

# EXPERIMENTALPHYSIK III - ZUSAMMENFASSUNG

Diese Zusammenfassung erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit oder Korrektheit.

Solltet ihr Fehler finden oder Ergänzungen haben, teilt sie mir bitte mit: richard.gebauer@student.kit.edu

## 1 Optik

### 1.1 Elektromagnetische Wellen im Vakuum

Maxwell-Gleichungen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho^{\text{Vak.}} \stackrel{!}{=} 0 \quad , \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad , \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad , \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \vec{j}^{\text{Vak.}} \stackrel{!}{=} \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Wellengleichung

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

Vakuum-Lichtgeschwindigkeit

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

Zusammenhang Frequenz und Wellenlänge

$$c = \lambda \cdot f$$

ebene elektromagnetische Welle

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t) = \text{Re} \left( \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \right)$$

$$\vec{B} = \frac{1}{\omega} \left( \vec{k} \times \vec{E} \right) = \frac{1}{c} \left( \vec{e}_k \times \vec{E} \right) \quad \text{mit Dispersionsrelation} \quad \omega = c|\vec{k}|$$

Poynting-Vektor

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$

Intensität

$$I := \langle S(t) \rangle = \left\langle \left| \vec{E}(t) \times \vec{H}(t) \right| \right\rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2$$

### 1.2 Lichtausbreitung im Medium

Dielektrische Verschiebung

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad \text{mit dielektrischer Polarisation } \vec{P} \text{ und relativer Dielektrizitätskonstante } \epsilon_r$$

Magnetische Feldstärke

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \vec{B} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} \quad \text{mit Magnetisierung } \vec{M} \text{ und Permeabilitätszahl } \mu_r$$

Maxwell-Gleichungen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{\text{frei}} \quad , \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad , \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad , \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}_{\text{frei}}$$

**Wellengleichung (im Folgenden  $\mu_r = 1$ )**

$$\Delta \vec{E} - \frac{\epsilon_r}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

**Dispersionsrelation**

Im Medium breiten sich EM-Wellen mit einer geringeren Geschwindigkeit  $v = c/n$  aus:

$$\omega = vk = \frac{c}{n}k = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}}k \quad \text{mit Brechzahl } n = \sqrt{\epsilon_r}$$

**Absorption und Dispersion**

Im Folgenden sei der Brechungsindex komplex, d.h.  $n = n_r - i\kappa$ , dann findet ebenfalls Absorption statt:

$$\vec{E} = \underbrace{\vec{E}_0 e^{-\kappa(\omega)\vec{k}_0\vec{r}}}_{\text{Absorption}} \underbrace{e^{i(\omega t - n_r(\omega)\vec{k}_0\vec{r})}}_{\text{Welle}} \quad \text{mit komplexer Wellenzahl } k = k_0(n_r - i\kappa) \quad \text{und } \vec{k}_0 = \frac{\omega}{c}\vec{e}_k$$

**Lambert-Beersches Absorptionsgesetz**

Aus dieser Absorption ergibt sich ein exponentielles Abfallen der Intensität mit zunehmender Eindringtiefe  $z$  in das Medium:

$$I = I_0 e^{-\alpha z} \quad \text{mit Absorptionskoeffizient } \alpha = 2\frac{\omega}{c}\kappa = \frac{4\pi}{\lambda_0}\kappa$$

**Phasen- und Gruppengeschwindigkeit**

$$v_{ph} = \frac{\omega}{k} \quad \text{Ausbreitungsgeschwindigkeit einer einzelnen Welle innerhalb eines Wellenpakets}$$

$$v_{gr} = \frac{d\omega}{dk} \quad \text{Ausbreitungsgeschwindigkeit der Einhüllenden eines Wellenpakets}$$

**1.3 Licht an der Grenzfläche zweier Medien**

Stetigkeitsbedingungen (für  $\rho_{\text{frei}} = 0$  und  $\vec{j}_{\text{frei}} = 0$ )

$$\vec{E}_{1,\parallel} = \vec{E}_{2,\parallel} \quad , \quad \vec{H}_{1,\parallel} = \vec{H}_{2,\parallel} \quad , \quad \vec{D}_{1,\perp} = \vec{D}_{2,\perp} \quad , \quad \vec{B}_{1,\perp} = \vec{B}_{2,\perp}$$

**Snellius-Brechungsgesetz**

$$n_t \sin \theta_t = n_i \sin \theta_i$$

**Grenzwinkel Totalreflexion**

Totalreflexion tritt nur bei Übergang von optisch dichterem zu optisch dünnerem Medium auf ( $n_i > n_t$ )

$$\theta_G = \arcsin(n_t/n_i)$$

**Feld-Reflexions- und Transmissionskoeffizient (für  $\theta_i = 0$ )**

$$r := \frac{E_r}{E_i} = \frac{n_i - n_t}{n_i + n_t}$$

$$t := \frac{E_t}{E_i} = \frac{2n_i}{n_i + n_t}$$

**Intensitäts-Reflexions- und Transmissionskoeffizient (für  $\theta_i = 0$ )**

$$R = \frac{I_r}{I_i} = r^2$$

$$T = \frac{I_t}{I_i} = t^2 \frac{n_t}{n_i}$$

**Fresnelsche Gleichungen**

Die Polarisation gibt die Ausrichtung des E-Felds zur Einfallsebene an: p - Parallel, s - Senkrecht

p-Polarisation	s-Polarisation
$r_p = \frac{n_i \cos \theta_t - n_t \cos \theta_i}{n_i \cos \theta_t + n_t \cos \theta_i}$	$r_s = \frac{n_i \cos \theta_i - n_t \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t}$
$t_p = \frac{2n_i \cos \theta_i}{n_i \cos \theta_t + n_t \cos \theta_i}$	$t_s = \frac{2n_i \cos \theta_i}{n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t}$

