dielektrizitätskonstante ε_b:

$$\boxed{\varepsilon = \varepsilon_b + \chi}$$

In unserer Schreibweise bezieht sich das χ nur noch auf die Resonanz 1. Aus den Maxwell-Gleichungen folgt die Wellengleichung mit der Mediumlichtgeschwindigkeit c.

$$\boxed{\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E} = 0}$$

Die Mediumlichtgeschwindigkeit ist:

$$\boxed{c := \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0\varepsilon}} =: \frac{c_0}{n}}$$

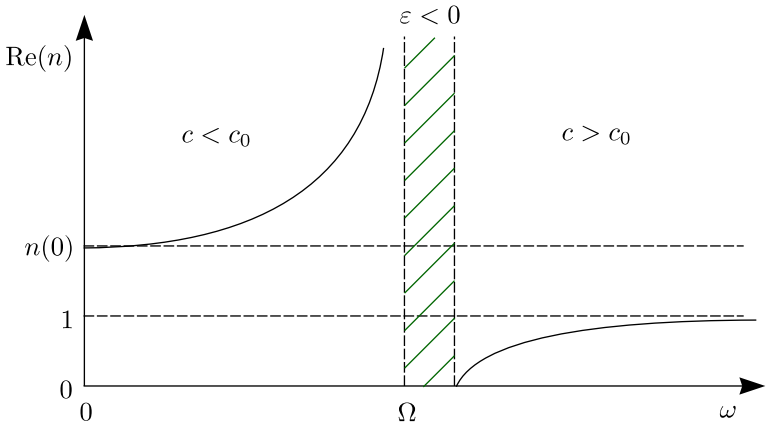
Die Vakuum-Lichtgeschwindigkeit hat folgende Größe:

$$\boxed{c_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} \approx 2,99 \cdot 10^8 \,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}$$

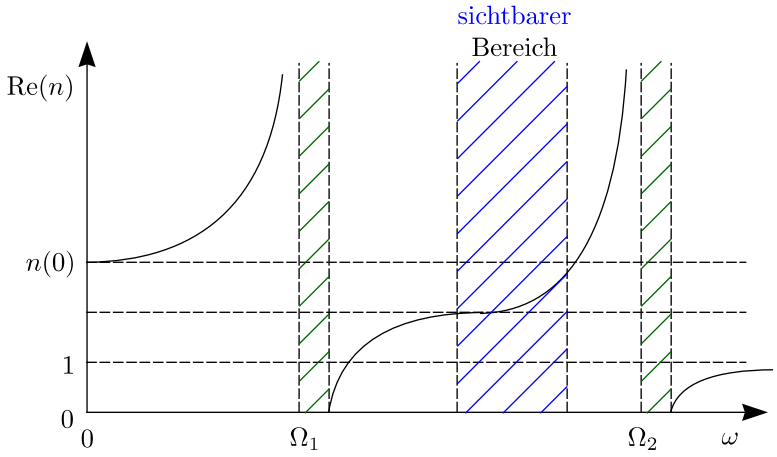
Also folgt für die Brechzahl:

$$\boxed{n = \sqrt{\varepsilon}}$$

Graphisch (für Resonanz):



Graphisch (für mehrere Resonanzen):



1.4 Lösung der Wellengleichung

Die komplexe Wellengleichung lautet:

$E(x,t) = E_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}$

Sofern hier gilt:

$$\boxed{\frac{\omega}{k} = c}$$

Diese Beziehung ist die sehr wichtige Dispersionsrelation. Diese setzen wir in die Wellengleichung ein und erhalten:

$$E(x,t) = E_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\omega}{c}x-\omega t\right)} = E_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\omega}{c_0}\cdot n\cdot x-\omega t\right)}$$

Mit $\boxed{n = n' + \mathrm{i}n''}$ folgt:

$$E(x,t) = E_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\omega}{c_0}n'x-\omega t\right)} \mathrm{e}^{-\frac{\omega}{c_0}n''x} = E_0 \underbrace{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k'x-\omega t)}}_{\substack{\text{ebene}\\ \text{Welle}}} \underbrace{\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2}x}}_{\text{Dämpfung}}$$

Es handelt sich also um eine ebene Welle, die mit dem Absorptionskoeffizienten α exponentiell gedämpft ist:

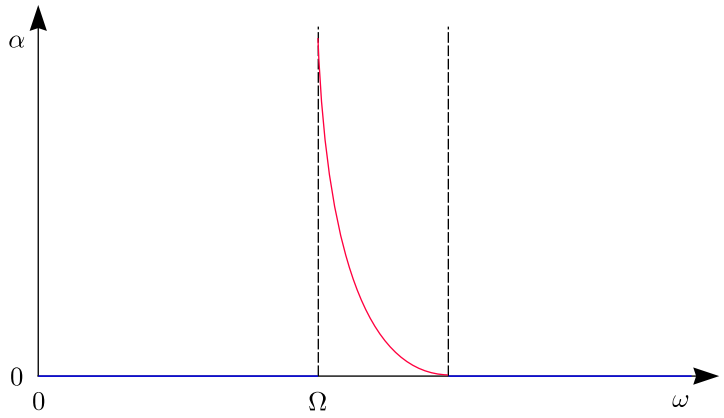
$$\boxed{\alpha = 2\frac{\omega}{c_0}\cdot n''}$$

n'' ist hierbei der Imaginärteil der Brechzahl. Die Intensität einer elektromagnetischen Wellen ist ja gegeben durch:

$I = \langle S \rangle \sim E^2 \sim \mathrm{e}^{-\alpha x}$

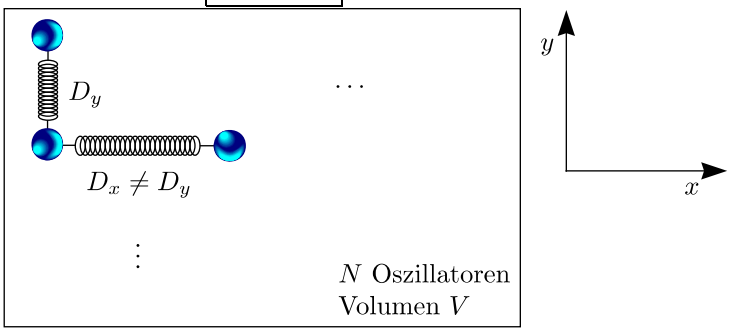
Daher kommt das $\frac{\alpha}{2}$ im Absorptionskoeffizienten.

Graphisch:



1.5 Der Lorentz-Oszillator

Was passiert mit $\boxed{P = \varepsilon_0 \chi E}$ in drei Dimensionen?



$\vec{P} \not\parallel \vec{E}$ und $|\vec{P}|$ wird im allgemeinen abhängig von der Richtung von $\vec{E}$, also abhängig von der Polarisation. Wir verallgemeinern:

$\vec{P} = \varepsilon_0 \underline{\underline{\chi}} \vec{E}$

$\underline{\underline{\chi}}$ ist hier eine 3X3-Matrix, nämlich der Suszeptibilitätstensor.

$$\underline{\underline{\chi}} = \begin{pmatrix} \chi_{xx} & \chi_{xy} & \chi_{xz} \\ \chi_{yx} & \chi_{yy} & \chi_{yz} \\ \chi_{zx} & \chi_{zy} & \chi_{zz} \end{pmatrix}$$

In isotropen und auch in kubischen Systemen gilt also wieder:

$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$

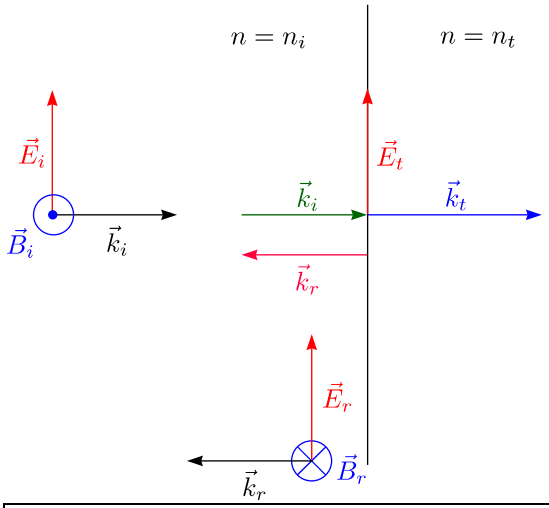
Im allgemeinen wird somit auch die Brechzahl n abhängig von der relativen Richtung vom Feldvektor und Symmetrieachsen des Materials. Dieses Phänomen nennt man Doppelbrechung. Im Kapitel 3.3 besprechen wir diesbezügliche Effekte.

Kapitel 2

Wellenoptik

2.1 Reflexion und Brechung von Licht

2.1.1 Senkrechter Einfall von Licht auf einen Halbraum



Beispiel: Glas

Die Vektoren $\vec{k}$, $\vec{E}$ und $\vec{B}$ bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem.

Beweis:

$$\mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}$$

Wir machen folgenden Ansatz:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}$$

Einsetzen ergibt:

$$\mathrm{i}\vec{k} \times \vec{E} = +\mathrm{i}\omega\vec{B}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{k} \times \vec{E} = \omega\vec{B}}$$

Dies ist genau die Definition eines Rechtssystems.

Stetigkeitsbedingung:

Felder haben ausschließlich Tangentialkomponenten.

$$\boxed{E_i + E_r = E_t}$$

$\boxed{B_i - B_r = B_t}$

Wegen $\frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0 \varepsilon}}$ mit $B = \mu_0 H$:

$\Rightarrow \sqrt{\varepsilon_i} E_i - \sqrt{\varepsilon_r} E_r = \sqrt{\varepsilon_t} E_t$

$\Rightarrow n_i (E_i - E_r) = n_t E_t$

$\Rightarrow E_t = \frac{n_i}{n_t}(E_i - E_r)$

Dieses Resultat wird nun in die obige Bestimmungsgleichung eingesetzt:

$E_i + E_r = \frac{n_i}{n_t}(E_i - E_r)$

$\Rightarrow E_r \left(1 + \frac{n_i}{n_t}\right) = E_i \left(\frac{n_i}{n_t} - 1\right)$

$\Rightarrow \boxed{\frac{E_r}{E_i} = \frac{\frac{n_i}{n_t} - 1}{\frac{n_i}{n_t} + 1} = \frac{n_i - n_t}{n_i + n_t} =: r}$

Dies ist nun der Feld-Reflexionskoeffizient. Weiterhin erhält man die Fresnelsche Gleichung:

$\boxed{\frac{E_t}{E_i} = \frac{2n_i}{n_i + n_t} =: t}$

t ist der sogenannte Feld-Transmissionskoeffizient.

$\boxed{r \text{ kann negativ sein!}}$

Wir machen eine Tabelle:

Phasensprung bei Reflexion	$n_t > n_i$	$n_t < n_i$
E	π	0
B	0	π
	Reflexion an optisch dichten Medien	Reflexion an optisch dünnen Medien

Somit folgen die Koeffizienten für die Intensität I:

$I = \langle |\vec{S}| \rangle = \langle |\vec{E} \times \vec{H}| \rangle = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{\mu_0}} \langle |\vec{E}|^2 \rangle = n \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \langle |\vec{E}|^2 \rangle$

$R \mathrel{\hat{=}}$ Intensität-Reflexionskoeffizient

$T \mathrel{\hat{=}}$ Intensität-Transmissionskoeffizient

$\boxed{R = r^2 \text{ und } T = t^2 \frac{n_t}{n_i}}$

Es gilt außerdem:

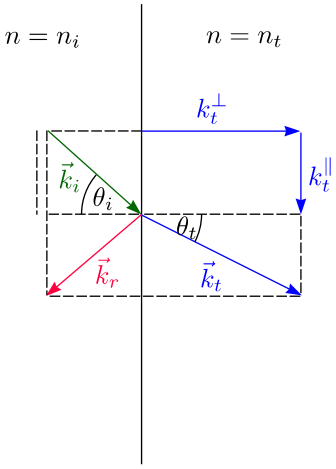
$\boxed{R + T = 1 \text{ und } r + t \neq 1}$

Beispiel (Luft-Glas-Grenzfläche):

$n_i = 1, n_t = 1,5$

$R = \left(\frac{1 - 1,5}{1 + 1,5}\right)^2 = 0,04 = 4\%$

2.1.2 Schräger Einfall von Licht auf einen Halbraum



Beispiel: Glas

- Komponente von $\vec{k}$ senkrecht zur Oberfläche ($\perp$) wie in Kapitel 3.1.1
- Komponente von $\vec{k}$ parallel zur Oberfläche ($\parallel$) erhalten.

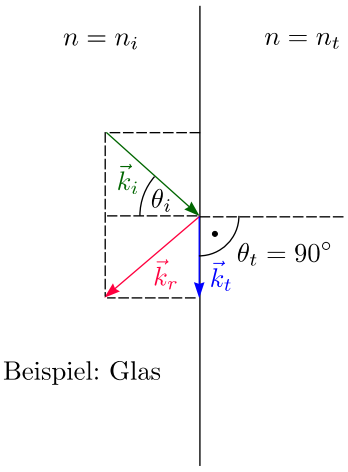
$$\sin\theta_t = \frac{k_t^{\parallel}}{|\vec{k}_t|} = \frac{k_i^{\parallel}}{|\vec{k}_t|} = \frac{|\vec{k}_i| \cdot \sin\theta_i}{|\vec{k}_t|}$$

Mit $|\vec{k}_t| = \frac{\omega}{c_t} = \frac{\omega}{c_0} n_t = \frac{\omega}{c_i}\frac{n_t}{n_i} = |\vec{k}_i|\frac{n_t}{n_i}$ folgt das Snellius-Brechungsgesetz:

$$\boxed{n_t \cdot \sin\theta_t = n_i \cdot \sin\theta_i}$$

Licht wird im optisch dichteren Medium zum Lot hin gebrochen.

Spezialfall: Totalreflexion



Beispiel: Glas

$\theta_t = 90° \Rightarrow \sin\theta_t = 1$

$$\boxed{n \cdot \sin\theta_G = 1}$$

Der Grenzwinkel der Totalreflexion $\theta_i = \theta_G$ entsteht bei der Reflexion an optisch dünneren Medien.

Beispiel:

H_2O mit $n = 1,5$ hat einen Grenzwinkel θ_G von etwa 42°.

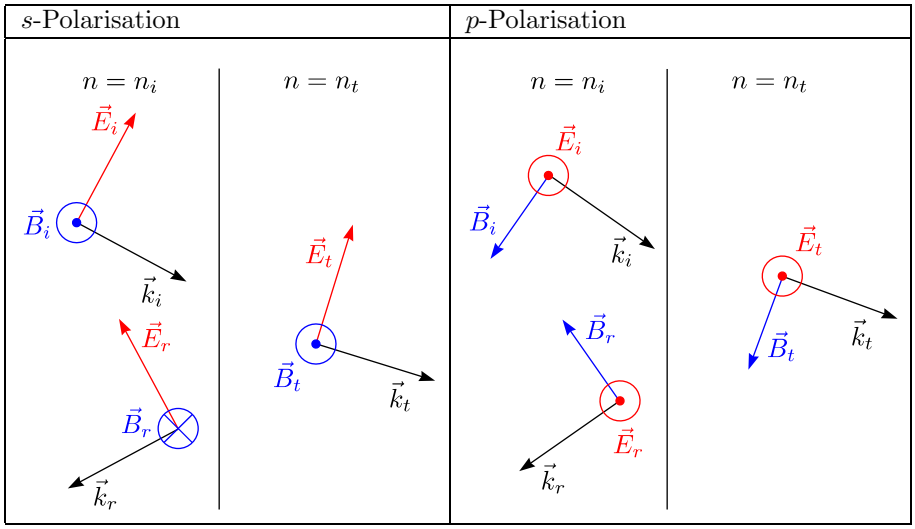
Frage:

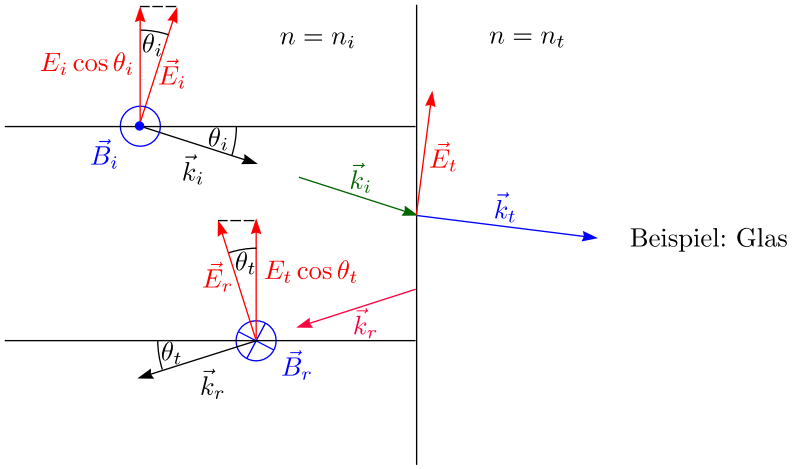
Wie groß sind r, t, R, T? Im Gegensatz zum senkrechten Einfall, gibt es ein Problem: v, t, R, T hängen von Richtung von $\vec{E}$ in Bezug auf die Einfallsebene ab!

Definitionen:

$\vec{E} \parallel$ Einfallsebene $\triangleq$ p-Polarisation

$\vec{E} \perp$ Einfallsebene $\triangleq$ s-Polarisation





Unser Vorgehen ist analog zu Kapitel 3.1.1. Die zu verwendende Stetigkeitsbedingung natürlich bezogen auf die Parallelkomponenten der Feldvektoren lautet:

$$\cos\theta_i\,(E_i + E_r) = \cos\theta_t E_t$$

Außerdem gilt analog zu vorher:

$$n_i(E_i - E_r) = n_t E_t$$

$$E_t = \frac{n_i}{n_t}(E_i - E_r)$$

Dieses Resultat wird nun wieder oben eingesetzt:

$$\cos\theta_i\,(E_i + E_r) = \cos\theta_t \frac{n_i}{n_t}\,(E_i - E_r)$$

Damit folgt:

$$E_r\left(\cos\theta_i + \cos\theta_t\frac{n_i}{n_t}\right) = E_i\left(\cos\theta_t\frac{n_i}{n_t} - \cos\theta_i\right)$$

Und schließlich gilt:

$$\frac{E_r}{E_i} = \frac{\cos\theta_t\frac{n_i}{n_t} - \cos\theta_i}{\cos\theta_t\frac{n_i}{n_t} + \cos\theta_i} = \frac{\cos\theta_t\cdot n_i - \cos\theta_i\cdot n_t}{\cos\theta_t\cdot n_i + \cos\theta_i\cdot n_t} =: r_p$$

Analog erhält man die restlichen Beziehungen:

- ✷ p-Polarisation:

$$\boxed{r_p = \frac{n_i\cos\theta_t - n_t\cos\theta_i}{n_i\cos\theta_t + n_t\cos\theta_i}}$$

$$\boxed{t_p = \frac{2n_i\cos\theta_i}{n_i\cos\theta_t + n_t\cos\theta_i}}$$

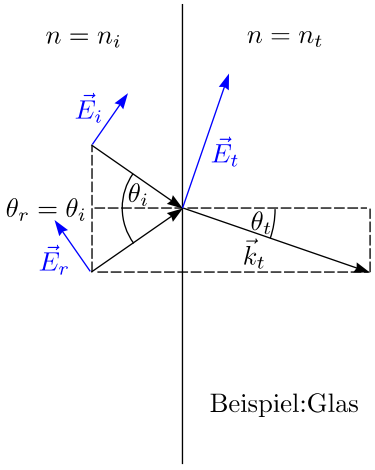
- ✷ s-Polarisation:

$$\boxed{r_s = \frac{n_i\cos\theta_i - n_t\cos\theta_t}{n_i\cos\theta_i + n_t\cos\theta_t}}$$

$$\boxed{t_s = \frac{2n_i\cos\theta_i}{n_i\cos\theta_i + n_t\cos\theta_t}}$$

θ_t ergibt sich aus dem Brechungsgesetz von Snellius. Es handelt sich um die Fresnelschen Gleichungen für r_s, r_p, t_s und t_p. In der p-Polarisation gibt es ein θ_i mit $R = 0$. Diesen Winkel θ_i nennt man Brewster-Winkel.

Veranschaulichung:



$|\vec{E}_r| = 0$, falls $\theta_i = \theta_B \triangleq$ Brewster-Winkel

Zur Erinnerung:

Ein Hertzscher Dipol strahlt nicht ab entlang seiner Schwingungsachse.

Beweis:

Es gilt ja folgende Maxwellsche Gleichung, welche $\vec{H}$ und $\vec{D}$ verknüpft:

$$\boxed{\mathrm{rot}\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}}$$

Wir verwenden folgende Ansätze für $\vec{D}$ und $\vec{H}$:

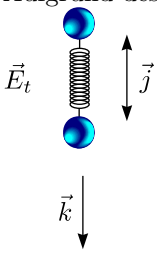
$$\boxed{\vec{D} = \vec{D}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}}$$

$$\boxed{\vec{H} = \vec{H}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}}$$

Damit resultiert dann durch Einsetzen in obige Gleichung:

$$\mathrm{i}\vec{k} \times \vec{H} = \vec{j} - \mathrm{i}\omega\vec{D}$$

Aufgrund des Vektorproduktes gilt also $\vec{j} \perp \vec{k}$. Damit wird keine Welle abgestrahlt mit $\vec{j} \parallel \vec{k}$.



Herleitung des Brewsterwinkels:

$$\underbrace{\theta_B}_{\theta_i} + 90° + \theta_t = 180°$$

$$\Rightarrow \theta_t = 90° - \theta_B$$

Mit dem Brechungsgesetz folgt:

$$\Rightarrow n_i \sin\theta_B = n_t \sin(90° - \theta_B) = n_t \cos(\theta_B)$$

Daraus folgt:

$$\boxed{\tan\theta_B = \frac{n_t}{n_i}}$$

Dies ist der Brewster-Winkel.

Beispiele:

Es sei eine System gegeben mit $n_i = 1$ und $n_t = 1,5$. Dann folgt damit der Brewster-Winkel zu:

$$\theta_B = \arctan\left(\frac{n_t}{n_i}\right) = \arctan\left(\frac{1,5}{1}\right) = \arctan(1,5) = \boxed{56,3°}$$

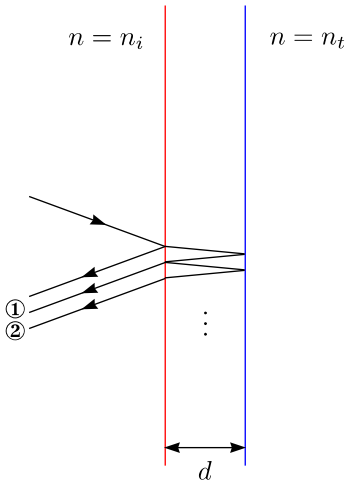
Für ein anderes System gilt $n_i = 1,5$ und $n_t = 1$. Auch hier folgt:

$$\theta_B = \arctan\left(\frac{n_t}{n_i}\right) = \arctan\left(\frac{1}{1,5}\right) = \arctan\left(\frac{2}{3}\right) = \boxed{33,7°}$$

2.2 Dielektrische Schichtsysteme

Kann man die Reflexion von Licht an Oberflächen verstärken oder abschwächen?

2.2.1 $\lambda/4$-Antireflexschicht



Es gibt eine destruktive Interferenz der Partialwellen ① und ②, falls der Phasenunterschied „Hin-und-Zurück“= 180° ist, d.h.:

$$2 \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \cdot d = 2|\vec{k}| \cdot d = \pi$$

$$\boxed{d = \frac{\lambda}{4}}$$

Deshalb heißt die Schicht $\lambda/4$-Schicht. λ ist natürlich die Wellenlänge im Medium mit Brechzahl n. Wir groß muß n_1 sein für den optischen Effekt? Die Partialwellen 1 und 2 sind nach dem Betrage gleich groß. Damit muß also auch gelten:

$$\boxed{R_i = R_t}$$

$$\left(\frac{n_i - n_1}{n_i + n_1}\right)^2 = \left(\frac{n_1 - n_t}{n_1 + n_t}\right)^2$$

$$(n_i - n_1)(n_1 + n_t) = (n_1 - n_t)(n_i + n_1)$$

$$n_i n_1 + n_i n_t - n_i^2 - n_1 n_t = n_1 n_i + n_1^2 - n_t n_i - n_t n_1$$

Hier fallen viele Koeffizienten weg, wobei nun folgt:

$$\boxed{n_1 = \sqrt{n_i n_t}}$$

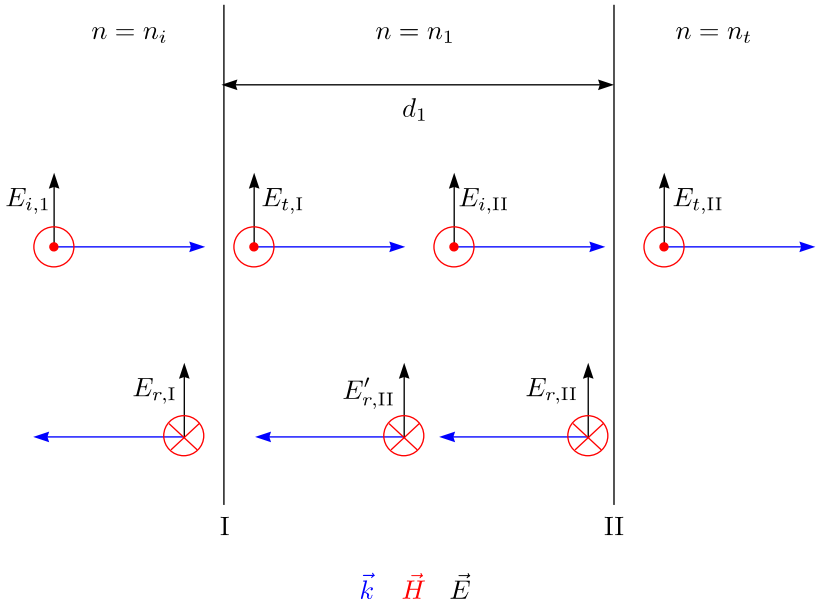
Es handelt sich also um das geometrische Mittel.

Beispiel:Antireflexbeschichtung von Glas/Luft

$$n_i = 1, n_t = 1,5 \Rightarrow n_1 = \sqrt{1 \cdot 1,5} \approx 1,22$$

Man erhält eine Verbesserung, indem man komplexere Schichtsysteme verwendet. Dies wollen wir im folgenden Kapitel betrachten:

2.2.2 Transfermatrixmethode, Spiegel



✷ Grenzfläche I:

Wir notieren uns die Stetigkeitsbedingungen der Tangentialkomponenten von $\vec{E}$ und $\vec{H}$:

$$\boxed{E_{\mathrm{I}} = E_{i,\mathrm{I}} + E_{r,\mathrm{I}} = E_{t,\mathrm{I}} + E'_{r,\mathrm{II}}}$$

$$\boxed{H_{\mathrm{I}} = H_{i,\mathrm{I}} - H_{r,\mathrm{I}} = H_{t,\mathrm{I}} - H'_{r,\mathrm{II}}}$$

Oder mit $H = \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu_0}}E = n\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E = Z^{-1}E$ folgt:

$$\boxed{Z^{-1} = n\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}}$$

Z ist hierbei die Medien-Impedanz.

$$\boxed{H_{\mathrm{I}} = Z_i^{-1}\left(E_{i,\mathrm{I}} - E_{r,\mathrm{II}}\right) = Z_1^{-1}\left(E_{t,\mathrm{I}} - E'_{r,\mathrm{II}}\right)}$$

✷ Grenzfläche II:

$$E_{\mathrm{II}} = E_{i,\mathrm{II}} + E_{r,\mathrm{II}} = E_{t,\mathrm{II}}$$

$$H_{\mathrm{II}} = Z_1^{-1}\left(E_{i,\mathrm{II}} - E_{r,\mathrm{II}}\right) = Z_t^{-1}E_{t,\mathrm{II}}$$

Phasenverzögerung:

$$E_{i,\mathrm{II}} = E_{t,\mathrm{I}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_1 d_1}$$
$$E'_{r,\mathrm{II}} = E_{r,\mathrm{II}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_1 d_1}$$

Dies folgt mit $\frac{\omega}{k_1} = c_1 = \frac{c_0}{n_1}$. Die grundlegende Idee bei Mehrschichtsystemen ist nun folgende:

$$\boxed{\begin{pmatrix} E_{\mathrm{I}} \\ H_{\mathrm{I}} \end{pmatrix} = \mathcal{M}_{\mathrm{I}} \begin{pmatrix} E_{\mathrm{II}} \\ H_{\mathrm{II}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{\mathrm{II}} \\ H_{\mathrm{II}} \end{pmatrix}}$$

$\mathcal{M}_{\mathrm{I}}$ ist die charakteristische Matrix (Transfermatrix). Durch Ausmultiplizieren der ersten Zeile ergibt sich:

$$z_1 = m_{11} \cdot E_{t,\mathrm{I}}\left[\cos(k_1 d_1) - \mathrm{i}\sin(k_1 d_1)\right] + m_{11} \cdot E_{r,\mathrm{II}} + m_{12}Z_1^{-1} \cdot E_{t,\mathrm{I}}\left[\cos(k_1 d_1) - \mathrm{i}\sin(k_1 d_1)\right] -$$
$$+ m_{12}Z_1^{-1} \cdot E_{r,\mathrm{II}} \stackrel{!}{=} E_{t,\mathrm{I}} + E_{r,\mathrm{II}}\left[\cos(k_1 d_1) - \mathrm{i}\sin(k_1 d_1)\right]$$

Durch Zusammenfassung der Ausdrücke folgt:

$$\boxed{\begin{aligned} &E_{t,\mathrm{I}} \cdot (\cos(k_1 d_1) - \mathrm{i}\sin(k_1 d_1)) \cdot \left[m_{11} + m_{12} Z_1^{-1}\right] + E_{r,\mathrm{II}} \cdot \left[m_{11} - m_{12} Z_1^{-1}\right] = \\ &= E_{t,\mathrm{I}} + E_{r,\mathrm{II}} \left(\cos(k_1 d_1) - \mathrm{i}\sin(k_1 d_1)\right) \end{aligned}}$$

Durch Vergleich der linken und rechten Seite der Gleichung resultiert das folgende Gleichungssystem:

1.) $(\cos(k_1 d_1) - \mathrm{i}\sin(k_1 d_1)) \cdot \left[m_{11} + m_{12} Z_1^{-1}\right] = 1$

2.) $\cos(k_1 d_1) - \mathrm{i}\sin(k_1 d_1) = m_{11} - m_{12} Z_1^{-1}$

Durch Koeffizientenvergleich erhält man aus der zweiten Gleichung:

$$\boxed{m_{11} = \cos(k_1 d_1)}$$

$$\boxed{m_{12} = \mathrm{i} Z_1 \sin(k_1 d_1)}$$

Durch Einsetzen in die erste Gleichung folgt:

$$(\cos(k_1 d_1) - \mathrm{i}\sin(k_1 d_1)) \cdot [\cos(k_1 d_1) + \mathrm{i}\sin(k_1 d_1)] = \cos^2(k_1 d_1) - i^2 \sin^2(k_1 d_1) = \cos^2(k_1 d_1) + \sin^2(k_1 d_1) = 1$$

Damit erfüllt die Lösung auch die erste Gleichung, womit wir also die erste Zeile unserer Matrix $\mathcal{M}$ kennen. Die zweite Zeile folgt analog und kann als Übung nachgerechnet werden. Damit notieren wir das Endergebnis der Transfermatrix:

$$\boxed{\mathcal{M}_{\mathrm{I}} = \begin{pmatrix} \cos(k_1 d_1) & Z_1 \mathrm{i}\sin(k_1 d_1) \\ Z_1^{-1} \mathrm{i}\sin(k_1 d_1) & \cos(k_1 d_1) \end{pmatrix}}$$

Analog zu Einschichtsystemen können nun N Schichten behandelt werden:

$$\begin{pmatrix} E_{\mathrm{I}} \\ H_{\mathrm{I}} \end{pmatrix} = \underbrace{\mathcal{M}_{\mathrm{I}} \mathcal{M}_{\mathrm{II}} \ldots \mathcal{M}_N}_{\mathcal{M}\ (2\times 2\text{-Matrix})} \begin{pmatrix} E_{N+1} \\ H_{N+1} \end{pmatrix} \text{ mit } \mathcal{M} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$$

Hiermit können r und t „leicht“ bestimmt werden:

$$\begin{pmatrix} E_{i,\mathrm{I}} + E_{r,\mathrm{I}} \\ Z_i^{-1} (E_{i,\mathrm{I}} - E_{r,\mathrm{I}}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{t,N+1} \\ Z_{N+1}^{-1} E_{t,N+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{t,N+1} \\ Z_t^{-1} E_{t,N+1} \end{pmatrix}$$

Wir dividieren durch $E_{i,\mathrm{I}}$ mit folgendem Resultat:

$$1 + r = m_{11} t + m_{12} Z_t^{-1} t$$

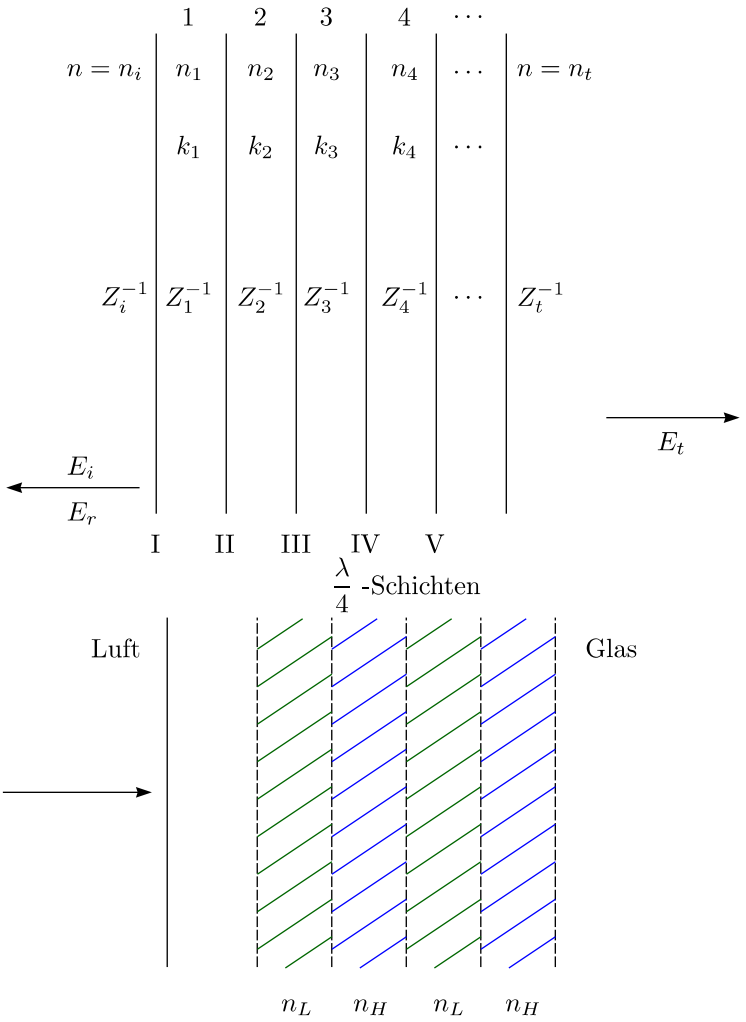
$$Z_i^{-1} (1 - r) = m_{21} t + m_{22} Z_t^{-1} t$$

Somit folgt für r und t durch Auflösen dieses Gleichungssystems:

$$\boxed{r = \frac{Z_i^{-1} m_{11} + Z_i^{-1} Z_t^{-1} m_{12} - m_{21} - Z_t^{-1} m_{22}}{Z_i^{-1} m_{11} + Z_i^{-1} Z_t^{-1} m_{12} + m_{21} + Z_t^{-1} m_{22}}}$$

$$\boxed{t = \frac{2 Z_i^{-1}}{Z_i^{-1} m_{11} + Z_i^{-1} Z_t^{-1} m_{12} + m_{21} + Z_t^{-1} m_{22}}}$$

Diese Gleichungen gelten sowohl für den Feld-Reflexionskoeffizient $r = \frac{E_r}{E_i}$ als auch für den Feld-Transmissionskoeffizient $t = \frac{E_t}{E_i}$.



kleine Brechzahl
hohe Brechzahl

Oder abgekürzt:

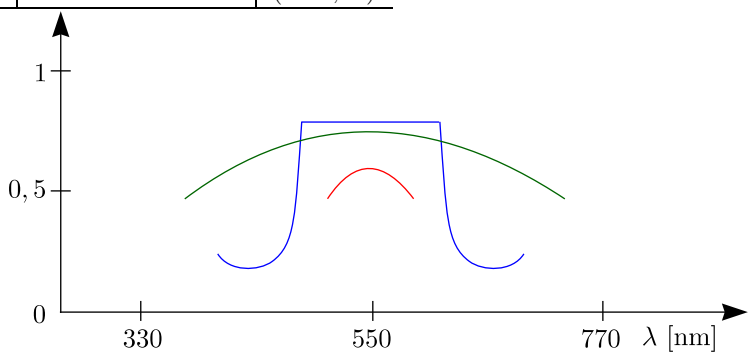
g(HL)^{n}a

g $\hat{=}$ glass

a $\hat{=}$ air

Folgende Substanzen werden bei der Herstellung verwendet:

H	Zirkoniumdioxid	(n=2,1)
	Titandioxid	(n=2,4)
	Zinksulfid	(n=2,32)
L	Magnesiumfluorid	(n=1,38)
	Ceriumfluorid	(n=1,63)



g(HL)^{5}Ha

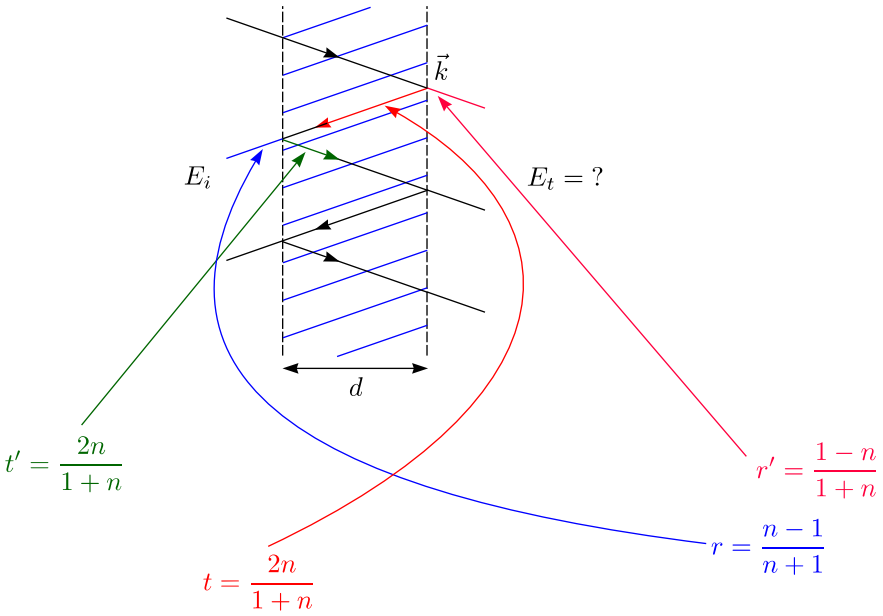
g(HL)^{3}a

g(HL)^{3}Ha

Anwendung:

Spiegel für Laser, Filter, ...

2.2.3 Fabri-Perot-Interferometer



$$E_t = E_i \cdot t' \cdot t \left(1 + r^2 e^{i\delta} + \left(r^2 e^{i\delta}\right)^2 + \ldots\right) = E_i \cdot t' \cdot t \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left(r^2 e^{i\delta}\right)^m}_{q}$$

Dies folgt mit der Phasenverschiebung $\delta = k \cdot d \cdot 2 = k_0 \cdot n \cdot d \cdot 2$. Die Formel können wir mittels der geometrischen Reihe vereinfachen:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

Durch Einsetzen ergibt sich:

$$E_t = E_i t t' \frac{1}{1 - r^2 e^{i\delta}}$$

Mit den Intensität folgt:

$$\frac{I_t}{I_i} = \left|\frac{E_t}{E_i}\right|^2$$

$$\frac{1}{|1 - r^2 e^{i\delta}|^2} = \frac{1}{(1 - r^2\cos\delta)^2 + (r^2 \sin\delta)^2} = \frac{1}{1 + (r^2)^2 - 2r^2\cos\delta} = \frac{1}{(1-r^2)^2 + 4r^2 \sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}$$

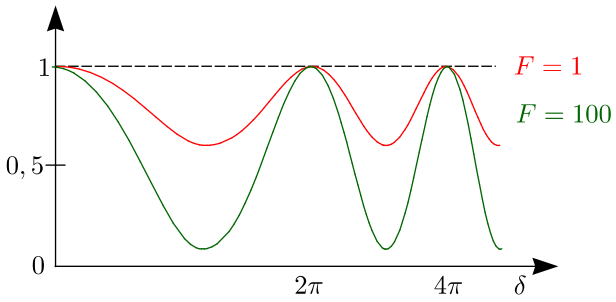
Und mit $tt' + r^2 = 1$, $tt' = 1 - r^2$ ergibt sich:

$$\boxed{\frac{I_t}{I_i} = \frac{1}{1 + F\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}}$$

Wir haben hier die sogenannte Airy-Formel hergeleitet mit dem Finesse-Faktor F und r:

$$\boxed{F := \left(\frac{2r}{1-r^2}\right)^2}$$

$$\boxed{r = \frac{n-1}{n+1}}$$



Maxima findet man bei:

$\boxed{\delta = m2\pi = k_0 \cdot n \cdot d \cdot 2} \triangleq$ Konstruktive Interferenz der Partialwellen

Beispiel:

- Glas mit $n = 1,5$:

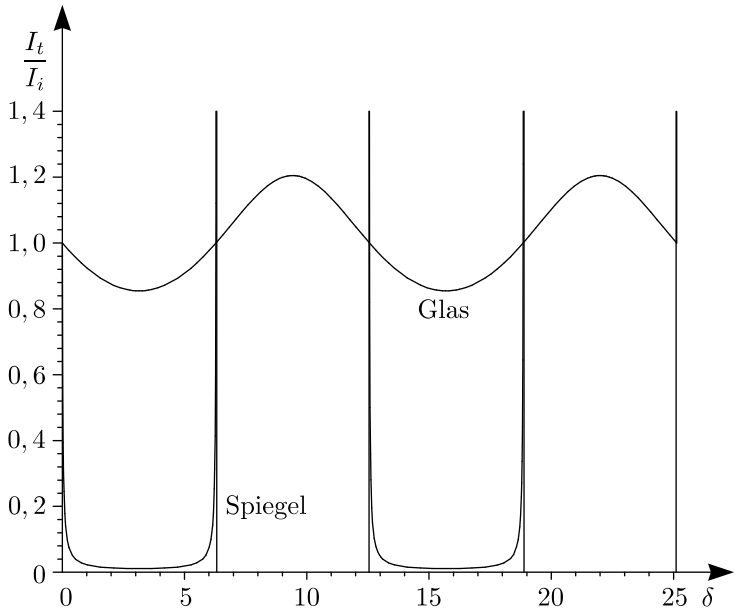
  $$r = \frac{n-1}{n+1} = \frac{1,5-1}{1,5+1} = 0,2$$

  Außerdem folgt der Finesse-Faktor:

  $$F = \left(\frac{2r}{1-r^2}\right)^2 = \left(\frac{2 \cdot 0,2}{1-0,2^2}\right)^2 \approx 0,17$$

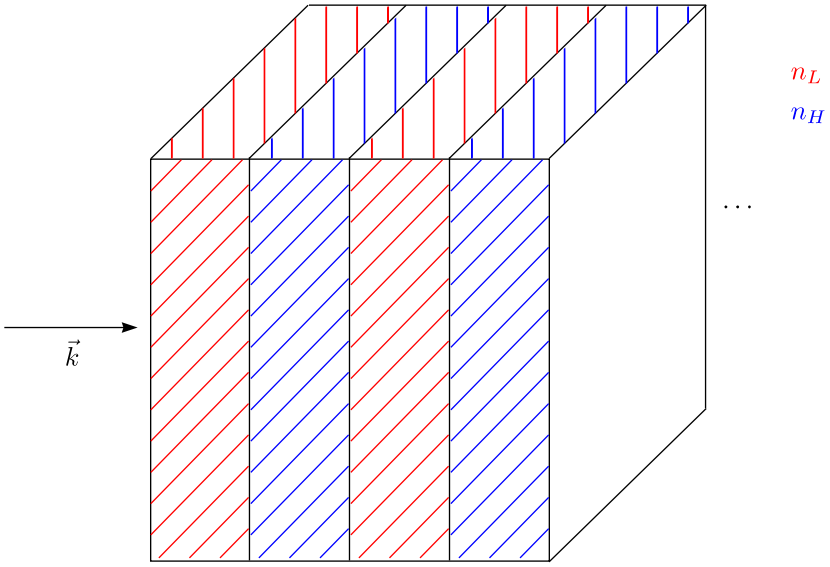
- Spiegel mit $r = 0,9$:

  $$F = \left(\frac{2r}{1-r^2}\right)^2 = \left(\frac{2 \cdot 0,9}{1-0,9^2}\right)^2 \approx 90$$

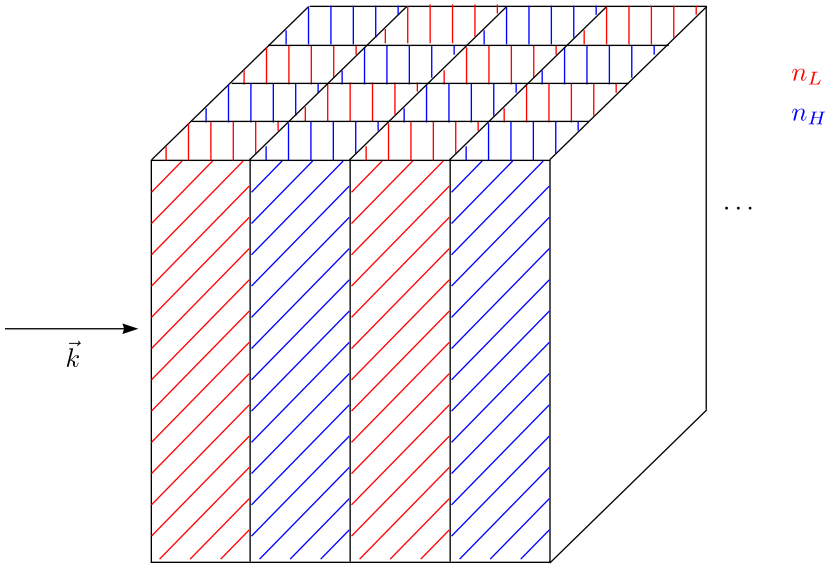


2.2.4 Photonische Kristalle

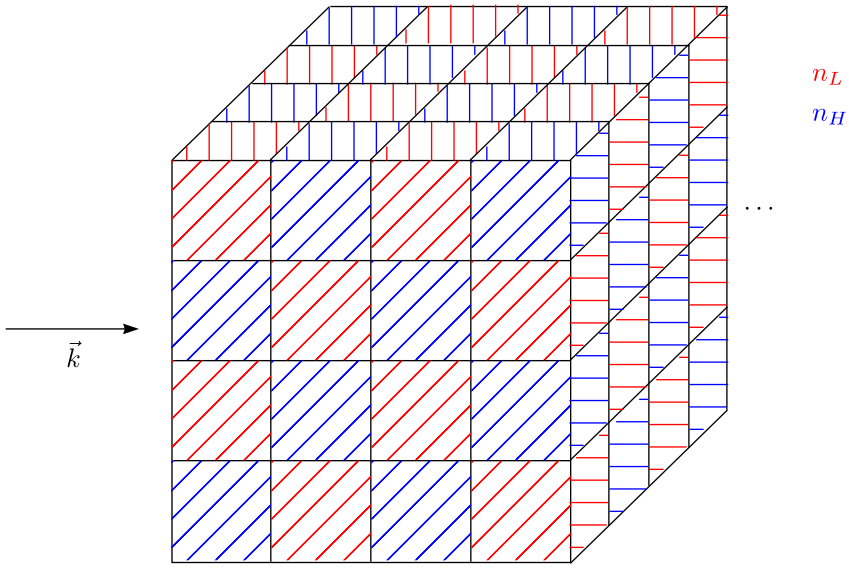
- Eindimensionaler Fall:



✳ Zweidimensionaler Fall:

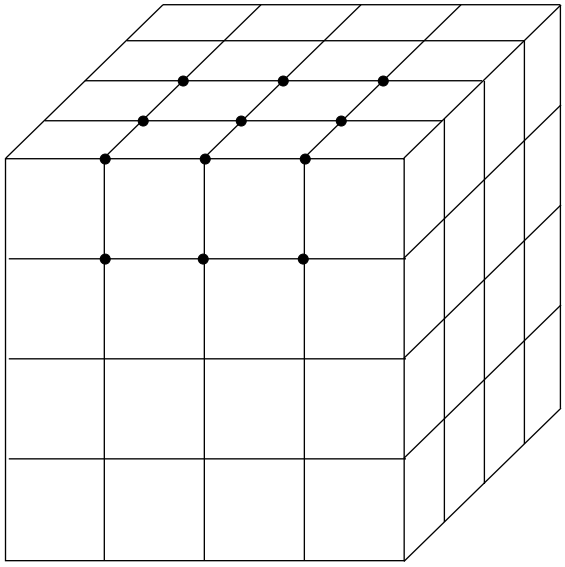


✳ Dreidimensionaler Fall:



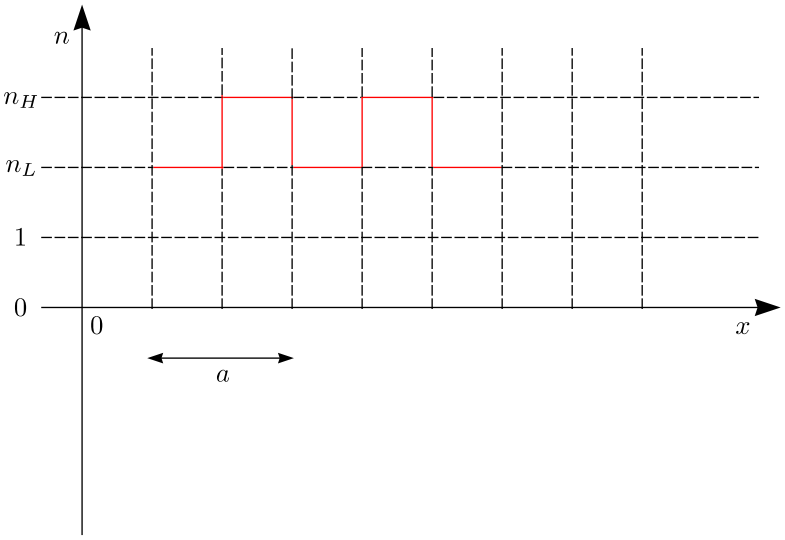
Definition:

Ein d-dimensionaler photonischer Kristall ist eine in d Dimensionen periodische Anordnung dielektrischer Materialien.