**Brewsterwinkel (für Polarisation des E-Feldes parallel zur Einfallsebene)**

Bei diesem Winkel findet für die parallele Komponente des E-Feldes keine Reflexion statt

$$\theta_B = \arctan(n_t/n_i)$$

**1.4 Licht in anisotropen Medien / Doppelbrechung****Dielektrizitätstensor**

$$\vec{P} = \epsilon_0(\tilde{\epsilon} - 1)\vec{E}$$

$$\tilde{\epsilon} \stackrel{Diag.}{\rightsquigarrow} \tilde{\epsilon}_{HA} = \text{diag}(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3) \rightsquigarrow n_1 = \sqrt{\epsilon_1}, \quad n_2 = \sqrt{\epsilon_2}, \quad n_3 = \sqrt{\epsilon_3}$$

**Außer- & Ordentlicher Strahl**

anisotrope Medien können eine ausgezeichnete Kristallachse mit Richtungsvektor  $\vec{a}$  besitzen. (z.B. falls  $n_{\perp} := n_1 = n_2 \neq n_3 := n_{\parallel}$ ) Dann sind aufgrund von verschiedenen Brechungsindizes bei Einfall von (unpolarisiertem) Licht zwei verschiedene Strahlen beobachtbar:

- $\vec{E} \perp \vec{a}$ : ordentlicher Strahl, wir setzen  $n_o = n_{\perp}$
- $\vec{E} \parallel \vec{a}$ : außerordentlicher Strahl, wir setzen  $n_a = n_{\parallel}$

Beide Strahlen sind zueinander orthogonal polarisiert. Im Allgemeinen muss man  $\vec{E}$  noch in eine parallele und eine orthogonale Komponente zerlegen.

 **$\lambda/4$ -Plättchen**

Einfallende lineare Polarisation mit  $\alpha = 45^\circ$  zur optischen Achse, wird zirkular polarisiert.

 **$\lambda/2$ -Plättchen**

Lineare Polarisation wird auf andere Seite der optischen Achse gespiegelt (um  $2\alpha$  gedreht)

**Optische Aktivität**

in optisch aktiven Medien haben zirkular polarisierte Wellen unterschiedliche Brechungsindizes:  $n^+$ ,  $n^-$   
Die Polarisationsebene wird beim Durchlaufen eines solchen Mediums der Länge  $d$  um  $\phi$  gedreht:

$$\phi = \frac{\pi}{\lambda_0} (n^- - n^+) d$$

## 1.5 Geometrische Optik

vernachlässigt Interferenzeffekte wie Beugung, d.h. der Querschnitt eines Lichtbündels muss groß gegen die Wellenlänge sein. Meistens beschränkt man sich auf die paraxiale Optik, bei welcher Lichtstrahlen nur einen kleinen Winkel mit der optischen Achse einschließen und nur kleine Abstände von ihr haben.

### Fermatsches Prinzip

Lichtstrahl läuft von A nach B auf einem Weg, dessen optische Weglänge (OPL) stationär bzgl. einer Änderung ist:

$$\delta \left[ \int_A^B n(s) ds \right] = 0$$

(Anschaulicher: Das Licht sucht sich immer den zeitlich kürzesten Weg.)

### Abbildungsmaßstab

$$\beta := \frac{B}{G}$$

### Vorzeichen-Konvention von Längen

- + Gegenstand/Bild/Brennpunkt reell (z.b. bei Linse: Gegenstand vorne; Brennpunkt, Bild hinten)
- Gegenstand/Bild/Brennpunkt virtuell

### Sphärischer Spiegel (Radius $R$ )

(Achsnahe) zur Achse parallele Strahlen treffen sich nach der Reflexion im Brennpunkt (Brennweite  $f$ )

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \quad \text{mit Brennweite } f = R/2$$

### Sphärisch gekrümmte Grenzfläche (Radius $R$ )

$$\frac{n_1}{g} + \frac{n_2}{b} = \frac{n_2 - n_1}{R} = \frac{n_2}{f_2} = -\frac{n_1}{f_1} \quad \text{mit Brennweiten } f_1 = \frac{n_2}{n_2 - n_1}R \text{ und } f_2 = \frac{n_1}{n_1 - n_2}R$$

$$\beta = -\frac{n_1}{n_2} \frac{b}{g}$$

### Dünne Linse

$$\text{Breckkraft } D = \frac{1}{f} = (n - 1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$$

$$\beta = \frac{f - b}{f}$$

### Dicke Linse

$$D = \frac{1}{f} = (n - 1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{(n - 1)d}{nR_1R_2} \right)$$

### Linsensystem (2 Linsen im Abstand $d$ )

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2}$$

## Linsenfehler

- Chromatische Aberration: Aufgrund der Dispersion (Wellenlängenabhängigkeit des Brechungsindex  $n(\lambda)$ ) werden verschiedenfarbige Wellen unterschiedlich stark gebrochen
- Sphärische Aberration: Da Linsen meist kugelförmig (sphärisch) geschliffen sind, werden achsferne Strahlen stärker gebrochen als achsnahe Strahlen
- Koma: Unscharfes Bild bei schiefstehender Linse oder falls der Gegenstand weiter von der optischen Achse entfernt ist
- Astigmatismus schiefer Bündel: Bei schräg in die Linse einfallenden Strahlenbündel, werden Strahlen aus unterschiedlichen Einfallsebenen unterschiedlich stark gebrochen, sodass ein Punkt letztlich als unscharfer Kreis abgebildet wird.
- Axialer Astigmatismus: Hier werden selbst achsenparallele Strahlen, die nicht schräg einfallen, astigmatisch (d.h. ein Punkt wird als Strich abgebildet) abgebildet. Dies tritt auf, falls die Linsen nicht komplett rotationssymmetrisch um die optische Achse sind.
- Blickfeldwölbung: Hierbei wird das Bild auf einer gewölbten Fläche erzeugt, weshalb beim Scharfstellen des Bildzentrums der Rand unscharf wird.
- Verzeichnung: Sie bewirkt, dass gerade Linien, die nicht die optische Achse schneiden, gekrümmt abgebildet werden. Man unterscheidet zwischen tonnenförmiger (Linien nach außen gewölbt) und kissenförmiger (Verzerrung nach innen) Verzeichnung