Die Punkte stellen Atome oder Gruppen aus Atomen dar.

Brechzahl:



a wird als Gitterkonstante bezeichnet. Es gilt:

$$n(x+a) = n(x)$$

Es handelt sich somit um eine „Gittertranslationsinvarianz“, wobei des weiteren noch gilt:

$$\varepsilon(x+a) = \varepsilon(x)$$

Wir machen einen Ansatz:

$E(x,t) = \tilde{E}(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ mit $\tilde{E}(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}u_k(x)$

Dies ist die sogenannte Bloch-Funktion. u_k ist eine gitterperiodische Funktion, für die gilt:

$$u_k(x+a) = u_k(x)$$

Hieraus folgt nun das Bloch-Theorem:

$$\boxed{\tilde{E}(x+a) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}ka}\tilde{E}(x)}$$

$\tilde{E}(x)$ ist nicht gitterperiodisch. Ohne Beweis ergibt sich, daß dieser Ansatz die Wellengleichung löst für bestimmte $u_k(x)$ und zugleich auch allgemein gültig ist. Wir betrachte nun folgende Transformation:

$$k \mapsto k + \frac{2\pi}{a} \cdot m \text{ mit } m \in \mathbb{Z}$$

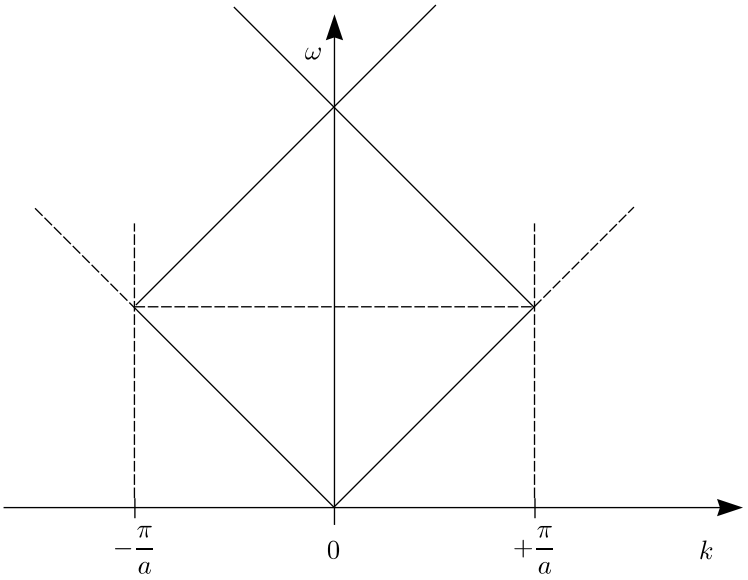
Daraus folgt:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}ka} \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}ka} \underbrace{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{a}\cdot m\cdot a}}_{=1}$$

Die Idee ist nun, daß man sich auf die Darstellung eines Intervalls der Breite $\frac{2\pi}{a}$ beschränkt (Brillouin-Zone).

Beispiel:

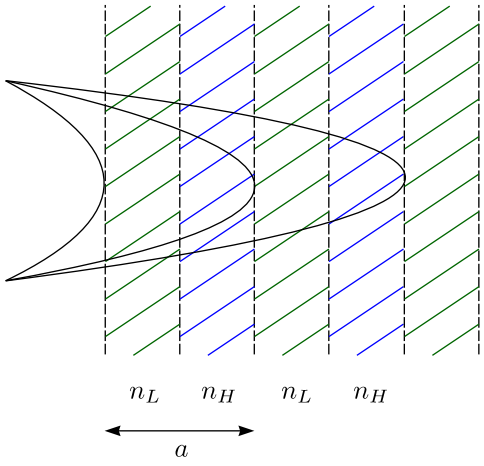
$n_L = n_H = 1 \Rightarrow \omega = k \cdot c_0$



2.2.5 Brillouin-Zone

Beispiel:

$n_L \neq n_H$

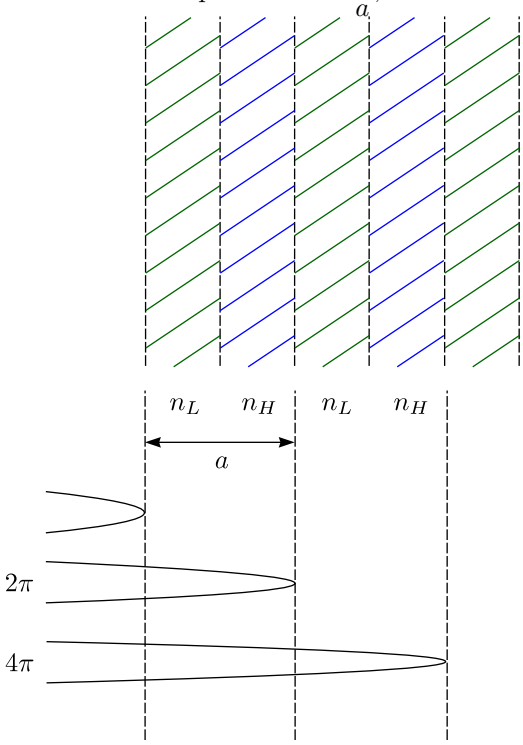


Weiteres Beispiel:

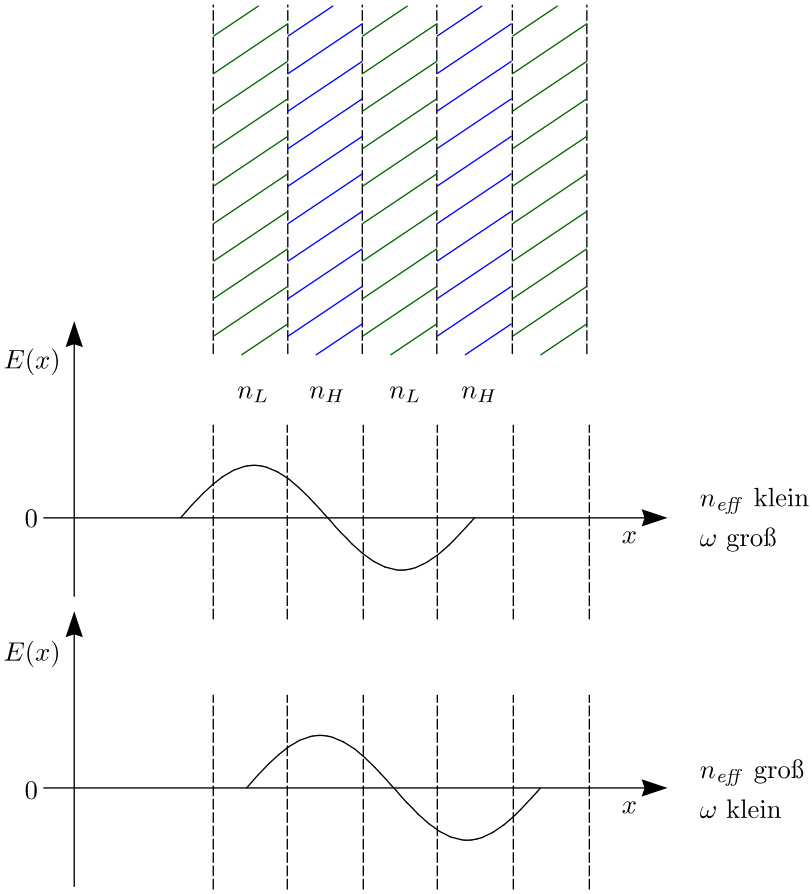
Wir schauen uns nun zwei Materialien mit verschiedenen Brechzahlen an:

$n_L \neq n_H$

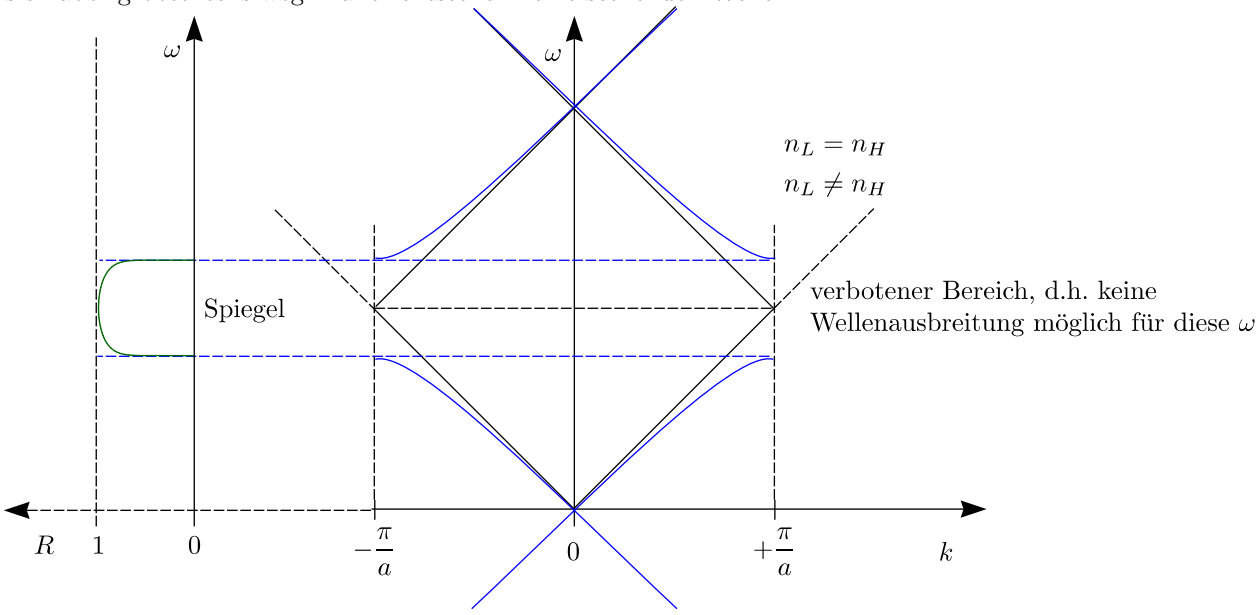
Wir betrachten speziell $k = \pm\frac{\pi}{a}$, was ein Part der Brillouin-Zone darstellt.



Die Partialwellen überlagern sich somit alle konstruktiv. Man erhält somit eine starke Reflexion. Angenommen, wir haben eine ebene Welle mit dem Wellenvektor k. Die reflektierten Wellen, die von rechts nach links zurücklaufen, besitzen dann den Wellenvektor $-k$. Es findet dann eine Interferenz statt, wobei eine stehende Welle im Material entsteht. Dabei gibt es zwei Möglichkeiten (schematisch):



Bei $k = \pm\frac{\pi}{a}$ gibt es somit zwei verschiedene ω. Bei $k \neq \pm\frac{\pi}{a}$ gibt es auch reflektierte Partialwellen; sie mitteln sich aber größtenteils weg. Daher entstehen keine stehenden Wellen.

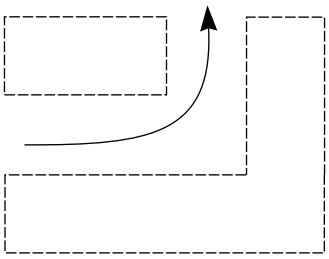


Wir sehen hier die Bandstruktur von Licht (Photonen) (siehe Festkörperphysik)

Anwendungsbeispiel:

Ich kann mir beispielsweise folgende Geometrie überlegen, die für einen bestimmten Frequenzbereich eine Bandlücke aufweist:

Photonischer Kristall



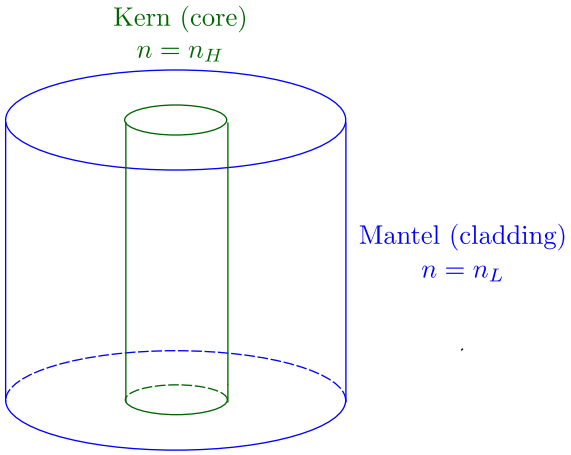
Photonischer Kristall

Somit sind Wellenleiter auf Mikroebene realisierbar.

2.2.6 Wellenleiter

Beispiele:

- Glasfaser

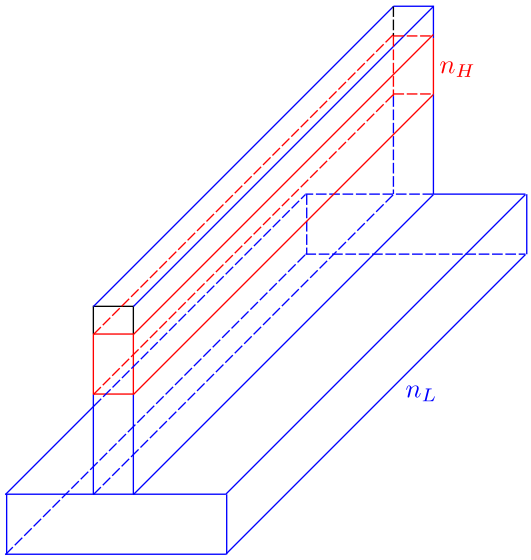


Typisch sind folgende Brechzahlen:

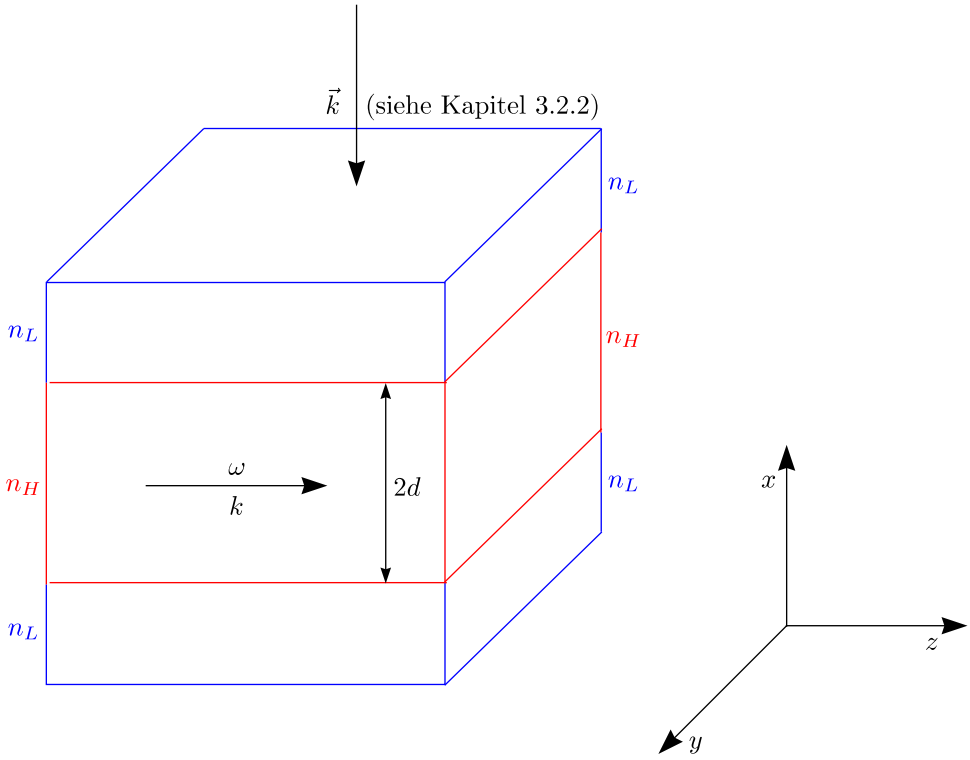
$n_H = 1,4616$

$n_L = 1,4571$

- Rippenwellenleiter



- Planarer symmetrischer Wellenleiter



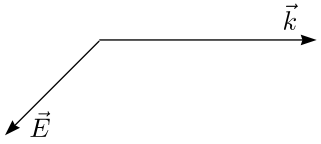
Es gibt zwei unterschiedliche Polarisationen:

- ✶ Transversal magnetischer Fall:

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- ✶ Transversal elektrischer Fall:

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ E_y \\ 0 \end{pmatrix}$$



Wir betrachten hier nur die TE-Polarisation. Die Wellengleichungen lauten:

$$\triangle E_y - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}E_y = 0$$

$$\frac{1}{c^2} = \frac{n^2(x)}{c_0^2}$$

Wir verwenden den Ansatz:

$$E_y(x,z,t) = \tilde{E}_y(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_z z - \omega t)}$$

Dieser Ansatz wird eingesetzt, woraus folgt:

$$\frac{\partial^2 E_y(x,z,t)}{\partial x^2} + \underbrace{\left[(n(x))^2\frac{\omega^2}{c_0^2} - k_z^2\right]}_{=:\gamma^2} E_y(x,z,t) = 0$$

γ^2 ist innerhalb eines Mediums konstant, da $n = \text{const.}$. γ^2 kann aber sowohl größer als auch kleiner als 0 sein.

Teillösungen:

- 1.Fall: $\gamma^2 = \gamma_H^2 > 0$; d.h. große Brechzahl bei festem ω

$$\boxed{\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \gamma_H^2 E_y = 0}$$

Wir wählen hier den Ansatz folgendermaßen, da es sich um eine Schwingungsgleichung handelt:

$$\boxed{\tilde{E}_y(x) = A\sin(\gamma_H x) + B\cos(\gamma_H x)}$$

Wenn wir diesen Ansatz einsetzen, stellen wir fest, daß er die Wellengleichung löst.

- 2.Fall: $\gamma^2 = -\gamma_L^2 < 0$; d.h. kleine Brechzahl bei festem ω

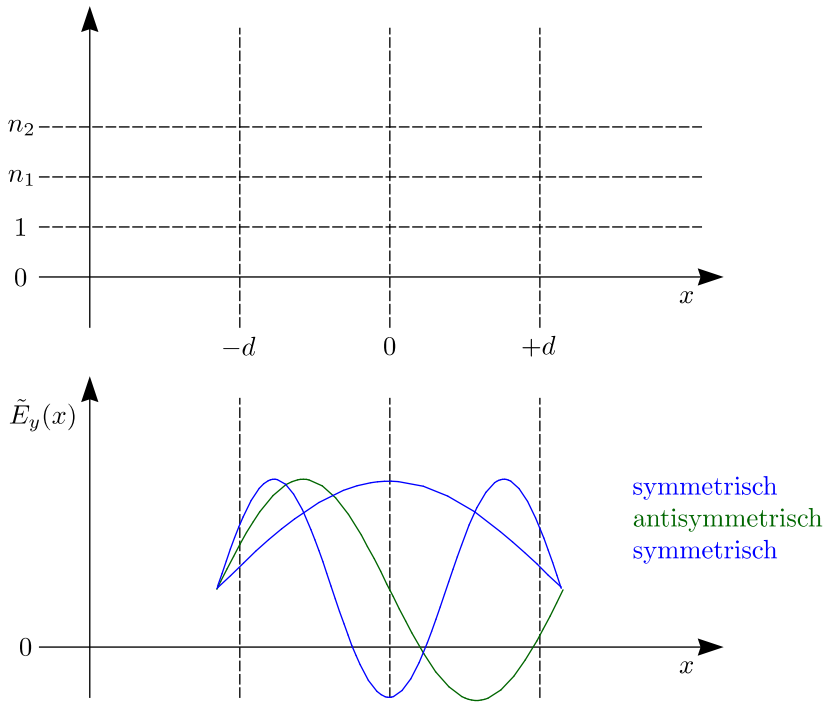
$$\boxed{\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - \gamma_L^2 E_y = 0} \text{ (dito für } \tilde{E}_y(x))$$

Wir wählen den Ansatz:

$$\boxed{\tilde{E}_y(x) = C\mathrm{e}^{-\gamma_L x} + D\mathrm{e}^{+\gamma_L x}}$$

Als Randbedingungen für die Lösung erwarten wir:

- $\tilde{E}_y$ bei $x = \pm d$ sei stetig.
- $\tilde{E}_y$ $(x \mapsto \pm\infty) = 0$
- Ableitungen von $\tilde{E}_y$ bei $x = \pm d$ sei stetig.



Betrachte hier nur symmetrische Lösungen, d.h. $A = 0$ (antisymmetrisch analog). Wir untersuchen die Stetigkeit von $\tilde{E}_y(x)$ bei $x = \pm d$.

- $x = +d$:

$$B\cos(\gamma_H d) = C\mathrm{e}^{-\gamma_L d}$$

- $x = -d$:

$$B\cos(\gamma_H d) = D\mathrm{e}^{-\gamma_L d}$$

Für die Stetigkeit bei $x = \pm d$ folgt:

- ✶ $x = \pm d$:

  $-\gamma_H B \sin(\gamma_H d) = -\gamma_L C \mathrm{e}^{-\gamma_L d}$

- ✶ $x = -d$:

  $+\gamma_H B \sin(\gamma_H d) = \pm\gamma_L D \mathrm{e}^{-\gamma_L d}$

Die ersten beide Terme werden addiert, die zweiten subtrahiert, woraus sich dann ergibt:

$2B \cos(\gamma_H d) = (C + D)\mathrm{e}^{-\gamma_L d}$

$2B\gamma_H \sin(\gamma_H d) = \gamma_L (C + D)\mathrm{e}^{-\gamma_L d}$

Die beiden Gleichungen werden durcheinander dividiert:

$$\boxed{\gamma_H \tan(\gamma_H d) = \gamma_L}$$

Der Term $\gamma_H \tan(\gamma_H d)$ läßt sich analytisch nicht berechnen. Es handelt sich um eine transzendente Gleichung zur Bestimmung von k_z. Zur Erinnerung notieren wir uns nochmals die Gleichungen vom Anfang:

$$n_H^2 \frac{\omega^2}{c_0^2} - k_z^2 = +\gamma_H^2$$

$$n_L^2 \frac{\omega^2}{c_0^2} - k_z^2 = -\gamma_L^2$$

Die Idee ist es nun, γ_L durch γ_H auszudrücken:

$$\gamma_H^2 + \gamma_L^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2}\left(n_H^2 - n_L^2\right)$$

Daraus folgt:

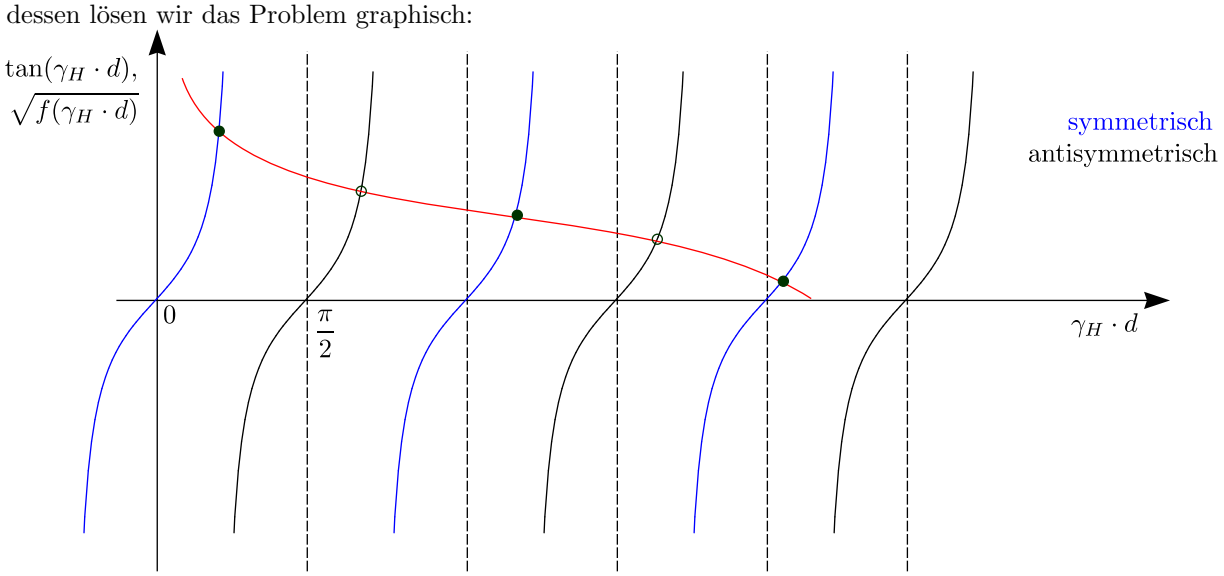
$$\boxed{\gamma_L = \sqrt{\frac{\omega^2}{c_0^2}\left(n_H^2 - n_L^2\right) - \gamma_H^2}}$$

Durch Einsetzen folgt:

$$\boxed{\tan(\gamma_H d) = \sqrt{\frac{\frac{\omega^2}{c_0^2}\left(n_H^2 - n_L^2\right) d^2}{\gamma_H^2 d^2} - 1}}$$

$$\boxed{\gamma_H^2 = n_H^2 \frac{\omega^2}{c_0^2} - k_z^2}$$

Es handelt sich hierbei um eine transzendente Gleichung, welche analytisch nicht gelöst werden kann. Infolgedessen lösen wir das Problem graphisch:



- Es existiert immer mindestens eine Lösung, wenn $n_H > n_L$ ist.
- Es existiert keine Lösung für $n_H < n_L$.
- Es existieren endlich viele Lösungen abhängig von $(n_H^2 - n_L^2)d^2$.

Beispiel:

$$\frac{\omega^2}{c_0^2} \cdot d^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \cdot d^2 \ll 1$$

Dies ist der Fall bei einem „dünnen Wellenleiter“. Es existiert nur eine Lösung.

Anmerkung:

Bei Wellenführung in zwei bzw. drei Dimensionen existiert hingegen nicht immer eine propagierende Lösung. Wir kommen auf diesen Sachverhalt unter dem Stichwort evaneszente Wellen zurück (Kapitel 4). Die unterschiedlichen Lösungen werden oft auch als Moden bezeichnet.

2.3 Doppelbrechung

2.3.1 Wellenplättchen

Im Kapitel 2.3 hatten wir bereits gesehen, daß es Materialien gibt bei denen die Brechzahl von der Richtung von $\vec{E}$ (Polarisation) abhängt. Die Komponenten von $\vec{E}$ laufen also im allgemeinen mit unterschiedlichen Phasengeschwindigkeit (Anisotropie).

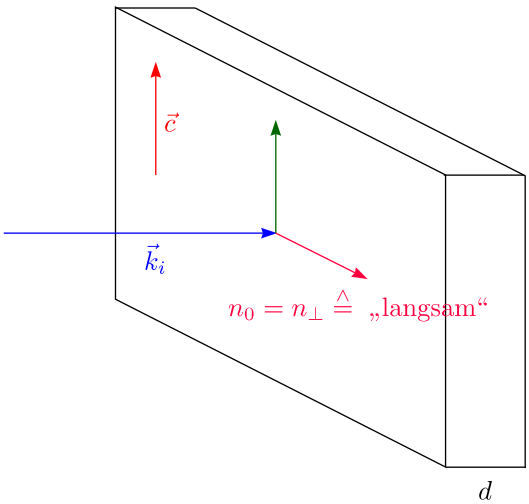
Beispiel:

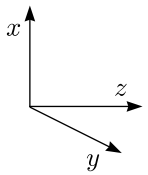
Im Kalkspat ($CaCO_3$) gibt es eine ausgezeichnete kristallographische Achse, die $\vec{c}$-Achse.

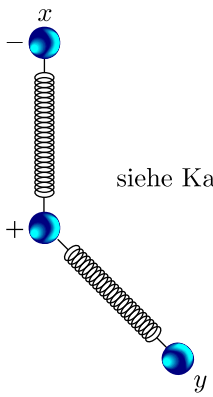
- $\vec{E} \perp \vec{c}$: $n_\perp = n_0 \mathrel{\hat{=}}$ ordinäre Polarisation
- $\vec{E} \parallel \vec{c}$: $n_\parallel = n_c \mathrel{\hat{=}}$ extraordinäre Polarisation

$\lambda = 581\,\text{nm}$

- $n_\perp = 1,658$ „langsame Achse“
- $n_\parallel = 1,486$ „schnelle Achse“







siehe Kapitel 2.3.

Für $\vec{E} = \begin{pmatrix} E \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ oder $\vec{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ E \\ 0 \end{pmatrix}$ bleibt alles wie in Kapitel 3.1.1. Interessant ist $\vec{E} = E_0 \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(kz-\omega t)}$ vor dem Plättchen. Im Vakuum gilt:

$$\frac{\omega}{k_0} = c_0$$

Reflexionen seien hier natürlich vernachlässigt. Diese können sowieso durch Antireflexbeschichtungen verhindert werden.

- $z = 0$: Entsprechende Frontfläche des Plättchens
- $z = d$: Entsprechende Rückseite des Plättchens

$$\vec{E}(z=0) = E_0 \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \exp(-\mathrm{i}\omega t) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \exp(-\mathrm{i}\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{E}(z=d) = E_0 \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \exp\left(\mathrm{i}k_\parallel d\right) \exp(-\mathrm{i}\omega t) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \exp(\mathrm{i}k_\perp d) \exp(-\mathrm{i}\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Mit $\frac{\omega}{k_\parallel} = \frac{c_0}{n_\parallel}$ und $\frac{\omega}{k_\perp} = \frac{c_0}{n_\perp}$ folgt:

$$\vec{E}(z=d) = E_0 \exp\left(\mathrm{i}\frac{k_\perp + k_\parallel}{2}\right) \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \exp\left(-\mathrm{i}\frac{k_\perp - k_\parallel}{2} d\right) \exp(-\mathrm{i}\omega t) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \exp\left(+\mathrm{i}\frac{k_\perp - k_\parallel}{2} d\right) \exp(-\mathrm{i}\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

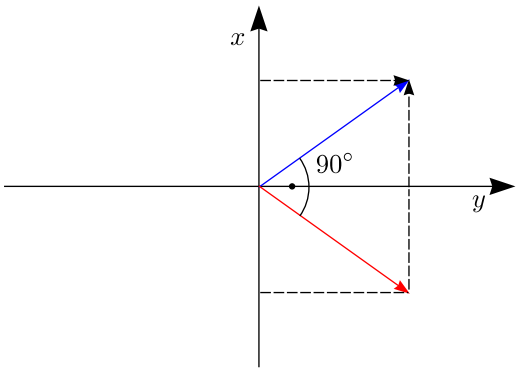
Dies gilt mit $\frac{\varphi}{2} := \frac{k_\perp - k_\parallel}{2} \cdot d = k_0 \left(n_\perp - n_\parallel\right) \frac{d}{2}$. φ ist Phasenverschiebung zwischen x- und y-Komponente.

Beispiel:

$\varphi = \pi \mathrel{\hat{=}} 180° \mathrel{\hat{=}}$ Halbwellenplättchen

Betrachte den Realteil von $\vec{E}$:

$E_y = -E_x$



$\vec{E}$ vor Plättchen

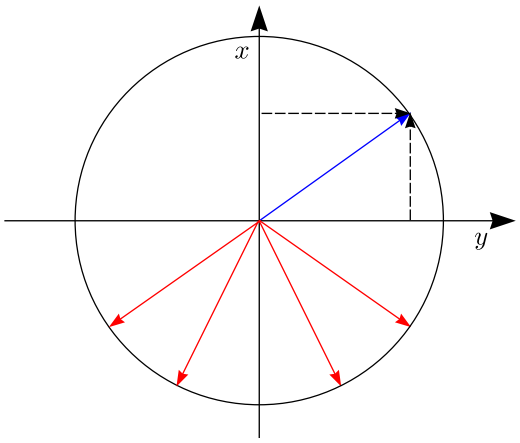
$\vec{E}$ hinter Plättchen

Die lineare Polarisation wird um 90° gedreht.

Beispiel:

$\varphi = \frac{\pi}{2} \mathrel{\hat{=}} 90° \mathrel{\hat{=}}$ Viertelwellenplättchen

Wir betrachten wieder den Realteil von $\vec{E}$: Mit $\phi = \frac{k_\perp + k_\parallel}{2} \cdot d + \frac{\varphi}{2} \mathrel{\hat{=}}$ uninteressant

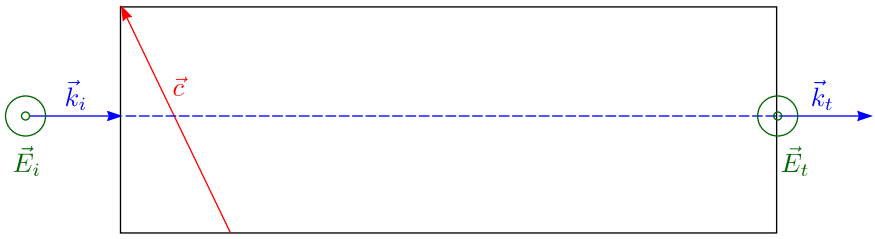


$\vec{E}$ vor Plättchen

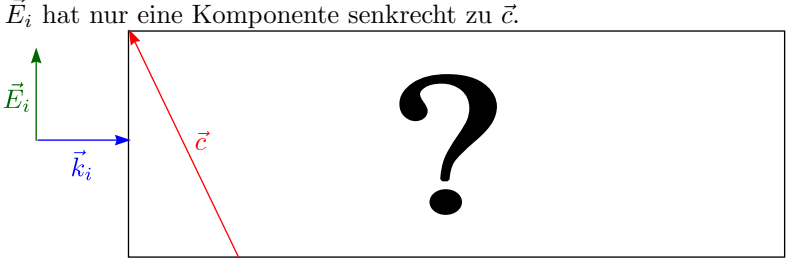
$\vec{E}$ hinter Plättchen

Lineare Polarisation wird zu zirkularer Polarisation.

2.3.2 Doppelbrechung, Polarisation



$\vec{E}_i$ hat nur eine Komponente senkrecht zu $\vec{c}$.



$\vec{E}_i$ hat Komponenten parallel und senkrecht zu $\vec{c}$. Wir stehen $\vec{E}$, $\vec{D}$, $\vec{k}$ und $\vec{S}$ im doppelbrechenden Material zueinander? In Kapitel 2.5 hatten wir gesehen, daß gilt:

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \underline{\underline{\kappa}} \vec{E}$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 \underbrace{\left(1 + \underline{\underline{\kappa}}\right)}_{=:\varepsilon} \vec{E}$$

ε ist der Dielektrizitätstensor (3X3-Matrix). Im allgemeinen ist die Richtung von $\vec{D}$ nicht identisch mit der Richtung von $\vec{E}$! Aus $\mathrm{div}\vec{D} = 0$ folgt mit dem Ansatz $\vec{D} = \vec{D}_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$:

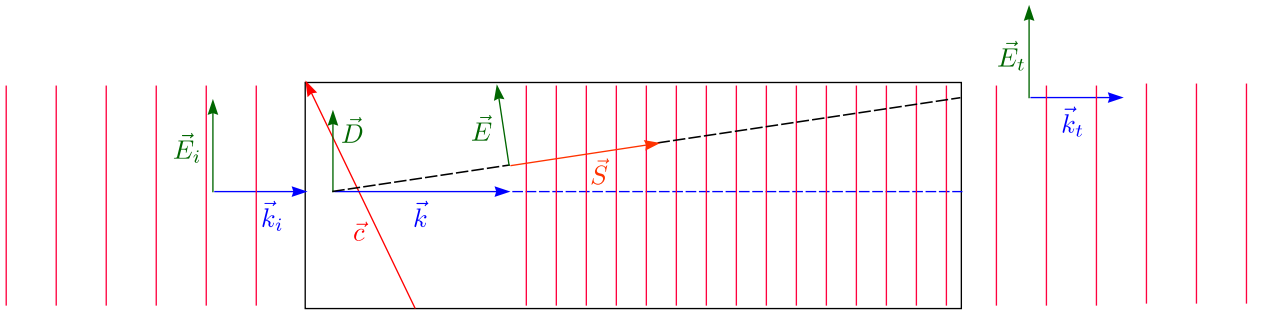
$$\boxed{\vec{k} \cdot \vec{D} = 0}$$

Das bedeutet, daß $\vec{D}$ senkrecht zu $\vec{k}$ steht. Im allgemeinen steht aber $\vec{E}$ nicht senkrecht zu $\vec{k}$! Aus $\mathrm{div}\vec{B} = 0$ folgt mit dem Ansatz $\vec{B} = \vec{B}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$ folgt:

$$\boxed{\vec{k} \cdot \vec{B} = 0}$$

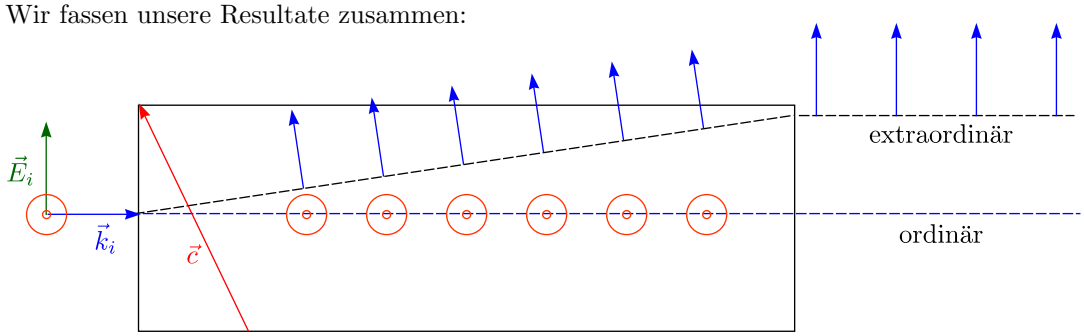
Daraus folgt, daß $\vec{B}$ senkrecht auf $\vec{k}$ steht. Wegen $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ (mit $\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \Rightarrow \vec{B} \| \vec{H}$) ist im allgemeinen $\vec{S}$ nicht parallel zu $\vec{k}$. $\vec{k}$ kann somit nicht mehr als Ausbreitungsrichtung interpretiert werden. Aber aufgrund der Definition stehen $\vec{S}$ und $\vec{E}$ senkrecht aufeinander. Also folgt:

- Die Normalkomponente von $\vec{D}$ ist stetig (war 0, ist 0). $\vec{D}$ ändert somit seine Richtung nicht.
- Vor und im Medium gilt $\vec{k} \cdot \vec{D} = 0$. $\vec{k}$ ändert die Richtung nicht.

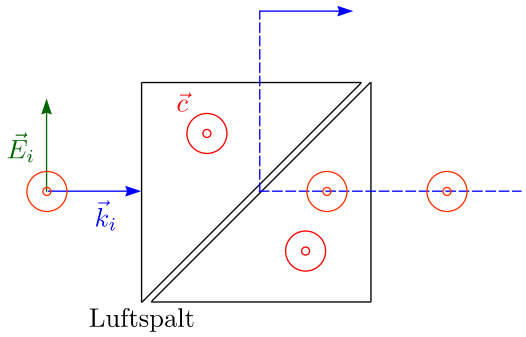


Flächen konstanter Phase (z.B. Maxima)
$(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) = \text{const.}$
t sei festgehalten, z.B. gelte $t = 0$

Wir fassen unsere Resultate zusammen:



Beispiel: (Glen-Foucault-Polarisator)



Der Grenzwinkel der Totalreflexion θ_G folgt aus:

$n \cdot \sin \theta_G = 1$ (siehe Kapitel 3.1.2)

Wegen $n_\perp > n_\parallel$ beim Kalkspat ergibt sich:

$$\boxed{\theta_G^{\parallel} = \theta_G^{\perp}}$$

Kapitel 3

Beugung

3.1 Mathematischer Einschub:Fouriertransformation

$f(t)$ sei eine Funktion der Zeit t.