## Matrixmethoden der paraxialen Optik

Lichtstrahl wird durch Strahlparameter beschrieben:  $\begin{pmatrix} y \\ n\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Abstand z-Achse: oben positiv} \\ \text{Neigungswinkel: aufsteigend positiv} \end{pmatrix}$

- Translation um Länge  $d$ : Translationsmatrix  $\tilde{T} = \begin{pmatrix} 1 & d/n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- Reflexion an (sphärischem) Spiegel mit Radius  $R$ : Reflexionsmatrix  $\tilde{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2n/R & 1 \end{pmatrix}$
- Brechung an Kugelfläche mit Radius  $R$ : Brechungsmatrix  $\tilde{B}_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -D_{12} & 1 \end{pmatrix}$   
mit Brechkraft der Fläche  $D_{12} = \frac{n_2 - n_1}{R}$
- Linse: Abbildungsmatrix  $\tilde{M}_{AB} = \begin{pmatrix} 1 - b/f & g + b - bg/f \\ -1/f & 1 - g/f \end{pmatrix}$

## Jones-Vektoren und -Matrizen

beschreiben Polarisation von Licht und deren Veränderung in optischen Elementen

$$\vec{J} = \frac{1}{|\vec{E}|} \begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} e^{i\Delta\varphi} \end{pmatrix}$$

- Linearer Polarisator (unter Winkel  $\theta$  zur x-Richtung):  $M_{(x)} = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta \end{pmatrix}$
- Optische Verzögerungsplatte, die die Polarisationssebene dreht:  $M = \begin{pmatrix} e^{i\Delta\varphi_x} & 0 \\ 0 & e^{i\Delta\varphi_y} \end{pmatrix}$

## 1.6 Interferenz und Beugung

### Zeitliche Kohärenz

Zwei Teilwellen sind zeitlich kohärent, wenn sich ihre Phasendifferenz  $\Delta\varphi = \varphi_2(t) - \varphi_1(t)$  während der Beobachtungszeit  $\Delta t$  bei  $\vec{r}$  um weniger als  $2\pi$  ändert (Ursache: Differenzen und Fluktuationen in  $v, \lambda, \varphi$ ). Dies ist für Zeiten kleiner der Kohärenzzeit der Fall, nur in diesem Zeitraum kann Interferenz auftreten.

$$\text{Kohärenzzeit } \Delta t_c = \frac{2\pi}{\Delta\omega} = \frac{1}{\Delta\nu}$$

### Räumliche Kohärenz

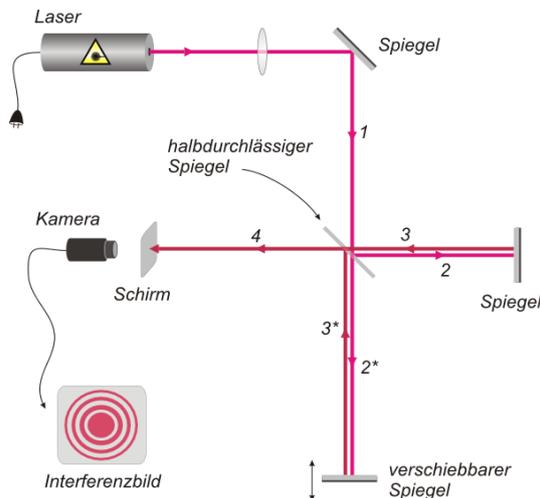
Eine Teilwelle ist räumlich kohärent, wenn sich die räumliche Phasendifferenz  $\Delta\varphi = \varphi(\vec{r}_2) - \varphi(\vec{r}_1)$  während der Beobachtungszeit  $\Delta t$  um weniger als  $2\pi$  ändert.

$$\text{Kohärenzlänge } l_c = c \cdot \Delta t_c$$

Kohärenzfläche  $A_c$  Fläche senkrecht zur Ausbreitungsrichtung, für die gilt:  $\Delta\varphi(\vec{r}) = 0$

Kohärenzvolumen  $V_c = A_c \cdot l_c$  (nur in diesem kann Interferenz beobachtet werden)

### Michelson-Interferometer



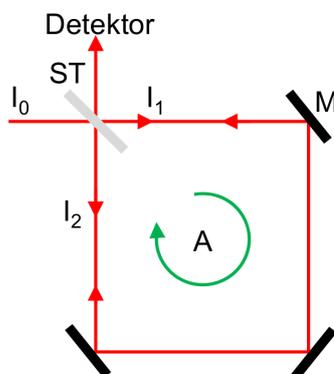
Der Strahlteiler (halbdurchlässiger Spiegel) in der Mitte zerlegt den eintreffenden Strahl in zwei Komponenten, die an unterschiedlich entfernten Spiegeln reflektiert werden, und schließlich mit einer Weglängendifferenz  $\Delta s$ , was einer Phasendifferenz  $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta s$  entspricht, auf dem Schirm ankommen.

Die Intensität der ankommenden Welle hängt hierbei auch von dem Reflexions- und Transmissionsvermögen des Strahlteilers  $R$  und  $T$  ab:

$$I = 2RT \cdot I_e (1 + \cos \Delta\varphi)$$

Hierbei verhalten sich die Interferenzmuster an Schirm und an der Quelle komplementär, wenn also am Schirm gerade ein Intensitätsmaxima ist, erhält man bei der Quelle ein Minima.