Definition:

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\omega t} \,\mathrm{d}t \text{ ist die Fouriertransformierte von } f(t).$$

Beispiel:

$$f(t) = \cos(\omega_0 t) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t}}{2}$$

Wir betrachten zunächst der Einfachheit halber den Term $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t}$. Damit folgt:

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t} \cdot \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\omega t} \,\mathrm{d}t = ?$$

Was ist $\cos(\infty)$? Die Idee ist es nun, einen konvergenzerzeugenden Faktor einzuführen:

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t} \xrightarrow{\gamma \mapsto 0} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t} \mathrm{e}^{-\gamma t^2}$$

Mit Bronstein folgt für $a > 0$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax^2+bx+c} \,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \mathrm{e}^{\frac{1}{4}\frac{b^2}{a}+c}$$

Damit folgt:

$$\tilde{f}(\omega) \overset{\gamma \mapsto 0}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{\pi}{\gamma}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\frac{1}{\gamma}(\omega-\omega_0)^2}$$

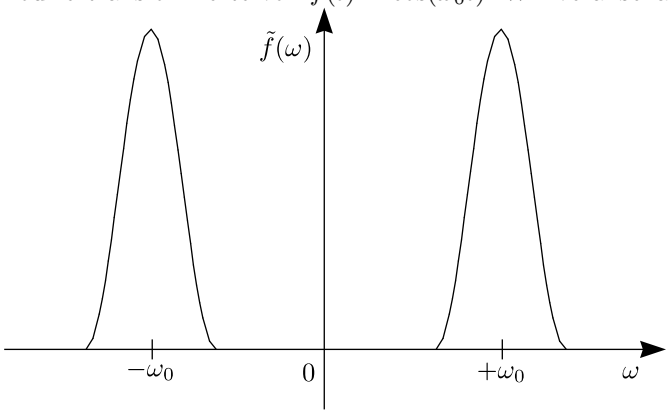
Ist $\tilde{f}(\omega)$ proportional zur einer δ-Funktion?

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\omega) \,\mathrm{d}\omega = \frac{1}{\sqrt{2\gamma}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\frac{1}{\gamma}(\omega-\omega_0)^2} \,\mathrm{d}\omega = \frac{1}{\sqrt{2\gamma}} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\frac{1}{4}\frac{1}{\gamma}}} \cdot 1 = \sqrt{2\pi} = \text{const.}$$

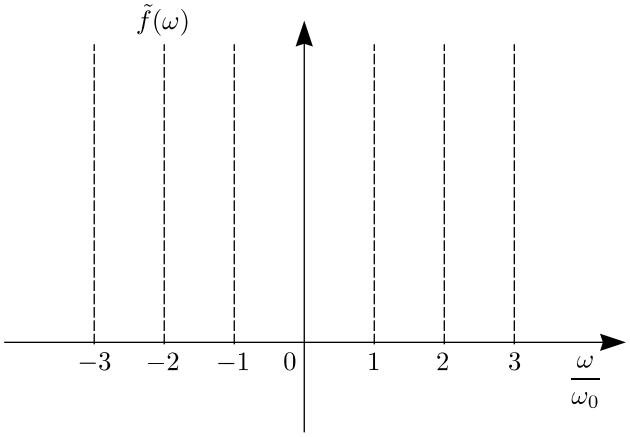
Dann ergibt sich:

$$\tilde{f}(\omega) = \sqrt{2\pi}\delta(\omega - \omega_0)$$

Dies ist die Fouriertransformierte von $f(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t}$, das heißt: $f(\omega) = \frac{1}{2}\sqrt{2\pi}\,(\delta(\omega+\omega_0) + \delta(\omega-\omega_0))$ ist die Fouriertransformierte von $f(t) = \cos(\omega_0 t)$. Wir veranschaulichen dies graphisch:



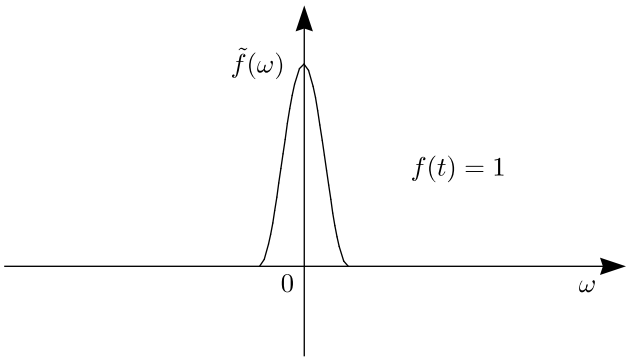
Damit gilt für periodische Funktionen $f(t)$ mit $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega_0 t}$ graphisch folgendes Ergebnis:



Die Fouriertransformierte einer periodischen Funktion $f(t)$ ist die Summe äquidistanter δ-Funktionen, was der Fourierreihenentwicklung entspricht. Die Fouriertransformation ist – im Gegensatz zur Fourierreihe – auch auf nichtperiodische Funktionen $f(t)$ anwendbar.

$$f(\omega) \overset{\gamma\mapsto 0}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \mathrm{e}^{-\gamma t^2} \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{\pi}{\gamma}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\frac{\omega^2}{\gamma}} = \sqrt{2\pi}\delta(\omega)$$

Die Fouriertransformierte einer Konstanten ist proportional zu einer.



Umkehrung der Fouriertransformation:

$\tilde{f}(\omega)$ sei konstant. Kann ich nun $f(t) = \ldots$ auflösen? Ja, es gilt nämlich (immer vorausgesetzt, die Ausdrücke sind konvergent):

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\omega) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \, \mathrm{d}\omega}$$

Wir wollen dies beweisen:

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\omega t} \, \mathrm{d}t$$

Wir setzen also $f(t)$ ein und erhalten:

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\omega) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega' t} \, \mathrm{d}\omega' \right) \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\omega t} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\omega') \mathrm{e}^{+\mathrm{i}(\omega - \omega')t} \, \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}\omega' =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\omega') \cdot 2\pi\delta(\omega - \omega') \, \mathrm{d}\omega' = \tilde{f}(\omega) \qquad \text{q.e.d}$$

Faltungssatz:

$f(t)$ sei gegeben durch:

$$\boxed{f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t - t') h(t') \, \mathrm{d}t'}$$

Dies ist die sogenannte Faltung von g und h, oft abgekürzt mit:

$f = g \otimes h$

Dann gilt folgender Zusammenhang:

$$\boxed{\tilde{f}(\omega) = \sqrt{2\pi} \tilde{g}(\omega) \cdot \tilde{h}(\omega)}$$

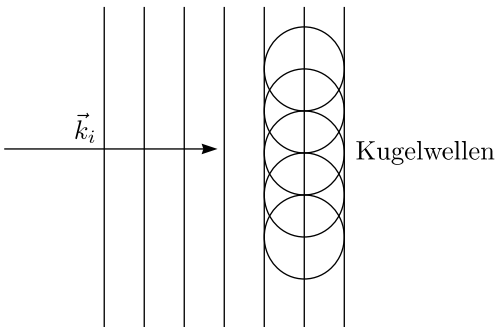
Dabei handelt es sich also um das normale Produkt von $\tilde{g}$ und $\tilde{h}$ (ohne Beweis).

3.2 Beugung von Licht

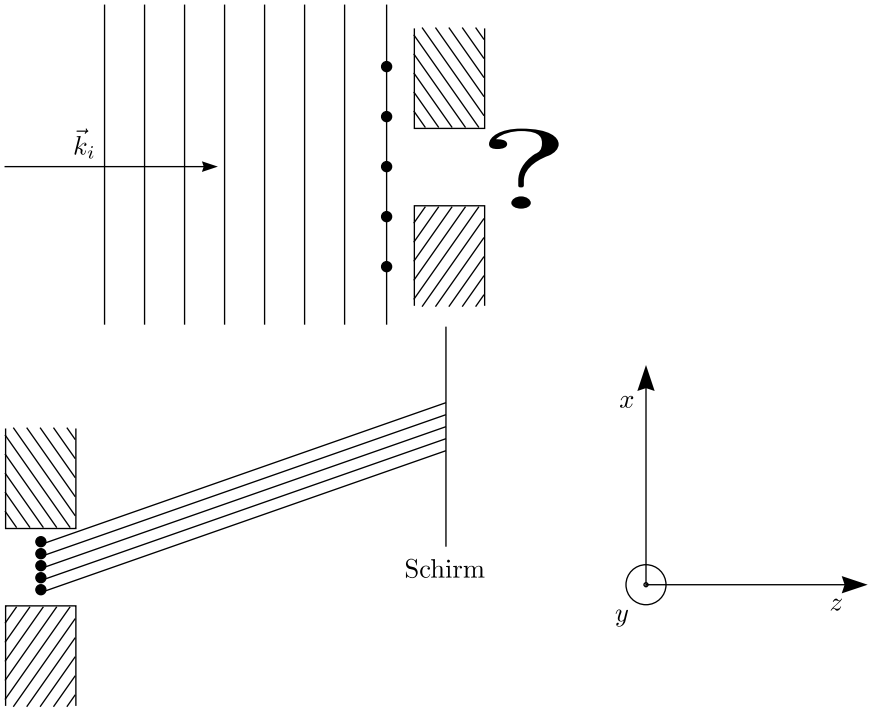
3.2.1 Das Huygensche Prinzip

Jeder Punkt einer Wellenfläche kann als Ausgangspunkt einer Elementarwelle (=Kugelwelle) angesehen werden.

Beispiel:Ebene Welle



3.2.2 Fraunhoferbeugung (Spalt, Doppelspalt, Gitter)



Sofern der Schirm nah an der Öffnung ist, ist die Situation sehr kompliziert, weil die Amplituden der verschiedenen Elementarwellen unterschiedlich sind. Die Amplituden bei der Kugelwelle sind nämlich proportional zum Kehrwert des Abstandes:

$$\text{Amplitude} \sim \frac{1}{\text{Abstand}}$$

Ist der Schirm hingegen weit weg, wenn wir also das Fernfeld betrachten, so kann man die kleinen Unterschiede vernachlässigen. Dies ist die sogenannte Fraunhoferbeugung. Schaut man in einer speziellen Richtung mit Wellenvektor $\vec{k}$, so werden die Kugelwellen näherungsweise ebene Wellen. Somit beträgt das Feld auf dem Schirm:

$$\boxed{E = \sum_m E_m = \int_{x_1}^{x_2} E_m(x)\,\mathrm{d}x}$$

m ist die Anzahl der Elementarwellen im Spalt. In y-Richtung sei das Problem translationsinvariant ($\hat{=}$ Spalt oder Schlitz). Für das Feld auf dem Schirm folgt nun:

$$E \sim \int_{-\infty}^{+\infty} T(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\,\mathrm{d}x$$

$T(x)$ ist der Transmissionskoeffizient. Hier gilt:

$$T(x) = \begin{cases} 1 & \text{im Spalt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Wir messen die Intensität I:

$$\frac{I}{I_0} = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} T(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)}\,\mathrm{d}x \right|^2$$

Somit ergibt sich nun, da die von t abhängige Exponentialfunktion bei der Integration wegfällt:

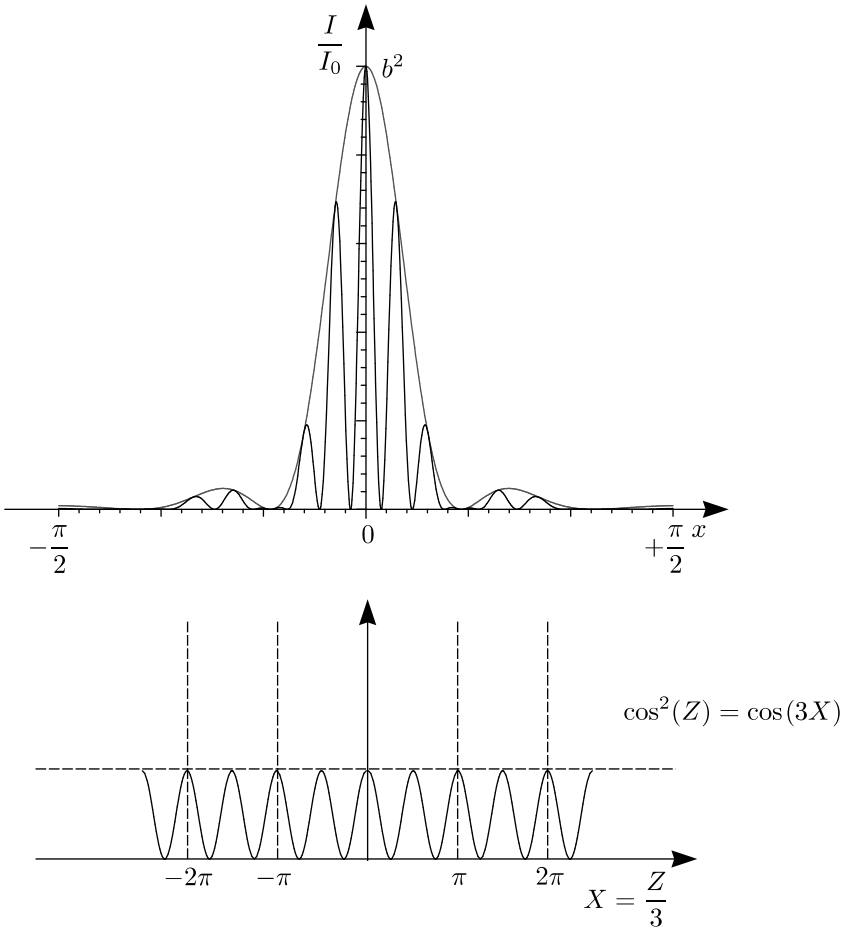
$$\boxed{\frac{I}{I_0} = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} T(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_x x}\,\mathrm{d}x \right|^2}$$

$\int_{-\infty}^{+\infty} T(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_x x}$ ist die Fouriertransformierte von $T(x)$.

Fraunhoferbeugung:

Das Beugungsbild einer begrenzenden Öffnung ist das Betragsquadrat der Fouriertransformierten von der begrenzenden Öffnung.

Graphisch (Doppelspalt mit $a = 3b$):



Minima:

$$Z = (2m+1)\frac{\pi}{2} = k_x\frac{k}{2} = \frac{2\pi}{\lambda}\sin\alpha \cdot \frac{a}{2}$$

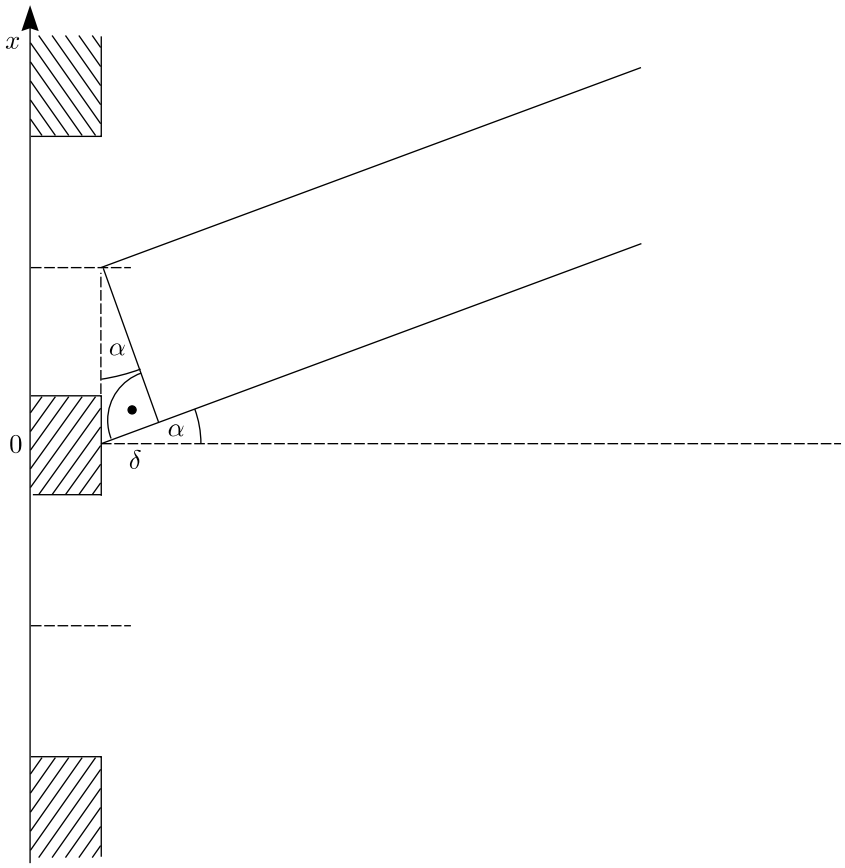
$$\boxed{\alpha \approx \sin\alpha = \left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{a}}$$

Maxima:

$$Z = m\pi$$

$$\boxed{\alpha \approx \sin\alpha \approx m \cdot \frac{\lambda}{k}}$$

Dies ist nicht zu verwechseln mit dem Einfachspalt („umgekehrt“). Nochmals anschaulich:



Maxima:

$\delta \mathrel{\hat{=}}$ Konstruktive Interferenz

$\delta = m \cdot \lambda; m \in \mathbb{Z}$

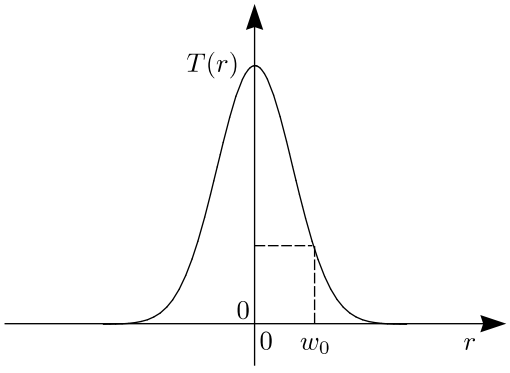
$$\boxed{\sin\alpha = \frac{\delta}{a} = m\frac{\lambda}{a}}$$

Dies entspricht der Formel, welche man in der Schule kennengelernt hat. Dies erklärt aber nicht die fehlenden Maxima.

3.2.3 Gaußförmige Profile

Wir betrachten folgendes zweidimensionale Problem.

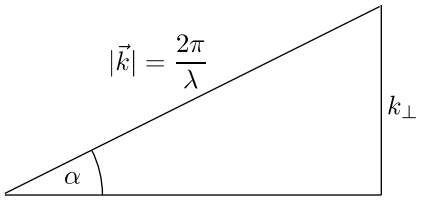
$T(x,y) = \mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{w_0^2}} = \mathrm{e}^{-\left(\frac{r}{w_0}\right)^2}$ mit $r = \sqrt{x^2+y^2}$



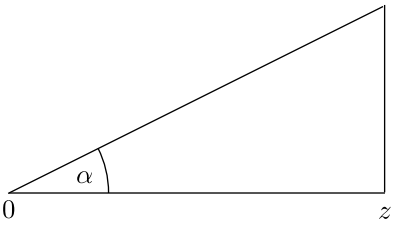
$$\frac{I}{I_0} = \left| \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_x x + k_y y)} \mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{w_0^2}} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \right|^2$$

Mit $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\mathrm{e}^{\frac{1}{4}\frac{b^2}{a}+c}$ und $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{w_0^2}+\mathrm{i}k_x x}\,\mathrm{d}x = w_0\sqrt{\pi}\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}k_x^2 w_0^2}$ folgt nun:

$\left|\frac{E}{E_0}\right|^2 = w_0^2\pi\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}w_0^2\left(k_x^2+k_y^2\right)}$ mit $k_x^2+k_y^2=k_\perp^2$



$r=\sqrt{x^2+y^2}, \tan\alpha = \frac{r}{z}$



Für $\sin\alpha \approx \alpha \approx \tan\alpha$ folgt:

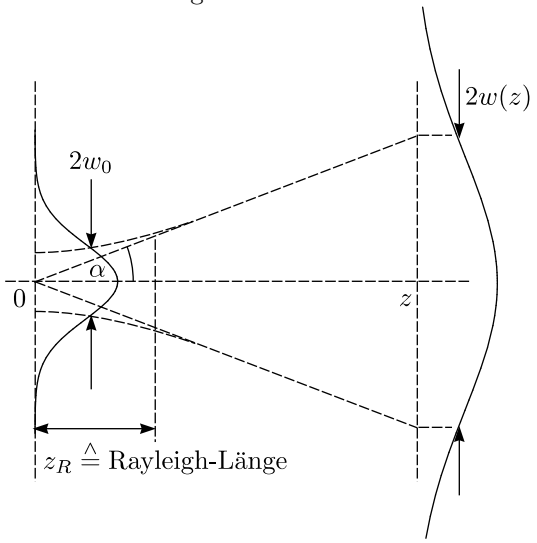
$|\ fracEE_0|^2 = w_0^2\pi\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}w_0^2\left(k_x^2+k_y^2\right)} = w_0^2\pi\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}w_0^2\cdot\left(\frac{2\pi}{\lambda}\cdot\sin\alpha\right)^2} = w_0^2\pi\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}w_0^2\cdot\left(\frac{2\pi}{\lambda}\cdot\tan\alpha\right)^2} = w_0^2\pi\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\frac{w_0^2\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 r^2}{z^2}}$

$\boxed{\left|\frac{E}{E_0}\right|^2 = w_0^2\pi\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{w^2(z)}}}$ mit $\boxed{w(z) = \frac{\lambda\cdot z}{\pi\cdot w_0} \text{ für } z\mapsto\infty}$

Eine genauere Rechnung liefert nun:

$$\boxed{w(z) = w_0\cdot\sqrt{1+\left(\frac{\lambda\cdot z}{\pi w_0^2}\right)^2}}$$

z sei hier beliebig.



Der Öffnungswinkel α berechnet sich nach:

$$\boxed{\alpha \approx \frac{w}{z} = \frac{\lambda}{\pi w_0^2}}$$

Rayleigh-Länge:

$w(z_R) = \sqrt{2} \cdot w_0$ (willkürlich)

$$\boxed{z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}}$$

Betrachten wir das Problem „umgekehrt“. Was ist also das kleinste erreichbare w_0? Dazu lösen wir die obige Gleichung nach w_0 auf:

$$\boxed{w_0 = \frac{\lambda}{\pi\alpha}}$$

Eine genauere Rechnung liefert:

$$w_0 = \frac{\lambda}{\pi \sin\alpha} = \frac{\frac{\lambda_0}{n}}{\pi \sin\alpha}$$

In den meisten Lehrbüchern findet man:

$$\boxed{w_0 = \frac{\lambda_0}{\pi \mathrm{NA}}}$$

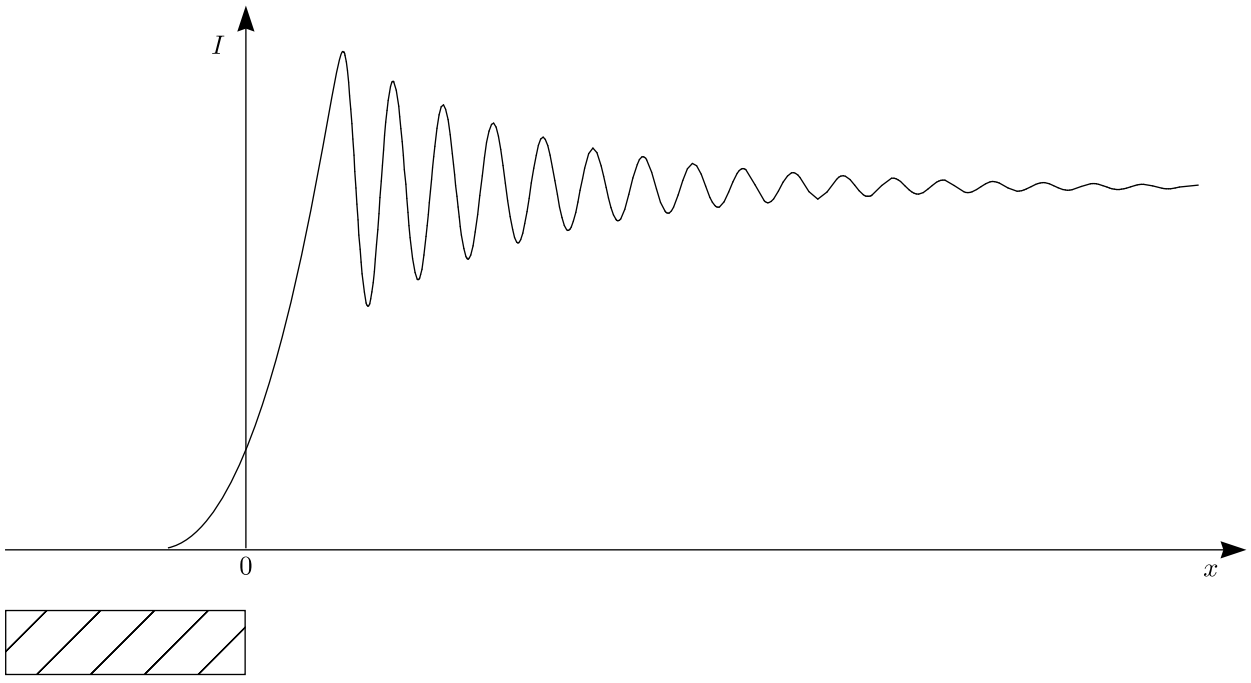
NA ist hierbei die numerische Apertur:

$$\boxed{\mathrm{NA} = n \cdot \sin\alpha}$$

Wegen $\mathrm{NA} \leq n$ ist der kleinste erreichbare Spotdurchmesser $2w_0$ von der Größenordnung der Wellenlänge des Lichts im Medium.

3.2.4 Fresnelbeugung

Beispiel:Beugung an einer Kante



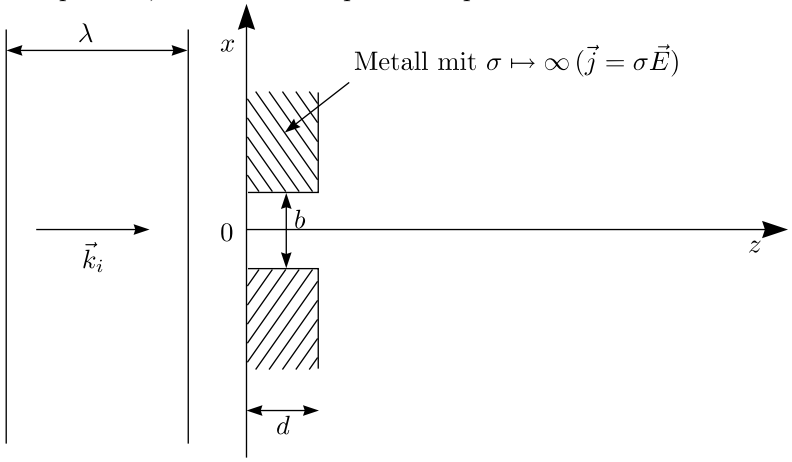
Der Limes der Fraunhoferbeugung existiert nicht! Die mathematische Beschreibung ist „im Prinzip“ einfach, nämlich die Überlagerung von Kugelwellen. Die mathematische Ausarbeitung aber ist in der Regel sehr schwierig.

Kapitel 4

Nahfeldoptik

4.1 Evaneszente Wellen

Was passiert, wenn wir den Spalt in Kapitel 3.4.2 immer kleiner machen, d.h. $b < \lambda$ oder sogar $b \ll \lambda$?



Wir nehmen jetzt also an, daß $b \ll d$ (oder formal $d \mapsto \infty$).

Randbedingungen:

$$E\left(x = -\frac{b}{2}\right) = E\left(x = \frac{b}{2}\right) = 0$$

Wir verwenden folgenden Ansatz (im Spalt):

$$E = \underbrace{E_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_y y + k_z z - \omega t)}}_{\text{ebene Welle}, k_y = 0} \underbrace{\cos\left(\frac{x}{b} \cdot \pi\right)}_{\substack{\text{stehende} \\ \text{Welle}}} = E_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(+k_z z - \omega t)} \cos\left(\frac{x}{b} \cdot \pi\right)$$

Wir setzen diesen Ansatz in die Wellengleichung ein:

$$\triangle E - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} E = 0$$

$$k_z^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2}$$

Wir berechnen die Phasengeschwindigkeit v_{ph}:

$$v_{ph} = \frac{\omega}{k_z} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\omega^2}{c_0^2} - \left(\frac{\pi}{b}\right)^2}}$$

Wir dividieren durch $\frac{\omega}{c_0}$, wobei wir erhalten:

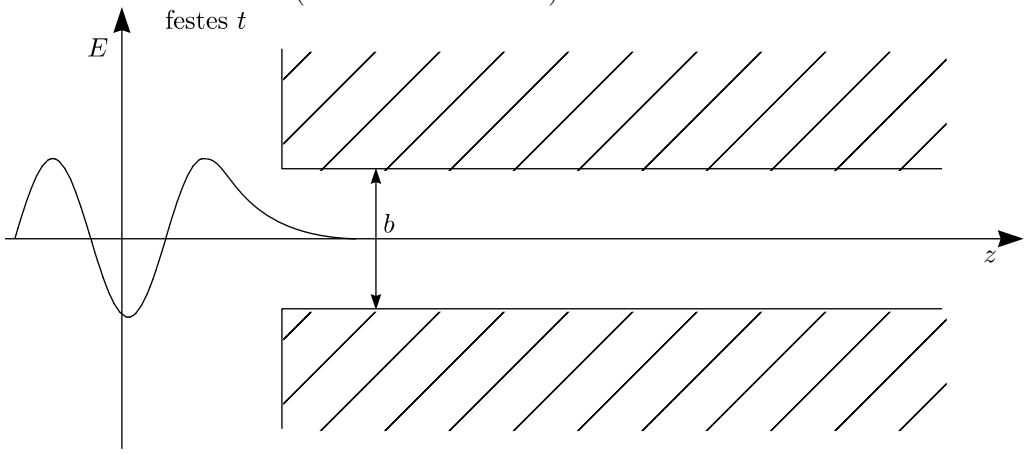
$$v_{ph} = \frac{c_0}{\sqrt{1 - \frac{c_0^2}{\omega^2}\left(\frac{\pi}{b}\right)^2}}$$

Außerdem folgt mit $\frac{c_0}{\omega} = \frac{1}{k_0}$:

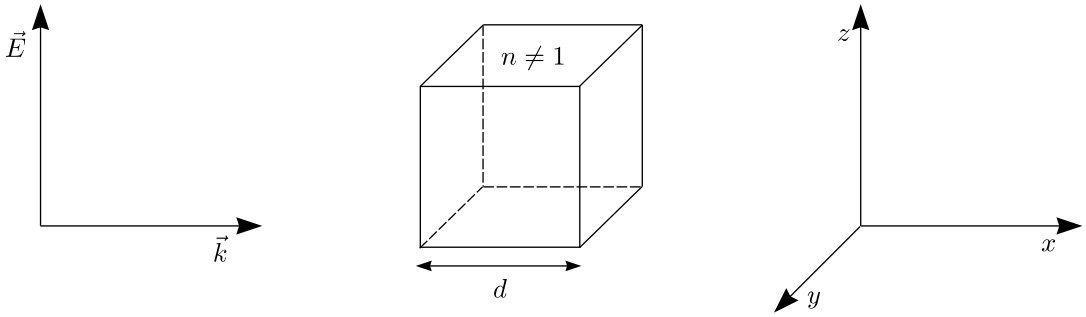
$$v_{ph} = \frac{c_0}{\sqrt{1 - k_0^{-2}\left(\frac{\pi}{b}\right)^2}} = \frac{c_0}{\sqrt{1 - \frac{\lambda_0^2}{(2\pi)^2}\left(\frac{\pi}{b}\right)^2}} = \frac{c_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{2b}\right)^2}} \geq c_0$$

$v_{ph} \mapsto \infty$ für $\dfrac{\lambda_0}{2b} = 1 \Leftrightarrow b = \dfrac{\lambda_0}{2}$

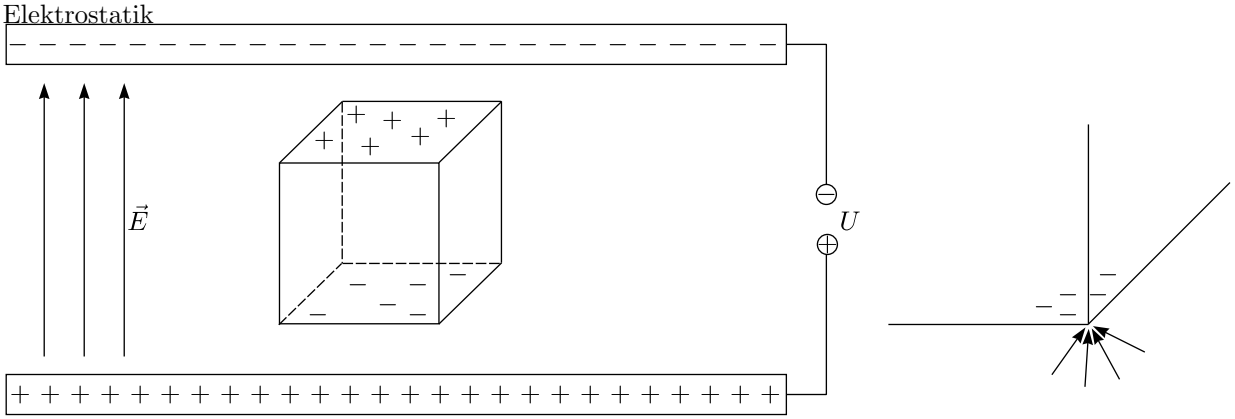
Es entstehen exponentiell gedämpfte Wellen in z-Richtung. Solche experimentell gedämpften Wellen nennt man auch evaneszente Wellen ($\hat{=}$ Tunneln von Licht).



Feldverstärkung:



d sei die Ausdehnung eines Objekts mit $d \ll \lambda$, d.h. formal geht λ gegen unendlich und somit ω gegen $0 \hat{=}$ Elektrostatik



- ✳ Feldverstärkung (z.B. Blitzableiter)
- ✳ Depolarisation, $\vec{E}_{Ecke} \parallel \vec{E}$

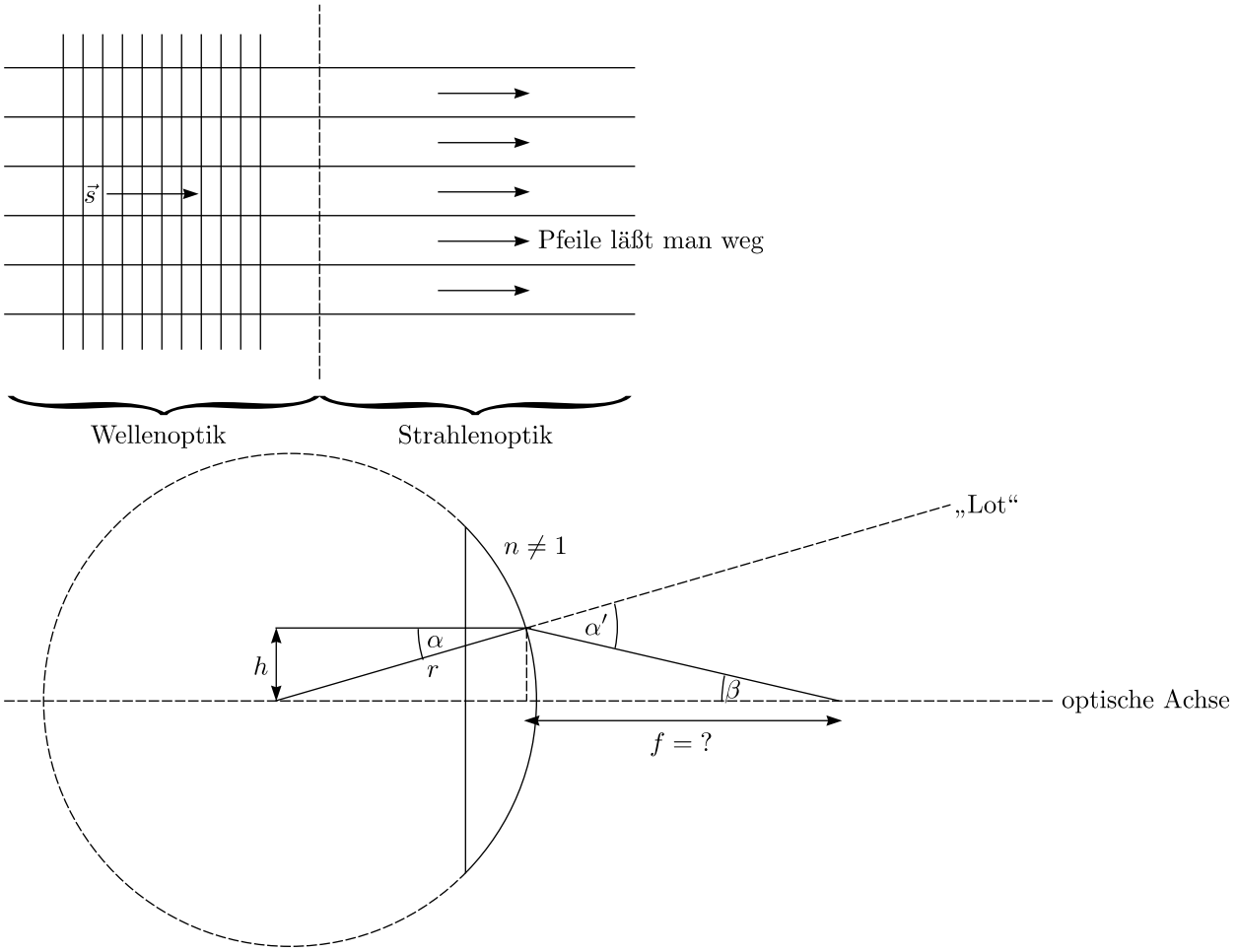
Kapitel 5

Geometrische Optik

Definition:

Wir zerlegen eine ebene Welle in Partialwellen. Jede einzelne Partialwelle kann durch ihren Poynting-Vektor $\vec{\varrho}$ (meist $\parallel \vec{k}$) charakterisiert werden. Wir vernachlässigen Beugungseffekte! Unter diesen Bedingungen bezeichnen wir die Menge der Vektoren $\vec{s}$ als Lichtstrahlen.

Beispiel:



Wir berechnen die Winkelsumme im grünen Dreieck:

$\alpha + (180° - \alpha') + \beta = 180°$

Das Snellius Brechungsgesetz angewendet lautet:

$n \cdot \sin\alpha = 1 \cdot \sin\alpha'$

Ferner gilt:

$$\sin\alpha = \frac{h}{r} \text{ und } \tan\beta == \frac{h}{f}$$

Wir verwenden außerdem folgende Näherungen für achsennahe Strahlen (h sei klein) bzw. dünne Linse (r sei groß). Damit können wir den Sinus bzw. den Tangens durch die entsprechenden Argumente approximieren:

$$\alpha - \alpha' + \beta = 0$$

$$\alpha\,(1-n) + \frac{h}{f} = 0$$

$$\frac{h}{r}\,(1-n) + \frac{h}{f} = 0$$

Damit ergibt sich die Brennweite der plankonvexen Linse:

$$\boxed{f = \frac{r}{n-1}}$$

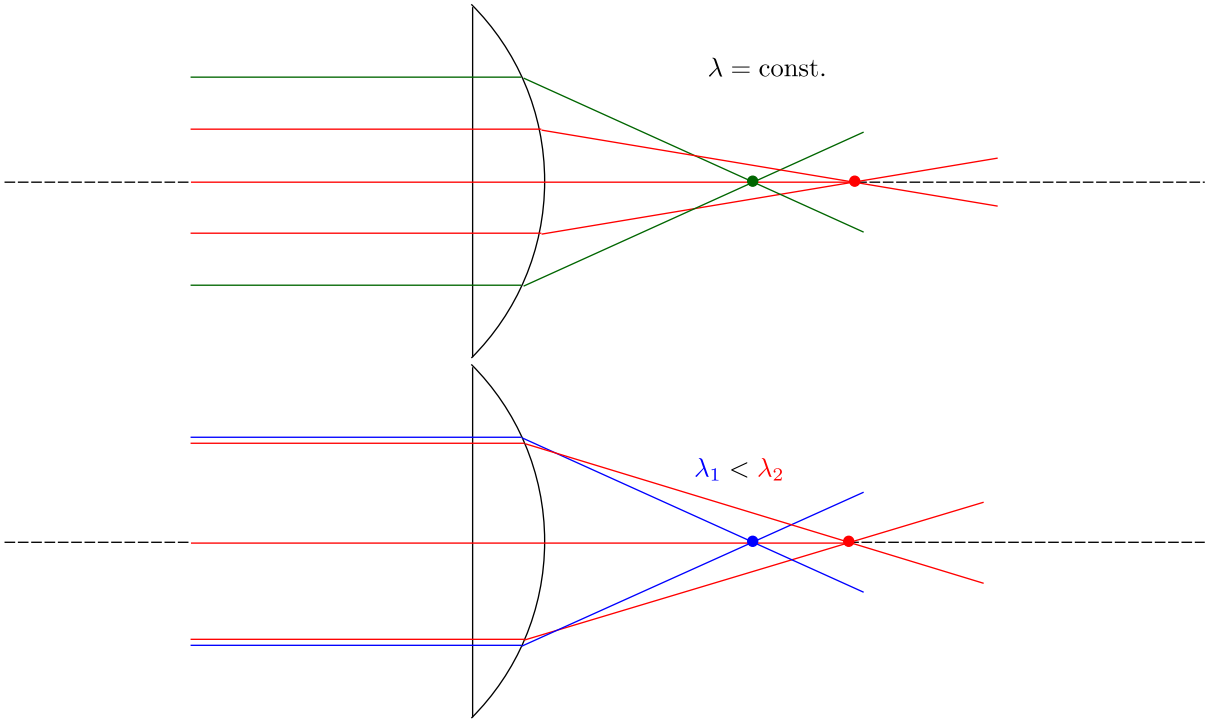
f hängt also nicht von h ab:

$$\boxed{f \neq f(h)}$$

Man charakterisiert eine Linse durch die Größe ihrer Brechkraft D als Kehrwert der Brennweite f:

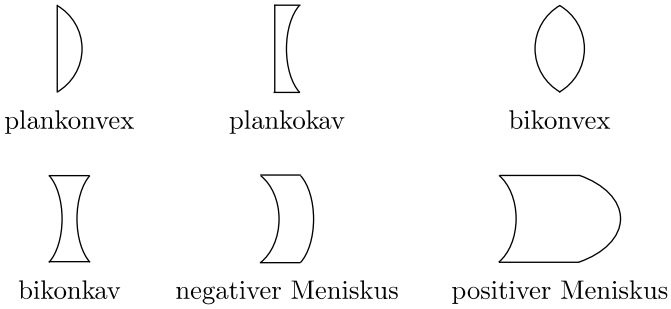
$$\boxed{D := \frac{1}{f}}, [D] = \frac{1}{\text{m}} = \text{dpt (Dioptrie)}$$

Für größere h hängt f doch von h ab. Dies ist die sogenannte sphärische Abberation.

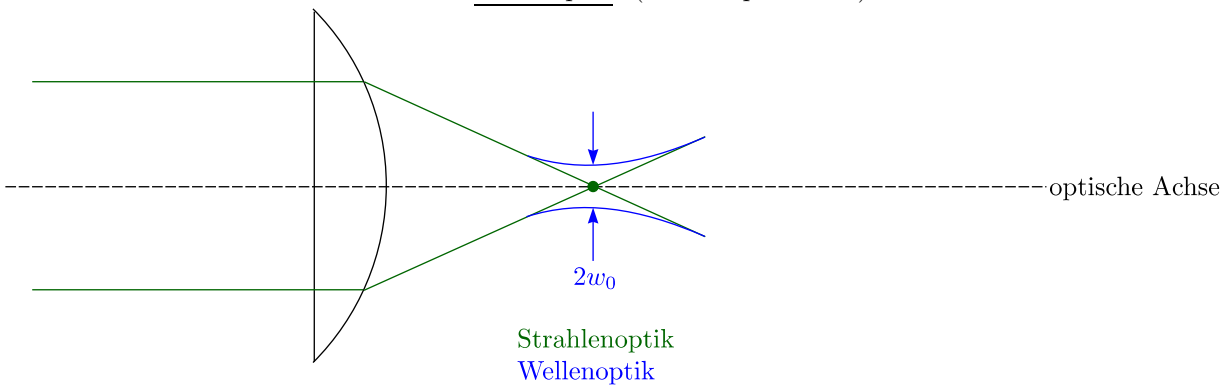


Wir notieren uns die Merkregeln für dünne konvexe Linsen:

- Strahlen parallel zur optischen Achse ⇔ Brennpunktstrahlen
- Mittelpunktstrahlen bleiben unverändert.



Wie verändert sich das Verhalten in der Wellenoptik? (siehe Kapitel 3.4.3)

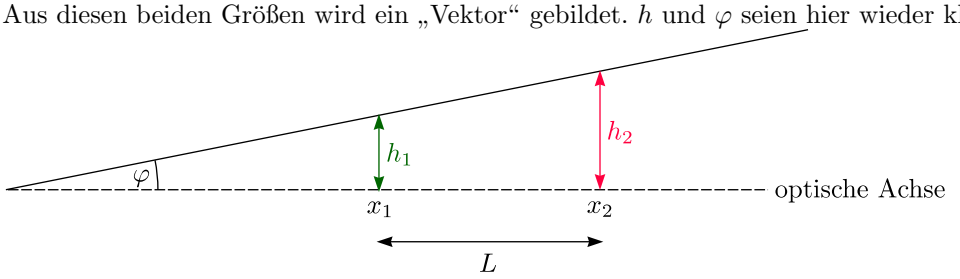


5.1 Matrixoptik

Will man komplexe Systeme aus Linsen usw. diskutieren, ist oft die Matrixoptik nützlich. Die Idee ist nun folgende: Man charakterisiere einen Strahl an einem Punkt der optischen Achse durch zwei Parameter:

- Abstand zur optischen Achse h
- Winkel mit optischer Achse

Aus diesen beiden Größen wird ein „Vektor“ gebildet. h und φ seien hier wieder klein.



$$h_2 = h_1 + \varphi_1 \cdot L$$

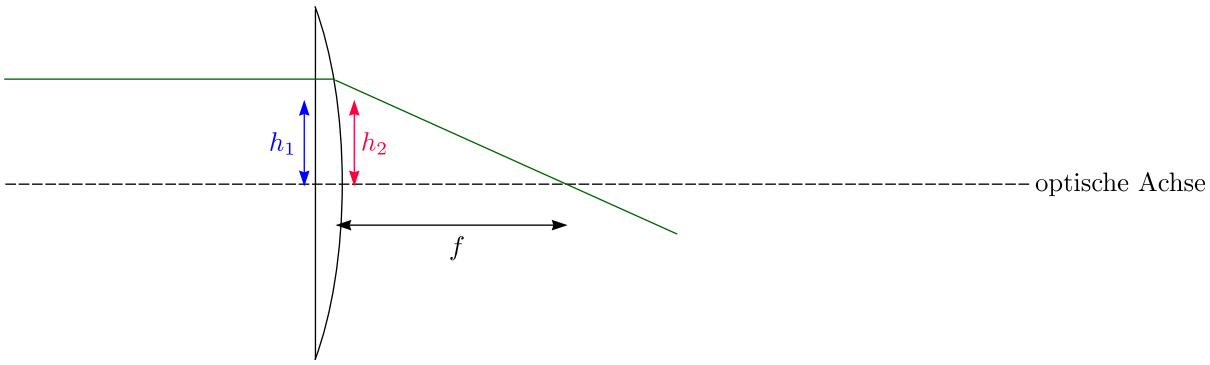
$$\varphi_2 = \varphi_1$$

$$\begin{pmatrix} h_2 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathcal{M}_{Frei}} \begin{pmatrix} h_1 \\ \varphi_1 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{M}_{Frei}$ ist $2X2$-Matrix. Die Matrix für freie Propagation über die Strecke L ist:

$$\boxed{\mathcal{M}_{Frei} = \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Matrix für eine dünne Linse mit Brennweite f:



$h_1 = h_2$

$\varphi_2 = \varphi_1 - \frac{h_1}{f}$

Damit gilt:

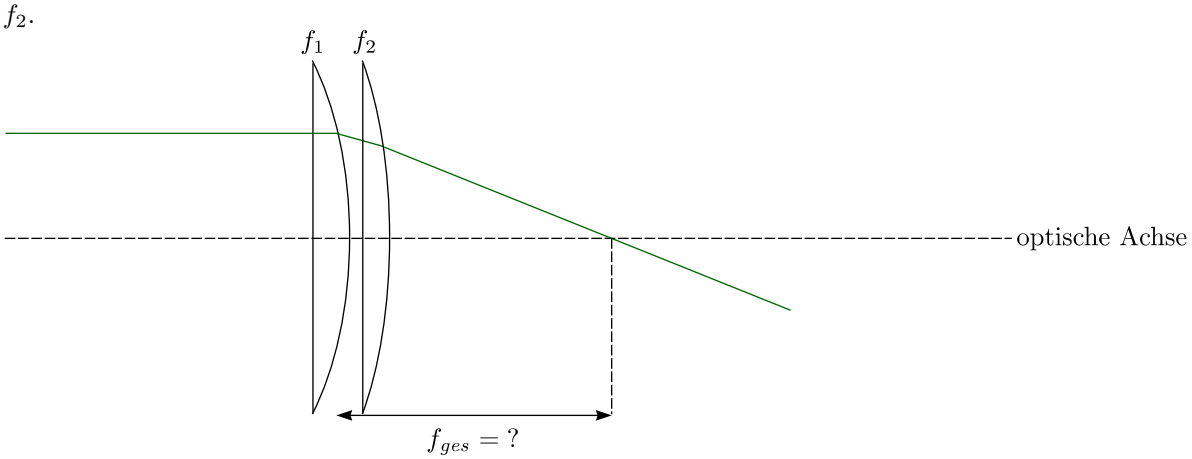
$$\begin{pmatrix} h_2 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \varphi_1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{M_{Konvex} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}}$$

Für konkave Linsen dito, aber $f \mapsto -f$.

Beispiel:

Wir betrachten ein System aus zwei dicht hintereinander liegenden dünnen Linsen mit den Brennweiten f_1 und f_2.



Wir berechnen das Produkt der beiden Matrizen:

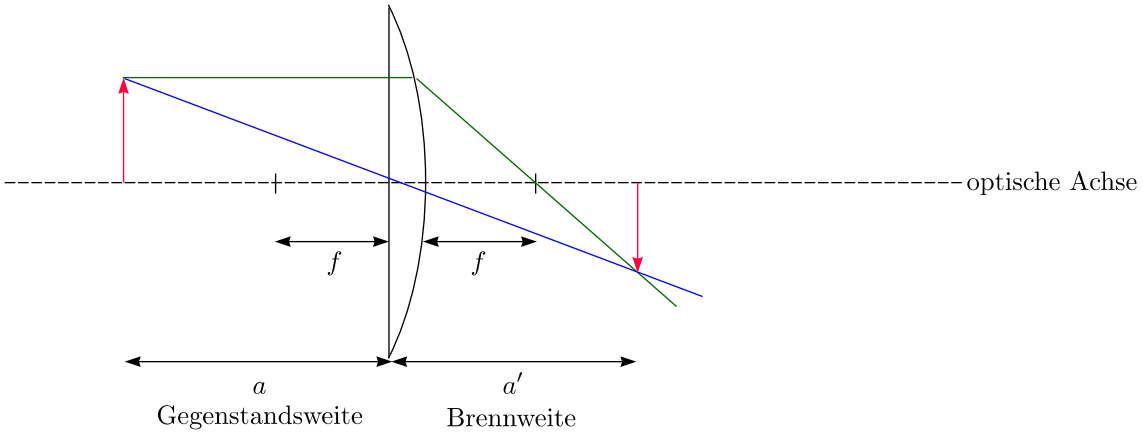
$$\mathcal{M}_{ges} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_1} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_2} - \frac{1}{f_1} & 1 \end{pmatrix}$$

$$-\frac{1}{f_2} - \frac{1}{f_1} = -\frac{1}{f_{ges}}$$

Damit gilt also:

$$\boxed{f_{ges}^{-1} = f_1^{-1} + f_2^{-1}}$$

Beispiel (Abbildungen):



Hier müssen drei Matrizen in der richtigen Reihenfolge multipliziert werden:

$$\mathcal{M}_{ges} = \begin{pmatrix} 1 & a' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{= \begin{pmatrix} 1 & a \\ -\frac{1}{f} & -\frac{a}{f}+1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1-\frac{a'}{f} & a - \frac{aa'}{f} + a' \\ -\frac{1}{f} & -\frac{a}{f}+1 \end{pmatrix}$$

Somit folgt:

$$\begin{pmatrix} h' \\ \varphi' \end{pmatrix} = \mathcal{M}_{ges} \cdot \begin{pmatrix} h \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11}h & M_{12}\varphi \\ M_{21}h & M_{22}\varphi \end{pmatrix}$$

In der Bildebene kreuzen sich die Strahlen mit verschiedenem φ, d.h. h' hängt nicht von φ ab. Somit folgt:

$$M_{12} = 0$$

$$a - \frac{aa'}{f} + a' = 0$$

Somit folgt:

$$\boxed{\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a'}}$$

Dies ist die sogenannte Abbildungsgleichung. Die Vergrößerung in der Bildebene ergibt sich nun durch:

$$M_{11} = 1 - \frac{a'}{f}$$

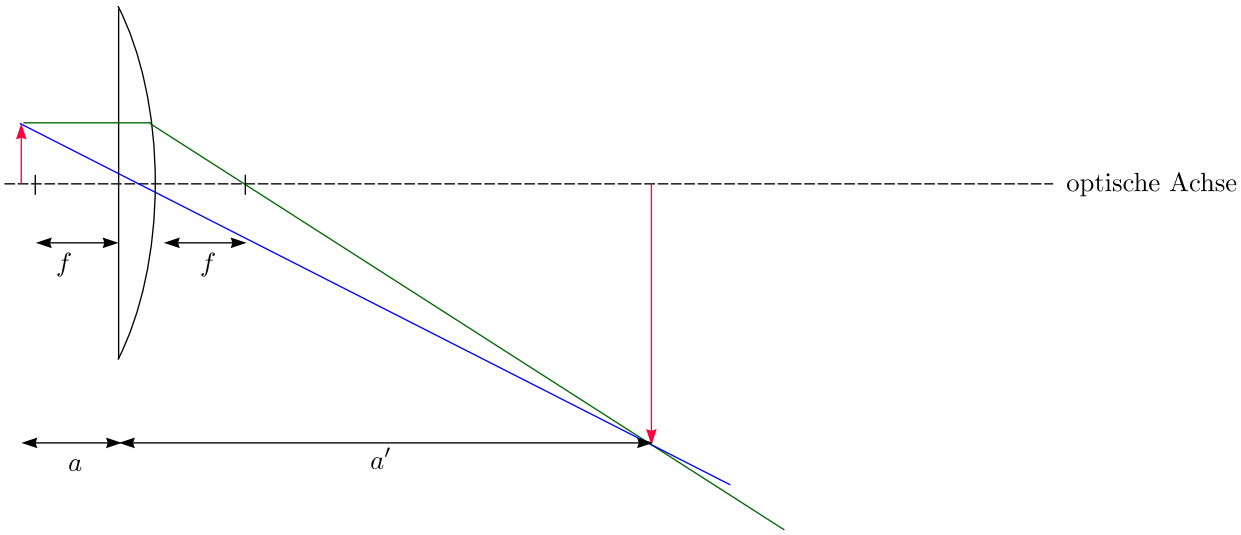
Betrachten wir folgendes Zahlenbeispiel. Wir möchten eine zehnfache Vergrößerung, d.h. $M_{11} = -10$. Damit resultiert:

$$a' = 11f$$

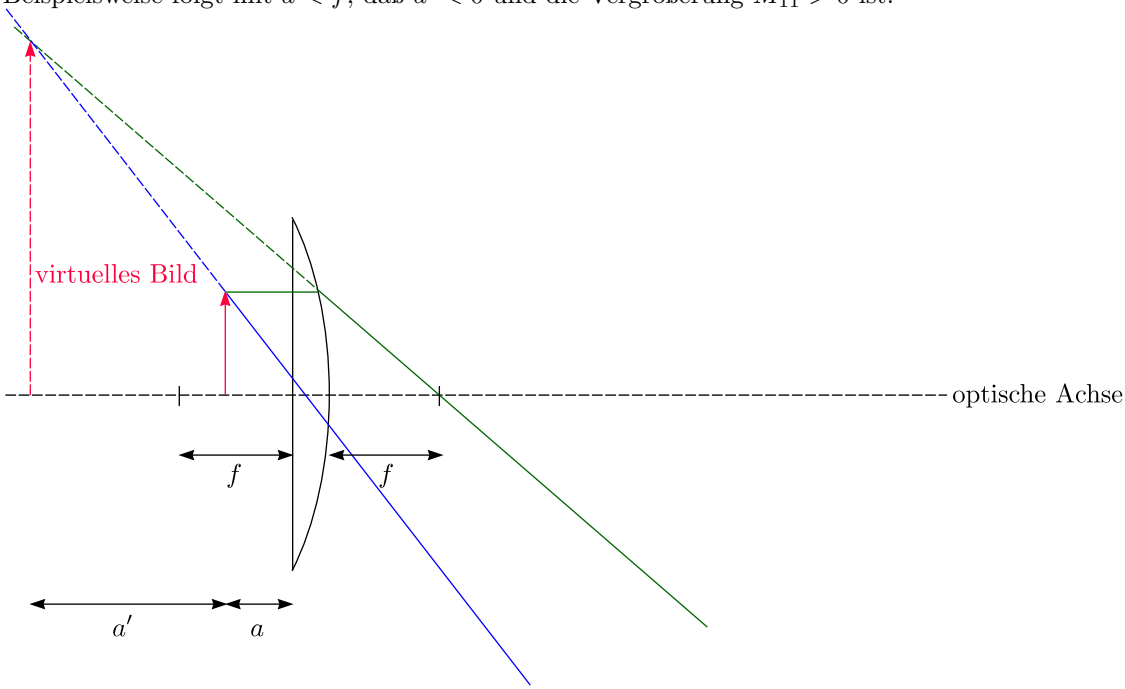
Mit der Abbildungsgleichung ergibt sich dann:

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{f} - \frac{1}{a'} = \frac{1}{f} - \frac{1}{11f} = \frac{10}{11f}$$

$$\boxed{a = \frac{11}{10}f}$$



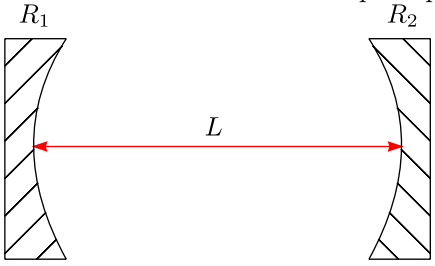
Beispielsweise folgt mit $a < f$, daß $a' < 0$ und die Vergrößerung $M_{11} > 0$ ist.



Das virtuelle Bild kann nicht auf einem Schirm aufgefangen werden.

Beispiel (Stabilität optischer Resonatoren):

Wir zeichnen einen Resonator prinzipiell:



Spiegel mit Krümmungsradius

Fragestellung:

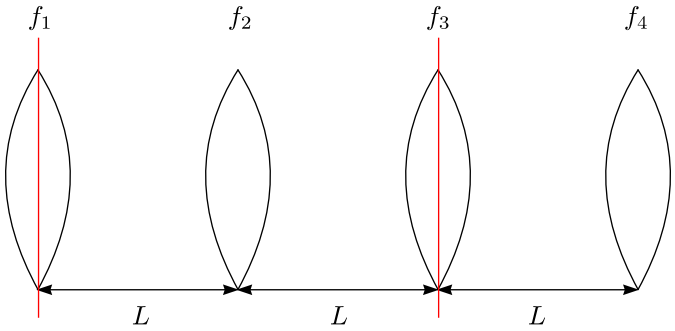
Wie sind R_1, R_2 und L zu wählen, damit der Resonator stabil ist, d.h., daß ein Strahl im Resonator verbleibt? Dazu notieren wir uns zuerst die Matrix eines Spiegels:

$$\boxed{\mathcal{M}_{Spiegel} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}}$$

Die Brennweite f des Spiegels hängt dabei folgendermaßen mit seinem Krümmungsradius R zusammen:

$$\boxed{f = \frac{R}{2}}$$

Ersatzaufbau:



Rundlauf

Die halbe Linse hat die Brennweite $2f$. Damit folgt die Matrix eines Rundlaufs:

$$\mathcal{M}_{Rundlauf} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2f_1} & 1 \end{pmatrix}$$

Damit $\mathcal{M}$ eines Matrix im wesentlichen Sinne wird, ersetzen wir den „Vektor“:

$$\begin{pmatrix} h \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} h \\ \varphi \cdot L \end{pmatrix} \stackrel{\wedge}{=} \text{Vektor}$$

Durch Ausmultiplizieren ergibt sich folgendes Zwischenergebnis:

$$\boxed{\begin{pmatrix} h \\ \varphi \cdot L \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2g_1g_2 - 1 & 2g_2 \\ 2g_1\left(g_1g_2 - 1\right) & 2g_1g_2 - 1 \end{pmatrix}}_{\tilde{\mathcal{M}}_{Rundlauf}} \begin{pmatrix} h_0 \\ \varphi_0 \cdot L \end{pmatrix} \text{ mit } g_1 = 1 - \frac{L}{2f_1} \text{ und } g_2 = 1 - \frac{L}{2f_2}}$$

Suche zunächst Eigenlösungen des Systems, d.h.

$$\tilde{\mathcal{M}}_{Rundlauf}\vec{r}_0 = \lambda\vec{r}_0$$

Dieses Eigenwertproblem soll nun gelöst werden:

$$\left(\tilde{\mathcal{M}}_{Rundlauf} - \lambda\mathcal{M}\right)\vec{r}_0 = 0$$

Die notwendige Bedingung für nichttriviale Lösungen ist nun, daß die Determinante der Matrix $\tilde{\mathcal{M}}_{Rundlauf} - \lambda\mathcal{M}$ gleich Null ist:

$$\det\left(\tilde{\mathcal{M}}_{Rundlauf} - \lambda\mathcal{M}\right) = 0$$

Nach einigen Rechenschritten folgt:

$$\lambda^2 - 2\left(2g_1g_2 - 1\right)\lambda + 1 = 0$$

Diese quadratische Gleichung wird mit der p-q-Formel gelöst, wobei wir dann folgende Eigenwerte λ erhalten:

$$\boxed{\lambda = \left(2g_1g_2 - 1\right) \pm \sqrt{4g_1g_2\left(g_1g_2 - 1\right)}}$$

Behauptung:

- Resonator ist stabil für $0 \leq g_1 g_2 \leq 1$
- Resonator ist instabil für $g_1 g_2 < 0$ oder $g_1 g_2 > 1$

Beweis:

1.) $0 \leq g_1 g_2 \leq 1$:

$\lambda = \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\theta} = \cos\theta \pm \mathrm{i}\sin\theta$

Denn es gilt:

$\cos\theta = 2g_1 g_2 - 1$

Nun muß gelten:

$\sin^2\theta = -4g_1 g_2 \left(g_1 g_2 - 1\right)$

Es gilt ja bekanntlich:

$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - \left(2g_1 g_2 - 1\right)^2 = -4g_1 g_2 \left(g_1 g_2 - 1\right)$

Die Eigenwerte λ sind komplexe Zahlen, die den Betrag 1 haben. Wir stellen einen beliebigen Anfangsvektor $\vec{r}_0$ als Linearkombination dar:

$\vec{r}_0 = c_+ \vec{r}_+ + c_- \vec{r}_-$

Nach n Rundläufen ergibt sich folgender Vektor:

$\vec{r}_n = c_+ \mathrm{e}^{+\mathrm{i}n\theta} + c_- \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta} \vec{r}_-$

Dieser Ausdruck ist beschränkt:

$\vec{r}_n = \underbrace{\left(c_+ \vec{r}_+ + c_- \vec{r}_-\right)}_{\vec{r}_0} \cos(n\theta) + \mathrm{i}\left(c_+ \vec{r}_+ - c_- \vec{r}_-\right) \sin(n \cdot \theta)$

Infolgedessen haben wir einen stabilen Resonator.

2.) $g_1 g_2 < 0$ oder $g_1 g_2 > 1$:

Wir stellen folgende Behauptung auf:

$\lambda = \left(2g_1 g_2 - 1\right) \pm \sqrt{4g_1 g_2 \left(g_1 g_2 - 1\right)} = \mp\cosh(\theta) \pm \sinh(\theta)$

$\lambda_1 = \mathrm{e}^{+\theta}$

$\lambda_2 = \mathrm{e}^{-\theta}$

Denn es gilt:

$\cosh(\theta) = 2g_1 g_2 - 1$

$\sinh^2(\theta) = 4g_1 g_2 \left(g_1 g_2 - 1\right)$

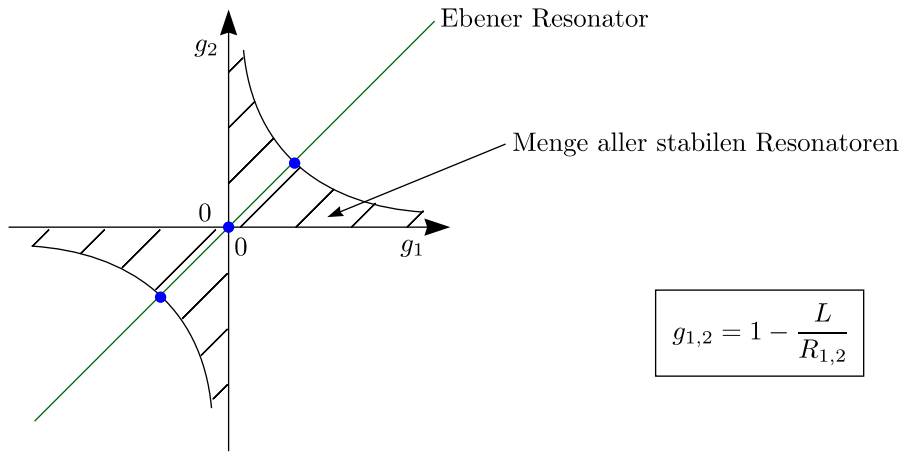
$\sinh^2(\theta) = \cosh^2(\theta) - 1 = \left(2g_1 g_2 - 1\right)^2 - 1 = 4g_1 g_2 \left(g_1 g_2 - 1\right)$

Nach n Rundläufen ergibt sich :

$\vec{r}_n = c_+ \vec{r}_+ \mathrm{e}^{+n\theta} + c_- \vec{r}_- \mathrm{e}^{-n\theta}$

Dieser Ausdruck ist nicht beschränkt. Der Resonator ist somit instabil.

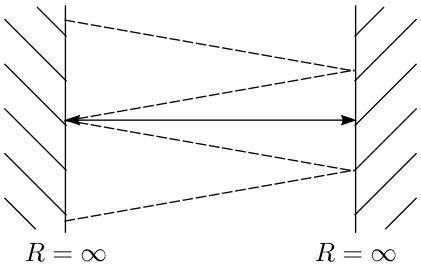
Graphisch:



$$g_{1,2} = 1 - \frac{L}{R_{1,2}}$$

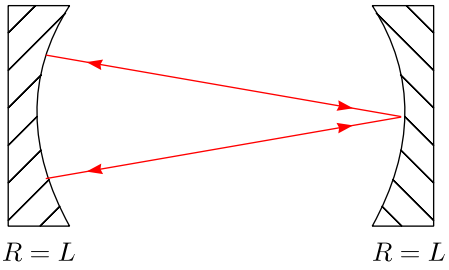
$g_1 = g_2$, d.h. symmetrischer Resonator

Ebener Resonator:



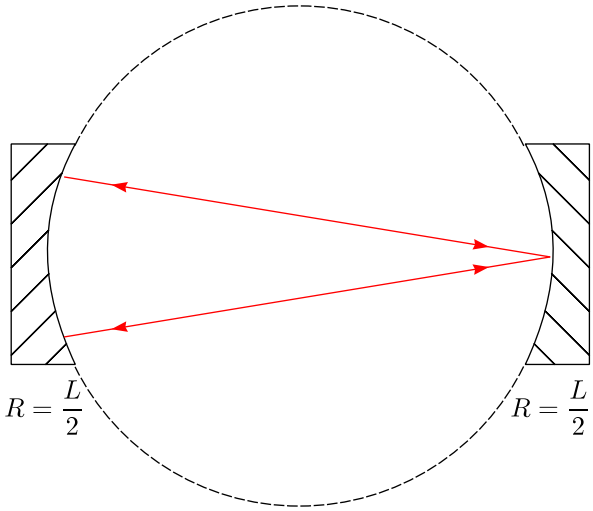
$g_1 = g_2 = 1$

Konfokaler Resonator:



$g_1 = g_2 = 0$

Konzentrischer Resonator:

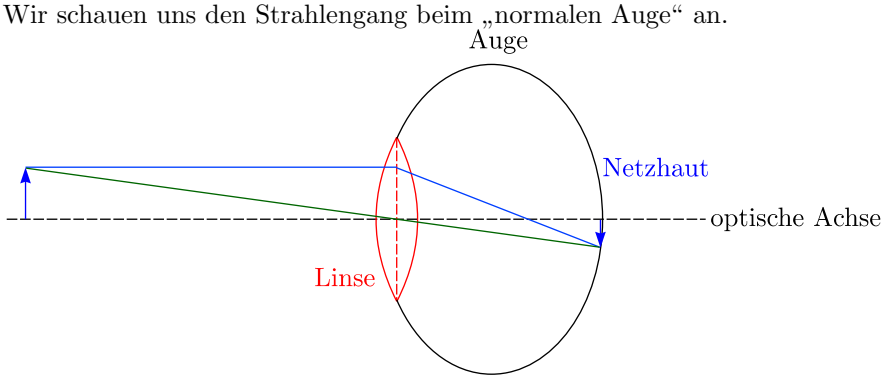


$g_1 = g_2 = -1$

5.2 Optische Geräte

Beispiel:Brille

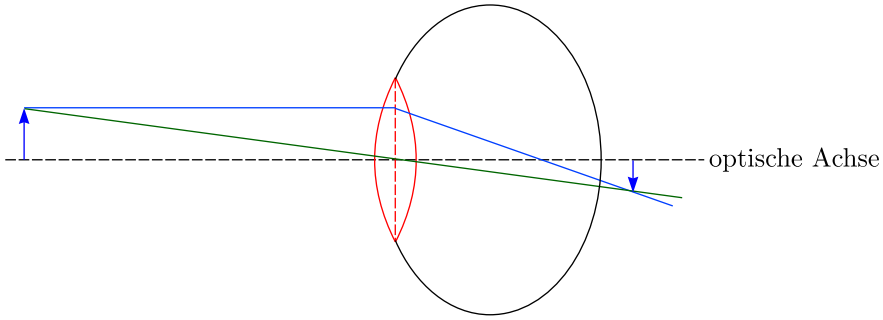
Wir schauen uns den Strahlengang beim „normalen Auge“ an.



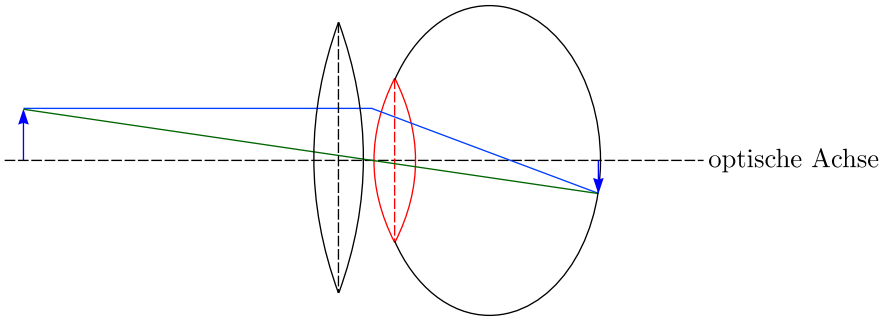
Siehe Abbildungsgleichungen (Kapitel 5.2)

- Weitsichtigkeit:

  Die Brechkraft ist zu gering und damit die Brennweite f zu groß.

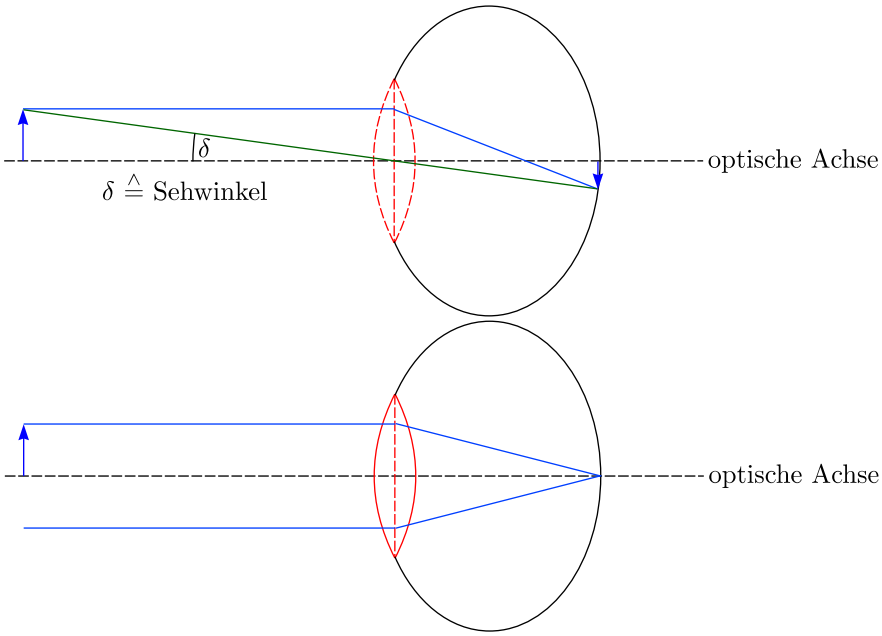


  Es entsteht ein unscharfes Bild auf der Netzhaut. Eine Sammellinse schafft hier Abhilfe.

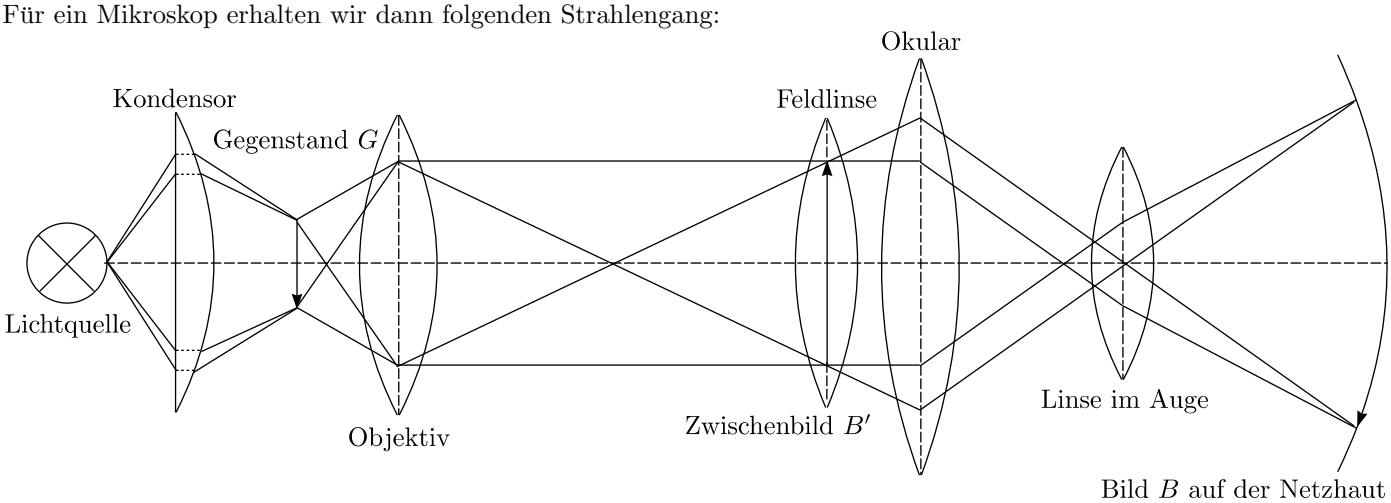


✳ Nahsichtigkeit:
Die Brechkraft ist hier zu groß und damit die Brennweite f zu klein.

Mikroskop:



Für ein Mikroskop erhalten wir dann folgenden Strahlengang:



Ohne Feldlinse funktioniert das Gerät auch, es ist aber viel lichtschwächer und auch das Gesichtsfeld ist kleiner.

	$f_{Objektiv}$
Fernrohr	$> 1\,\mathrm{m}$
Mikroskop	$1 - 10\,\mathrm{mm}$

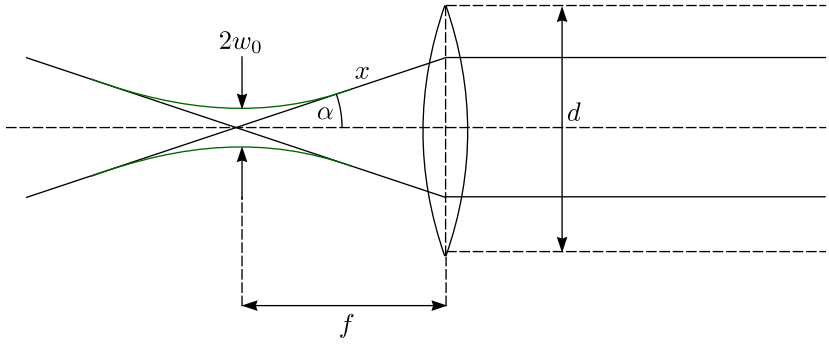
5.2.1 Auflösungsvermögen des Mikroskops

1.) Der kleinste Fleckdurchmesser $2w_0$, den ich mit dem Objektiv erreichen kann, ist (Kapitel 3.4.3):

$$\boxed{2w_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0} NA \mathrel{\hat{=}} \text{Auflösung}}$$

Die numerische Apertur NA ist definiert durch:

$$\boxed{NA = n \cdot \sin\alpha}$$

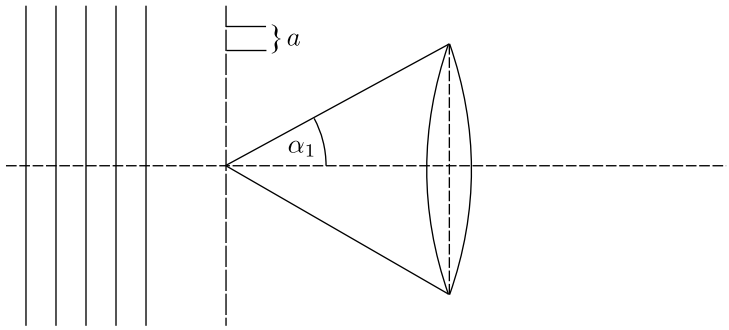


$$NA = n \cdot \sin\alpha = n \cdot \frac{\frac{d}{2}}{x} = n \cdot \frac{\frac{d}{2}}{\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + f^2}}$$

Die numerische Apertur ist durch der Durchmesser des Objektivs begrenzt. $NA = 0,5$ ist ein hoher Wert. Mit $n = 1$ folgt:

$$\boxed{\text{Auflösung} \approx 1,3\lambda_0}$$

2.) Abbé-Kriterium (Abbildung eines Gitters)



Maxima entstehen nun bei folgenden Winkeln:

$\sin\alpha = m\frac{\lambda}{a}$ (Kapitel 3.4.2)

Zumindest die $m = \pm 1$-ste Ordnung soll noch vom Objektiv aufgefangen werden.

$a \geq \frac{\lambda_0}{NA} \mathrel{\hat{=}}$ Auflösung

Mit $NA = 0,5$ und $n = 1$ folgt:

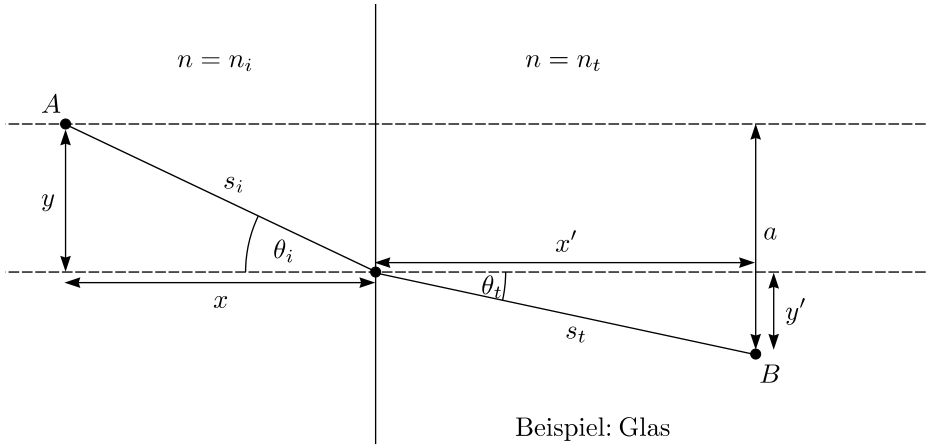
$$\boxed{\text{Auflösung} \approx 2\lambda_0}$$

5.3 Fermatsches Prinzip

Viele Phänomene der Optik wie beispielsweise Reflexion, Brechung, Linsen, etc. lassen sich – alternativ zu den Maxwell-Gleichungen – auch auf der Basis des Fermatschen Prinzips verstehen.

Ein Lichtstrahl läuft von einem Punkt A zu einem anderen Punkt B auf einem Weg, dessen optische Weglänge minimal ist.

Beispiel:



Beispiel: Glas

Wir betrachten die Zeit t von A nach B als Funktion von y:

$$t = \frac{s_i}{c_i} + \frac{s_t}{c_t} = \frac{1}{c_0} \underbrace{(n_i s_i + n_t s_t)}_{\substack{=:\text{optische} \\ \text{Weglänge}}}$$

Mit dem Satz des Pythagoras folgt:

$$t = \frac{1}{c_0} \left(n_i \sqrt{x^2 + y^2} + n_t \sqrt{x'^2 + (a-y)^2} \right)$$

Wir bestimmen nun das Minimum von t bzw. der optischen Weglänge:

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{c_0} \left(n_i \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}} + n_t \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{-2\,(a-y)}{\sqrt{\left(x'^2 + (a-y)^2\right)}} \right) = \frac{1}{c_0} \left(n_i \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + n_t \cdot \frac{-\,(a-y)}{\sqrt{\left(x'^2 + (a-y)^2\right)}} \right)$$

Außerdem gilt:

$$\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sin\theta_i$$

$$\frac{-\,(a-y)}{\sqrt{x'^2 + (a-y)^2}} = -\sin\theta_t$$

Somit folgt dann:

$$\boxed{n_i \cdot \sin\theta_i = n_t \cdot \sin\theta_t}$$

Wir erhalten also das Snellius Brechungsgesetz (siehe Kapitel 3.1.2) ohne Verwendung der Maxwellschen Gleichungen! Im Beispiel war die optische Weglänge $n_i s_i + n_t s_t$. Allgemein gilt für die optische Weglänge:

$$\boxed{s_o = \int_A^B n(s)\,\mathrm{d}s}$$

Man integriert also vom Startpunkt A bis zum Endpunkt B über den vom Weg s abhängigen Brechungsindex. Das Fermatsche Prinzip lautet nun:

$$\boxed{\delta \left[\int_A^B n(s)\,\mathrm{d}s = 0 \right]}$$

δ bedeutet hierbei die Variation. Dies steht im Zusammenhang mit dem Hamiltonschen Prinzip aus der Mechanik:

$$\boxed{\delta \left[\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} \, \mathrm{d}t \right] = 0}$$

$\mathcal{L}$ ist hierbei die aus Theorie B bekannte Lagrangefunktion.

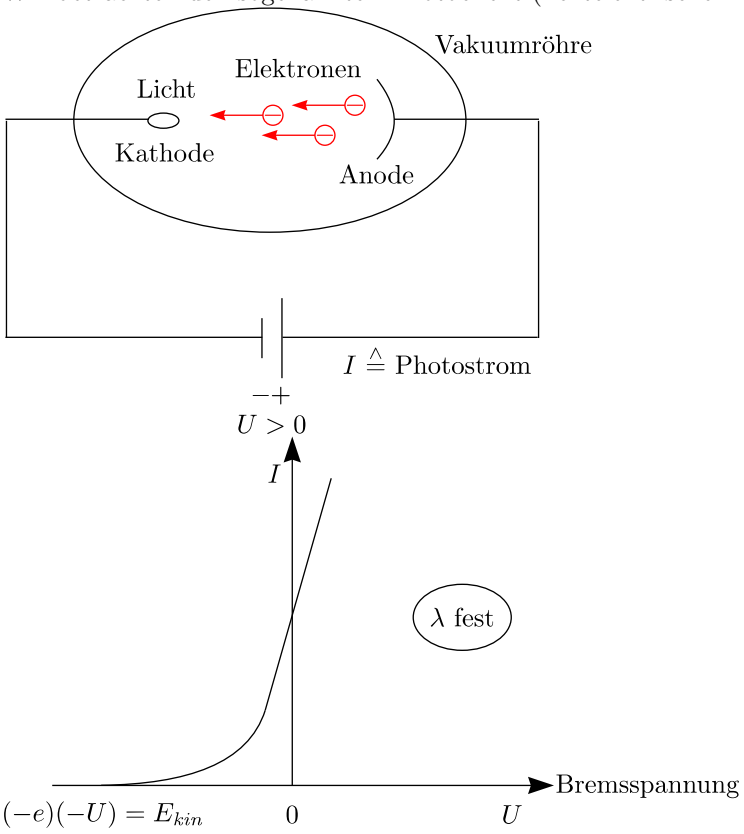
Kapitel 6

Quantenoptik

6.1 Das Photon

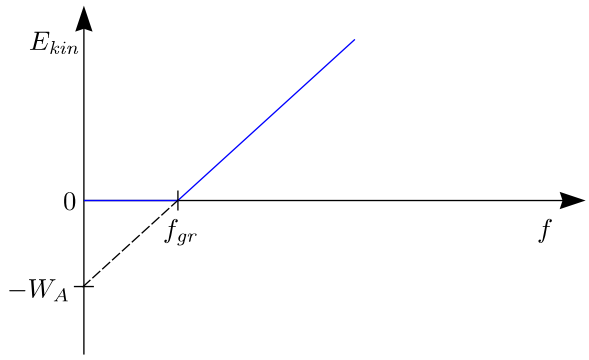
Experimentelle Evidenzen:

Wir betrachten den sogenannten Photoeffekt (lichtelektrischer Effekt):



Die maximale kinetische Energie des Elektrons berechnet sich nach:

$$E_{kin} = (-e) \cdot (-U) = eU$$



f ist die Frequenz des Lichts mit $\omega = 2\pi f$. Aus dem Experiment ergibt sich:

$$\boxed{E_{kin} = h \cdot f - W_A}$$

Die Geradensteigung h stellt das Plancksche Wirkungsquantum dar:

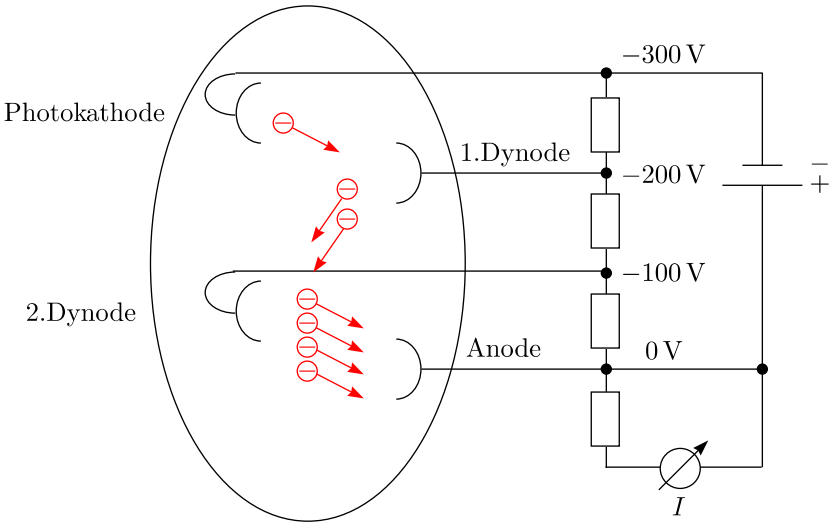
$$\boxed{h = 6,626 \cdot 10^{-34}\,\text{Js}}$$

Es handelt sich dabei um eine Naturkonstante. Der y-Achsenabschnitt W_A ist eine Materialkonstante und hängt somit von der Art der Kathode ab. Der Photoeffekt ist ein Phänomen, das im Wellenbild nicht verstanden werden kann.

Der experimentelle Befund wird sofort klar, wenn wir annehmen, daß das Licht aus Partikeln besteht, von denen jedes die Energie $h \cdot f$ besitzt.

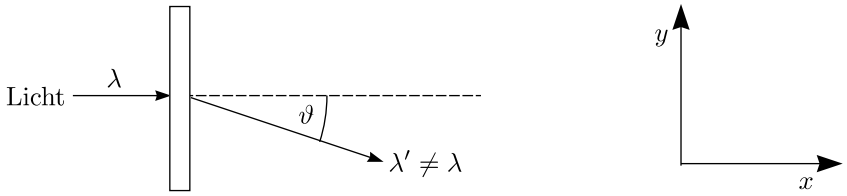
$h \cdot f$ wird auch als Energiequant bezeichnet.

Anwendung: Photo-Multiplier

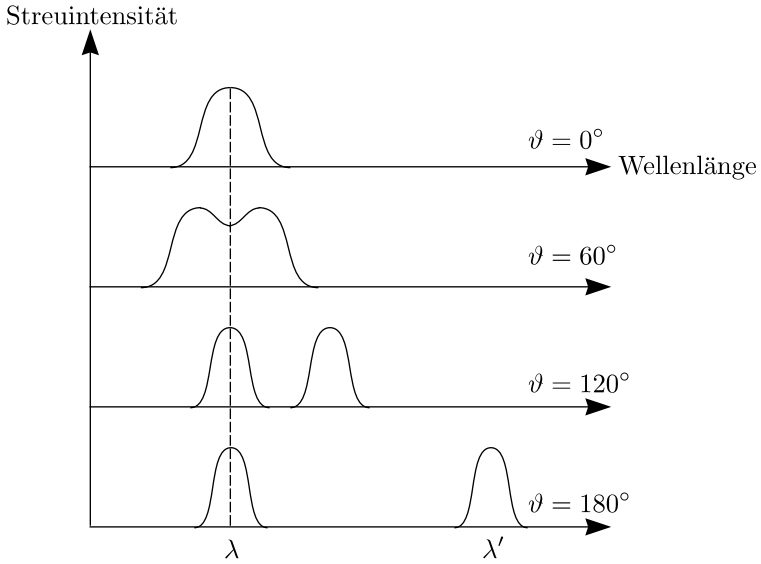


Typisch sind beispielsweise 10 Dyoden. Wenn zum Beispiel ein Elektron jeweils zwei ausschlägt, bekommt man eine Verstärkung von $2^{10} = 1024$.