### Sagnac-Interferometer



Auch hier wird der einfallende Strahl mittels eines Strahlteilers (ST) zerlegt. Diesmal durchlaufen beide Strahlen allerdings die selbe Anordnung, lediglich in unterschiedlicher Richtung, bevor sie dann auf den Detektor treffen. Die Phasendifferenz kommt hier aufgrund einer möglichen Rotation des Systems zustande:

$$\Delta\varphi = \frac{8\pi A}{c\lambda} \Omega \cos \theta$$

Mit einem Sagnac-Interferometer lässt sich diese Rotation absolut bestimmen, denn für die Intensität gilt:

$$I = \frac{1}{2} I_0 (1 + \cos \Delta\varphi)$$

**Interferenz an einer planparallelen Platte (Dicke  $d$ )**

$$\Delta s = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}$$

Bei Reflexion tritt noch ein Phasenprung durch Reflexion am dichteren Medium auf:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta s - \pi$$

Dies ist bei der Transmission nicht der Fall:

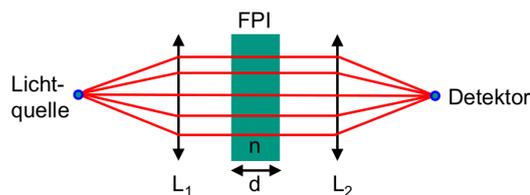
$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta s$$

Also sind Transmission und Reflexion komplementär.

**Vielstrahl-Interferenz an planparalleler Platte (Reflexionskoeffizient  $R$ )**

$$\text{Finesse-Koeffizient } F = \frac{4R}{(1-R)^2} \quad \text{und Phasendifferenz zw. benachbarten Strahlen } \Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta s$$

$$\text{Airy-Formeln: } I_R = I_0 \frac{F \cdot \sin^2(\delta\varphi/2)}{1 + F \sin^2(\Delta\varphi/2)} \quad , \quad I_T = I_0 \frac{1}{1 + F \sin^2(\Delta\varphi/2)}$$

**Fabry-Pérot-Interferometer (FPI)**

Ein eintreffender Lichtstrahl wird nur dann durch das Interferometer transmittiert, wenn er die Resonanzbedingung erfüllt:

$$\lambda_m = \frac{2nd}{m} \quad , \quad m \in \mathbb{N}$$

Hierbei wird der einkommende Strahl im FPI (z.B. zwischen zwei teildurchlässigen Spiegeln) sehr oft reflektiert, weswegen sich in diesem Interferenz ausbildet (solche Aufbauten nennt man auch Resonator). Nur wenn obige Bedingung erfüllt ist, tritt konstruktive Interferenz auf, sodass diese Wellenlängen bis zum Detektor kommen.

**Finesse beim (FPI)**

Je größer die Finesse, desto mehr Strahlenbündel interferieren miteinander und desto schärfer sind die Interferenzringe.

$$F^* = \frac{\delta f}{\Delta f} = \frac{\pi R}{1-R} = \frac{\pi}{2} \sqrt{F} \quad \text{mit freiem Spektralbereich } \delta f = f_{m+1} - f_m \quad \text{und Halbwertsbreite } \Delta f$$

Für die Halbwertsbreite in Transmission des FPI gilt folglich:  $\Delta f = \delta f / F^*$

**Huygenssches Prinzip**

Jeder Punkt ist Ausgangspunkt einer Elementarwelle, alle Elementarwellen überlagern sich

**Beugung am Spalt (Breite  $b$ , Winkel zur Flächennormalen  $\theta$ )**

$$I(\theta) = I_0 \left( \frac{\sin x}{x} \right)^2 \quad \text{mit } x = \frac{\pi b}{\lambda} \sin \theta$$

**Beugung an einer Kreisblende (Radius  $R$ )**

$$I(\theta) = I_0 \left( \frac{2J_1(x)}{x} \right)^2 \quad \text{mit } x = \frac{2\pi R}{\lambda} \sin \theta \quad \text{und Besselfunktion 1. Ordnung } J_1$$

**Beugung am Vielfachspalt/Gitter ( $N$  Spalte im Abstand  $d$  der Dicke  $b$ )**

$$I(\theta) = I_0 \underbrace{\left( \frac{\sin\left(\pi \frac{b}{\lambda} \sin\theta\right)}{\pi \frac{b}{\lambda} \sin\theta} \right)^2}_{\text{Einhüllende durch Einfachspalte}} \cdot \underbrace{\left( \frac{\sin\left(N\pi \frac{d}{\lambda} \sin\theta\right)}{\sin\left(\pi \frac{d}{\lambda} \sin\theta\right)} \right)^2}_{\text{Gitterinterferenz}}$$

**Fresnel-Kirchhoffsches Beugungsintegral (E-Feld-Amplitude in P (Abstand  $r$ ))**

$$E_P = \iint C \cdot E_S \frac{e^{-ikr}}{r} dx dy \quad \text{mit Feldamplitude am Schirm } E_S \quad \text{und (Näherung) } C = i \cdot \cos\theta/\lambda$$

**Fresnel-Näherung des Beugungsintegrals**

$$E(x', y', z_0) = i \frac{e^{-ikz_0}}{\lambda z_0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E(x, y) \cdot \exp\left[\frac{-ik}{2z_0} ((x-x')^2 + (y-y')^2)\right] dx dy$$

**Fraunhofer-Näherung des Beugungsintegrals**

$$E(x', y', z_0) = i \frac{e^{-ikz_0}}{\lambda z_0} e^{\frac{-ik(x'^2 + y'^2)}{2z_0}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E(x, y) \cdot \exp\left[\frac{+ik}{z_0} (xx' + yy')\right] dx dy$$

**Babinet'sches Theorem**

Zerlegt man die Blendenfläche  $\sigma$  in zwei beliebige Teilflächen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$ , so gilt:

$$E_P(\sigma) = E_P(\sigma_1) + E_P(\sigma_2)$$

**Fourierdarstellung der Fraunhofer-Beugung**

Das Beugungsbild ist proportional zur Fouriertransformation der Feldverteilung in der beugenden Öffnung:

$$\text{Beugungsbild } E'(x, y) \propto \tilde{E}(x, y) \text{ Fouriertransformierte Aperturfunktion}$$

**Streuquerschnitt von Dipolen**

$$\sigma_s \propto \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2}$$

**1.7 Optische Instrumente****Winkelvergrößerung**

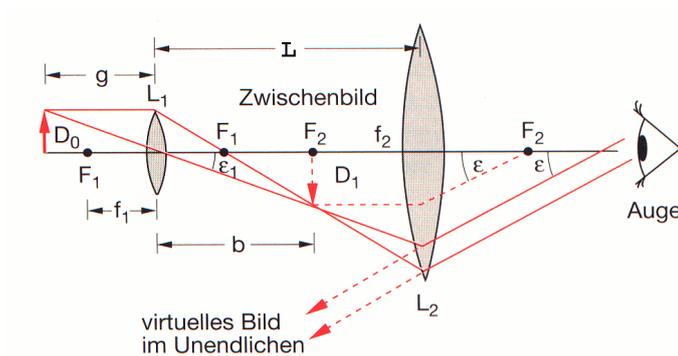
$$V = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = \frac{\text{Sehwinkel mit Instrument}}{\text{Sehwinkel ohne Instrument}}$$

**Normalvergrößerung**

Gegenstand in der Brennebene im Vergleich zu einem Gegenstand bei der Bezugssehweite  $s_0 = 0,25m$

$$\text{Lupe } V_L = \frac{s_0}{f}$$

## Mikroskop

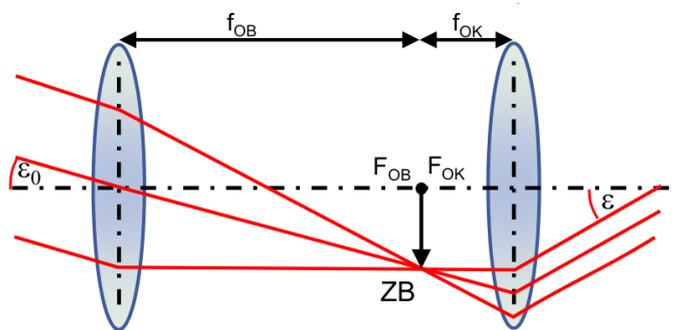


kurzbrennweitiges Objektiv erzeugt reelles Zwischenbild in Brennebene des Okulars

$$V_M = -\frac{t \cdot s_0}{f_{OB} \cdot f_{OK}}$$

mit Tubuslänge  $t$

## Keplersches Fernrohr



Zwei Sammellinsen (erst Objektiv OB (beim Objekt), dann Okular OK (beim Auge - lat. oculus)) mit gemeinsamer Brennebene, das Objektiv hat eine große Brennweite

$$V_F = -\frac{f_{OB}}{f_{OK}}$$

Das Bild wird hierbei allerdings invertiert (daher auch das Minus bei der Vergrößerung)

## Holländisches (Galileisches) Fernrohr

Das Okular ist jetzt eine Zerstreuungslinse, sodass hier keine Invertierung des Bildes mehr auftritt. Die Brennpunkte der beiden Linsen fallen jetzt auf der Seite des Beobachters zusammen, statt wie bei dem Kepler Fernrohr zwischen den Linsen.

## Rayleigh-Kriterium (Optische Apparatur mit Durchmesser $D$ )

Zwei punktförmige Lichtquellen lassen sich trennen, falls das Maximum des einen Beugungsscheibchens auf das 1. Minimum des anderen fällt. Für den kleinsten noch auflösbaren Winkelabstand ergibt dies:

$$\delta_{\min} \approx 1,22 \cdot \lambda / D$$

## Spektrometer: Spektrales Auflösungsvermögen

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{D}{2} \frac{d\theta}{d\lambda} \quad ; \text{ für } \delta\text{-förmiger Spalt entfällt der Faktor } 2$$

$$\text{Allgemein: } \frac{\lambda}{\Delta\lambda} \leq \frac{\Delta s_{\max}}{\lambda} \quad \text{und mit der maximale Laufzeitdifferenz } \Delta T_{\max} \text{ auch: } \Delta f \cdot \Delta T_{\max} \geq 1$$

## 1.8 Techniken der Modernen Optik

### Evaneszente Welle (quantenmechanisches Tunneln von Photonen)

dringt in Material ein, in dem sie sich nicht ausbreiten kann, und klingt dort exponentiell ab:

- Tiefendiskriminierung durch Totalreflexion: Einfallswinkel zur Grenzschicht größer als kritischer Winkel  $\theta_c = \arcsin(n_2/n_1)$  (ab diesem findet Totalreflexion statt)

$$\text{Eindringtiefe } d = \frac{\lambda_0}{4\pi n_1 \sqrt{\sin^2 \theta_i - \sin^2 \theta_c}}$$

- in einem Spalt der Breite  $b < \lambda$ : Öffnung zu klein für die Welle  
Wellenzahl im Spalt  $k_z^2 = k_i^2 - \left(\frac{\pi}{b}\right)^2$   
Für  $b < \lambda/2$ : exponentiell gedämpfte Welle ( $k_z$  imaginär)

### Phasengitter

Geätzte Glasplatte (Brechungsindex  $n$ ) mit Erhebungen und Vertiefungen der Breite  $d/2$  und Höhe  $h$ :

$$\text{Maxima-Bedingung: } \sin \alpha_m = \frac{(n-1)h - m\lambda}{d/2} \quad \text{mit } m = m_2 - m_1 \in \mathbb{Z}$$