6.2 Compton-Effekt



beliebiges Material (Folie)

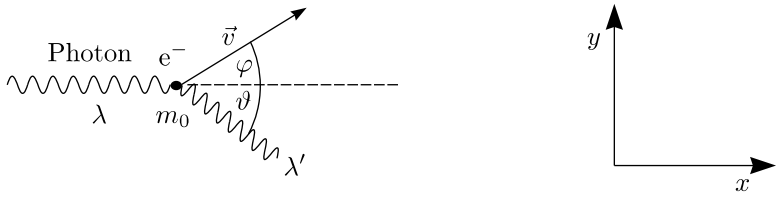


Im Experiment findet man heraus:

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 c_0}\,(1 - \cos\vartheta) = \lambda_0\,(1 - \cos\vartheta)$$

Die Compton-Wellenlänge liegt ungefähr bei $2,4 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{m}$. Der Compton-Effekt kann im Wellenbild nicht verstanden werden.

Der experimentelle Befund wird klar, wenn wir annehmen, daß das Licht aus Partikeln besteht, von denen jedes die Energie $h \cdot f$ und den Impuls $p = \frac{h}{\lambda}$ besitzt.



Es handelt sich um einen relativistischen Stoßprozeß.

- Energieerhaltung:

  $$hf + m_0 c_0^2 = hf' + mc_0^2$$

- Impulserhaltung:
  - x-Richtung:

    $$\frac{h}{\lambda} = \frac{h}{\lambda'}\cos\vartheta + mv\cos\varphi$$

  - y-Richtung:

    $$0 = -\frac{h}{\lambda'}\sin\vartheta + mv\sin\varphi$$

Außerdem gilt:

$$\lambda \cdot f = c_0$$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c_0}\right)^2}}$$

Wir wollen nun die Beziehung herleiten. Es gilt:

$$\frac{h}{\lambda} = \frac{h}{\lambda'}\cos\vartheta + mv\cos\varphi$$

$$\frac{h}{\lambda'}\sin\vartheta = mv\sin\varphi$$

Wir lösen die letzte Gleichung nach φ auf:

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{h}{\lambda' mv}\sin\vartheta\right)$$

Durch Einsetzen in die erste Gleichung folgt:

$$\frac{h}{\lambda} = \frac{h}{\lambda'}\cos\vartheta + mv\sqrt{1-\left(\frac{h}{\lambda' mv}\right)^2\sin^2\vartheta}$$

Dann ergibt sich durch Quadrieren:

$$\frac{h^2}{\lambda^2} - 2\frac{h^2}{\lambda\lambda'}\cos\vartheta + \frac{h^2}{\lambda'^2}\cos^2\vartheta = m^2v^2 - \frac{h^2}{\lambda'^2}\sin^2\vartheta$$

$$\frac{h^2}{\lambda^2} - 2\frac{h^2}{\lambda\lambda'}\cos\vartheta + \frac{h^2}{\lambda'^2}\left(\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta\right) = m^2v^2$$

$$\frac{h^2}{\lambda^2} - 2\frac{h^2}{\lambda\lambda'}\cos\vartheta + \frac{h^2}{\lambda'^2} = m^2v^2$$

$$\left(\frac{h}{\lambda} - \frac{h}{\lambda'}\right)^2 + 2\frac{h^2}{\lambda\lambda'}\left(1-\cos\vartheta\right) = m^2v^2$$

Die Gleichung für die Energieerhaltung lautet nochmals:

$$\frac{hc_0}{\lambda} + m_0c_0^2 = \frac{hc_0}{\lambda'} + mc_0^2$$

$$hc_0\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\right) + m_0c_0^2 = mc_0^2$$

$$m = \frac{h}{c_0}\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\right) + m_0$$

Nun gilt mittels des relativistischen Pythagoras:

$$p^2 = (mv)^2 = \frac{\left(mc_0^2\right)^2 - \left(m_0c_0^2\right)^2}{c_0^2} = c_0^2\left(m^2 - m_0^2\right) = c_0^2\left(\left[\frac{h}{c_0}\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\right) + m_0\right]^2 - m_0^2\right)$$

$$(mv)^2 = h^2\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\right)^2 + 2hc_0m_0\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\right)$$

Somit folgt wieder durch Einsetzen in die ursprüngliche Gleichung:

$$\left(\frac{h}{\lambda} - \frac{h}{\lambda'}\right)^2 + 2\frac{h^2}{\lambda\lambda'}\left(1-\cos\vartheta\right) = h^2\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\right)^2 + 2hc_0m_0\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\right)$$

$$2\frac{h^2}{\lambda\lambda'}\left(1-\cos\vartheta\right) = 2hc_0m_0\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\right)$$

$$2\frac{h^2}{\lambda\lambda'}\left(1-\cos\vartheta\right) = 2hc_0m_0\left(\frac{\lambda' - \lambda}{\lambda\lambda'}\right)$$

$$2hc_0m_0\left(\lambda' - \lambda\right) = 2h^2\left(1-\cos\vartheta\right)$$

Durch Auflösen folgt schlußendlich:

$$\boxed{\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0c_0}\left(1-\cos\vartheta\right)}$$

Dies entspricht also gerade dem experimentellen Befund.

6.3 Das Plancksche Strahlungsgesetz

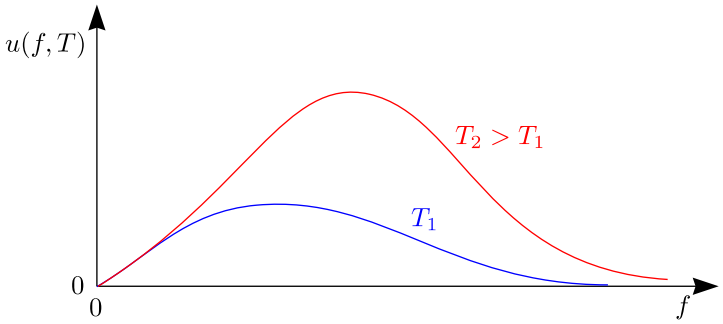
6.3.1 Weitere experimentelle Evidenzen

Definition:

Wir führen folgende Größe u ein, die von Frequenz und Temperatur abhängen soll:

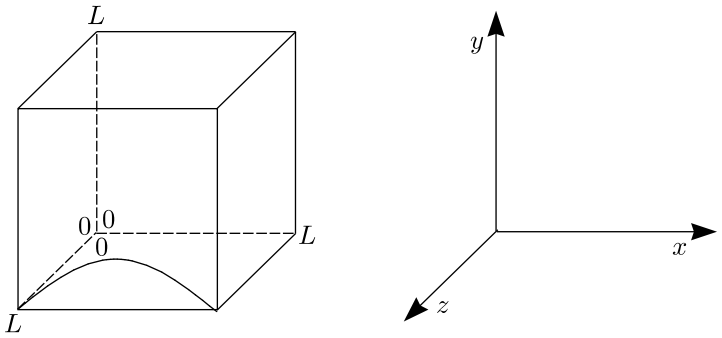
$$u(f,T)\,\mathrm{d}f := \frac{\text{Strahlungsenergie im Frequenzbereich } [f, f+\mathrm{d}f]}{\text{Volumen}}$$

Experiment:



Dieses Verhalten ist unabhängig vom Material (Sonne, Ofen, etc.)! Das Plancksche Strahlungsgesetz kann im Wellenbild nicht vollständig verstanden werden.

Wellenoptische Diskussion: Rayleigh-Jeans-Gesetz



Wir betrachten einen Würfel der Kantenlänge L, welcher innen verspiegelt ist. Die Randbedingungen sind also:

$\vec{E}\,(\text{Oberfläche}) \equiv \vec{o}$

Aufgrund dieser Randbedingung kann es sich nur um eine Sinusfunktion handeln:

$\vec{E} = \vec{E}_0 \sin(k_x \cdot x) \cdot \sin(\omega t)$

Berücksichtigt man alle drei Raumrichtungen, so ergibt sich:

$\vec{E} = \vec{E}_0 \sin(k_x \cdot x) \cdot \sin(k_y \cdot y) \cdot \sin(k_z \cdot z) \cdot \sin(\omega t)$

Damit sind also schon die Randbedingungen bei $x = 0$, $y = 0$ und $z = 0$ erfüllt. Mit quantisierten $\vec{k}$-Werten folgt:

$k_x = m_x \cdot \dfrac{\pi}{L}$ mit $m_x \in \mathbb{N}$

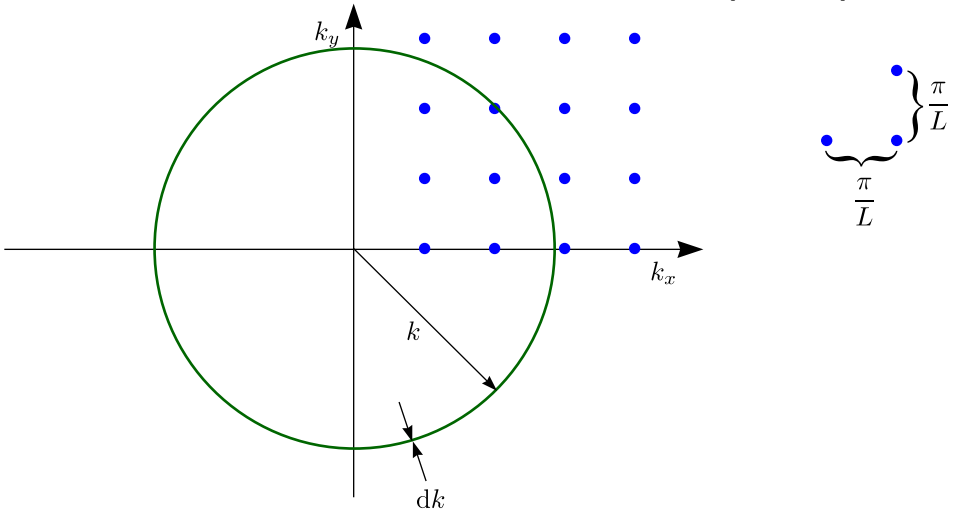
$k_y = m_y \cdot \dfrac{\pi}{L}$ mit $m_y \in \mathbb{N}$

$k_z = m_z \cdot \dfrac{\pi}{L}$ mit $m_z \in \mathbb{N}$

Damit sind auch die Randbedingungen bei $x = L$, $y = L$ und $z = L$ erfüllt.
Die Idee ist nun, daß ein quantisierter Zustand des Feldes einem Freiheitsgrad entspricht. Wir erinnern uns an die Thermodynamik:

> Jeder Freiheitsgrad hat eine mittlere Energie von $\frac{1}{2}k_BT$.

Wie viele Zustände $N \cdot \mathrm{d}f$ gibt es in diesem Frequenzintervall $[f, f + \mathrm{d}f]$?



Es gilt:

$$\frac{\omega}{k} = c_0 \text{ und } \omega \equiv 2\pi \cdot f$$

$$k = \frac{\omega}{c_0} = \frac{2\pi f}{c_0}$$

Der Betrag eines $\vec{k}$-Vektors in drei Dimensionen stellt eine Kugeloberfläche dar. Die Anzahl der Zustände ist proportional zum Volumen der Kugelschale mit dem Volumen $4\pi k^2\,\mathrm{d}k$. Mit der obigen Gleichung resultiert für die Anzahl der Zustände:

$$\boxed{N\,\mathrm{d}f \sim f^2\,\mathrm{d}f}$$

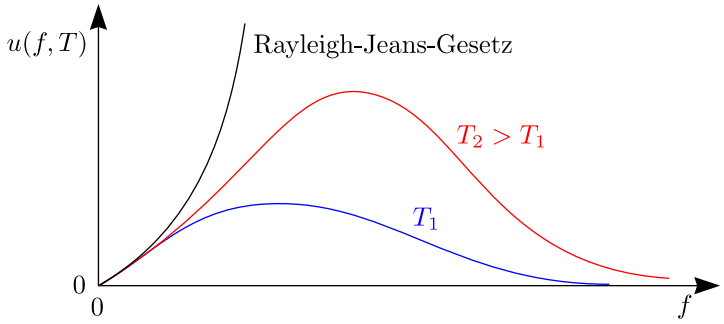
Somit ergibt sich:

$$u(f,T)\,\mathrm{d}f \sim \frac{1}{2}k_BTf^2\,\mathrm{d}f$$

$$\boxed{u(f,T) \sim f^2k_BT}$$

Dies ist das sogenannte Rayleigh-Jeans-Gesetz. Diese Proportionalität ist für kleine Frequenzen konsistent mit dem Experiment. Aber es gilt:

$$!?\, u \overset{f\mapsto\infty}{\mapsto} \infty \overset{\wedge}{=} \text{Ultraviolettkatastrophe}$$

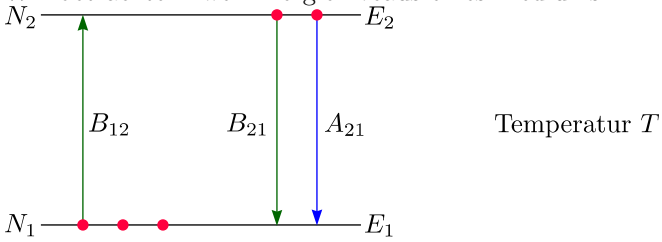


Dieses Verhalten hat lange für Aufsehen bei den Physikern gesorgt. Es konnte dann schließlich mit dem Planckschen Strahlungsgesetz verstanden werden.

> Dabei nehmen wir an, daß das Licht aus Partikeln, nämlich den sogenannte Photonen besteht, die jeweils die Energie $h \cdot f$ haben.

6.3.2 Herleitung der Planckschen Strahlungsformel nach Einstein

Wir betrachten zwei Energieniveaus eines Mediums:



Wir kennen die Boltzmann-Verteilung schon aus der Thermodynamik:

$$\boxed{\frac{N_2}{N_1} = \exp\left(-\frac{E_2 - E_1}{k_B T}\right)} \qquad (\star)$$

Wir nehmen an, daß das Lichtfeld mit dem thermischen Gleichgewicht mit dem Medium ist. Wir betrachten die Änderungen im Zeitintervall $\mathrm{d}t$:

$N_1 + N_2 = \text{const.} \Rightarrow \mathrm{d}N_1 = -\mathrm{d}N_2$

$\mathrm{d}N_2 \triangleq$ Absorption von Photonen + stimulierte Emission von Photonen + spontane Emission von Photonen

$$\mathrm{d}N_2 = B_{12}u(f) \cdot N_1 \cdot \mathrm{d}t - B_{21}u(f) \cdot N_2 \cdot \mathrm{d}t - A_{21} \cdot N_2 \cdot \mathrm{d}t = 0$$

Somit folgt:

$$\boxed{\frac{N_2}{N_1} = \frac{B_{12}u(f)}{A_{21} + B_{21}u(f)}} \qquad (\star\star)$$

Wohin geht die Energie beim Übergang $2 \mapsto 1$?

$$\boxed{E_2 - E_1 = gf} \qquad (\star\star\star)$$

Mit den Gleichungen $(\star)$, $(\star\star)$ und $(\star\star\star)$ folgt nun:

$$\exp\left(-\frac{hf}{k_B T}\right) = \frac{B_{12}u(f)}{A_{21} + B_{21}u(f)}$$

Somit folgt durch Auflösen nach $u(f)$:

$$\boxed{u(f) = \frac{A_{21}}{B_{12}\exp\left(\frac{hf}{k_B T}\right) - B_{21}}}$$

1.) Physikalische Bedeutung:

Wir fordern, daß für $T \mapsto \infty$ gilt:

$u(f) \mapsto \infty$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn die Koeffizienten B_{12} und B_{21} gleich sind.

$$u(f) = \frac{A_{21}}{B_{21}} \frac{1}{\exp\left(\frac{hf}{k_B T}\right) - 1}$$

2.) Physikalische Forderung:

Es muß für $f \mapsto 0$ einen Anschluß an das Rayleigh-Jeans-Gesetz geben. Dies zeigen wir durch Entwickeln der Exponentialfunktion in eine Reihe:

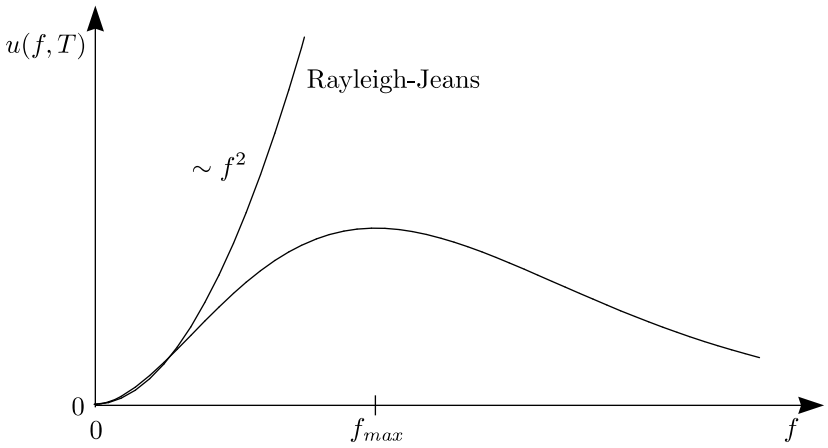
$$u(f) \approx \frac{A_{21}}{B_{21}} \frac{1}{1 + \frac{hf}{k_B T} - 1} = \frac{A_{21}}{B_{21}} \frac{k_B T}{hf} \overset{!}{\sim} f^2 k_B T$$

Damit gilt also:

$$\frac{A_{21}}{B_{21}} \sim f^3$$

$$\boxed{\boxed{u(f,T) \sim \frac{f^3}{\exp\left(\frac{hf}{k_B T}\right) - 1}}}$$

Wir haben also das Plancksche Strahlungsgesetz erhalten.



Dann folgt für das Wiensche Verschiebungsgesetz:

$$\boxed{f_{max} \sim T}$$

Für das Stefan-Boltzmann-Gesetz gilt:

$$\boxed{\int_0^\infty u(f,T)\,\mathrm{d}f \sim T^4}$$

6.3.3 Ableitung der Stefan-Boltzmann Gesetzes

$$I = \int_0^\infty u(f,T)\,\mathrm{d}f \sim \int_0^\infty \frac{f^3}{\exp\left(\frac{hf}{k_B T}\right) - 1}\,\mathrm{d}f$$

Wir führen folgende Substitution durch:

$$x = \frac{hf}{k_B T}$$

$$f = x\frac{k_B T}{h}$$

Damit folgt für das Differential $\mathrm{d}f$:

$$\mathrm{d}f = \mathrm{d}x\frac{k_B T}{h}$$

Dies setzen wir also ein:

$$I = \int_0^\infty \frac{x^3}{\mathrm{e}^x - 1}\left(\frac{k_B T}{h}\right)^3 \frac{k_B T}{h}\,\mathrm{d}x = \left(\frac{k_B T}{h}\right)^4 \underbrace{\int_0^\infty \frac{x^3}{\mathrm{e}^x - 1}\,\mathrm{d}x}_{\frac{\pi^4}{15}}$$

$$\boxed{I = \frac{\pi^4}{15}\left(\frac{k_B T}{h}\right)^4 \sim T^4}\ \text{q.e.d}$$

6.3.4 Ableitung des Wienschen Verschiebungsgesetzes

Wir suchen das Maximum von $u(f)$:

$$u(f) \sim \frac{f^3}{\exp\left(\frac{hf}{k_B T}\right) - 1}$$

Wir setzen die Ableitung des Ausdrucks gleich Null:

$$\frac{\mathrm{f}}{\mathrm{d}f}\left(\frac{f^3}{\exp\left(\frac{hf}{k_B T}\right) - 1}\right) = \frac{3f^2}{\exp\left(\frac{hf}{k_B T}\right) - 1} - \frac{\exp\left(\frac{hf}{k_B T}\right)\frac{h}{k_B T} f^3}{\left(\exp\left(\frac{hf}{k_B T}\right) - 1\right)^2}$$

Durch Umformung gilt also:

$$3\left(\exp\left(\frac{hf}{K_B T}\right) - 1\right) = \exp\left(\frac{hf}{k_B T}\right) \cdot \frac{hf}{k_B T}$$

Wir substituieren folgendes:

$$x = \frac{hf}{k_B T}$$

Damit folgt die Gleichung:

$$3\left(\mathrm{e}^x - 1\right) = \mathrm{e}^x x$$

Diese Gleichung kann analytisch nicht gelöst werden. Wir können x numerisch bestimmen und erhalten dann für f_{max}:

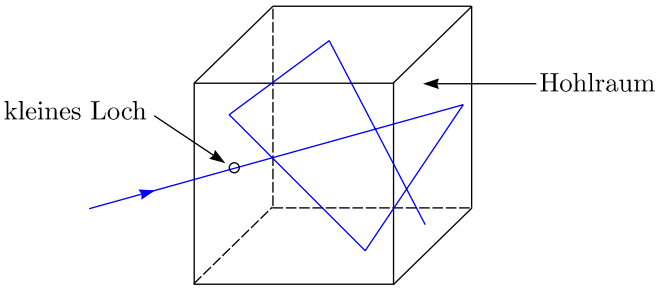
$$\boxed{f_{max} = x_{max}\frac{k_B T}{h} \sim T} \text{ q.e.d}$$

Definition:

$p(f,T)\,\mathrm{d}f$ sei die abgestrahlte Leistung im Frequenzintervall $[f, f + \mathrm{d}f]$.

Definition:

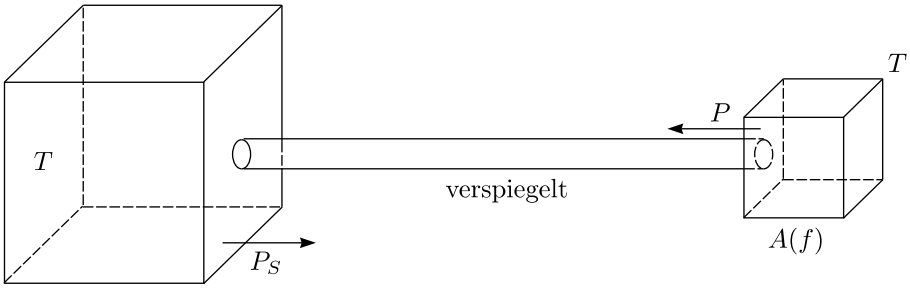
Auf einen Körper falle eine Strahlungsleistung bei der Frequenz f ein. Davon werden der Anteil $A(f)$ absorbiert. $A(f)$ sei der sogenannte Absorptionsgrad.



Für einen Hohlraum gilt $A_S(f) = 1 \;\forall\; f$. Das heißt, daß das Lich schwarz aussieht. Es gilt weiterhin:

$P_S(f,T) = \text{const.} \cdot u(f,T) \stackrel{\wedge}{=}$ Schwarzer Strahler/Hohlraumstrahler

Wir groß ist $P(f,T)$ für beliebige Materialien? Wir machen dazu folgendes Gedankenexperiment:



Im Gleichgewicht gilt:

$$P_S(f,T) \cdot A(f) = P(f,T) \cdot A_S(f) = P(f,T)$$

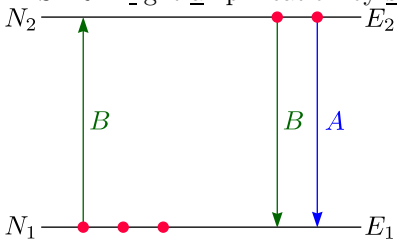
Das Fazit dieser einfache Überlegung ist:

$$\boxed{P(f,T) = A(f) \cdot P_S(f,T)}$$

Es handelt sich um das Strahlungsgesetz von Kirchhoff. P_S ist die Strahlungsleistung des schwarzen Strahlers. Ein Material, das wenig absorbiert, emittiert auch weniger als ein schwarzer Strahler.

6.4 Der LASER

LASER $\triangleq$ light amplification by stimulated emission of radiation

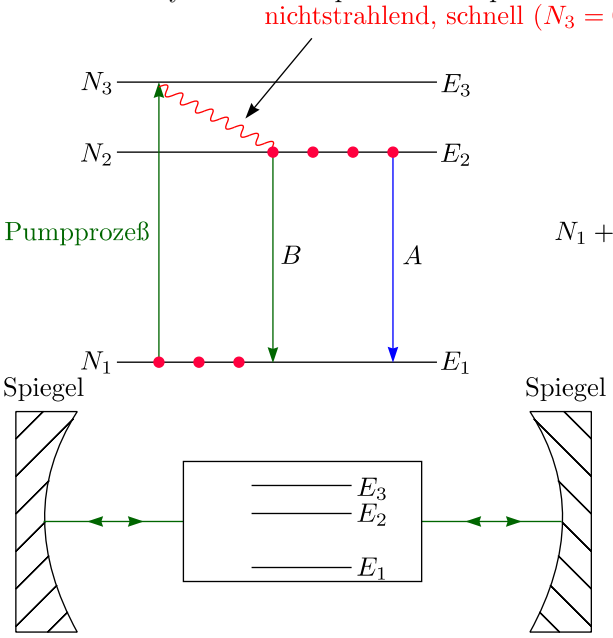


Temperatur T

Im thermischen Gleichgewicht zwischen Material und Strahlungsfeld gilt:

$$\frac{N_2}{N_1} = \exp\left(-\frac{hf}{k_B T}\right) < 1$$

Es gilt somit immer $N_2 < N_1$. Was wäre also, wenn $N_2 > N_1$ (Inversion) gelten würde? Inversion kann im Zwei-Niveau-System durch optisches Pumpen nicht erreicht werden.



$$N_1 + N_2 + N_3 = N$$

Für die Zahl der Photonen N_p in der Lasermode gilt folgender Proportionalität:

$$N_p \sim u$$

Wir stellen die Ratengleichungen des Drei-Niveau-Systems auf:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}N_2}{\mathrm{d}t} = -\tilde{B}N_p\left(N_2 - N_1\right) - AN_2 + \Gamma_{Pump}}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}N_p}{\mathrm{d}t} = +\tilde{B}N_p\left(N_2 - N_1\right) + \beta AN_2 - \frac{N_p}{\tau_p}}$$

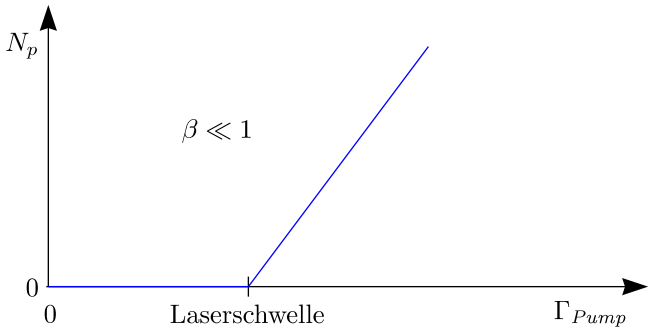
β ist der Kopplungsfaktor der spontanen Emission ($\beta \ll 1$). Der letzte Term bezeichnet Resonanzverluste ($R \neq 1$). τ_p ist die Lebensdauer der Photonen im Resonator.

- Stationärer Betrieb:

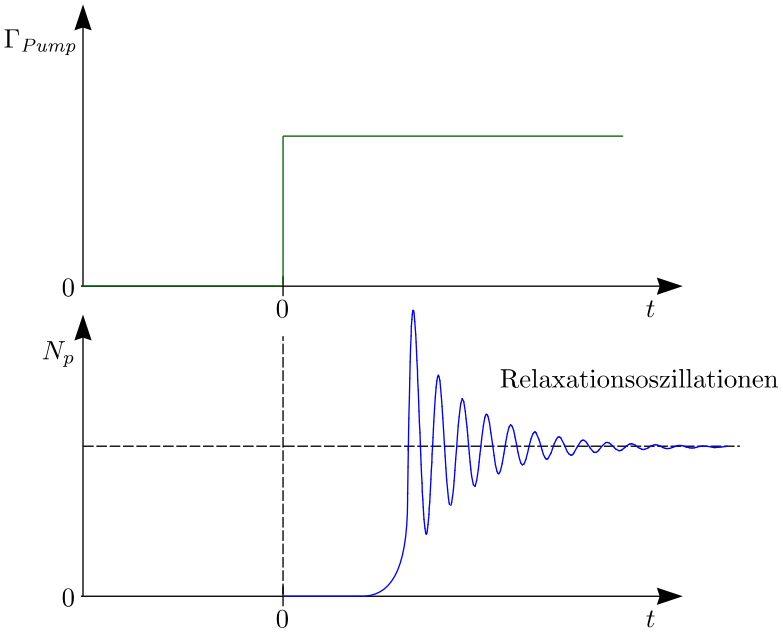
  $$\frac{\mathrm{d}N_p}{\mathrm{d}t} = 0, \beta \mapsto 0$$

  $$\tilde{B}N_p\left(N_2 - N_1\right) = \frac{N_p}{\tau_p}$$

  Gewinn = Verlust



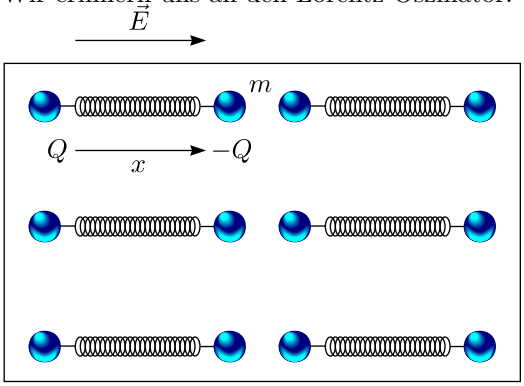
- Einschalten des LASERS:



Kapitel 7

Nichtlineare Optik

Wir erinnern uns an den Lorentz-Oszillator:



N Oszillatoren
Volumen V

Wir hatten die Newtonschen Bewegungsgleichungen eingesetzt:

$$m\ddot{x} = -QE - \left(D_1 x + D_2 x^2 + D_3 x^3 + \ldots\right)$$

Im Gegensatz zu Kapitel 2.2 lassen wir jetzt die höheren Terme nicht weg. Bei großen Feldstärken E (meist nur durch LASER erreichbar) wird auch die Auslenkung x groß und $|D_2 x^2| \not\ll |D_1 x|$. Wir können wir diese nichtlinearen Differentialgleichungen lösen? Die generelle Idee ist nun folgende. Wir führen eine Störungsrechnung mit einem sogenannte Kleinheitsparameter $\lambda \ll 1$ ein. Wir ersetzen somit E durch $\lambda \cdot E$ und machen folgenden Ansatz:

$$\boxed{x = \lambda x^{(1)} + \lambda^2 x^{(2)} + \lambda^3 x^{(3)} + \ldots}$$

Wir setzen den Ansatz ein und sortieren nach Potenzen von λ. Dazu betrachten wir die verschiedenen Ordnungen:

- $\lambda^{(1)}$:

  $$\boxed{m\ddot{x}^{(1)} = -QE - D_1 x^{(1)}}$$

- $\lambda^{(2)}$:

  $$\boxed{m\ddot{x}^{(2)} = -D_1 x^{(2)} - D_2 \left(x^{(1)}\right)^2}$$

  $\vdots$

Die Ordnung λ' hatten wir in Kapitel 2.2 bereits diskutiert:

$$\boxed{P^{(1)} = \varepsilon_0 \chi^{(1)} E}$$

Dann folgt für die lineare optische Suszeptibilität:

$$\boxed{\chi^{(1)} = \frac{NQ^2}{Vm\varepsilon_0} \frac{1}{\Omega^2 - \omega^2}} \text{ mit } \Omega = \sqrt{\frac{D_1}{m}}$$

Für die Ordnung λ^2 gilt:

$$\ddot{x}^{(2)} + \Omega^2 x^{(2)} = -\frac{D_2}{m}\left(x^{(1)}\right)^2$$

Aus Kapitel 2.2 folgt:

$$x^{(1)} = \frac{-QE_0}{D_1 - m\omega^2}\cos(\omega t)$$

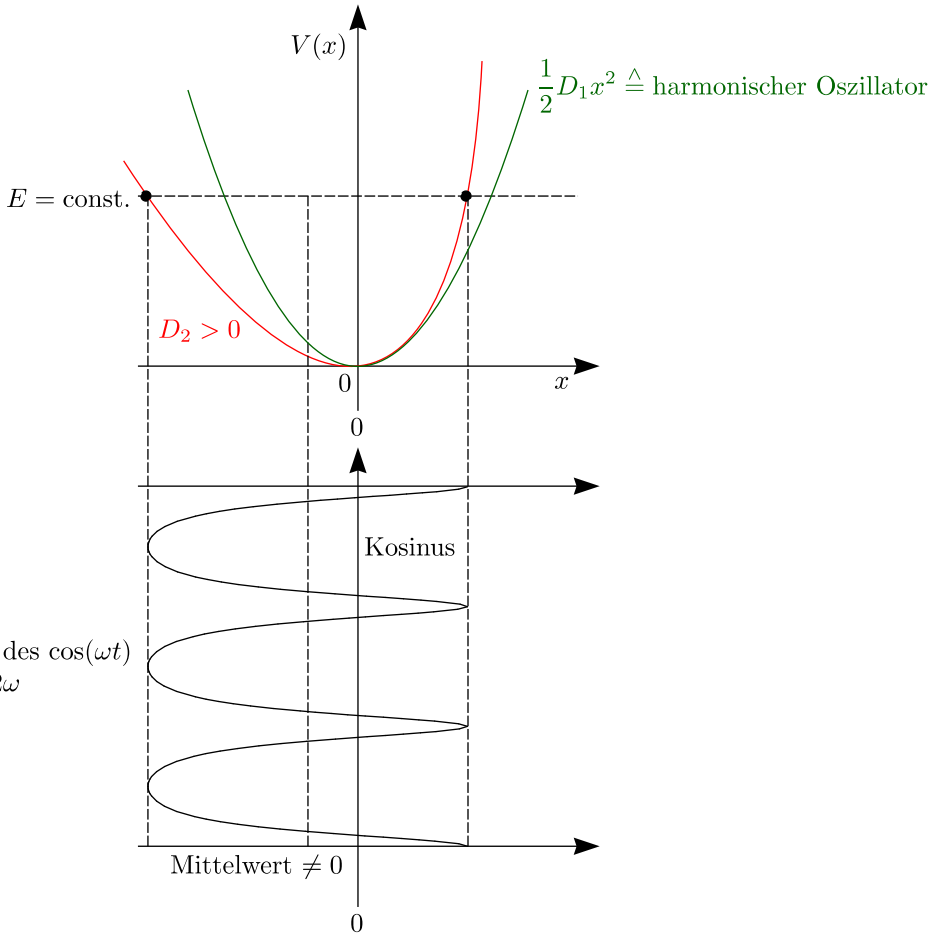
Mit $E(t) = E_0\cos(\omega t)$ und mit $\cos^2(\omega t) = \frac{1}{2}\left(2\cos(2\omega t) + 1\right)$ ergibt sich folgende Bewegungsgleichung:

$$\ddot{x}^{(2)} + \Omega^2 x^{(2)} = -\frac{D_2}{m}\left(\frac{V\varepsilon_0}{NQ}\right)^2\left(\chi^{(1)}\right)^2\frac{E_0^2}{4}\cdot\left(2\cos(2\omega t) + 1\right)$$

Es gibt somit einen Term, der mit der Frequenz 2ω oszilliert und einen, der überhaupt nicht oszilliert. Für die Lösung folgt:

$$x^{(2)}(t) = -\frac{D_2}{m}\left(\frac{V\varepsilon_0}{NQ}\right)^2\left(\chi^{(1)}(\omega)\right)^2\frac{E_0^2}{4}\cdot\Bigg[\underbrace{\frac{2}{\Omega^2 - (2\omega)^2}\cos(2\omega t)}_{\substack{\text{oszilliert mit } 2\omega \triangleq \\ \text{2-te Harmonische}}} + \underbrace{\frac{1}{\Omega^2}}_{\substack{\text{Zeitlich konstante} \\ \text{Verschiebung} \triangleq \\ \text{Optische} \\ \text{Gleichverteilung}}}\Bigg]$$

Veranschaulichung:



7.1 Die nichtlineare optische Suszeptibilität

Mit $P = \lambda P^{(1)} + \lambda^2 P^{(2)} + \ldots$ folgt dann:

$$P^{(1)} = \frac{N(-Q)}{V}x^{(2)} =: \varepsilon_0\chi^{(2)}E^2$$

Oder verallgemeinert:

$$\boxed{P = \varepsilon_0 \chi^{(1)} + \varepsilon_0 \chi^{(2)} E^2 + \varepsilon_0 \chi^{(3)} E^3 + \dots}$$

Mit der nichtlinearen optischen Suszeptibilitäten $\chi^{(2)}$, $\chi^{(3)}$, ...

$\chi^{(n)} = \chi^{(n)}(\omega)$

Kapitel 8

Thermodynamik

8.1 Einführung

Worum geht es? Wir wollen Systeme vieler Teilchen beschreiben. Dies leistet die Mechanik für beispielsweise 10^{23} Teilchen zwar prinzipiell – aber eben nicht in der Praxis. Wir hätten deshalb gern Pauschalere Informationen, statt 10^{23} Bahnkurven wie zum Beispiel die mittlere kinetische Energie.

8.1.1 Der thermodynamische Zustand

Der thermodynamische Zustand – der Gleichgewichtszustand – kann durch Zustandsgrößen gekennzeichnet werden.

Mechanische Zustandsgrößen:

- Druck p
- Volumen V

Thermische Zustandsgrößen:

- Temperatur T
- Entropie S

Chemische Zustandsgrößen:

- Chemisches Potential μ
- Teilchenzahl N

Wir unterscheiden zwischen extensiven Größen (auch Quantitätsgrößen) und intensiven Größen (auch Intensitätsgrößen). Eine intensive Größe verändert ihren Wert nicht, wenn wir zum Beispiel die betrachtete Materialmenge verdoppeln, wohingegen eine extensive Größe proportional ansteigt. Druck und Temperatur sind intensiv, Volumen und Entropie sind extensiv.

$[p \cdot V] = [T \cdot S] = [\mu \cdot N] = \mathrm{J} \mathrel{\hat{=}}$ Energie

Man spricht deshalb von zueinander konjugierten Größen. Beispielsweise ist der Druck p die zum Volumen V konjugierte Größe.

8.2 Basisgrößen

Basiseinheit:

- Stoffmenge n: 1 Mol (mol)

> Die Basiseinheit 1 Mol ist die Stoffmenge eines Systems bestimmter Zusammensetzung, das aus ebenso vielen Teilchen besteht wie Atome in $\frac{12}{1000}$ Kilogramm des Nuklides C^{12} enthalten sind.

Diese Zahl wollen wir als Avogadro-Zahl N_A bezeichnen. Es gilt:

$$\boxed{N_A = 6,023 \cdot 10^{23} \, \frac{1}{\text{kg}}}$$

Somit können wir die Teilchenzahl N schreiben als:

$\boxed{N = n \cdot N_A}$ mit $n \triangleq$ Molzahl, $[n] = \text{mol}$

✳ Temperatur T: 1 Kelvin (K)

> Die Basiseinheit 1 Kelvin ist der 273,16te Teil der thermodynamischen Temperatur des Tripelpunktes des Wassers.

1 Kelvin in °C umgerechnet werden:

$T(\text{in K}) = T(\text{in °C}) + 273,15$

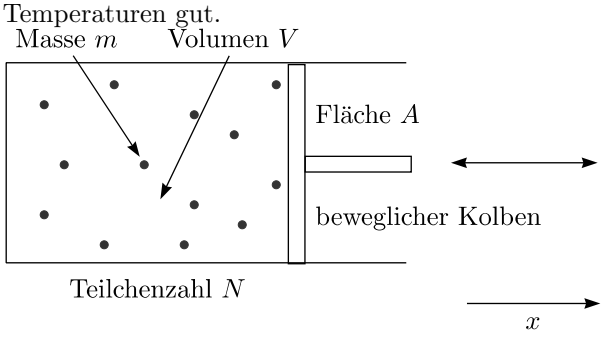
$T(\text{in °C}) = T(\text{in K}) - 273,15$

Wir messen die Temperatur durch Ausdehnung von Gasen oder Flüssigkeiten, mit Thermoelementen oder temperaturabhängigen Widerständen.

8.3 Das ideale Gas

Definition:

Ein ideales Gas ist eine große Anzahl von Teilchen (z.B. Atome oder Moleküle), deren gegenseitige Wechselwirkung klein aber nicht verschwindend ist. Normale Gase erfüllen diese Bedingung bei nicht zu niedrigen Temperaturen gut.



Ziel:

Verknüpfung der Zustandsgrößen p, V, T, N

Zur Erinnerung:

$$p = \frac{F_n}{A}$$

$F_n \triangleq$ Normalkomponente der Kraft

Betrachten wir ein Zeitintervall $\mathrm{d}t$:
Wie groß ist der Kraftstoß $F_x \, \mathrm{d}t$? Haben die Teilchen zum Beispiel den Impuls $p_{i,x}$, gilt:

$$F_{i,x} \, \mathrm{d}t = 2p_{i,x} \, \mathrm{d}N_1$$

Es heißt hier $2p_{i,x}$ aufgrund der Impulserhaltung, da das Teilchen die Richtung ändert. $\mathrm{d}N_1$ ist die Zahl der Teilchen, die im Zeitintervall $\mathrm{d}t$ mit dem Stempel stoßen, also $\mathrm{d}x$ vom Stempel entfernt sind (Dreisatz).

$$\frac{\mathrm{d}N_1}{N_1} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}V}{V} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}x \cdot A}{V} = \frac{1}{2}\frac{v_{i,x} \cdot \mathrm{d}t \cdot A}{V}$$

Der Faktor $\frac{1}{2}$ kommt daher, weil sich die Hälfte der Teilchen nach rechts und die andere nach links bewegt.

$$F_{i,x}\,\mathrm{d}t = \frac{A}{V} N_i \frac{p_{i,x}^2}{m}\,\mathrm{d}t$$

Es resultiert der folgende Druck:

$$p_i = \frac{F_{i,x}}{A}$$

Daraus folgt nun $p_{i,x}$:

$$p_{i,x} = \frac{1}{V} N_i \frac{p_{i,x}^2}{m}$$

Summation über alle Impuls $p_{i,x}$ ergibt nun:

$$p = \underbrace{\frac{1}{V} \sum_i N_i \overbrace{\frac{p_{i,x}^2}{m}}^{\substack{\frac{1}{3} \\ \text{(kinetische} \\ \text{Gastheorie)}}}}_{\substack{\text{ähnlich der} \\ \text{kinetischen Energie}}}$$

Beziehen wir die klassische Mechanik mit ein, so folgt für die kinetische Energie:

$$E_{kin} = \sum_i N_i \left(\frac{1}{2}\frac{p_{i,x}^2}{m} + \frac{1}{2}\frac{p_{i,y}^2}{m} + \frac{1}{2}\frac{p_{i,z}^2}{m} \right)$$

Aufgrund der Symmetrieeigenschaften ist keine Richtung von x, y und z ausgezeichnet. Daraus folgt das sogenannte Gleichverteilungsgesetz.

$$\Rightarrow E_{kin} = \frac{3}{2} \sum_i N_i \frac{p_{i,x}^2}{m}$$

$$\Rightarrow p \cdot V = \frac{2}{3} E_{kin}$$

Oder auch mit der mittleren kinetischen Energie ε_{kin} geschrieben:

$$\varepsilon_{kin} = \frac{E_{kin}}{N}$$

Daraus folgt:

$$\boxed{p \cdot V = \frac{2}{3} N E_{kin}}$$

Das Produkt $p \cdot V$ hängt somit nicht von der Verteilungsfunktion ab.

8.4 Das ideale Gasgesetz

Empirisches:

Man kennt schon lange den Zusammenhang:

$$\boxed{p \cdot V = N \cdot k_B \cdot T\,(T \geq 0)}$$

$k_B \stackrel{\wedge}{=}$ Boltzmann-Konstante

Die Boltzmann-Konstante hat folgenden Wert:

$$\boxed{k_B = 1,3805 \cdot 10^{-23}\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}}$$

8.4.1 Die Boltzmann-Konstante

Jeder Freiheitsgrad hat im Mittel die Energie $\frac{1}{2}k_BT$.

Mit $N = n \cdot N_A$ folgt:

$$p \cdot V = n \cdot \underbrace{N_A \cdot k_B}_{=:R} \cdot T$$

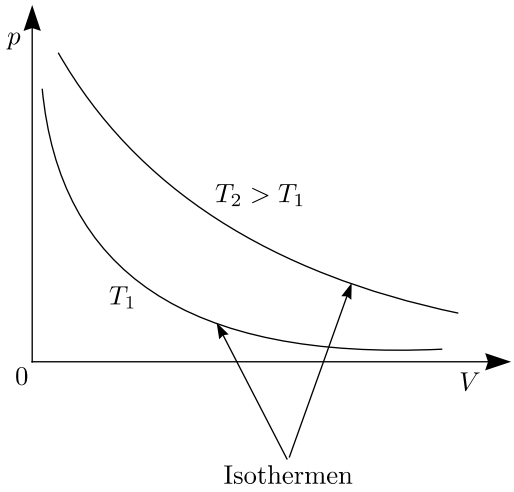
R ist hierbei die ideale Gaskonstante:

$$R = 8,31415 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K} \cdot \mathrm{mol}}$$

Daraus folgt das ideale Gasgesetz:

$$p \cdot V = nRT$$

Graphisch:



1. Die Teilaussage $p \cdot V$=const. (T=const.) bezeichnet man als Boyle-Mariottsches-Gesetz. Bei konstanter Temperatur ist $p \sim \frac{1}{V}$. Man bezeichnet die Linien bei T=const. auch als Isothermen.
2. Die Teilaussage $p \sim T$ (V=const.) heißt Gay-Lussac-Gesetz (Isochoren).
3. Die Teilaussage $V \sim T$ (p=const.) nennt man Gesetz von Charles (Isobaren).