## 1.9 Quantenoptik

### Lichtquantenmodell

Photoeffekt: max. kin. Energie der Elektronen  $E_{\text{kin}}^{\text{max}} = hf - W_A$  mit Austrittsarbeit  $W_A$

$$\text{Energie eines Lichtquants } E = hf$$

$$\text{Impuls eines Lichtquants } p = E/c = \frac{hf}{c}$$

**Rayleigh-Jeans-Gesetz (nur für kleine Frequenzen, sonst „Ultraviolett-Katastrophe“)**

für die spektrale Energiedichte der Hohlraumstrahlung gilt:

$$w_f(f)df = n(f) \cdot \bar{W}_f(T)df = \frac{8\pi f^2}{c^3} \cdot k_B T df$$

### Plancksches Strahlungsgesetz

Spektrale Energiedichte der Hohlraumstrahlung:

$$w_f(f, T) = \frac{8\pi f^2}{c^3} \cdot \frac{hf}{e^{\frac{hf}{k_B T}} - 1} = n(f) \cdot \bar{W}(f, T)$$

mit spektraler Modendichte (Anzahl Moden zwischen  $f$  und  $f + \Delta f$ ):  $n(f)$

mittlerer Energie einer Mode  $\bar{W}(f, T) = hf \cdot f_{BE}$

$$\text{und Bose-Einstein Verteilung } f_{BE} = \frac{1}{e^{\frac{hf}{k_B T}} - 1}$$

### de Broglie-Wellenlänge eines Teilchens

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m \cdot E_{\text{kin}}}}$$

## 2 Thermodynamik

### 2.1 Grundbegriffe der Thermodynamik

Teilchenzahl  $N = n \cdot N_A$  mit Anzahl Mole  $n$

### 2.2 Ideale Gase

Allgemeines Gasgesetz

$$pV = Nk_B T = nRT$$

**Mittlere (kinetische) Energie: Brownsche Bewegung**

$$\overline{E_{\text{kin}}} = \frac{f}{2} k_B T \quad \text{mit Anzahl Freiheitsgraden } f \quad (3 \text{ für einatomiges ideales Gas})$$

**Barometrische Höhenformel (Vereinfachung:  $T = \text{const.}$ )**

$$p = p_0 e^{-\rho_0 g h / p_0}$$

**Boltzmann-Verteilung**

gibt Wahrscheinlichkeit  $P_i$  an, dass sich ein System mit Energiezuständen  $E_1, E_2, \dots$  bei Temperatur  $T$  im Zustand  $E_i$  befindet, an:

$$P_i = g_i \cdot e^{-E_i / k_B T} \quad \text{mit statistischem Gewicht } g_i \text{ des Zustands } i$$

**Maxwell-Boltzmann-Geschwindigkeitsverteilung**

$$f_{\text{MB}}(v) \cdot dv = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left( \frac{m}{k_B T} \right)^{3/2} v^2 \cdot e^{-mv^2 / 2k_B T} \cdot dv$$

$$\text{Wahrscheinlichste Geschwindigkeit } v_w = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}}$$

$$\text{Mittlere Geschwindigkeit } \bar{v} = \int_0^\infty v \cdot f_{\text{MB}}(v) \cdot dv = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}}$$

$$\text{Root-Mean-Square Geschwindigkeit } v_{\text{RMS}} = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$$

**Entropie (Boltzmannsche Definition)**

Entropie ist Maß für Anzahl der möglichen (mikroskopischen) Zustände eines Systems:

$$S = k_B \ln W \quad \text{mit Anzahl Realisierungsmöglichkeiten } W$$

**2.3 Die Temperatur****Thermische Ausdehnung fester Körper**

$$L(T_c) = L(0) \cdot (1 + \alpha T_c) \quad \text{mit linearem Ausdehnungskoeffizient } \alpha$$

**Gay-Lussac: Thermische Ausdehnung von idealen Gasen**

$$V = V_0 \cdot (1 + \gamma T_c) \quad , \quad p = p_0 \cdot (1 + \gamma T_c) \quad \text{mit } \gamma = \frac{1}{273,15^\circ\text{C}}$$

**2.4 Wärmemenge und Spezifische Wärme****Wärmemenge**

$$\Delta Q = C \cdot \Delta T = c \cdot m \cdot \Delta T \quad \text{mit Wärmekapazität } C \text{ und spez. Wärmekapazität } c$$

**Molare Wärmekapazität**

$$\Delta Q = n \cdot C_m \cdot \Delta T \quad \text{mit spezifischer Molwärme bzw. molarer Wärmekapazität}$$

**Innere Energie U**

gesamte Energie eines Systems, z.B. von  $N$  Molekülen eines idealen Gases mit Volumen  $V$ :

$$U = \frac{1}{2} \cdot f \cdot N k_B T$$

**Molare Wärmekapazität bei konstantem Volumen**

$$C_V = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = \frac{1}{2} f R$$

**Molare Wärmekapazität bei konstantem Druck**

$$C_p = C_V + R = \frac{1}{2} (f + 2) R$$

**Adiabatindex**

$$\kappa = \frac{C_p}{C_V} = \frac{f + 2}{f}$$

**Adiabatengleichungen (Adiabatische Zustandsänderung:  $\Delta Q = 0$ )**

$$T \cdot V^{\kappa-1} = \text{const.}$$

$$p \cdot V^\kappa = \text{const.}$$

**Dulong-Petitsches-Gesetz**

für aus einzelnen Atomen zusammengesetzte Festkörper gilt:

$$C_V \approx 3R$$

**Debyesches  $T^3$ -Gesetz (für kleine Temperaturen)**

$$C_V \propto T^3$$

**2.5 Wärmetransport**

Drei Arten: Konvektion, Wärmeleitung, Wärmestrahlung

**Wärmeleitungsgleichung 1D**

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{c\rho} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \text{mit Wärmeleitfähigkeit } \lambda, \text{ spez. Wärmekapazität } c \text{ und Massendichte } \rho$$

**Wärmeleitung in festem Körper (Fouriersches Gesetz)**

Hat man zwei parallele Wandflächen der Temperaturen  $T_2 > T_1$ , so gilt:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\lambda}{L} A (T_2 - T_1)$$

mit Länge des Körpers  $L$  und Querschnittsfläche  $A$  (durch die die Wärme strömt)

**Allgemeine Wärmeleitungsgleichung**

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{c\rho} \cdot \Delta T \quad \text{mit Laplace-Operator } \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

**Wiedemann-Franz-Gesetz ("gute elektrische Leiter sind gute Wärmeleiter")**

$$\frac{\lambda}{\sigma} = a \cdot T \quad \text{mit } a = \frac{\pi^2 k_B^2}{3e^2} = 2,45 \cdot 10^{-8} \text{ V}^2 \text{ K}^{-2} \text{ und el. Leitfähigkeit } \sigma$$

**Wärmeleitung in Gasen (für mittlere freie Weglänge  $\Lambda \ll d$  Breite des Raums)**

$$\frac{dQ}{dt} = -\lambda A \frac{dT}{dx} \quad \text{mit Wärmeleitfähigkeit } \lambda = \frac{1}{12} f \rho k_B \bar{v} \Lambda = \frac{1}{12} \frac{f k_B \bar{v}}{\sigma} \quad \text{mit Stoßquerschnitt } \sigma = \pi (r_1 + r_2)^2$$

**Integrales Absorptionsvermögen**

$$A^* = \frac{\text{absorbierte Strahlungsleistung}}{\text{auftreffende Strahlungsleistung}}$$

Ein Körper mit  $A^* = 1$  heißt „schwarzer Körper“.

**Strahlungsdichte  $S^*$** 

abgestrahlte Leistung der Quelle pro Flächeninhalt und Raumwinkel in Richtung der Flächennormalen

$$\frac{\Delta W(\theta)}{\Delta t} = S^* \cos \theta \Delta F \Delta \Omega \quad \Rightarrow \quad S^* = \frac{d^2 P}{\cos \theta \cdot dA \cdot d\Omega}$$

**Lambertsches Kosinusetz: Strahlungsleistung pro Raumwinkel**

$$J(\theta) = \int_F S^* \cos \theta dF = J_0 \cos \theta \quad \text{mit Winkel zwischen Ausbreitungsrichtung und Flächennormalen } \theta$$

**Lambertscher Strahler**

$$S^* = \text{const.}$$

**spektrales Emissionsvermögen  $E_f^*$** 

$$\frac{\Delta W_E}{dt} = E_f^* dF d\Omega df$$

**Kirchhoffsches Gesetz**

$$\frac{E_f^*}{A_f^*} = S_f^*(T)$$

**Wiensches Verschiebungsgesetz (für schwarze Körper)**

$$\lambda_{\max} \cdot T = \text{const.} = 2,898 \cdot 10^{-3} \text{ m K}$$

**Stefan-Boltzmann-Gesetz**

$$\int_0^\infty S_\lambda^*(T) d\lambda \propto T^4$$

Mit Emissionsgrad  $\epsilon$ , Fläche  $A$  und Stefan-Boltzmann-Konstante  $\sigma = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15h^3 c^2} = 5,670 \cdot 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2 \text{K}^4)$ :

$$P = \epsilon \cdot A \cdot \sigma \cdot T^4$$

**2.6 Die Hauptsätze der Thermodynamik****Nullter Hauptsatz (Gesetz des thermischen Gleichgewichts)**

Das thermische Gleichgewicht ist transitiv, d.h. sind zwei Systeme A und B, sowie A und C im Gleichgewicht, so sind auch B und C im thermischen Gleichgewicht.

**Erster Hauptsatz (Energieerhaltung)**

Summe aus zugeführter Wärmemenge  $\Delta Q$  und Arbeit  $\Delta W$  entspricht Zunahme der inneren Energie  $\Delta U$

$$\Delta U = \Delta Q + \Delta W$$

Für ein ideales Gas bei infinitesimaler Expansion gegen einen Druck  $p$ :

$$dU = dQ - pdV$$

## Zweiter Hauptsatz (Entropiesatz)

Die Gesamtentropie nimmt immer zu

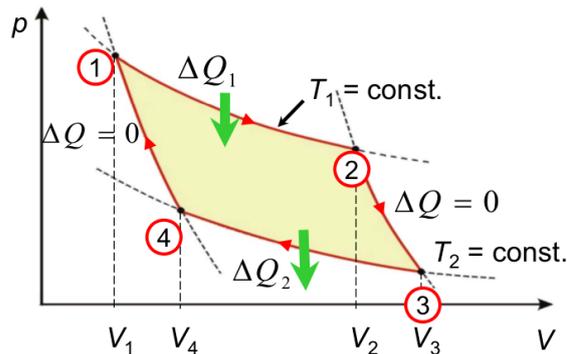
$$\Delta S \geq 0$$

## Dritter Hauptsatz (Nernstsches Theorem, Absoluter Nullpunkt)

Es ist prinzipiell unmöglich, den absoluten Temperaturnullpunkt zu erreichen.

$$\text{Für reine Stoffe: } S(T = 0) = 0$$

## Carnotscher Kreisprozess



- 1 → 2: Isotherme Expansion ( $T = T_1 = \text{const.}$ )
- 2 → 3: Adiabatische Expansion ( $\Delta Q = 0$ )
- 3 → 4: Isotherme Kompression ( $T = T_2 = \text{const.}$ )
- 4 → 1: Adiabatische Kompression ( $\Delta Q = 0$ )

Der Wirkungsgrad der Carnot-Maschine ist:

$$\eta = \left| \frac{\text{geleistete Arbeit}}{\text{aufgenommene Energie}} \right| = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1} < 1$$

Alle vollständig reversiblen Kreisprozesse ( $\Delta S = 0$ ) haben den gleichen Wirkungsgrad  $\eta = \eta_{\text{Carnot}}$ .

Weiter gibt es keine periodisch arbeitende Maschine mit  $\eta > \eta_{\text{Carnot}}$ .