Für die innere Energie U definieren wir:

$$U := E_{kin} + E_{pot}$$

E_{pot} ist 0 beim idealen Gas. Daraus folgt:

$$U = E_{kin} = N \cdot \frac{2}{3}k_BT = \frac{3}{2}n \cdot \underbrace{N_A \cdot k_B}_{R} \cdot T$$

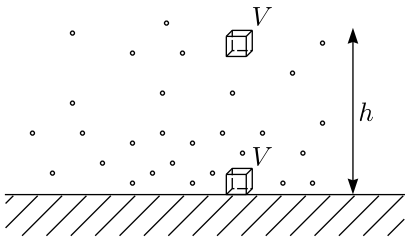
$$U = \frac{3}{2}nRT$$

Dies ist die innere Energie eines idealen Gases. Wir postulieren den Boltzmann-Faktor:

$$\frac{N_2}{N_1} = \mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{k_B T}}$$

Er ist eine wichtige Grundkonstante der statistischen Physik.

Barometrische Höhenformel (Physik I):



$N_1 \stackrel{\wedge}{=}$ Teilchenzahl im Volumen V auf der Höhe $h = 0$

$N_2 \stackrel{\wedge}{=}$ Teilchenzahl im Volumen V auf der Höhe h.

Daraus folgt nun o.B.d.A.:

$E_1 = 0, E_2 = m \cdot g \cdot h$

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{N(h)}{N(0)} = \mathrm{e}^{-\frac{mgh}{k_B T}}$$

Mit $p \cdot V = nRT = Nk_BT$ folgt:

$p \sim N$ (falls $T = \text{const.}$)

$$\frac{p(h)}{p(0)} = \mathrm{e}^{-\frac{mgh}{k_B T}}$$

Mit der Massendichte ϱ und dem idealen Gasgesetz $p \cdot V = nRT$ folgt nun:

$$\varrho(0) = \frac{N(0) \cdot m}{V} = m \cdot \frac{p(0)}{k_B T}$$

$$\Rightarrow \frac{m}{k_B} = \frac{\varrho(0)T}{p(0)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{p(h)}{p(0)} = \mathrm{e}^{-\frac{\varrho(0) \cdot g \cdot h}{p(0)}}}$$

Wir haben nun die barometrische Höhenformel mittels des Boltzmann-Faktors hergeleitet.

Brownsche Bewegung:

Die Beziehung $E_{kin} = \frac{3}{2} k_B T$ gilt für Teilchen mit beliebiger Masse m. Nun gilt bekanntlich:

$$\frac{m}{2} v^2 = \frac{3}{2} k_B T$$

Daraus erhalten wir dann die mittlere Geschwindigkeit der Gasteilchen zu:

$$v = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$$

Beispiel:

Ein $1\,\mu$m großes Teilchen mit $m = 10^{-15}\,$kg hat bei $T = 300\,$K folgende mittlere Geschwindigkeit:

$$v \approx 3\,\frac{\text{mm}}{\text{s}}$$

Man kann dieses Teilchen unter dem Mikroskop sehen. Es handelt sich um das Phänomen der Brownschen Molekularbewegung.

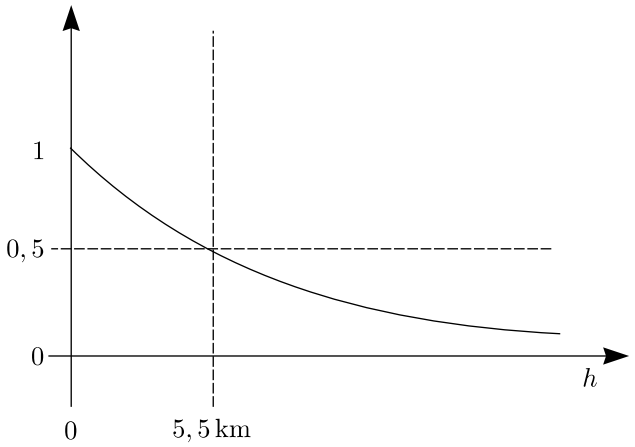
8.5 Boltzmann-Verteilung und Maxwell-Verteilung

Auf die Verteilungsfunktion wurde im Kapitel 2.1 nicht eingegangen. Dies wollen wir jetzt nachholen. Es gilt ja:

$$E_{kin} = \frac{3}{2} k_B T$$

Wir fragen uns nun, wie die Geschwindigkeiten – bzw. die kinetischen Energien – um diesen Mittelwert verteilt sind.

Graphisch:



Beispiel:

Vernachlässigen der potentiellen Energie im Schwerefeld der Erde ergibt:

$N_1 \triangleq$ Teilchenzahl mit Geschwindigkeitsvektor $\vec{o}$

$N_2 \triangleq$ Teilchenzahl mit Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}$

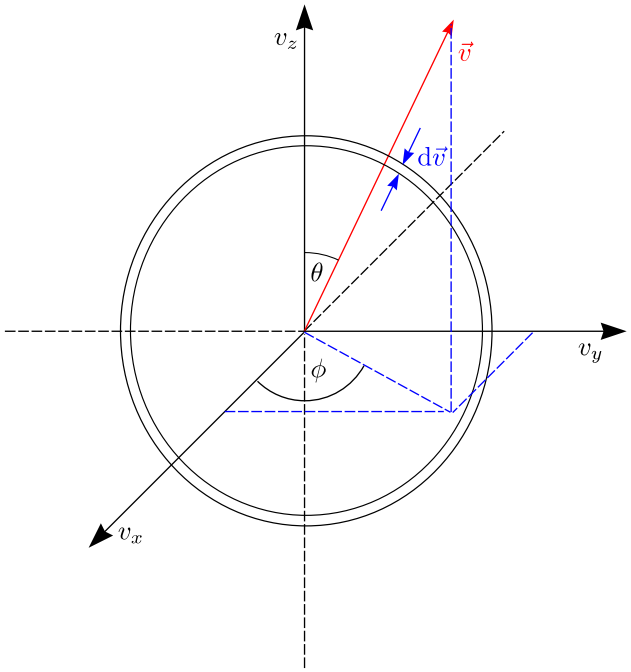
Wir bilden das Verhältnis:

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{N(\vec{v})}{N(\vec{o})} = \mathrm{e}^{-\frac{\frac{m}{2}\vec{v}^2}{k_B T}}$$

Beachte: $|\vec{v}| = v$

Definition:

$f(v)\,\mathrm{d}v$ ist die Wahrscheinlichkeit, ein Teilchen mit einer Geschwindigkeit im Intervall v bis $v + \mathrm{d}v$ zu finden. Wieviele Geschwindigkeitsvektoren gibt es in diesem Intervall $[v, v + \mathrm{d}v]$?



Die Zahl ist proportional zum Volumen der Kugelschale:

$V = 4\pi v^2 \cdot \mathrm{d}v$

$\Rightarrow f(v)\,\mathrm{d}v = \mathrm{const.} 4\pi v^2\,\mathrm{d}v \cdot \mathrm{e}^{-\frac{\frac{m}{2}v^2}{k_B T}}$

Durch Normierung erhält man den Vorfaktor:

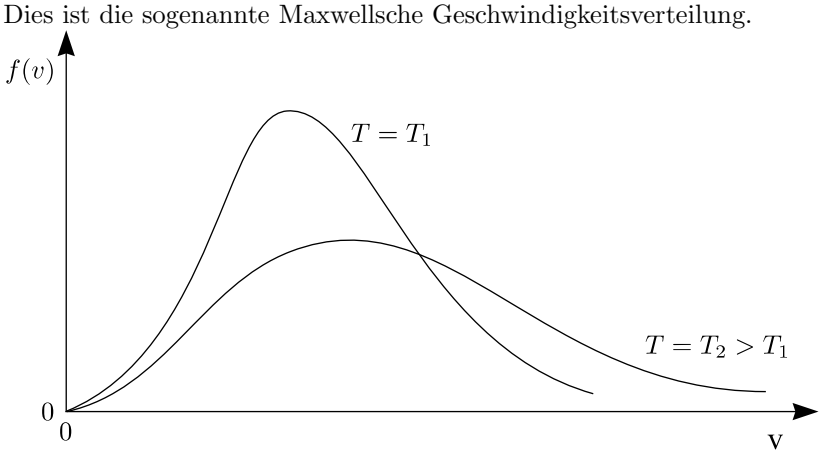
$$\int_0^\infty f(v)\,\mathrm{d}v \stackrel{!}{=} 1$$

Daraus folgt:

$$\boxed{f(v) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{3}{2}} 4\pi v^2 \mathrm{e}^{-\frac{\frac{m}{2}v^2}{k_B T}}}$$

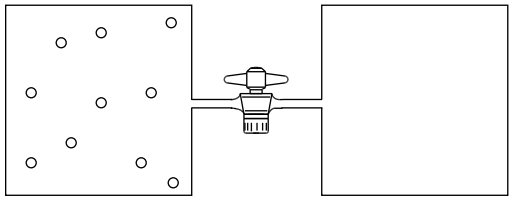
$[f] = sm$

Dies ist die sogenannte Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung.



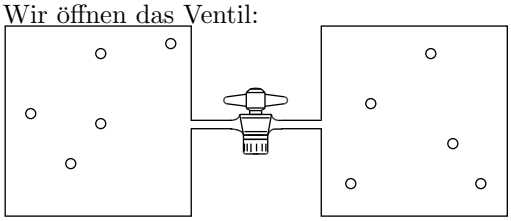
8.6 Entropie

Wir machen ein Gedankenexperiment:



N Teilchen

Wir öffnen das Ventil:



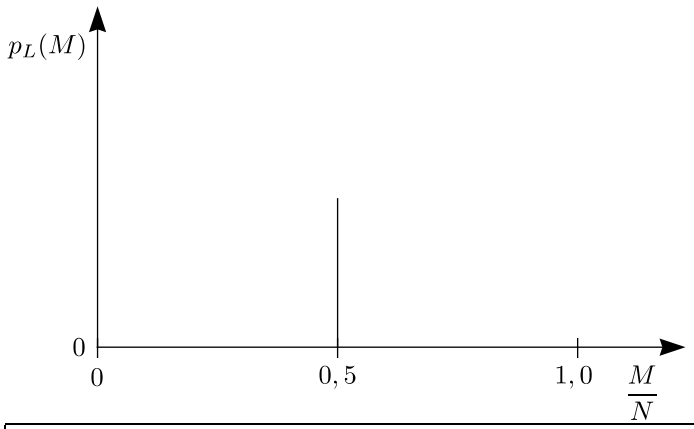
N Teilchen

Wir definieren die Wahrscheinlichkeit $p_L(M)$ M Teilchen aus N Teilchen links zu finden. Wir suchen also die Anzahl der Möglichkeiten, im linken Teil M Teilchen aus N auszuwählen (Kombinatorik). Diese berechnet sich nach folgender Formel:

$$\binom{N}{M} = \frac{N!}{M!(N-M)!}$$

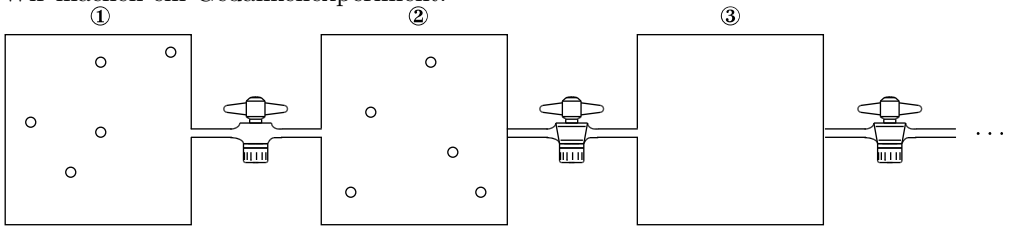
Die Anzahl der Möglichkeiten, N Teilchen auf links/rechts zu verteilen ist 2^N. Dann folgt für die Wahrscheinlichkeit:

$$p_L(M) = \frac{\binom{N}{M}}{2^N} = p_R(M)$$



Für große Teilchenzahlen N ist die Gleichverteilung sehr wahrscheinlich, selbst kleine Abweichungen sind sehr unwahrscheinlich.

Wir machen ein Gedankenexperiment:



Was ist das Maß für die Gleichverteilung? N Teilchen sind auf m Gefäße verteilt.

Definition:

$$S := -\lambda N \sum_{n=1}^{m} p_n \ln p_n$$

$\lambda \triangleq$ Beliebige Konstante

$p_n \triangleq$ Wahrscheinlichkeit, ein Teilchen im Gefäß n zu finden

Beispiel (Gedankenexperiment):

Die Entropie eines Teilchens, das auf m Gefäße verteilt sein kann, lautet:

$$S = -\lambda N \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{m} \ln\left(\frac{1}{m}\right) = -\lambda N \ln\left(\frac{1}{m}\right) = \lambda N \ln(m)$$

Mit der speziellen Wahl $\lambda = \dfrac{1}{\ln(2)}$ und $\ln(m) = \ln(2)\log_2(m)$ erhält man somit:

$$\boxed{S_I = N \cdot \log_2(m)}$$

$[S_I] = 1\,\text{bit}$

Es handelt sich um die Information (im Sinne von Shannon). In der Thermodynamik wählt man:

$$\boxed{\lambda = k_B}$$

Daraus folgt:

$$\boxed{S = N \cdot k_B \cdot \ln(m)}$$

$$[S] = \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

Entropie:

Öffnet man das Ventil zu einem weiteren Gefäß, steigt die Entropie an, es gilt $\Delta S \geq 0$, weil Abweichungen von der Gleichverteilung sehr unwahrscheinlich sind. Der Prozeß ist spontan nicht umkehrbar. Die Entropie ist eine extensive Größe: Es gilt die Umrechnung:

$$\boxed{S = k_B \ln(2) S_I}$$

$$[S] = \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

$[S_I] = 1\,\text{bit}$

Beispiel:

$S_I = 10^{23}\,\text{bit} =: 1$ „Makrobit“

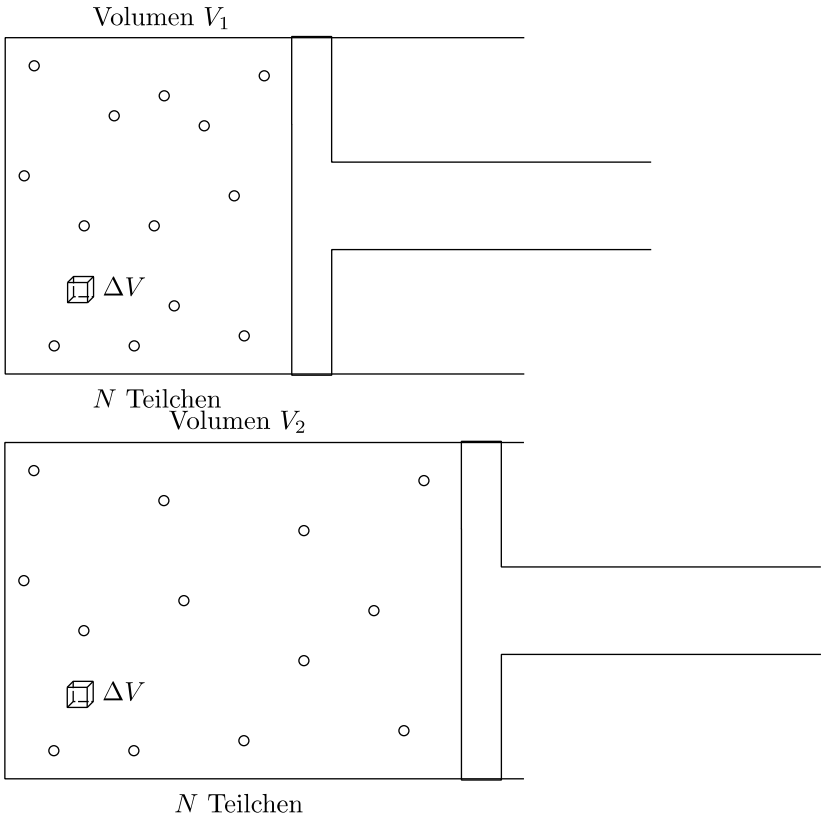
Daraus folgt für die Entropie:

$$S = 0,96\,\frac{\text{J}}{\text{K}} \approx 1\,\frac{\text{J}}{\text{K}}$$

Diese Zahl kann man sich sehr gut merken!

$$\boxed{10^{23}\,\text{bit} =: 1\,\text{Makrobit} \triangleq 1\,\frac{\text{J}}{\text{K}}}$$

Beispiel (Entropie):



Mit $S = -k_B N \sum_n p_n \ln p_n$ folgt:

$$S = -k_B N \sum_n \frac{\Delta V}{V} \ln\left(\frac{\Delta V}{V}\right) = -k_B N \ln\left(\frac{\Delta V}{V}\right) = k_B N \left(\ln(V) - \ln(\Delta V)\right)$$

Die absolute Angabe von S ist nicht eindeutig, weil sie abhängig von der Wahl von ΔV ist. Bei der Angabe von Entropiedifferenzen fällt ΔV heraus:

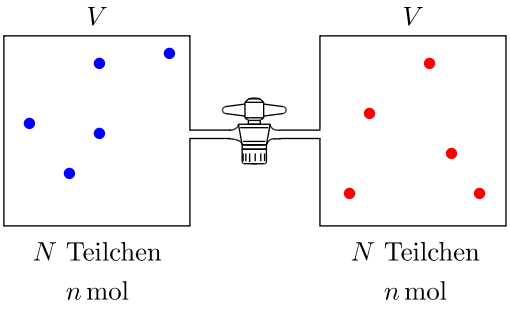
$$\Delta S = S_2 - S_1 = k_B N \left(\ln(V_2) - \ln(V_1)\right) = k_B N \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = \underbrace{k_B N_A}_{R} \cdot n \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = nR \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

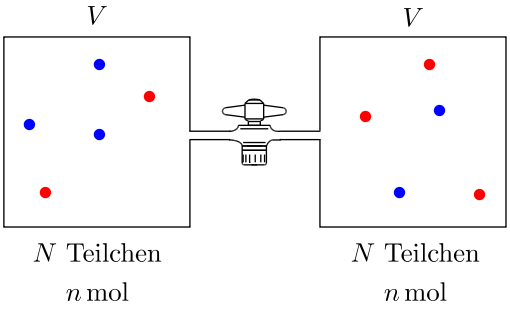
$$\boxed{\Delta S = S_2 - S_1 = nR \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)}$$

Für die Informationsentropie folgt:

$$\Delta S_I = N \frac{1}{\ln(2)} \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

Beispiel:Mischungsentropie





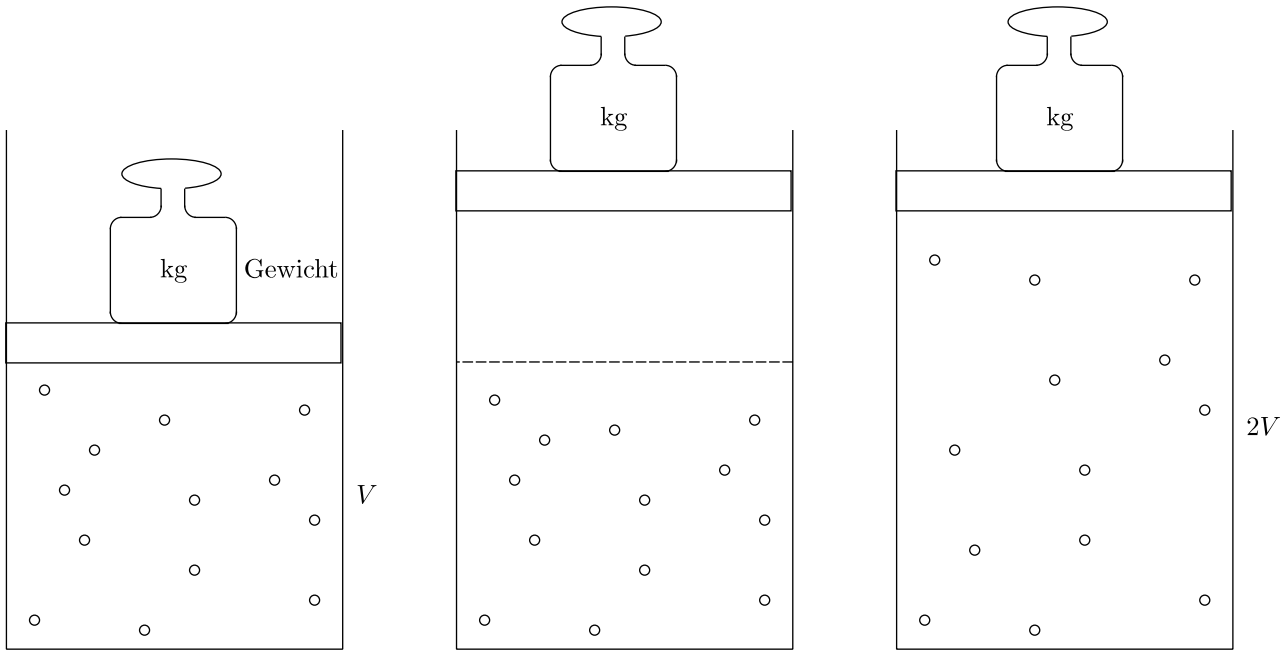
$\Delta S = S_2 - S_1 = 2nR\ln(2) \triangleq$ Mischungsentropie

Beziehungsweise gilt:

$\Delta S_I = 2N$ bit

Die Mischungsentropie taucht natürlich nur dann auf, wenn man verschiedene Gase betrachtet.

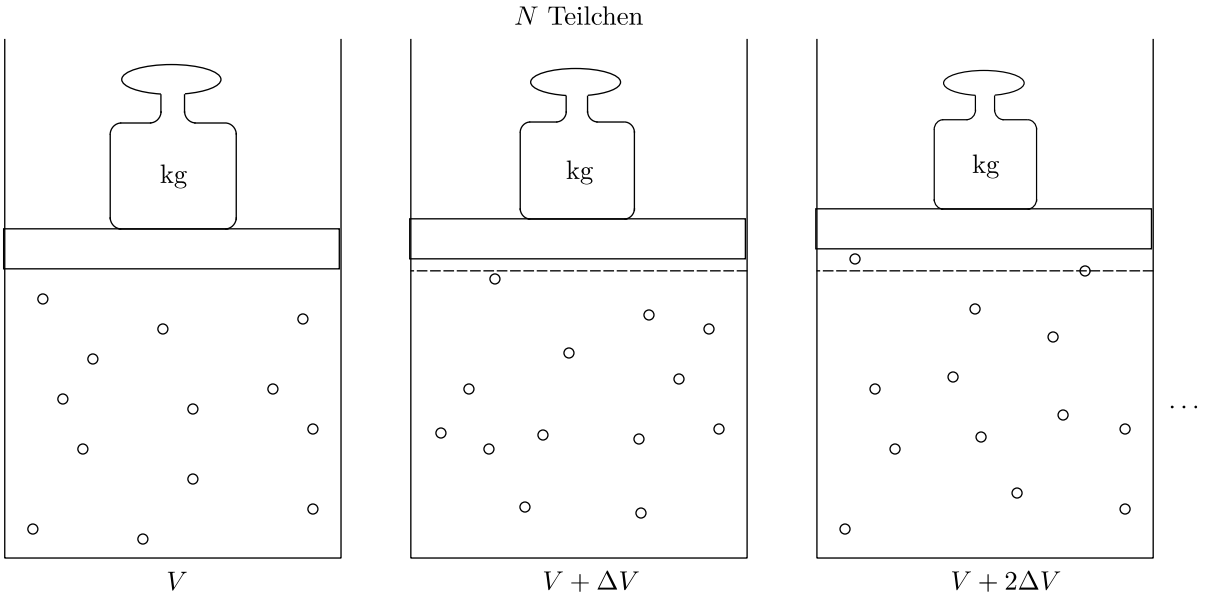
8.7 Reversible und irreversible Prozesse



Dieser Vorgang entspricht einem schnellen Wegnehmen des Gewichtes. Dabei wird keine mechanische Arbeit geleistet. Die Wahrscheinlichkeit $p_V(N)$, plötzlich wieder alle N Teilchen im Volumen V zu finden, ist:

$$p_V(N) = \left(\frac{1}{2}\right)^N \xrightarrow{N \mapsto \infty} 0$$

Die Umkehrung des Prozesses ist somit beliebig unwahrscheinlich. Man nennt solche Prozesse irreversibel.



Bei diesem Vorgang wird nun mechanische Arbeit geleistet. Die Wahrscheinlichkeit $p_V(N)$, plötzlich wieder alle N Teilchen im Volumen V zu finden, berechnet sich nun folgendermaßen:

$$p_V(N) = \left(\frac{V}{V+\Delta V}\right)^N = \left(\frac{1}{1+\frac{\Delta V}{V}}\right)^N$$

Nun folgt mit der Taylorreihenentwicklung:

$$\frac{1}{1+x} \approx 1 - x \text{ für } x \ll 1$$

$$p_V(N) \approx \left(1 - \frac{\Delta V}{V}\right)^N = \mathrm{e}^{\ln\left(1-\frac{\Delta V}{V}\right)^N} = \mathrm{e}^{N\cdot\ln\left(1-\frac{\Delta V}{V}\right)}$$

Mit der Taylorreihe der Logarithmusfunktion ergibt sich:

$$\ln(1-x) \approx -x \text{ für } x \ll 1$$

Oben eingesetzt folgt:

$$p_V(N) \approx \mathrm{e}^{-N\frac{\Delta V}{V}} \xrightarrow[N=\text{const.}]{\Delta V \mapsto 0} 1$$

Es ist somit sehr wahrscheinlich, daß sich der Prozeß von alleine umkehrt, er ist reversibel.

Zahlenbeispiel:

$$N = N_A = 6 \cdot 10^{23}; \frac{\Delta V}{V} = 10^{-25}$$

Dann folgt für die Wahrscheinlichkeit, wieder alle Teilchen im ursprünglichen Volumen V zu finden:

$$p_V(N) = \mathrm{e}^{-0,06} \approx 0,94 = 94\%$$

Kapitel 9

Die Hauptsätze der Thermodynamik

9.1 Der 1.Hauptsatz

Es gibt eine Zustandsgröße, innere Energie U genannt, deren Größe nur vom Zustand des Systems, nicht aber vom Weg dorthin, abhängt. Es gilt folgender Zusammenhang:

$$\boxed{\mathrm{d}U = \delta W + \delta Q}$$

dU ist die Änderung der inneren Energie, δW die mechanische Arbeit und δQ die Wärme. Weiterhin gilt:

$$\boxed{\delta W_{irr} > \delta W_{rev}}$$

Folgerung:

Da $\mathrm{d}U_{irr} = \mathrm{d}U_{rev}$ ergibt sich:

$\delta Q_{irr} < \delta Q_{rev}$

Spezifischere Aussagen macht die Thermodynamik für irreversible Prozesse nicht.

9.2 Der 2.Hauptsatz

Es gibt eine Zustandsgröße, Entropie S genannt, deren Größe nur vom Zustand des Systems, nicht aber vom Weg dorthin abhängt. Von allen möglichen thermodynamischen Zuständen, die mit den Randbedingungen kompatibel sind, wird derjenige Zustand angenommen, für den die Entropie maximal wird. Es gilt (natürlich nur für reversible Prozesse):

$$\boxed{\mathrm{d}U = -p\,\mathrm{d}V + T\,\mathrm{d}S}$$

p, V beziehungsweise T, S sind zueinander konjugierte Größen, wobei die eine intensiv und die andere extensiv ist.

9.3 Der 3.Hauptsatz

Bei $T = 0$ hat die Entropie S den Wert 0.

Folgerungen:

Wir notieren uns folgende Definition:

Für ein abgeschlossenes System gilt: $\delta Q = 0$.

Für reversible Prozesse gilt $\Delta Q_{rev} = 0 = T\,\mathrm{d}S$ und daraus folgt $\mathrm{d}S = 0$. Für irreversible Prozesse gilt $\Delta Q_{irr} = 0 < \delta Q_{rev} = T\,\mathrm{d}S$. Somit ergibt sich hier $\mathrm{d}S > 0$.

Im abgeschlossenen System ist die Summe aller Entropieänderungen bei reversiblen Prozessen gleich Null, bei irreversiblen Prozessen größer als Null.

Die innere Energie U ist eine Funktion von V und S, das heißt $U = U(V, S)$.

Totale Differentiale:

Wir haben eine Funktion f zweier Veränderlicher:

$f = f(x, y)$

Die Variablen x und y hängen aber noch von t ab:

$x = x(t)$, $y = y(t)$

Daraus folgt für die Ableitung mittels der Kettenregel:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

Das Differential $\mathrm{d}t$ kann man jetzt noch herauskürzen, woraus folgt:

$$\mathrm{d}f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\,\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\,\mathrm{d}y$$

Jetzt wieder zurück zur Physik:

$$\mathrm{d}U = -p\,\mathrm{d}V + T\,\mathrm{d}S = \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)\,\mathrm{d}V + \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)\,\mathrm{d}S$$

Durch Koeffizientenvergleich folgt:

$$\boxed{-p = \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)}$$

$$\boxed{T = \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)}$$

Definition:

$$\boxed{\kappa := \frac{C_p}{C_V}; [\kappa] = 1}$$

Dies ist der sogenannte Adiabatenexponent. Für ein ideales einatomiges Gas gilt:

$$\kappa = \frac{5}{3}$$

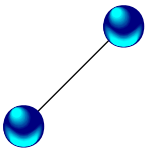
Hat ein Molekül f Freiheitsgrade, so gilt:

$$C_V = \frac{f}{2}nR$$

$$C_p = \left(\frac{f}{2} + 1\right)nR$$

$$\boxed{\kappa = \frac{f+2}{f}}$$

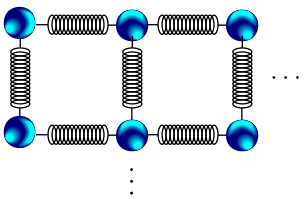
Wir betrachten beispielsweise ein starres hantelförmiges Molekül:



Dieses Molekül hat drei Translationsfreiheitsgrade und 2 Rotationsfreiheitsgrade, also ist $f = 5$. Daraus folgt:

$$\kappa = \frac{7}{5}$$

Beispiel:Festkörper



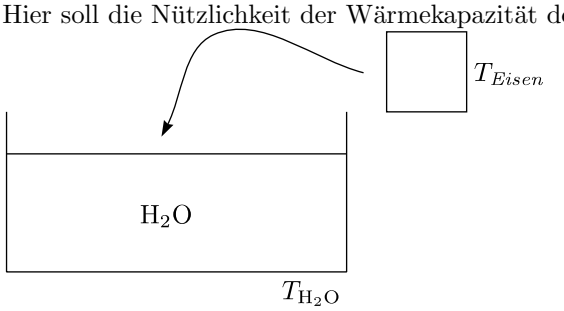
Jedes Atom hat effektiv sechs Freiheitsgrade ($f = 6$). Es sind nämlich drei Freiheitsgrade der kinetischen Energie und drei der potentiellen Energie. Dann ergibt sich:

$$\boxed{C_V = 3nR}$$

Das ist das Gesetz von Dulong-Petit. Bei hohen Temperaturen gilt dieses Gesetz sehr gut, bei tiefen Temperaturen jedoch gibt es Abweichungen, weil es sich um kein klassisches Gas handelt.

Beispiel:

Hier soll die Nützlichkeit der Wärmekapazität demonstriert werden. Wir machen ein Gedankenexperiment:



Welche gemeinsame Endtemperatur stellt sich dann im Gleichgewicht ein? Die gesamte Wärmeenergie ergibt sich als Summe der Wärme des Eisenklotzes und des Wassers. Diese Energie bleibt während des Vorganges konstant:

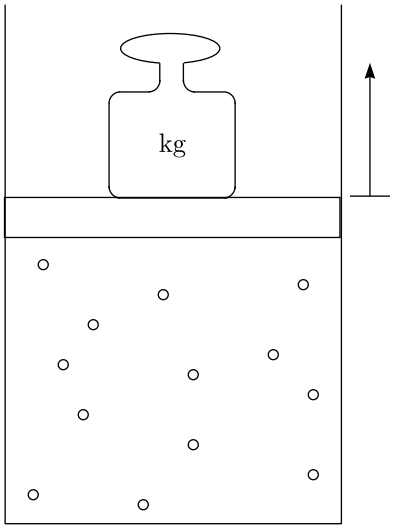
$$Q_{ges} = Q_{Eisen} + Q_{H_2O} = \text{const.} = C_{Eisen} \cdot T_{Eisen} + C_{H_2O} \cdot T_{H_2O} \stackrel{!}{=} (C_{\text{Eisen}} + C_{H_2O}) \cdot T_{end}$$

Somit ergibt sich die Endtemperatur:

$$\boxed{T_{end} = \frac{C_{Eisen} \cdot T_{Eisen} + C_{H_2O} \cdot T_{H_2O}}{C_{Eisen} + C_{H_2O}}}$$

Sind die Wärmekapazitäten nicht temperaturunabhängig, so muß man integrieren.

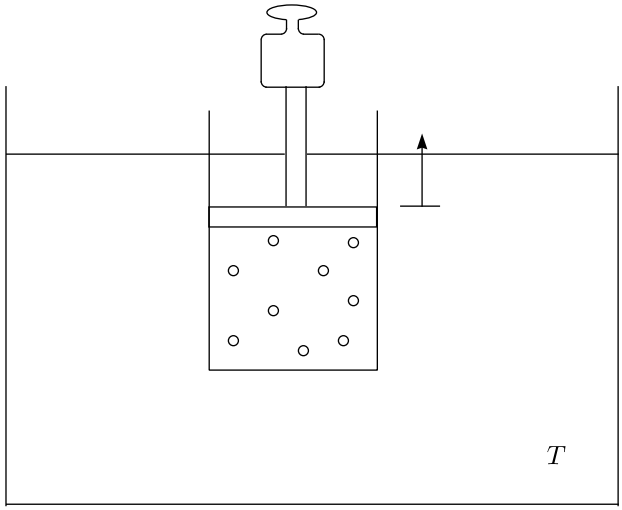
9.4 Expansion idealer Gase



$Q = \text{const.}$

③, ④

oder



$T = \text{const.}$

①, ②

Wir betrachten vier Grenzfälle:

	Reversibel	Vollständig Irreversibel
Isotherm	①	②
Adiabatisch	④	③

① Reversible, isotherme Expansion idealer Gase

$\delta W = -p\,\mathrm{d}V$

Dies folgt nach dem 2.Hautpsatz. Durch Integration folgt:

$$\Delta W = -\int_{V_1}^{V_2} p\,\mathrm{d}V$$

Mit der Zustandsgleichung des idealen Gases $pV = nRT$ ergibt sich:

$$\Delta W = -\int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT}{V}\,\mathrm{d}V$$

$$\boxed{\Delta W = -nRT \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)}$$

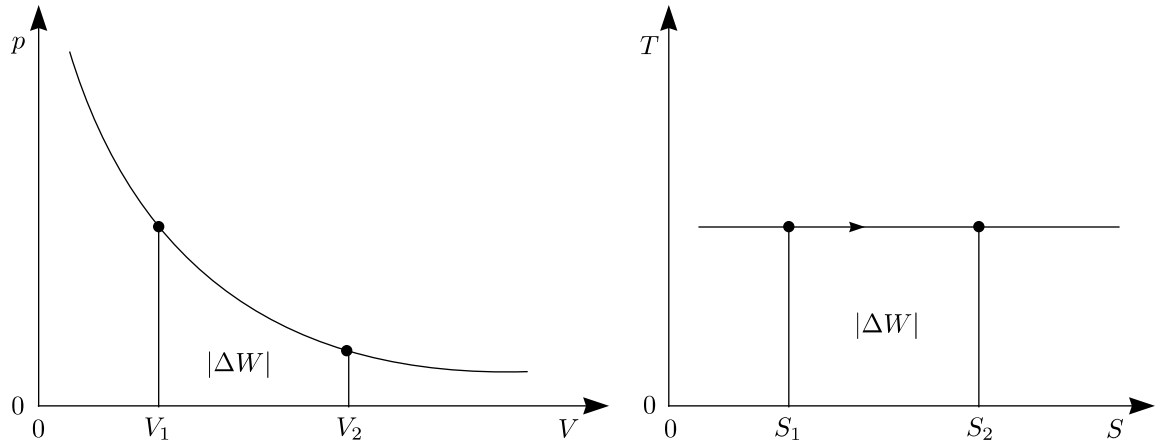
Für $V_2 > V_1$, d.h. für Expansion des Gases, gilt $\Delta W < 0$, das Gas leistet also Arbeit.

Merkregel für Vorzeichen:

„Das Gas ist egoistisch, empfindet es also als negativ, wenn es Arbeit leisten muß!“

Diese Energie kommt aus dem Wärmebad, das dafür sorgt, daß die Temperatur des Gases konstant ist. Das Gas hat also nur die Rolle eines Vermittlers. Seine innere Energie ist $\frac{3}{2}nRT = \text{const.}$ bleibt unverändert, nur seine Entropie steigt an. Das ist grundverschieden von der Expansion einer Hookeschen Feder, bei der eben die Energie, die das Gewicht gewonnen hat im Schwerefeld der Erde, aus der Feder kommt.

Veranschaulichung im pV- bzw. TS-Diagramm:



② Vollständig reversible isotherme Expansion idealer Gase

Wir nehmen an, daß das Gewicht beispielsweise plötzlich weggerissen wird. Dann ist die Kraft gleich 0 und damit auch die zu leistende Arbeit.

$$\Delta W_{irrev} = 0 > \underbrace{\Delta W_{rev}}_{\text{siehe}}$$

Wir vom ersten Hauptsatz zu erwarten war. Mit $\mathrm{d}U = \delta W + \delta Q$ folgt:

$$\mathrm{d}U = \underbrace{\delta W}_{=0} + \underbrace{\Delta Q}_{\Rightarrow 0} = \underbrace{\frac{3}{2} nR\,\mathrm{d}T}_{=0}$$

$$\Rightarrow \Delta Q = 0$$

③ Vollständig irreversible adiabatische Expansion idealer Gase

Siehe ②.

$$\Delta W = 0$$

Mit $\mathrm{d}U = \frac{3}{2} nRT = \delta W + \Delta Q$ folgt:

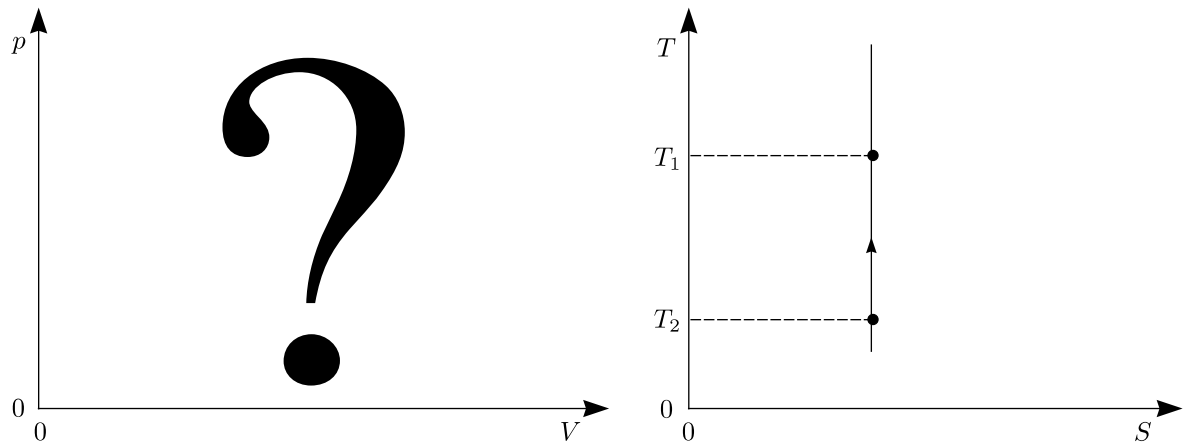
$$\mathrm{d}U = \underbrace{\frac{3}{2} nR\,\mathrm{d}T}_{\Rightarrow 0} = \underbrace{\delta W}_{0} + \underbrace{\Delta Q}_{0}$$

$$\Rightarrow \Delta T = 0$$

④ Reversible adiabatische (isentropische) Expansion idealer Gase

Wir halten zuvor noch eine Kleinigkeit fest:

$\Delta Q = 0 = T\,\mathrm{d}S \Rightarrow \mathrm{d}S = 0$ (=:isentropisch)



$$\mathrm{d}U = -p\,\mathrm{d}V + \underbrace{T\,\mathrm{d}S}_{=0} = \frac{3}{2} nR\,\mathrm{d}T$$

Mit der Zustandsgleichung des idealen Gases $pV = nRT$ folgt:

$$\frac{\mathrm{d}T}{T} = -\frac{2}{3}\frac{\mathrm{d}V}{V}$$

Durch Integration von Anfangs- bis Endzustand resultiert:

$$\ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = -\frac{2}{3}\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

Daraus ergibt sich nun durch exponieren:

$$\boxed{\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{-\frac{2}{3}}}$$

Hieraus folgt offensichtlich:

$$T_1 V_1^{\frac{2}{3}} = T_2 V_2^{\frac{2}{3}}$$

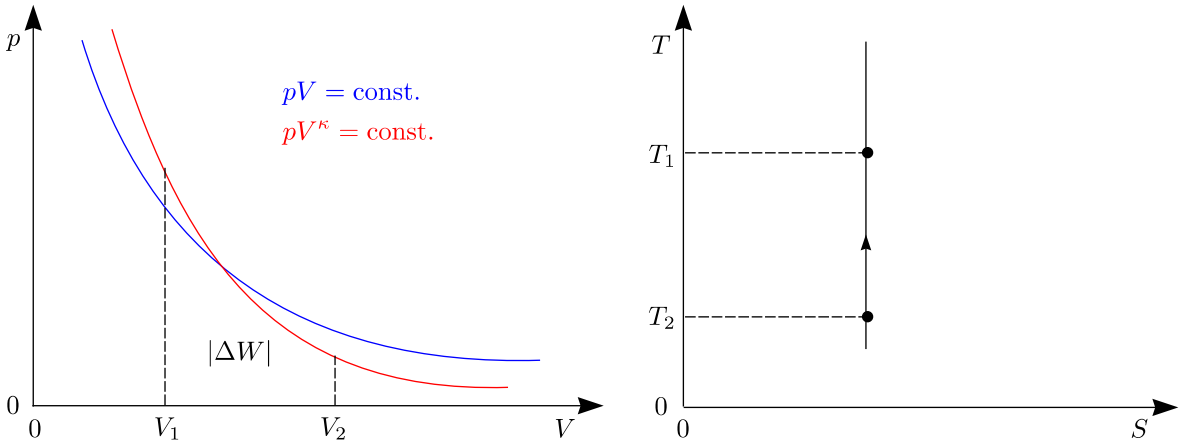
Der Exponent $\frac{2}{3}$ ist gleich $\kappa - 1$. Nun setzen wir nochmals die ideale Gasgleichung ein:

$$p_1 V_1^{\frac{5}{3}} = p_2 V_2^{\frac{5}{3}}$$

Wir fassen dies in folgender Form zusammen:

$$\boxed{p \cdot V^{\kappa} = \text{const.}}$$

Dies ist die sogenannte Adiabatengleichung des idealen Gases.



Arbeit ΔW:

$$\mathrm{d}U = \delta W + \underbrace{\delta Q}_{=0} = \frac{3}{2}nR\,\mathrm{d}T$$

Damit folgt die Arbeit:

$$\Delta W = \frac{3}{2}nR\,(T_2 - T_1)$$

In diesem Fall kommt die Energie, die der geleisteten Arbeit entspricht, es kühlt sich ab. Seine Entropie bleibt konstant.

9.4.1 Der Carnotsche Kreisprozeß

Technisch relevante Maschinen verwenden Kreisprozesse, d.h. nach einen Arbeitszyklus nimmt die Maschine wieder den gleichen thermodynamischen Zustand an. Interessant ist folgendes:

Wärme $\Leftrightarrow$ Mechanische Arbeit

Dieses Prinzip wird beispielsweise in Motoren, Wärmepumpen, Kühlschränken usw. benutzt. Der 1.Hautpsatz verbietet unmittelbar periodisch arbeitende Maschinen, die nichts tun, als mechanische Arbeit zu liefern. Wegen $\mathrm{d}U = 0$ nach einem Zyklus und mit $\delta Q = 0$ ergibt sich:

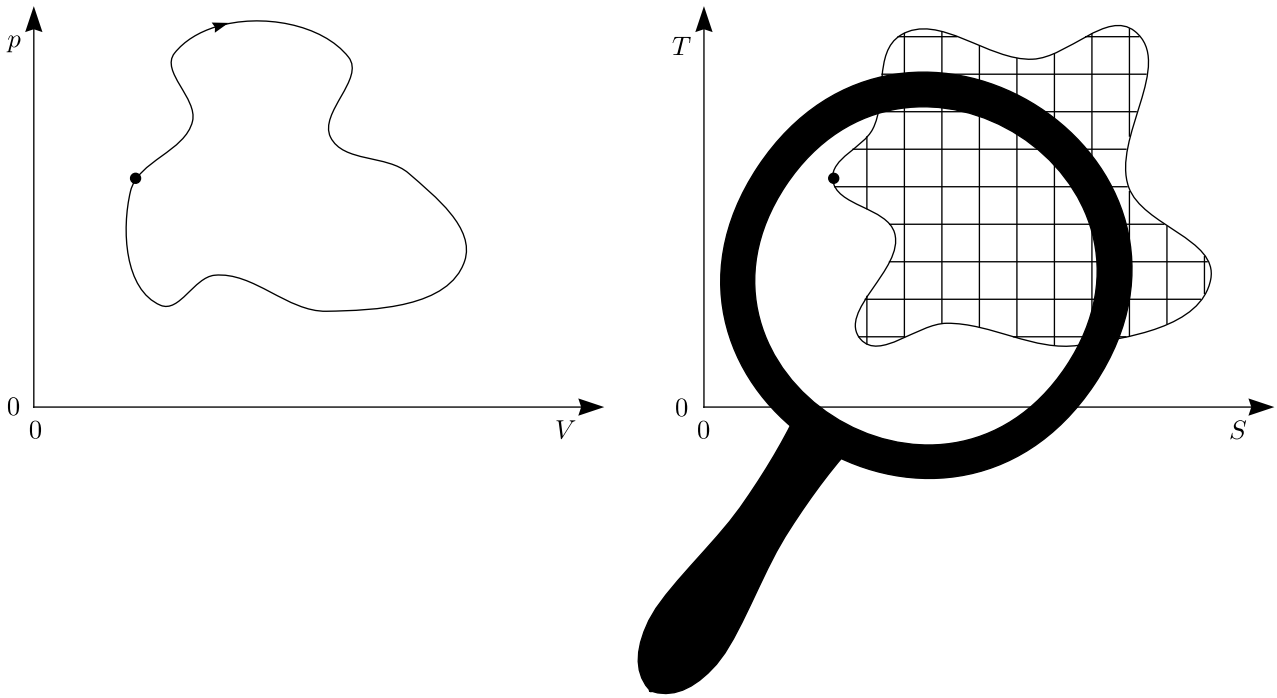
$\delta W = 0$

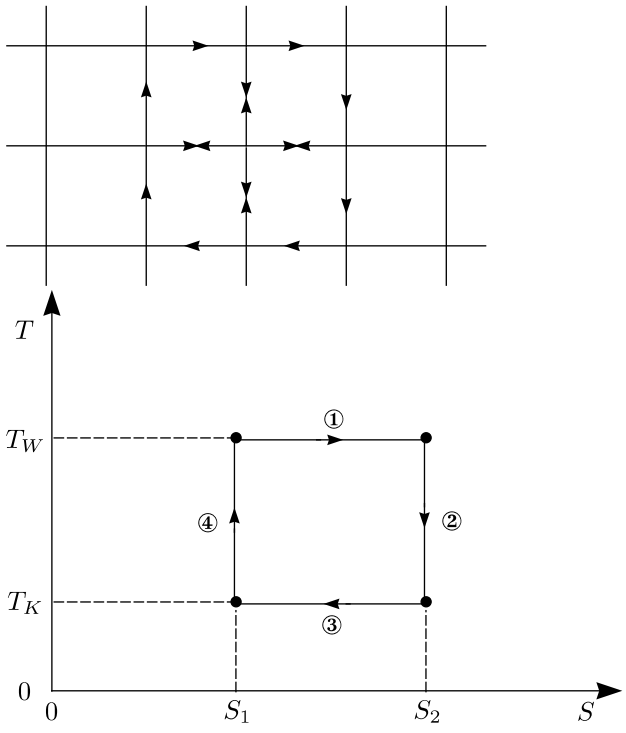
Eine solche Maschine nennt man Perpetuum Mobile 1.Art.

Es gibt kein Perpetuum Mobile 1.Art.

Der erste Hauptsatz alleine verbietet jedoch nicht ein Perpetuum Mobile 2.Art. Dies ist eine periodisch arbeitende Maschine, die nicht tut als ein Wärmebad abzukühlen und mechanische Arbeit zu leisten ($\mathrm{d}U = 0 = \Delta Q + \Delta W$).

Veranschaulichung eines beliebigen Kreisprozesses:





① Reversible, isotherme Expansion einer Arbeitssubstanz bei einer hohen Temperatur T_H

② Reversible, adiabatische Expansion einer Arbeitssubstanz auf eine niedrigere Temperatur T_K

③ Reversible, isotherme Kompression einer Arbeitssubstanz bei der niedrigen Temperatur T_K

④ Reversible, adiabatische Kompression einer Arbeitssubstanz auf die hohe Temperatur T_H

Die Arbeitssubstanz kann ein ideales Gas sein – muß aber kein ideales Gas sein. Für einen Zyklus gilt:

$\Delta U_O = \Delta Q_O + \Delta W_O = 0$

Damit ergibt sich, da ΔQ bei adiabatischen Prozessen 0 ist:

$\Delta W_O = -\Delta Q_0 = -\left(T_H(S_2 - S_1) - T_K(S_2 - S_1)\right) = -(T_H - T_K)(S_2 - S_1)$

Die im Schritt ① geleistete mechanische Arbeit kommt aus dem heißen Wärmebad mit Temperatur T_H. Wir konvertieren jedoch wieder mechanische Arbeit in Wärme in Schritt ③, das Wärmebad mit der Temperatur T_K wird aufgeheizt (außer, falls $T_K = 0$). Wärme wird damit im allgemeinen nicht vollständig in mechanische Arbeit umgewandelt. Wie groß ist der Wirkungsgrad?

Definition:

$$\boxed{\eta := \left|\frac{\Delta W_O}{\Delta Q_H}\right|, [\eta] = 1}$$

Dies ist der sogenannte Wirkungsgrad. Mit $\Delta Q_H = T_H\,(S_2 - S_1) > 0$ ergibt sich der Wirkungsgrad η des Carnotschen Kreisprozesses bei reversibler Prozeßführung:

$$\eta = \frac{(T_H - T_K)\,(S_2 - S_1)}{T_H\,(S_2 - S_1)}$$

$$\boxed{\eta = 1 - \frac{T_K}{T_H}}$$

Bei reversibler Prozeßführung gilt:

$\Delta Q_{irrev} < \Delta Q_{rev}$ (1.Hautpsatz)

Mit dem Wirkungsgrad η folgt:

$$\eta = \left|\frac{\Delta W_O}{\Delta Q_H}\right| = \left|\frac{\Delta Q_H + \Delta Q_K}{\Delta Q_H}\right| = \left|1 + \frac{\Delta Q_K}{\Delta Q_H}\right|$$

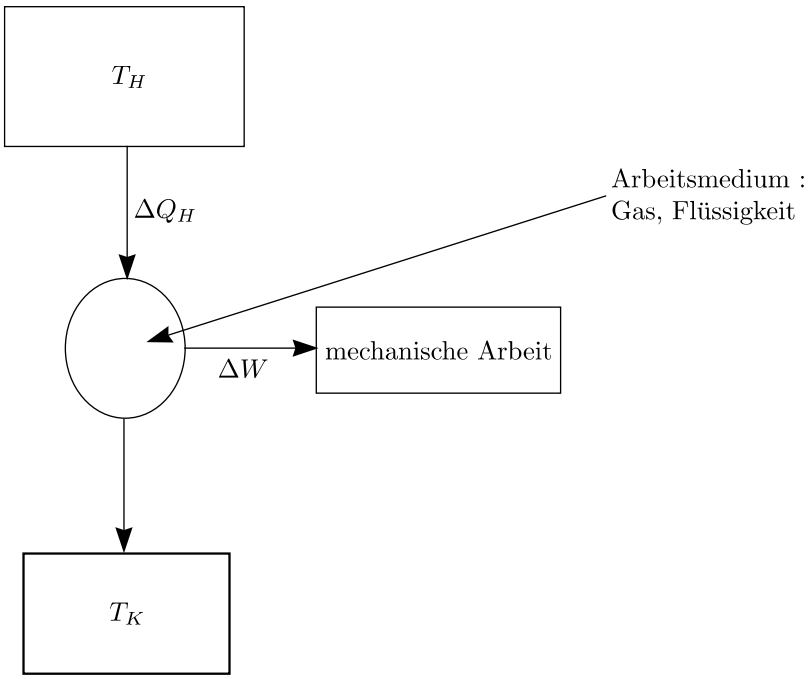
Mit $\Delta Q_H^{irrev} < \Delta Q_H^{rev} > 0$ folgt, daß der Bruch $\dfrac{\Delta Q_K}{\Delta Q_H}$ dem Betrage nach größer wird bei irreversibler Prozeßführung. Mit $\Delta Q_K^{irrev} < \Delta Q_K^{rev} < 0$ ergibt sich dann noch, daß der Bruch $\dfrac{\Delta Q_K}{\Delta Q_H}$ bei irreversibler Prozeßführung negativer wird:

$$\boxed{\eta \leq 1 - \frac{T_K}{T_H}}$$

Dies ist der Wirkungsgrad des Carnotschen Kreisprozesses bei beliebiger Prozeßführung. Wählt man nur ein Wärmebad, d.h. $T_H = T_K$, folgt daraus, daß $\eta = 0$ ist. Es ist also nicht möglich, eine periodisch arbeitende Maschine zu bauen, die nichts tut als ein Wärmebad abzukühlen und mechanische Arbeit zu leisten, obwohl dies dem Energieerhaltungssatz überhaupt nicht widersprechen würde.

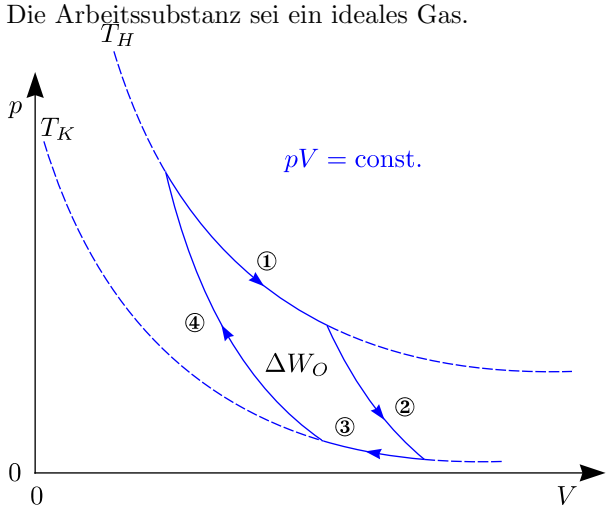
Es gibt kein Perpetuum Mobile 2.Art.

Dies ist eine Folge des 2.Hauptsatzes (und des 1.Hauptsatzes).



Beispiel:

Die Arbeitssubstanz sei ein ideales Gas.



Kapitel 10

Reale Gase

10.1 Die Van-der-Walls-Zustandsgleichung

Im Gegensatz zum idealen Gas wollen wir jetzt die Wechselwirkung der Gasmoleküle explizit berücksichtigen. Wir idealisieren die Gasmoleküle als Kugeln mit Radius r und Querschnitt $\sigma = \pi r^2$ ($\hat{=}$ Wirkungsquerschnitt):

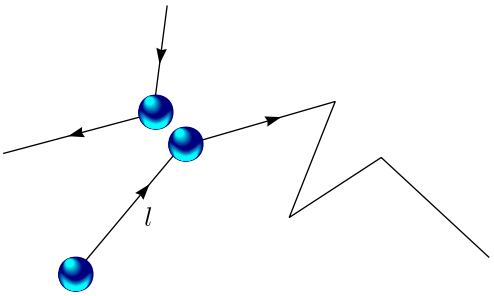
Mittlere freie Weglänge l:

Bewegt sich ein Molekül um die Strecke l, hat es ein Volumen $l \cdot \sigma$ überstrichen (falls $r \ll l$). Dann folgt die Zahl der Moleküle in diesem Volumen mittels Dreisatz:

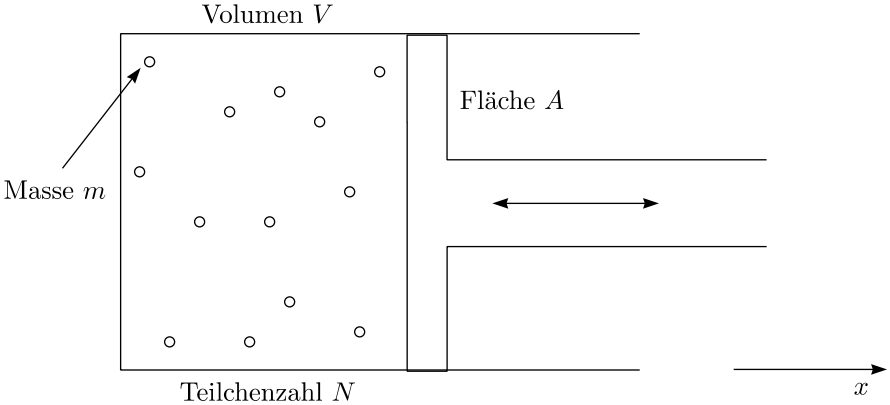
$$\frac{N}{V}(l \cdot \sigma)$$

Wird diese Zahl ≈ 1, so findet im Mittel ein Stoß statt. Damit folgt die mittlere freie Weglänge:

$$\boxed{l = \frac{1}{\left(\frac{N}{V}\right) \cdot \sigma}}$$



Zustandsgleichung:

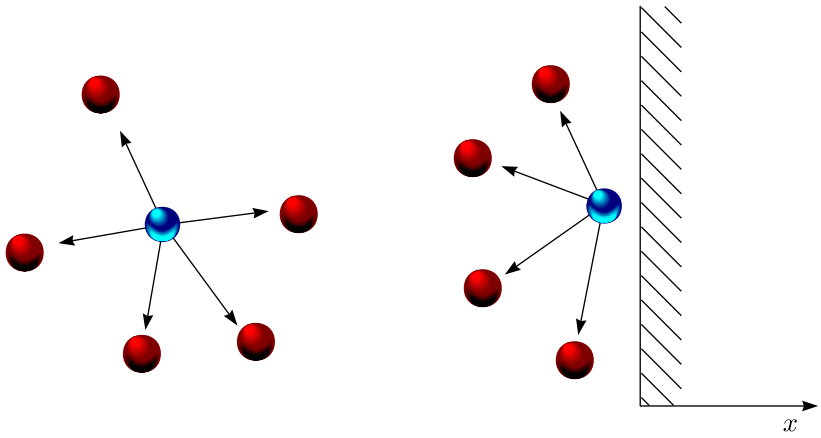


Wieder betrachten wir ein Zeitintervall $\mathrm{d}t$. Wir groß ist der Kraftstoß $F_x\,\mathrm{d}t$ auf den Stempel? Haben die Teilchen beispielsweise den Impuls $p_{i,x}$, so gilt:

$$\boxed{F_{i,x}\,\mathrm{d}t = 2p_{i,x}^{Rand}\,\mathrm{d}N} \qquad \text{I}$$

Der Faktor 2 rührt vom Impulserhaltungssatz her, da das Teilchen beim Stoß ja die Richtung ändert. Die Wechselwirkung hat zwei Effekte:

1.) Im Gas wirken im Mittel keine Kräfte, am Rand aber schon!



Die Dicke des Randes sei d. Dann wirkt die Kraft:

$$F \approx \alpha\left(\frac{N}{V}\right)$$

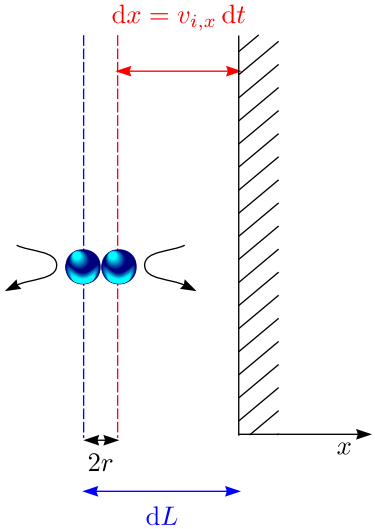
α ist eine Proportionalitätskonstante, die materialspezifisch ist. Das Molekül ist für eine bestimmte Zeit $\frac{d}{v_{i,x}}$ in dieser Randzone. Somit reduziert sich sein Impuls und man erhält:

$$\boxed{p_{i,x}^{Rand} = p_{i,x} - \alpha\left(\frac{N}{V}\right)\frac{d}{v_{i,x}}} \qquad \text{II}$$

2.) Die Zahl der Teilchen $\mathrm{d}N_i$, die im Zeitintervall $\mathrm{d}t$ mit dem Stempel stoßen, folgt wieder durch den Dreisatz:

$$\frac{\mathrm{d}N_i}{N_i} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}V}{V} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}L\cdot A}{V}$$

Der Faktor $\frac{1}{2}$ kommt daher, weil sich die eine Hälfte der Teilchen nach links und die andere nach rechts bewegt.



Ohne Stöße würde ein Molekül im Zeitintervall $\mathrm{d}t$ die Strecke $\mathrm{d}x$ zurücklegen. Für einen zentralen Stoß entlang der x-Achse zweier Teilchen mit entgegengesetztem Impuls verlängert sich die Strecke effektiv auf

$\mathrm{d}x + 2r$.
Im Mittel erfährt das Molekül auf einer freien Weglänge l einen Stoß; es gilt also folgendes:

$$l \mapsto l + 2r = l\left(1 + \frac{2r}{l}\right)$$

Für beliebige Stöße reduziert sich dies nun um einen Faktor $\beta < 1$:

$$l \mapsto l\left(1 + \beta\frac{2r}{l}\right)$$

Also folgt damit:

$$\mathrm{d}L = \mathrm{d}x\left(1 + \beta\frac{2r}{l}\right) = v_{i,x}\,\mathrm{d}t\left(1 + \beta\frac{2r}{l}\right) = \frac{p_{i,x}}{m}\,\mathrm{d}t\left(1 + \beta\frac{2r}{l}\right)$$

Damit wird:

$$\mathrm{d}N_i = N_i \cdot \frac{1}{2}\frac{A}{V} \cdot \frac{p_{i,x}}{m}\,\mathrm{d}t\left(1 + \beta\frac{2r}{l}\right)$$

Die Effekte ① und ② führen also nun durch Einsetzen von II und III und I zu:

$$F_{i,x}\,\mathrm{d}t = 2\left(p_{i,x} - \alpha\left(\frac{N}{V}\right)\frac{d}{v_{i,x}}\right) \cdot N_i\frac{1}{2}\frac{A}{V} \cdot \frac{p_{i,x}}{m}\,\mathrm{d}t \cdot \left(1 + \beta\frac{2r}{l}\right)$$

$$F_{i,x} = \left(p_{i,x} - \alpha\left(\frac{N}{V}\right)\frac{d}{v_{i,x}}\right) \cdot N_i\frac{A}{V} \cdot \frac{p_{i,x}}{m} \cdot \left(1 + \beta\frac{2r}{l}\right)$$

Somit wird der Druck $p_i = \frac{F_{i,x}}{A}$:

$$p_i = \left(p_{i,x} - \alpha\left(\frac{N}{V}\right)\frac{d \cdot m}{p_{i,x}}\right) \cdot N_i\frac{1}{V}\frac{p_{i,x}}{m} \cdot \left(1 + \beta\frac{2r}{l}\right)$$

Summation über alle Impuls $p_{i,x}$ ergibt:

$$p = \sum_i N_i\left(p_{i,x} - \alpha\left(\frac{N}{V}\right)\frac{d \cdot m}{p_{i,x}}\right) \cdot \frac{1}{V}\frac{p_{i,x}}{m}\left(1 + \beta\frac{2r}{l}\right)$$

$$p = \sum_i N_i\left[\frac{1}{V}\frac{p_{i,x}^2}{m} - \alpha\left(\frac{N}{V}\right)\frac{d \cdot m}{p_{i,x}} \cdot \frac{1}{V} \cdot \frac{p_{i,x}}{m} + \frac{1}{V}\frac{p_{i,x}^2}{m} \cdot \beta\frac{2r}{l} - \alpha\left(\frac{N}{V}\right)\frac{d \cdot m}{p_{i,x}}\frac{1}{V} \cdot \frac{p_{i,x}}{m} \cdot \beta\frac{2r}{l}\right]$$

$$p = \sum_i N_i\left[\frac{1}{V}\frac{p_{i,x}^2}{m} - \alpha \cdot \frac{N \cdot d}{V^2} + \frac{1}{V} \cdot \frac{p_{i,x}^2}{m} \cdot \beta\frac{2r}{l} - \alpha \cdot \beta \cdot \frac{N \cdot d}{V^2} \cdot \frac{2r}{l}\right]$$

Der zweite und vierte Term hängen nicht mehr vom Summationsindex i ab. Wir können diese somit von der Summe abspalten und erhalten:

$$p = -N \cdot \alpha \cdot \frac{N \cdot d}{V^2} - N \cdot \alpha \cdot \beta \cdot \frac{N \cdot d}{V^2} \cdot \frac{2r}{l} + \sum_i N_i\left[\frac{1}{V}\frac{p_{i,x}^2}{m} + \frac{1}{V} \cdot \frac{p_{i,x}^2}{m} \cdot \beta\frac{2r}{l}\right]$$

α und β sind Zahlenwerte, die eine sehr kleine Größenordnung besitzen. Infolgedessen kann der Term proportional zu $d \cdot \alpha \cdot \beta \ll 1$ vernachlässigt werden, wobei dann folgt:

$$p + \underbrace{N\alpha\left(\frac{N}{V}\right)\frac{d}{V}}_{\substack{=:a\left(\frac{n}{V}\right)^2 \\ \text{mit } N = nN_A}} = \underbrace{\sum_i N_i\frac{p_{i,x}^2}{m}}_{=\frac{2}{3}E_{kin} = nRT}\frac{1}{V}\left(1 + \beta\frac{2r}{l}\right)$$

$$p + a\left(\frac{n}{V}\right)^2 = nRT \cdot \frac{1}{V}\left(1 + \beta\frac{2r}{l}\right)$$

Weiterhin gilt für kleine x:

$$1 + x \approx \frac{1}{1-x} \text{ für } x \ll 1$$

Damit ergibt sich:

$$\left(1 + \beta\frac{2r}{l}\right) \approx \left(1 - \beta\frac{2r}{l}\right)^{-1}$$

Mittels dieser Beziehung folgt nun:

$$\left(p + a\left(\frac{n}{V}\right)^2\right)\left(V - V\beta\frac{2r}{l}\right) = nRT$$

Wir schreiben nun:

$$V\beta\frac{2r}{l} = V\beta\frac{2r}{\frac{1}{(\frac{N}{V})\cdot\sigma}} \sim r^3 = 2\beta \cdot r \cdot \sigma \cdot N = (2\beta \cdot r \cdot \sigma \cdot N_A) \cdot n =: n \cdot b$$

Damit folgt das Endergebnis:

$$\boxed{\left(p + a\left(\frac{n}{V}\right)^2\right)(V - nb) = nRT}$$

Dies ist die sogenannte Van-der-Waals-Gleichung oder auch die Zustandsgleichung realer Gase. Der Term $a\left(\frac{n}{V}\right)^2$ wird häufig als Binnendruck bezeichnet. nb ist das sogenannte Kovolumen. Mit $a = b = 0$ erhalten wir wieder:

$$\boxed{p \cdot V = nRT}$$

Also folgt hier die Zustandsgleichung idealer Gase.

Innere Energie U des realen Gases:

$$\mathrm{d}U = \mathrm{d}\,(\text{kinetische Energie} + \text{potentielle Energie}) = \frac{3}{2}nR\,\mathrm{d}T + \text{Binnendruck} \cdot\ \mathrm{d}V = \frac{3}{2}nR\,\mathrm{d}T + a\left(\frac{n}{V}\right)^2\,\mathrm{d}V$$

Wir integrieren diesen Ausdruck:

$$\boxed{U = \frac{3}{2}nRT - a\frac{n^2}{V} = U(T,V)}$$

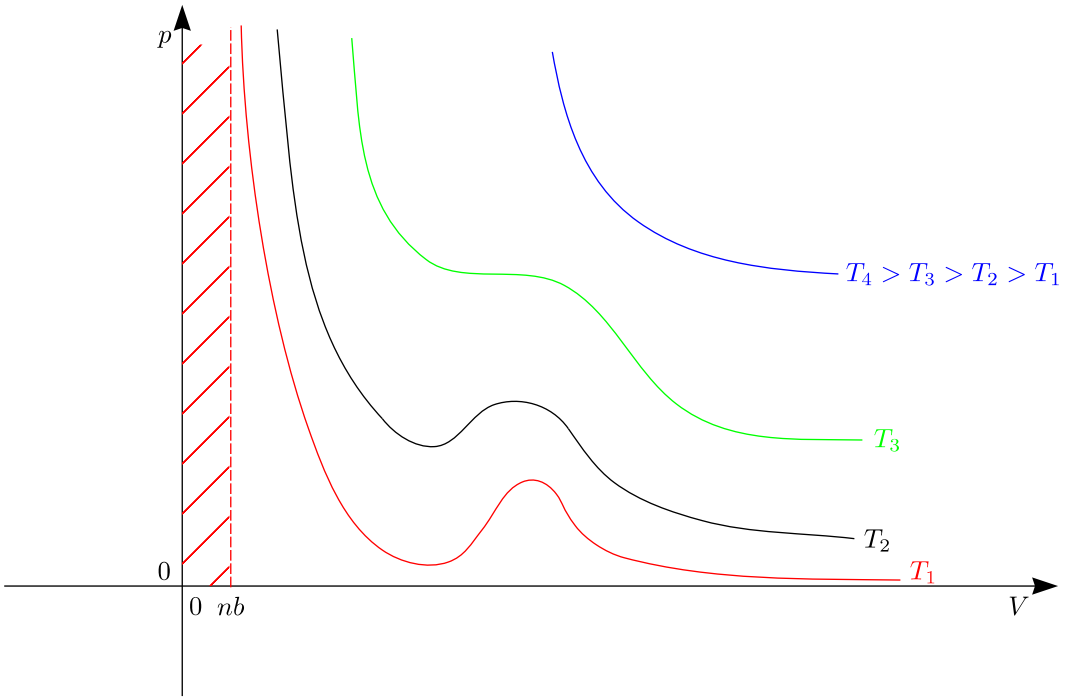
Die innere Energie ist somit eine Funktion der Temperatur und des Volumens. Mit $a = 0$ folgt natürlich wieder die innere Energie des idealen Gases:

$$U = \frac{3}{2}nRT$$

10.2 Phasenumwandlungen

$$p(V) = \frac{nRT}{V - nb} - a\left(\frac{n}{V}\right)^2$$

Wir veranschaulichen diese Funktion graphisch:



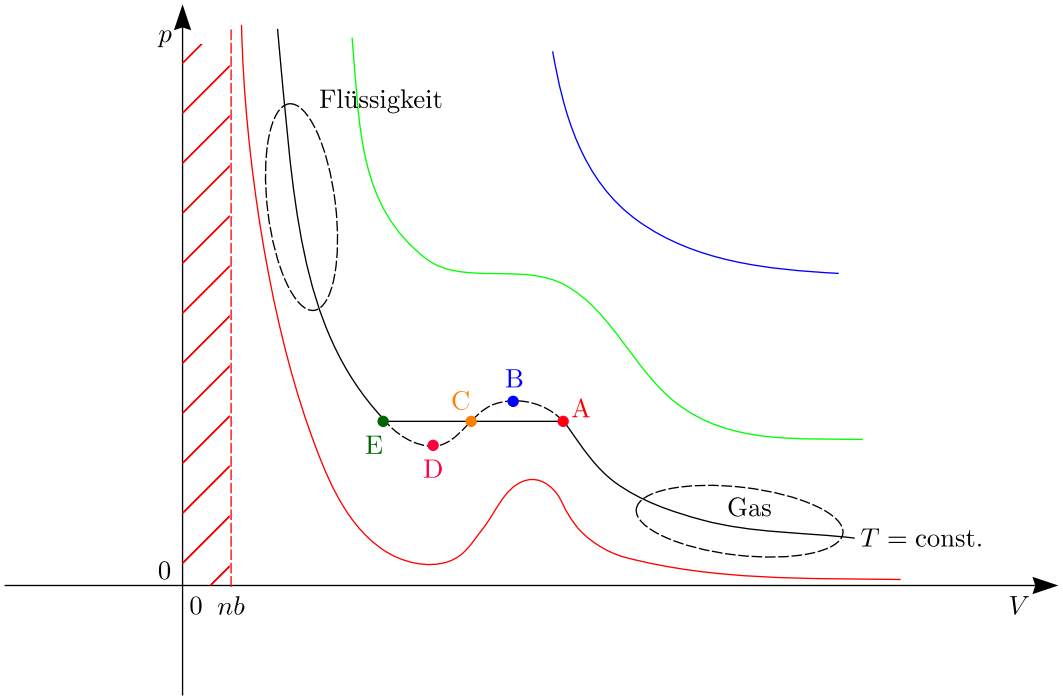
Für große Temperaturen sind Binnendruck und Kovolumen vernachlässigbar und es gilt wieder $pV = nRT$. Für kleine Temperaturen gibt es Bereiche mit $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}V} > 0$.

Ein Bereich im pV-Diagramm mit $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}V} > 0$ ist instabil.

Beweis:

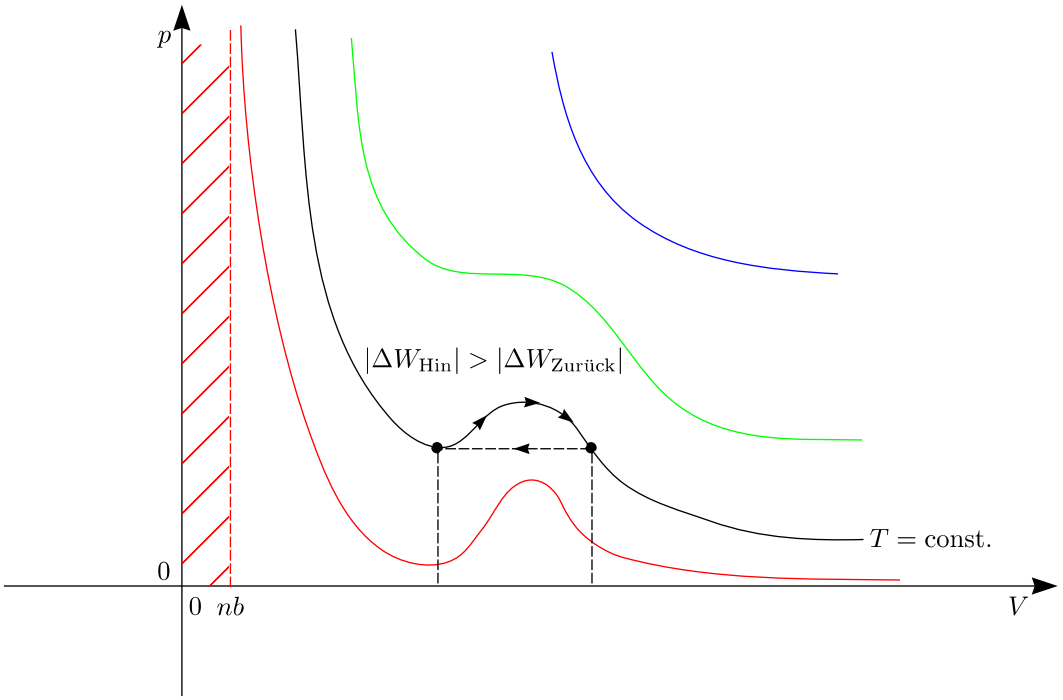
- $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}V} \leq 0$ (Volumenreduktion $\mathrm{d}V$ (Fluktuation))
  Der Druck p steigt. Die Kraft auf den Stempel sei konstant. Das Volumen sinkt weiter.

- $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}V} > 0$ (Volumenreduktion $\mathrm{d}V$)
  Der Druck p sinkt. Die Kraft auf den Stempel sei wieder konstant. Das Volumen sinkt somit weiter, weshalb es sich um ein instabiles Verhalten handelt. Dauerhaft kann somit ein Zustand in diesem Bereich nicht auftreten, vorübergehend aber schon.

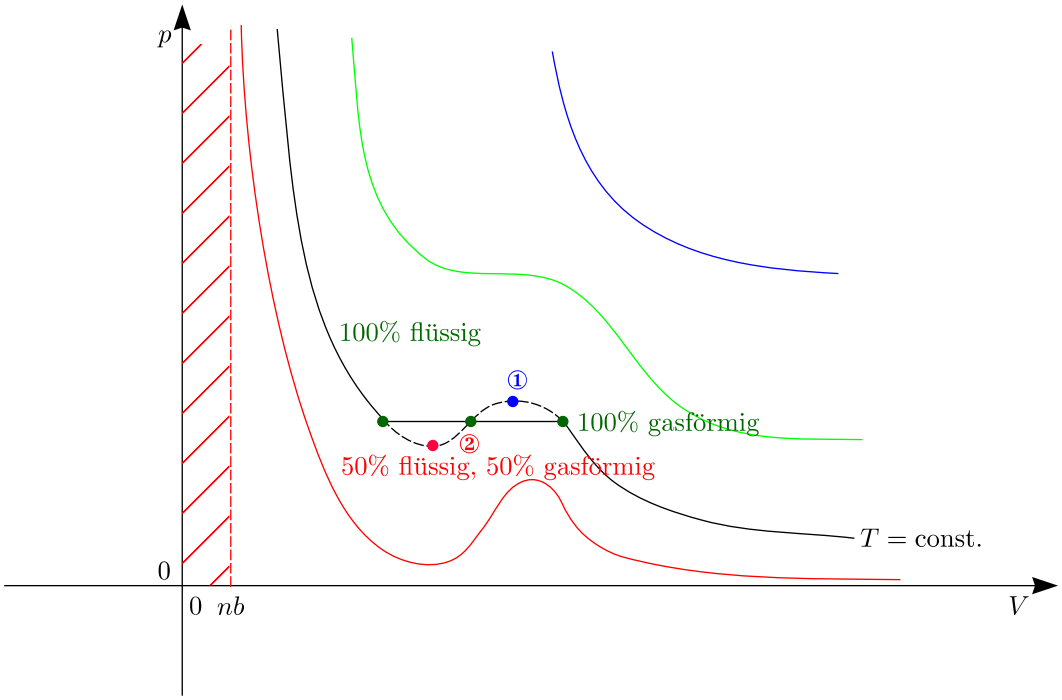


Die Idee ist nun, einen Übergang mit $\frac{dp}{dV} = 0$ zu konstruieren. Die Maxwell-Konstruktion beschreibt dabei, daß die Fläche EDC genauso groß sein muß wie die Fläche CBA.

Beweis:



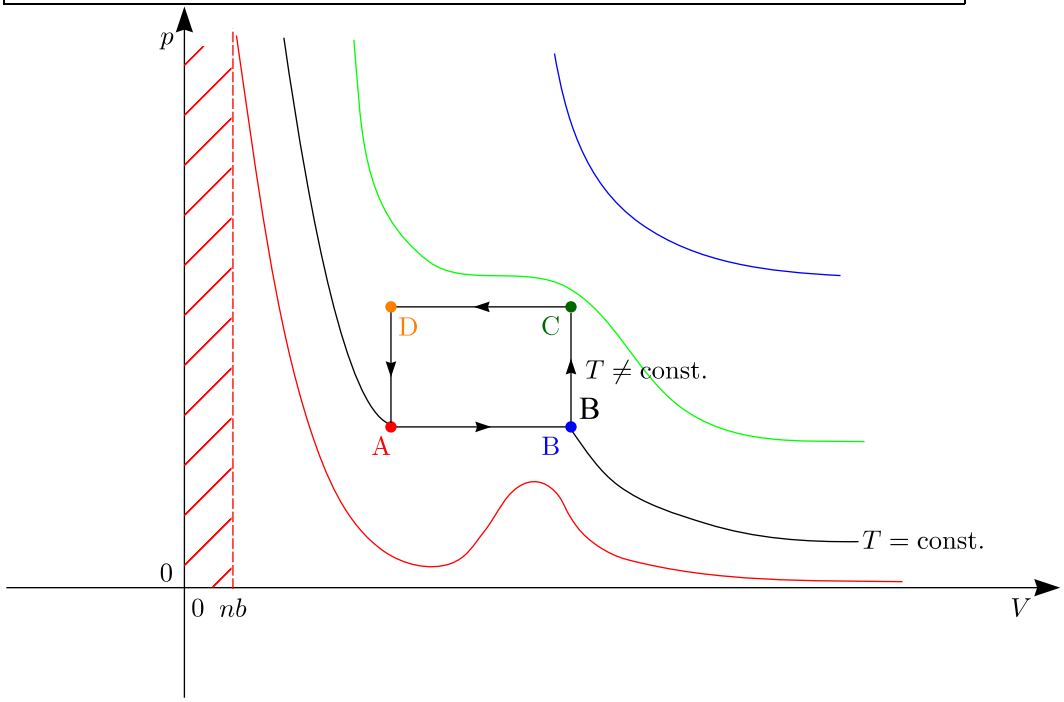
Wir wählen eine andere Horizontale als die Maxwell-Konstruktion es vorschreibt. Wir gehen von E nach A über DCB. Das Gas leistet also die mechanische Arbeit ΔW_{Hin}. Gehen wir zurück nach E über die Horizontale, so stecken wir weniger mechanische Arbeit ΔW_{Zuruck} in das Gas hinein als bei der Kompression. Wir sind nun wieder am Anfangszustand angekommen, aber es wurde Arbeit geleistet. Dies entspricht nun dem 1.Hauptsatz.



① Dieser Punkt entspricht einem übersättigtem Dampf (Kompression und keine Kondensation).

② Dabei handelt es sich um einen Siedeverzug (Druckabsenkung und keine Keime)

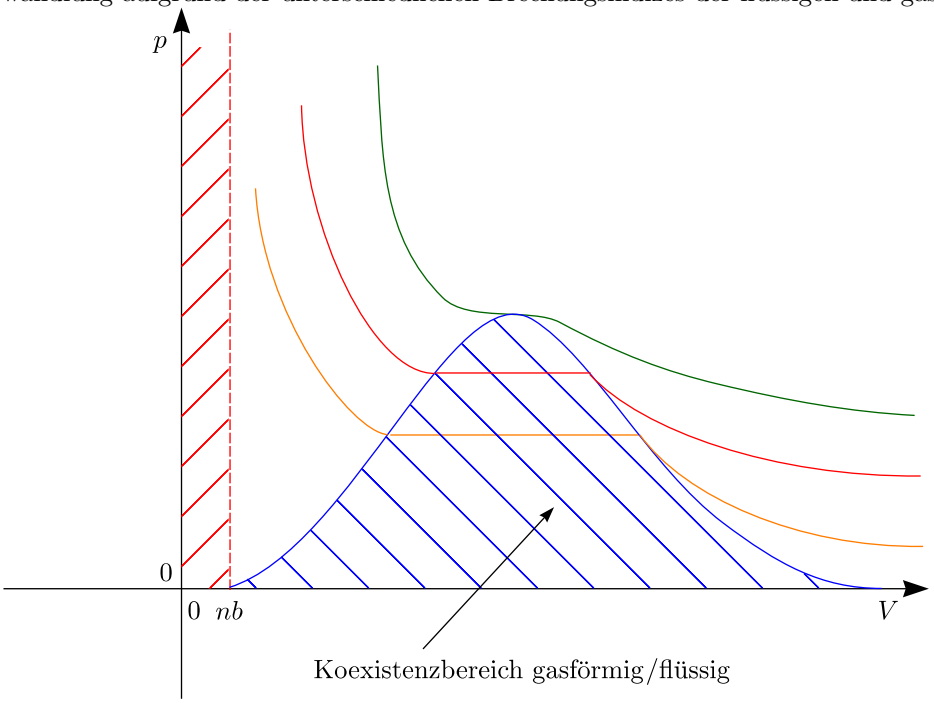
Zwischen den Phasen gasförmig/flüssig gibt es einen kontinuierlichen Übergang.



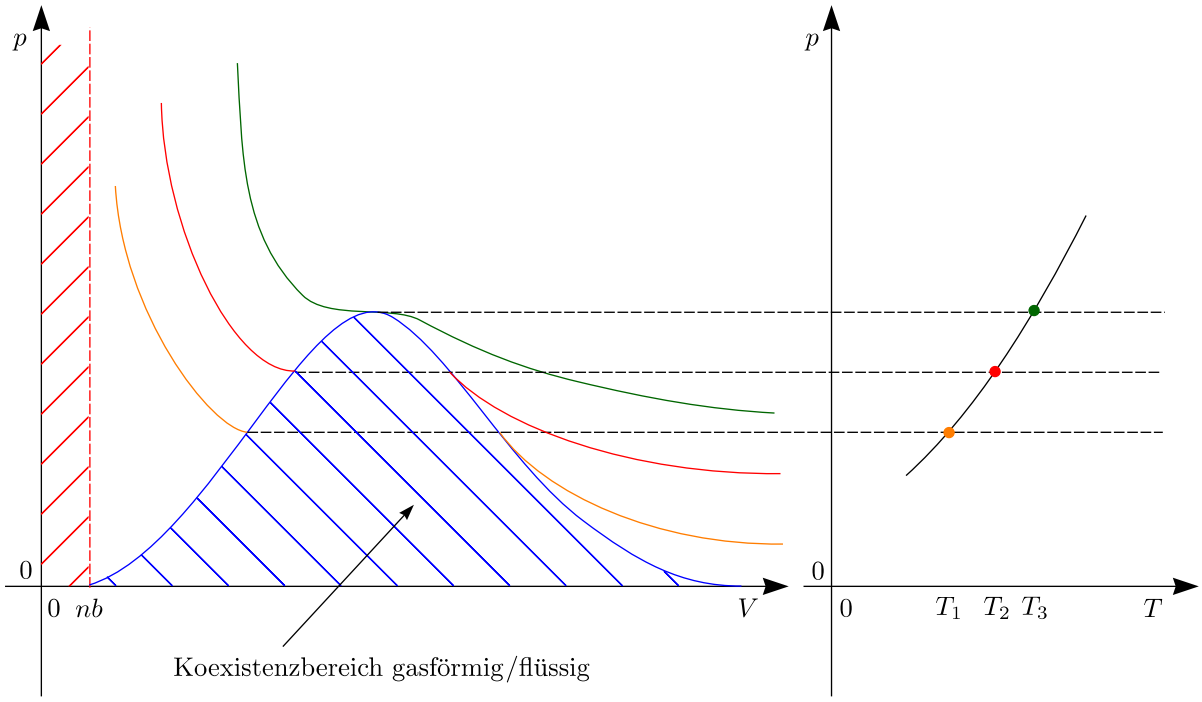
Der Punkt A entspricht einer flüssigen, der Punkt B einer gasförmigen Phase.

- A $\mapsto$ B: Wir beobachten einen Phasenübergang.
- B $\mapsto$ C: Das Volumen V sei konstant, wir erhöhen die Temperatur T.
- C $\mapsto$ D: Der Druck bleibe konstant, wir führen eine Kompression durch.
- D $\mapsto$ A: Hier sei wieder das Volumen konstant, wobei wir die Temperatur T aber senken.

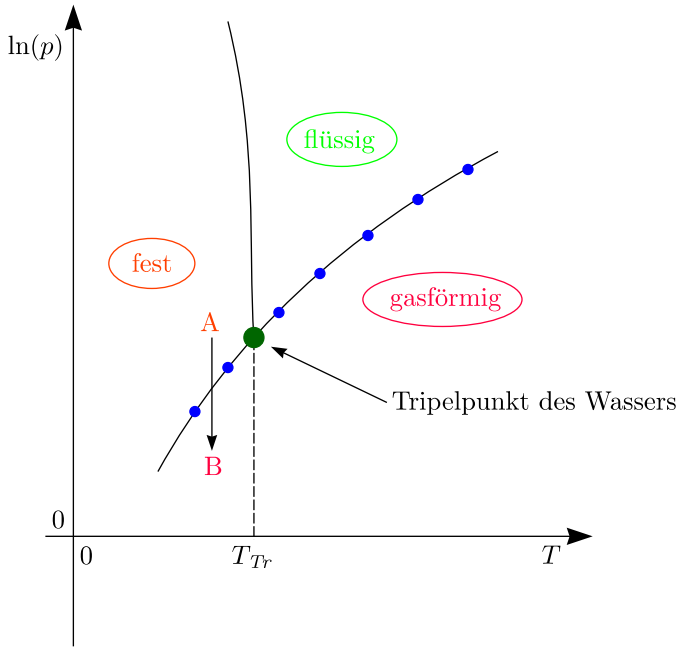
Auf dem Weg BCDA beobachten wir keinen Phasenübergang. Nur im Koexistenzbereich kann man die Umwandlung aufgrund der unterschiedlichen Brechungsindizes der flüssigen und gasförmigen Phase sehen.



Dampfdruckkurve:



Wir betrachten beispielsweise Wasser (H_2O):



$T_{Tr} = 273,16\,\mathrm{K}$ per Definition (Basiseinheit K)

$p_{Tr} = 613,3\,\mathrm{Pa}\,(4,6\,\mathrm{Torr})$

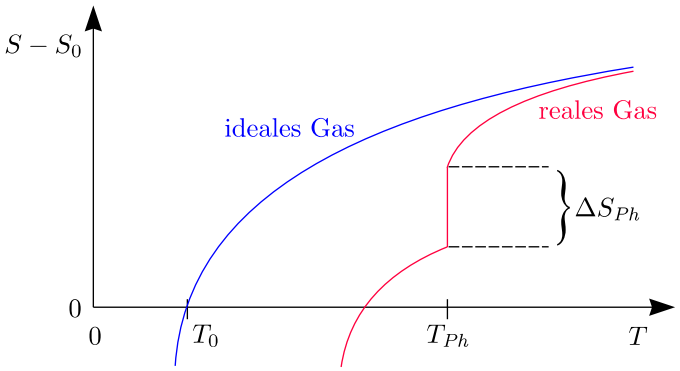
a.) Für $T < T_{Tr}$ gibt es keine flüssige Phase mehr! Wenn man p bei $T = \text{const.}$ senkt (A $\mapsto$ B), so gibt es einen Phasenübergang fest/gasförmig (Sublimation).

b.) Für $T > T_{Tr}$ kann man bei $p = \text{const.}$ einen Phasenübergang flüssig $\mapsto$ gasförmig hervorrufen. Dieser ist mit einem Sprung in der Entropie verknüpft. Somit macht auch die Wärme $\delta Q = T\,\mathrm{d}S$ einen Sprung, den man auch als latente Wärme bezeichnet. Dies entspricht einem Phasenübergang 1.Ordnung.

Zur Erinnerung:

Es ist die Rede von einem idealen Gas mit $p = \text{const.}$ (Kapitel 3.1).

$$S - S_0 = \frac{5}{2} nR \ln\left(\frac{T}{T_0}\right)$$



Die latente Wärme ist:

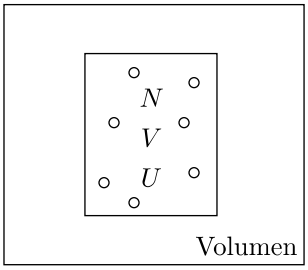
$$\Delta Q_{Ph} = T_{Ph} \cdot \Delta S_{Ph}$$

Kapitel 11

Thermodynamische Potentiale und Extremalbedingungen

11.1 Die freie Energie

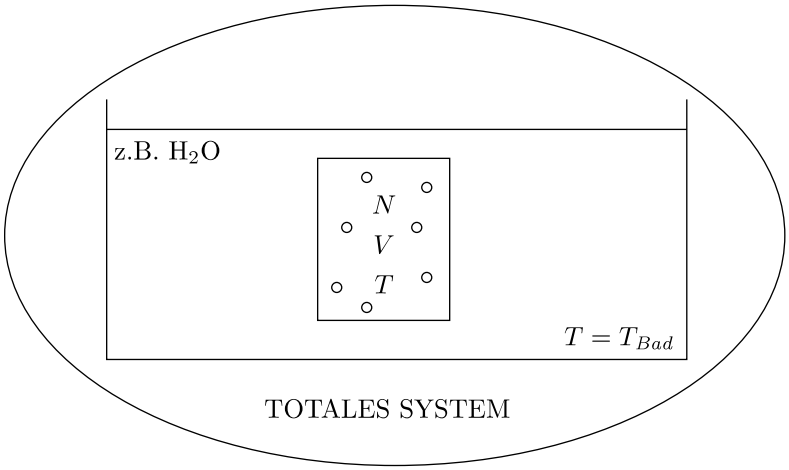
1.) Abgeschlossenes System:



Der 2.Hauptsatz besagt nun:

> Bei vorgegebenem N, V und U wird der Zustand maximaler Entropie angenommen.

2.) System ist an ein Wärmebad gekoppelt:



Nun sind N, V und T vorgegeben. Welcher Zustand wird angenommen? Um das Problem mittels des 2.Hauptsatzes diskutieren zu können, betrachten wir ein übergeordnetes totales System, das aus BAD plus SYSTEM besteht. Bei vorgegebener innerer Energie $U_{tot} = Q + Q_{Bad} = \text{const.}$ des Gesamtsystems sind $S_{tot} = S + S_{Bad}$ auf jeden Fall maximal. Wir kürzen ab:

$$\boxed{S_{tot} = \max}$$

Damit resultiert:

$$S + S_{Bad} = \max$$

Wir multiplizieren diese Gleichung mit $T_{Bad} \neq 0$:

$$T_{Bad} \cdot S + \underbrace{T_{Bad} \cdot S_{Bad}}_{\substack{=Q_{Bad}=U_{tot}-Q \\ =U_{tot}-U}} = \max$$

Somit gilt:

$$T_{Bad} \cdot S + \underbrace{U_{tot}}_{=\text{const.}} - U = \max$$

Da $U_{tot} = \text{const.}$ folgt natürlich:

$$T_{Bad} \cdot S - U = \max$$

Wir multiplizieren mit -1, wobei die Größe dann aber minimal wird:

$$\boxed{U - T_{Bad} \cdot S = \min}$$

Da $T_{Bad} = T$ folgt:

$$\boxed{U - T \cdot S = \min}$$

Wir fassen nun zusammen

a.) Entropie S unseres Systems sei vorgegeben, d.h. $S = \text{const.}$

$$\boxed{U = \min}$$

Bei vorgegebenem N, V und S wird der Zustand minimaler innerer Energie U angenommen.

b.) Die Temperatur T des Systems sei konstant, d.h. $T = T_{Bad} = \text{const.}$

$$\boxed{U - T \cdot S = \min}$$

Bei vorgegebenem N, V und T wird der Zustand minimaler freier Energie angenommen.

Die Definition für die freie Energie F ergibt sich folgendermaßen:

$$\boxed{F = F(V,T) := U - TS}$$

Außerdem gilt nun:

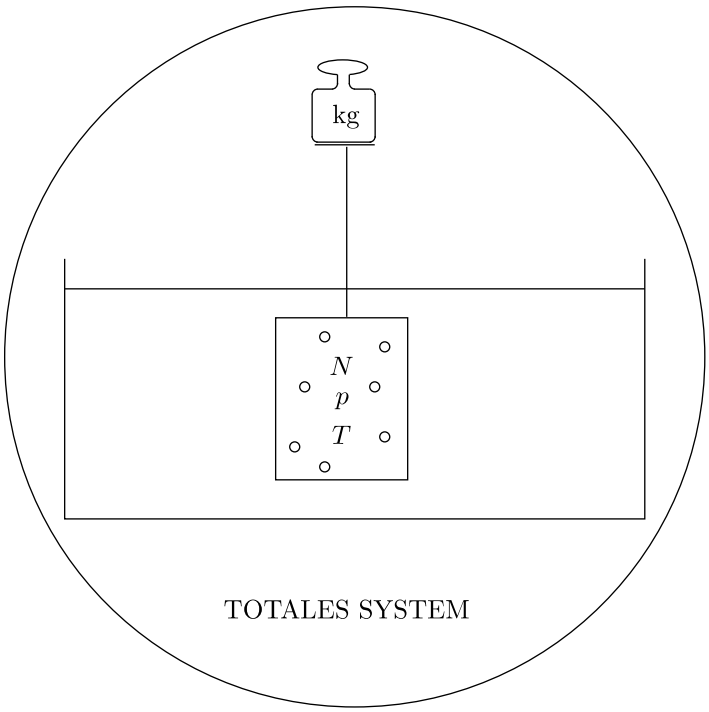
$$\mathrm{d}F = \mathrm{d}\left(U - TS\right) = \mathrm{d}U - T\,\mathrm{d}S - S\,\mathrm{d}T = -p\,\mathrm{d}V + T\,\mathrm{d}S - T\,\mathrm{d}S - S\,\mathrm{d}T = \boxed{-p\,\mathrm{d}V - S\,\mathrm{d}T} =$$

$$= \boxed{\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T \mathrm{d}V + \left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V \mathrm{d}T}$$

Theoretiker sagen: „Die freie Energie ist die Legendre-Transformierte der inneren Energie bezüglich der Entropie“.

11.2 Enthalpie und freie Enthalpie

3.) System kann mechanische Arbeit leisten:
Hier sei $p = \text{const.}$, zudem sei $T = \text{const.}$



Bei vorgegebener innerer Energie $U_{tot} = U + Q_{Bad} + W = \text{const.}$ besagt der zweite Hauptsatz, daß $S_{tot} = S + S_{Bad}$ maximal wird.

$S + S_{Bad} = \max$

Wir multiplizieren mit der Temperatur des Bades T_{Bad}:

$$T_{Bad} \cdot S + \underbrace{T_{Bad} \cdot S_{Bad}}_{\substack{=Q_{Bad} \\ =U_{tot}-U-W}} = \max$$

Damit gilt:

$$T_{Bad} \cdot S + \underbrace{U_{tot}}_{=\text{const.}} - U - \underbrace{W}_{=p \cdot V} = \max$$

$T_{Bad} \cdot S - U - p \cdot V = \max$

Wir multiplizieren diese Extremalbedingung wieder mit -1, woraus resultiert:

$$\boxed{U + p \cdot V - T_{Bad} \cdot S = \min}$$

Das $T = T_{Bad}$ folgt:

$$\boxed{U + p \cdot V - T \cdot S = \min}$$

Wir fassen wieder zusammen:

a.) $T = T_{Bad} = \text{const.}$

$$\boxed{U + p \cdot V - T \cdot S = \min}$$

Bei vorgegebenem N, P und T wird der Zustand minimaler freier Enthalpie G angenommen.

Die Definition für die freie Enthalpie G lautet:

$$\boxed{G = G(p,T) := U + p \cdot V - T \cdot S}$$

Die freie Enthalpie G wird auch Gibb'sche Energie genannt.

b.) Betrachten wir hingegeben S als vorgegeben, d.h. $S = \text{const.}$ ($T \neq T_{Bad} = \text{const.}$):

$$\boxed{U + p \cdot V = \min}$$

Bei vorgegebenem N, p und S wird der Zustand minimaler Enthalpie H angenommen.

Auch hier gilt die folgende Definition für die Enthalpie H:

$$\boxed{H = H(p, S) := U + p \cdot V}$$

Es gilt nun:

$$\mathrm{d}H = \mathrm{d}\left(U + pV\right) = \mathrm{d}U + p\,\mathrm{d}V + V\,\mathrm{d}p = -p\,\mathrm{d}V + T\,\mathrm{d}S + p\,\mathrm{d}V + V\,\mathrm{d}p = T\,\mathrm{d}S + V\,\mathrm{d}p =$$

$$= \boxed{\underbrace{\left(\frac{\partial H}{\partial S}\right)_p}_{T}\mathrm{d}S + \underbrace{\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_S}_{V}\mathrm{d}p}$$

Zusammenfassend können wir nun für $N = \text{const.}$ folgende Tabelle aufstellen:

	V	p
S	$U(V,S)$	$H(p,S)$
T	$F(V,T)$	$G(p,T)$

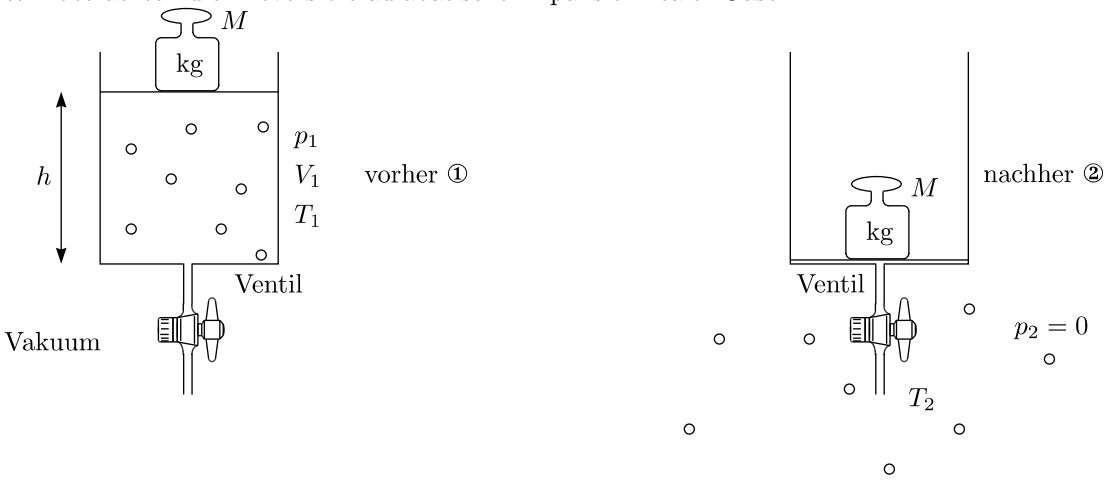
- $U(V,S) \mathrel{\hat{=}}$ Innere Energie
- $F(V,T) \mathrel{\hat{=}}$ Freie Energie
- $H(p,S) \mathrel{\hat{=}}$ Enthalpie
- $G(p,T) \mathrel{\hat{=}}$ Freie Enthalpie oder Gibb'sches Potential

Für $N \neq \text{const.}$ gibt es acht verschiedene thermodynamische Potentiale (Chemie, Festkörperphysik).

11.3 Expansion realer Gase

11.3.1 Joule-Thomson-Effekt

Wir betrachten die irreversible adiabatische Expansion realer Gase.



Die Enthalpie bleibt bei diesem Vorgang konstant:

$$U_2 + \underbrace{p_2}_{0} V_1 = U_1 + p_1 V_1$$

Die innere Energie U des Gases ist somit nicht erhalten, aber die Enthalpie $H = U + pV$ ist erhalten. Die Enthalpie des realen Gases lautet (Kapitel 5.1):

$$U = \frac{3}{2} nRT - a\frac{n^2}{V}$$

Außerdem benötigen wir die Zustandsgleichung realer Gase:

$$\left(p + a\left(\frac{n}{V}\right)^2\right)(V - nb) = nRT$$

Wir lösen nach p auf:

$$p = \frac{nRT}{V - nb} - a\left(\frac{n}{V}\right)^2$$

Damit drücken wir die Enthalpie durch T und V aus:

$$\boxed{H(T,V) = \frac{3}{2}nRT - a\frac{n^2}{V} + \left(\frac{nRT}{V - nb} - a\left(\frac{n}{V}\right)^2\right) \cdot V = \text{const.}}$$

Eigentlich gilt $T = T(p, S)$ und $V = V(p, S)$. Durch Bildung des totalen Differentials ergibt sich:

$$\mathrm{d}H = 0 = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_V \mathrm{d}T + \left(\frac{\partial H}{\partial V}\right)_T \mathrm{d}V$$

Wir lösen nach $\mathrm{d}T$ auf:

$$\boxed{\mathrm{d}T = -\frac{\left(\frac{\partial H}{\partial V}\right)_T}{\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_V}\mathrm{d}V}$$

Einsetzen ergibt:

$$\left(\frac{\partial H}{\partial V}\right)_T = a\frac{n^2}{V^2} + \left(\frac{nRT}{V - nb} - a\left(\frac{n}{V}\right)^2\right) + V \cdot \left(-\frac{nRT}{(V - nb)^2} + 2a\frac{n^2}{V^3}\right) =$$

$$= \frac{nRT}{V - nb} + V \cdot \left(-\frac{nRT}{(V - nb)^2} + 2a\frac{n^2}{V^3}\right) = 2a\frac{n^2}{V^2} + \frac{nRT\,(V - nb) - VnRT}{(V - nb)^2} = \boxed{2a\frac{n^2}{V^2} - \frac{b \cdot n^2 RT}{(V - nb)^2}}$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_V = \boxed{\frac{3}{2}nR + \frac{nRV}{V - nb}}$$

Damit resultiert dann für den Bruch:

$$-\frac{\left(\frac{\partial H}{\partial V}\right)_T}{\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_V} \overset{:nR}{=} \boxed{\frac{\frac{bnT}{(V-nb)^2} - \frac{2a}{R}\frac{n}{V^2}}{\frac{3}{2} + \frac{V}{V-nb}}}$$

Der Zähler kann negativ werden für $T < T_i$. T_i ist die sogenannte Inversionstemperatur. Für T_i ergibt sich:

$$T_i = \frac{2a}{R}\frac{1}{V^2}\frac{1}{b}(V - nb)^2$$

Da $nb \ll V$, ergibt sich schließlich:

$$\boxed{T_i = \frac{2a}{Rb}}$$

Unterhalb der Inversionstemperatur T_i kühlt sich das reale Gas ab, oberhalb erwärmt es sich. Diesen Effekt, den Joule-Thomson-Effekt nutzt man zur Verflüssigung von Gasen. Für ideale Gase folgt:

$$\boxed{\left(\frac{\partial H}{\partial V}\right)_T = 0 \text{ mit } a = b = 0 \text{ oben}}$$

Damit ist also $\mathrm{d}T = 0$, d.h. die Temperatur des idealen Gases bleibt unverändert.

Beispiele:

Gas	Inversionstemperatur
H	193 K
He	<77 K
O_2	764 K
N_2	621 K

Kapitel 12

Wärmeleitung und Diffusion

Bislang haben wir die folgenden Fragen nicht beantwortet:

- ✳ Wie schnell stellt sich die gleiche Temperatur ein, wenn wir beispielsweise zwei Gasvolumina mit Temperaturen T_1 und T_2 in Kontakt bringen?

  Dies führt zur Wärmeleitung und Wärmeleitungsgleichung.

- ✳ Wie schnell stellt sich eine Gleichverteilung der Teilchendichten ein, wenn wir zum Beispiel zwei Gasvolumina mit Teilchendichten $\frac{N_1}{V}$ und $\frac{N_2}{V}$ in Kontakt bringen?

  Dies führt uns zur Diffusion.

Zunächst formulieren wir die Kontinuitätsgleichung, indem wir Erhaltungssätze ausnutzen. Wir erinnern uns an die Elektrodynamik. Hier folgt aus den Maxwell-Gleichungen die Gleichung für die Ladungserhaltung:

$$\boxed{\mathrm{div}\vec{j} + \frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0}$$

$j \mathrel{\hat{=}}$ Stromdichte, $[j] = \dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}^2}$

$\varrho \mathrel{\hat{=}}$ Ladungsdichte, $[\varrho] = \dfrac{\mathrm{As}}{\mathrm{m}^3}$

Analog definieren wir:

$u \mathrel{\hat{=}} \dfrac{\text{Wärme } Q}{\text{Volumen}}; [u] = \dfrac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^3}$

$\vec{w} \mathrel{\hat{=}}$ Wärmestromdichte; $[w] = \dfrac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2} = \dfrac{\text{Wärme}}{\text{Zeit} \cdot \text{Fläche}}$

Somit gilt:

$$\boxed{\mathrm{div}\vec{w} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0}$$

Es handelt sich also um die Energieerhaltung.

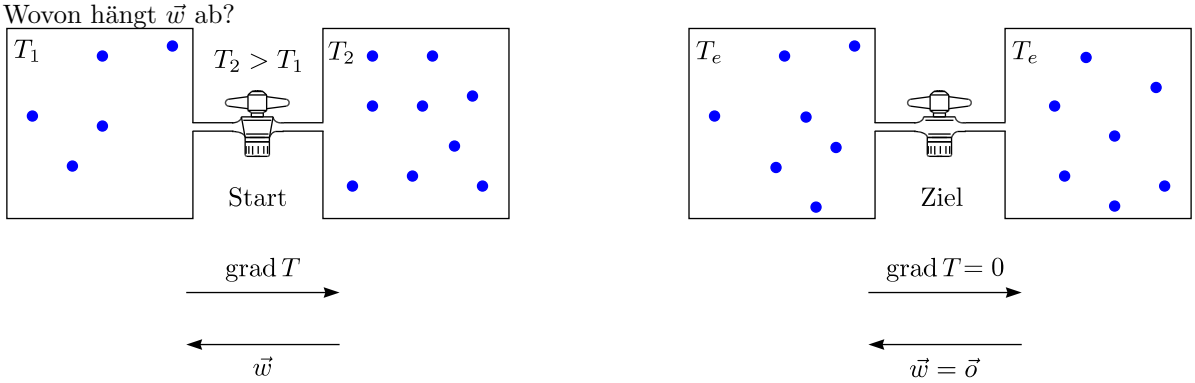
$n \mathrel{\hat{=}}$ Teilchendichte $= \dfrac{\text{Teilchenzahl } N}{\text{Volumen } V}; [n] = \dfrac{1}{\mathrm{m}^3}$

$\vec{i} \mathrel{\hat{=}}$ Teilchenstromdichte $= \dfrac{\text{Teilchenzahl}}{\text{Zeit} \cdot \text{Fläche}}; [i] = \dfrac{1}{\mathrm{sm}^2}$

$$\boxed{\mathrm{div}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0}$$

12.1 Wärmeleitung

Wovon hängt $\vec{w}$ ab?



Wir verwenden folgenden Ansatz:

$$\vec{w} = \kappa \cdot \operatorname{grad} T$$

Der Vorfaktor κ ist die sogenannte Wärmeleitfähigkeit.

$$[\kappa] = \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{K} \cdot \mathrm{m}}$$

Es handelt sich um eine materialspezifische Größe. Des weiteren kann κ explizit von der Temperatur abhängen:

$$\kappa = \kappa(T)$$

Einsetzen ergibt:

$$\operatorname{div} \vec{w} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

$$\operatorname{div} (-\kappa \cdot \operatorname{grad} T) + \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

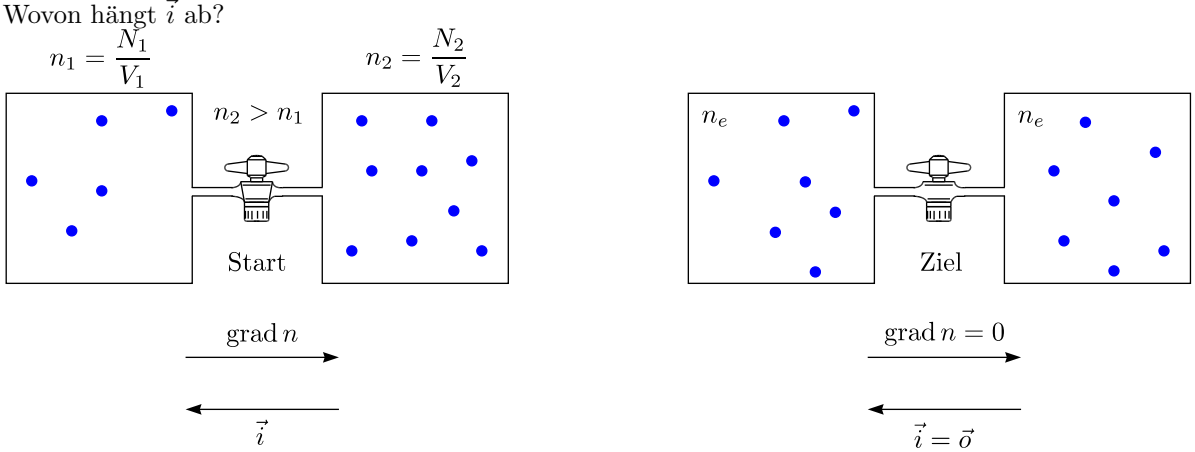
Mit der Wärmekapazität pro Volumen $\tilde{c}$ (siehe Kapitel 4.1) $u = \tilde{c} \cdot T$ und $\tilde{c} \neq \tilde{c}(T)$ und $\kappa \neq \kappa(T)$ gilt dann:

$$\boxed{\triangle T - \frac{\tilde{c}}{\kappa} \frac{\partial T}{\partial t} = 0}$$

Wir haben hier die sogenannte Wärmeleitungsgleichung. Diese gilt nicht nur für Gase. Sie ist ähnlich wie die Wellengleichung, nur haben wir anstelle der zweiten partiellen Ableitung nach t nur die erste Ableitung.

12.2 Diffusion

Wovon hängt $\vec{i}$ ab?



Wir verwenden den Ansatz:

$$\boxed{\vec{i} = -D \cdot \operatorname{grad} n}$$ 1.Ficksches Gesetz

$D \triangleq$ Diffusionskoeffizient, $[D] = \dfrac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}}$

D ist wieder materialspezifisch und kann außerdem von der Teilchenzahl abhängen:

$D = D(n)$

Durch Einsetzen folgt:

$$\operatorname{div} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

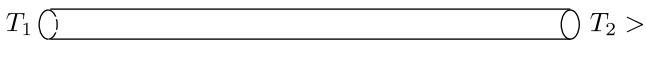
$$\operatorname{div} (-D \cdot \operatorname{grad} n) + \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

Mit $D \neq D(n)$ folgt hieraus die sogenannte Diffusionsgleichung:

$$\boxed{\triangle n - \frac{1}{D} \frac{\partial u}{\partial t} = 0}$$ 2.Ficksches Gesetz

Dieses Gesetz gilt nicht nur für Gase. Au0erdem ist sie mathematisch völlig äquivalent zur Wärmeleitungsgleichung.

Beispiel (Wärmeleitungsgleichung):

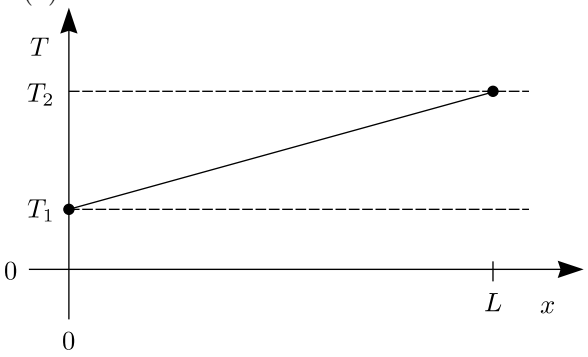


$$\triangle T - \frac{\tilde{c}}{\kappa} \frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

Wir interessieren uns nur für die stationäre Lösung:

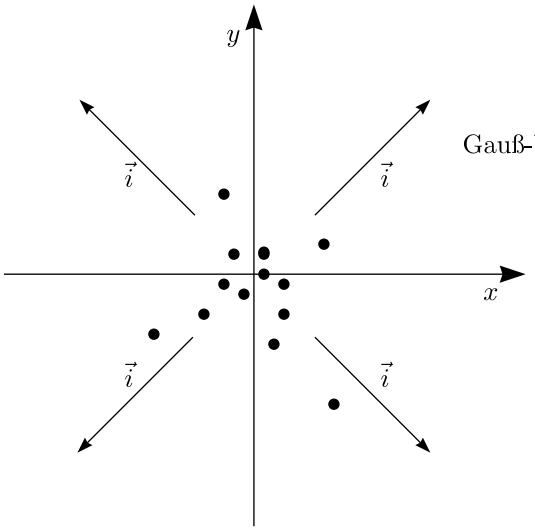
$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0 \Rightarrow \Delta T = 0$$

$T(x)$ ist dann eine Gerade.



Beispiel (Diffusionsgleichung in 2D):

Es sei die Anfangsverteilung bei $t = 0$ gegeben:

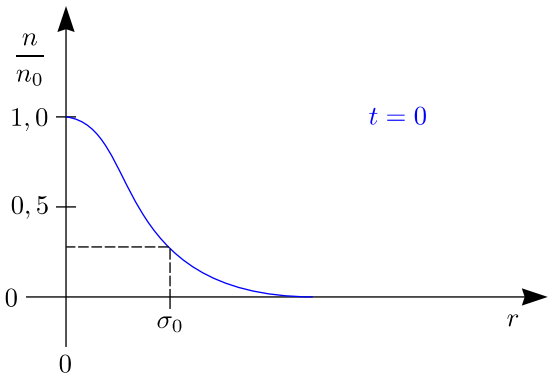


Gauß-Verteilung

Mit Polarkoordinaten folgt dann:

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

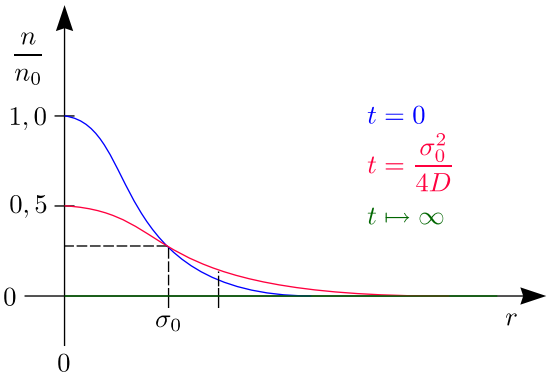
$$\boxed{n(r, t = 0) = n_0 \mathrm{e}^{-\left(\frac{r}{\sigma_0}\right)^2}}$$



Die Lösung lautet dann, wie man durch nachrechnen überprüfen sollte:

$$\triangle n - \frac{1}{D}\frac{\partial n}{\partial t} = 0$$

$$\boxed{n(r, t) = \left(\frac{\sigma_0}{\sigma(t)}\right)^2 n_0 \mathrm{e}^{-\left(\frac{r}{\sigma(t)}\right)^2} \text{ mit } \sigma^2(t) = \sigma_0^2 + 4Dt}$$



Bei der Diffusion ist der Fall:

$$\boxed{\text{Breite der Verteilung} \sim \sigma \sim \sqrt{t}}$$

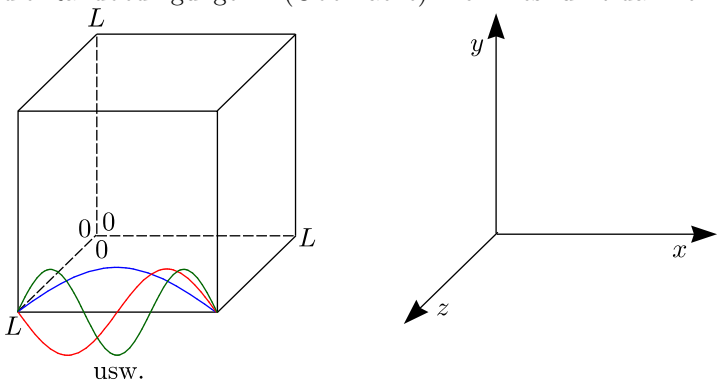
Zum Vergleich gilt für den freien Flug (ballistisch):

$$\boxed{\text{Breite der Verteilung} \sim t}$$

Kapitel 13

Das Plancksche Strahlungsgesetz

Im Photonen-Bild ist Licht in einem Körper nichts anderes als ein ideales Gas aus Photonen. Da die Photonenenergie gequantelt ist (siehe Quantenoptik), handelt es sich um ein Quantengas. In Erinnerung an die Quantenoptik betrachten wir einen von innen verspiegelten Würfel der Kantenlänge L (Hohlraum), d.h. es gibt die Randbedingungen $\vec{E}(\text{Oberfläche}) = \vec{o}$. Dies führt dann einfach zu stehenden Wellen.



$$\boxed{\vec{E} = \vec{E}_0 \sin(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z) \cdot \sin(\omega t)}$$

$$\boxed{\vec{k} = \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix}}$$

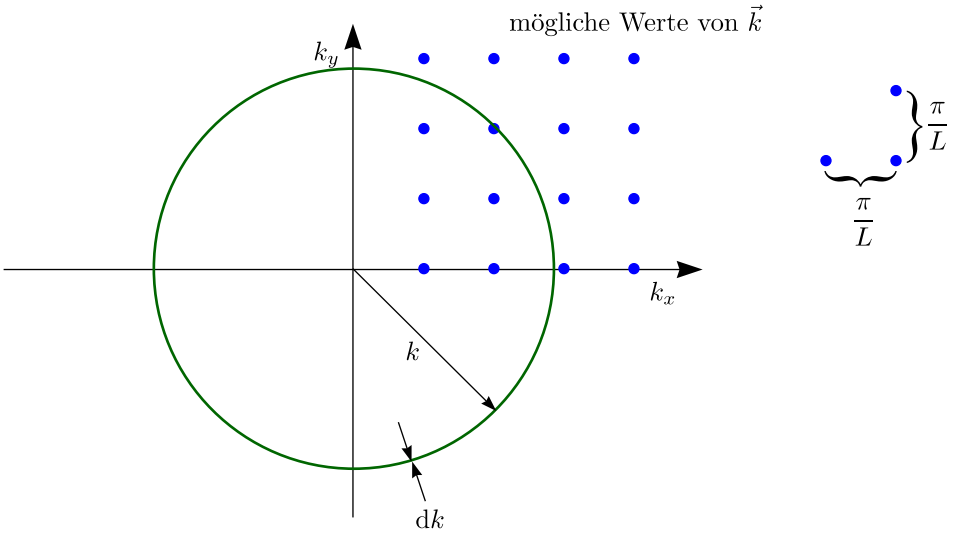
Folgenden Werte von k sind unter Erfüllung der Randbedingungen möglich:

$k_x = m_x \frac{\pi}{L}$ mit $m_x \in \mathbb{N}$

$k_y = m_y \frac{\pi}{L}$ mit $m_y \in \mathbb{N}$

$k_z = m_z \frac{\pi}{L}$ mit $m_z \in \mathbb{N}$

Beispielsweise führt $k_x = -\frac{\pi}{L}$ führt zu $\vec{E} \mapsto -\vec{E}$, was somit keine linear unabhängige Lösung dar.



Zu jedem $\vec{k}$ gibt es zwei linear unabhängige Polarisationsvektoren $\vec{E}_0$. Der Index σ bezeichne diese Möglichkeiten. Die Indizes $\vec{k}$ und σ numerieren alle möglichen linear unabhängigen Lösungen für $\vec{E}$ durch. Sie heißen auch Quantenzahlen. Jede Lösung hat eine Frequenz f mit $2\pi f = \omega_{k,\sigma}$. Die zugehörige Energie (Photonenenergie) ist quantisiert, d.h. es gilt:

$$E = n \cdot h \cdot f = n_{k,\sigma} \cdot \frac{h}{2\pi}\omega_{k,\sigma} \text{ mit } n_{k,\sigma} \in \mathbb{N}_0$$

Da die Energie nicht von der Polarisation abhängt, können wir den Index σ zuerst streichen:

$$E = n_k \cdot \frac{h}{2\pi}\omega_k$$

$$\boxed{E = n_k \cdot \hbar \cdot \omega_k} \text{ mit } \boxed{\hbar := \frac{h}{2\pi}}$$

Was ist die innere Energie U dieses Quantengases aus Photonen? $\hat{=}$ Plancksches Strahlungsgesetz

Die innere Energie ergibt sich jetzt einfach alls Summe aller Zustände, die das Quantengas einnehmen kann:

$$U = \langle E \rangle = \left\langle \sum_{k,\sigma} E_k \right\rangle = \sum_{k,\sigma} \langle E_k \rangle = \sum_{k,\sigma} \langle n_k \rangle \hbar \omega_k$$

Zunächst stellt sich die Frage, wie sich der Erwartungswert $\langle n_k \rangle$ berechnet.

13.1 Der Bose-(Planck)-Faktor

Wir erinnern uns an die Bestimmung von Mittelwerten (Erwartungswerten), z.B. den Mittelwert der Augenzahl $\langle A \rangle$ beim Würfeln. Dieser Mittelwert war gegeben durch:

$$\boxed{\langle A \rangle = \frac{\sum\limits_i A_i \cdot p_i}{\sum\limits_i p_i}}$$

Beim Würfel gilt nun:

$$p_i = \frac{1}{6};\ A_i = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$$

Damit ergibt sich also für $\langle A \rangle$:

$$\langle A \rangle = p \cdot \sum_i A_i = \frac{1}{6} \cdot (1+2+3+4+5+6) = \frac{1}{6} \cdot 21 = 3,5$$

p_i entspricht nun in der Thermodynamik dem Boltzmann-Faktor:

$$\boxed{\langle A\rangle = \frac{\sum\limits_i A_i \exp\left(-\frac{E_i}{k_B T}\right)}{\sum\limits_i \exp\left(-\frac{E_i}{k_B T}\right)}}$$

Damit folgt dann:

$$\langle n_k\rangle = \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} n \exp\left(-\frac{n\hbar\omega_k}{k_B T}\right)}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{n\hbar\omega_k}{k_B T}\right)}$$

Mit der Abkürzung $x = \exp\left(-\frac{\hbar\omega_k}{k_B T}\right)$ folgt dann:

$$\langle n_k\rangle = \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} n x^n}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n}$$

Für die geometrische Reihe im Nenner des Bruchs gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$

Für den Zähler notieren wir uns:

$$\sum_{n=0}^{\infty} k x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

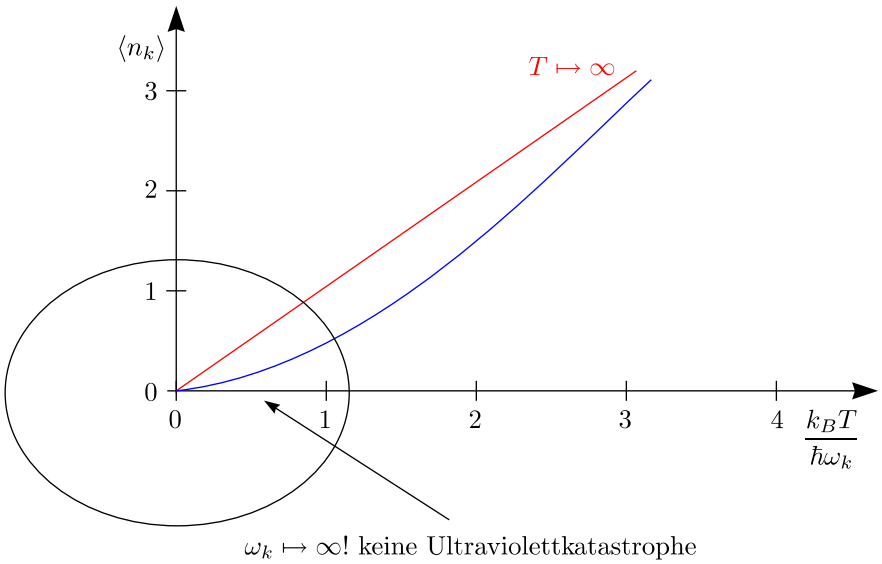
Also gilt:

$$\langle n_k\rangle = \frac{\frac{x}{(1-x)^2}}{\frac{1}{1-x}} = \frac{x}{1-x} = \frac{1}{\frac{1}{x}-1} = \frac{1}{\exp\left(+\frac{\hbar\omega_k}{k_B T}\right)-1}$$

$$\boxed{\langle n_k\rangle = \frac{1}{\exp\left(\frac{\hbar\omega_k}{k_B T}\right)-1}}$$

Dabei handelt es sich um die Bose-(Planck)-Verteilung oder auch den Bose-(Planck)-Faktor.

Graphisch:



$\omega_k \mapsto \infty$! keine Ultraviolettkatastrophe

Für $T \mapsto \infty$ folgt:

$$\langle n_k \rangle \approx \frac{1}{1 + \frac{\hbar\omega_k}{k_B T} - 1} = \frac{k_B T}{\hbar\omega_k}$$

Somit stehen wir bei:

$$U = \sum_{k,\sigma} \langle n_k \rangle \hbar\omega_k = \frac{1}{\exp\left(\frac{\hbar\omega_k}{k_B T}\right) - 1}$$

13.2 Die Zustandsdichte

„Summen sind lästig und Integrale sind schön."

Unser Vorgehen ist nun folgendes:

- 1.Schritt:

  Wir wollen die Summe in ein Integral überführen.

  $$\sum_{\vec{k}} \mapsto \int \mathrm{d}^3 k$$

- 2.Schritt:

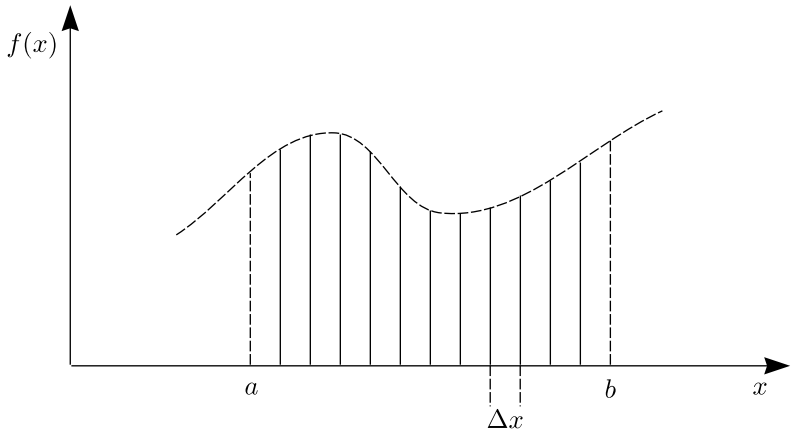
  Das dreidimensionale Integral über den $\vec{k}$-Raum soll zu einem eindimensionalen Integral über die Energie werden:

  $$\int \mathrm{d}^3 k \mapsto \int \mathrm{d}E$$

  Zu Erinnerung notieren wir uns nochmals die mathematische Definition des Integrals:

  $$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\Delta x \mapsto 0} \sum_i \Delta x f(x_i)$$

  Δx soll beliebig klein sein und die x_i beliebig dicht liegen.



Analog gilt also:

$$\Delta x \stackrel{\wedge}{=} \frac{\pi}{L}$$

$$\sum_{\vec{k}} \stackrel{\text{in 3D}}{=} \frac{1}{\left(\frac{\pi}{L}\right)^3} \int\limits_{k_x,k_y,k_z \geq 0} \mathrm{d}^3 k = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{\left(\frac{\pi}{L}\right)^3} \int \mathrm{d}^3 k$$

Da es zwei Polarisationsrichtungen gibt, gilt:

$$\sum_{\vec{k},\sigma} \mapsto 2 \cdot \frac{1}{\left(\frac{2\pi}{L}\right)^3} \int \mathrm{d}^3 k$$

Dies ist gerechtfertigt, weil beispielsweise für sichtbares Licht gilt:

$k = \frac{2\pi}{\lambda} \approx \frac{2\pi}{1\,\mu\mathrm{m}}$, Größe des Körpers $L \approx 1\,\mathrm{cm}$

$k = 10^4 \cdot \frac{2\pi}{L}$

Dann hat man also sehr feine Schritte.

$$U = \sum_{\vec{k},\sigma} \langle \vec{j}_{\vec{k}} \rangle \hbar\omega_k = \sum_{\vec{k},\sigma} \left(\langle n_k \rangle \hbar\omega_k \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta\left(E - \hbar\omega_k\right) \mathrm{d}E}_{=1} \right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{\vec{k},\sigma} \left(\langle n_k \rangle \hbar\omega_k \delta\left(E - \hbar\omega_k\right) \right) \mathrm{d}E$$

Aufgrund der δ-Funktion tragen nur die Werte von $\vec{k}$ in der Summe etwa bei mit $E = \hbar\omega_k$.

$$U = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{\vec{k},\sigma} \left(\underbrace{\langle n_{k(E)} \rangle}_{=:n(E)} E\delta\left(E - \hbar\omega_k\right) \right) \mathrm{d}E = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\left(\sum_{\vec{k},\sigma} \delta\left(E - \hbar\omega_k\right) \right)}_{=:D(E)} n(E) \cdot E \,\mathrm{d}E$$

Somit folgt als Zwischenergebnis:

$$\boxed{U = \int_{-\infty}^{+\infty} D(E) \cdot n(E) \cdot E \,\mathrm{d}E}$$

$D(E)$ ist die sogenannte Zustandsdichte; bei $n(E)$ handelt es sich um den schon definierten Bose-Faktor:

$$n(E) = \frac{1}{\exp\left(\frac{E}{k_B T}\right) - 1}$$

Wir müssen nun einfach den Ausdruck ausknorzen:

$$D(E) = \sum_{\vec{k},\sigma} \delta\left(E - \hbar\omega_k\right)$$

Die anschauliche Bedeutung ist ganz einfach. Es handelt sich um die Zahl der Zustände (Moden, stehende Wellen), deren Energien im Intervall $\frac{[E, E+\mathrm{d}E]}{\mathrm{d}E}$ liegen. Mathematisch gilt mit $\hbar\omega_k = \hbar \cdot c_0 \cdot k$:

$$D(E) = \sum_{\vec{k},\sigma} \delta\left(E - \hbar\omega_k\right)$$

Wir schreiben dies um in ein dreidimensionales Integral über $\vec{k}$:

$$D(E) = 2\frac{1}{\left(\frac{2\pi}{L}\right)^3} \int \delta\left(E - \hbar\omega_k\right) \mathrm{d}^3 k$$

Hier drängen sich dann Kugelkoordinaten auf:

$$D(E) = 2 \cdot \frac{1}{\left(\frac{2\pi}{L}\right)^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} \delta\left(E - \hbar\omega_k\right) k^2 \sin\vartheta \,\mathrm{d}\vartheta \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}k = 2 \cdot \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \cdot 4\pi \int_0^{\infty} \delta\left(E - \hbar c_0 k\right) k^2 \,\mathrm{d}k$$

Zur Erinnerung an die δ-Funktion:

$$\boxed{\delta\left(f(x)\right) = \sum_i \frac{1}{|f'(x_i)|} \delta\left(x - x_i\right)}$$

x_i sind hierbei die Nullstellen von $f(x)$. Die Nullstelle liegt bei $k = \frac{E}{\hbar c_0}$. Es gibt aber nur dann Nullstellen, wenn gilt:

$k = |\vec{k}| \geq 0 \Rightarrow E \geq 0$

Somit folgt für die Zustandsdichte:

$$D(E) = 2\left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \cdot 4\pi \cdot \frac{1}{\hbar c_0}\Theta(E) \cdot \left(\frac{E}{\hbar c_0}\right)^2$$

$$\boxed{D(E) = \frac{8\pi L^3}{(hc_0)^3}\Theta(E)E^2}$$

Dies ist die Zustandsdichte der Photonen im dreidimensionalen Vakuum. Die Heaviside-Funktion ist definiert durch:

$$\Theta(E) := \begin{cases} 1 & \text{für} \quad E > 0 \\ \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Damit folgt für die innere Energie U des Lichtfeldes:

$$U = \sum_{\vec{k},\sigma} \langle n_k \rangle \hbar\omega_k = \int_{-\infty}^{+\infty} D(E) \cdot n(E) \cdot E \,\mathrm{d}E = \frac{8\pi L^3}{(hc_0)^3} \int_0^{\infty} \frac{E^3}{\exp\left(\frac{E}{k_B T}\right) - 1} \,\mathrm{d}E$$

Oder mit $E = h \cdot f$ gilt für die innere Energie:

$$U = \frac{8\pi h L^3}{c_0^3} \int_0^{\infty} \frac{f^3}{\exp\left(\frac{hf}{k_B T}\right) - 1} \,\mathrm{d}f$$

Oder mit U aus der Optik-Vorlesung gilt:

$$U =: V \cdot \int_0^{\infty} u(f) \,\mathrm{d}f \text{ mit } V = L^3$$

$$\boxed{\boxed{u(f,T) = \frac{8\pi h}{c_0^3} \frac{f^3}{\exp\left(\frac{hf}{k_B T}\right) - 1}}}$$

Hier haben wir Somit das Plancksche Strahlungsgesetz erhalten. Weitere Diskussionen (Rayleigh-Jeans, Wiensches Verschiebungsgesetz, Stefan-Boltzmann-Gesetz) siehe Optik-Vorlesung.