## Entropie

Entropie ist bei reversiblen Prozessen eine Zustandsgröße (Nur von Anfangs- und Endzustand abhängig)

$$dS = \frac{dQ}{T}$$

In einem abgeschlossenen System kann die Entropie nicht abnehmen, bei reversiblen Prozessen bleibt sie konstant, bei irreversiblen Prozessen nimmt sie zu.

## Mischungsentropie

Wenn paarweise verschiedene Moleküle der Teilchenzahlen  $N_i$  vermischt werden:

$$\Delta S_{\text{mix}} = -k_B \sum_i N_i \ln \frac{N_i}{N} \quad \text{mit Gesamtteilchenanzahl } N = \sum_i N_i$$

## Thermodynamische Potentiale

Können zur Beschreibung von Gleichgewichtszuständen benutzt werden, diese sind je nach Prozess erreicht, wenn das Potential stationär, meist minimal, ist.

Potential	Formel	Prozess für Gleichgewicht
Innere Energie	$U = U(S, V)$	adiabatisch-isochor
Enthalpie	$H = H(S, p) = U + pV$	adiabatisch-isobar
Freie Energie (Helmholtz-Potential)	$F = F(T, V) = U - TS$	isochor-isotherm
Freie Enthalpie (Gibbs-Potential)	$G = G(T, p) = H - TS$	isobar-isotherm

**Guggenheim-Quadrat: Partielle Ableitungen der Potentiale**

Zustandsgrößen lassen sich als partielle Ableitungen dieser Potentiale schreiben:

- S	U	V
H		F
- p	G	T

Vorgehen:

Größe aus einer Ecke auswählen, z.B.  $-S$ .  
Symbol in gegenüberliegender Ecke ist der  
Nenner. Eines dem Nenner benachbarten  
Symbol ist der Zähler. Die dritte Größe  
an dieser Seite ist die konstante Größe.

Merkspruch:

Schon unsere Vorfahren favorisierten  
Trinkgelage gegenüber physikalischen  
Herleitungen.

$$S = - \left( \frac{\partial G}{\partial T} \right)_p = - \left( \frac{\partial F}{\partial T} \right)_V$$

$$p = - \left( \frac{\partial F}{\partial V} \right)_T = - \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_S$$

$$V = \left( \frac{\partial G}{\partial p} \right)_T = \left( \frac{\partial H}{\partial p} \right)_S$$

$$T = \left( \frac{\partial U}{\partial S} \right)_V = \left( \frac{\partial H}{\partial S} \right)_p$$

**Isochore Prozesse** ( $V = \text{const.}$ )

$$dU = dQ = nC_V dT$$

$$\Delta S = nC_p \ln \frac{T_2}{T_1} - nR \ln \frac{p_2}{p_1}$$

**Isobare Prozesse** ( $p = \text{const.}$ )

$$dH = dQ = dU + pdV = nC_p dT$$

$$\Delta S = nC_V \ln \frac{T_2}{T_1} + nR \ln \frac{V_2}{V_1}$$

**Isotherme Prozesse** ( $T = \text{const.}$ )

$$dQ = pdV$$

$$p \cdot V = nRT = \text{const.}$$

$$\text{Isotherme Expansion: } \Delta Q = \int_{V_1}^{V_2} pdV = RT \ln \frac{V_2}{V_1}$$

**Adiabatische Prozesse** ( $dQ = 0$ )

$$\text{Adiabatengleichungen(s.o.): } T \cdot V^{\kappa-1} = \text{const.}, \quad p \cdot V^{\kappa} = \text{const.}$$

$$\text{Adiabatische Expansion: } \Delta U = U(T_2) - U(T_1)$$

**2.7 Reale Gase und Flüssigkeiten**

**Kovolumen**  $b$

$$V_{\text{neu}} = V - nb \quad \text{mit } b = 4N_A \cdot V_{\text{Teilchen}}$$

**Binnendruck**  $p_B$

$$p_{\text{neu}} = p + p_B \quad \text{mit } p_B = a \frac{n^2}{V^2} \quad \text{mit Stoffkonstante } a$$

**Van-der-Waals Zustandsgleichung**

$$\left( p + a \frac{n^2}{V^2} \right) (V - nb) = nRT$$

### Innere Energie

Aufgrund von gegenseitigen Wechselwirkungen hängt die innere Energie auch vom Volumen ab:

$$U(T, V) = \frac{f}{2} nRT - a \frac{n^2}{V}$$

### Latente Wärme

zugeführte Wärme, die nicht zur Erhöhung der Temperatur führt, sondern zum Aufbrechen von Bindungen verwendet wird: Schmelzwärme  $W_S$  und Verdampfungswärme  $W_V$

### Clausius-Clapeyron-Gleichung

$$W_V = nT \frac{dp_S}{dT} (V_D - V_{Fl})$$

### van't Hoff'sche Gleichung: Dampfdruckkurve

Druck, bei dem der Übergang zwischen flüssig und dampfförmig stattfindet:

$$p_S(T) = A \cdot p_0 \cdot e^{-W_V/RT} \quad \text{mit } A = e^{W_V/RT_0}$$

### Kritischer Punkt

ab diesem können flüssige und gasförmige Phase nicht mehr unterschieden werden

$$a = 3p_k V_k^2 \quad , \quad b = \frac{1}{3} V_k$$

### Joule-Thomson-Effekt

Entspannung eines realen Gases durch ein Drosselventil (isenthalpischer Prozess ohne äußere Arbeit):

$$\mu_{JT} = \left( \frac{\partial T}{\partial p} \right)_H = \frac{V}{C_p} (\alpha T - 1) \quad \text{mit therm. Ausdehnungskoeffizient } \alpha = \frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$$

### Inversionstemperatur

Unterhalb dieser Temperatur kann ein Gas mit dem Joule-Thomson-Effekt gekühlt werden

$$T_I = \frac{2a}{bR}$$

### Schmelzwärme

$$W_{\text{Schmelz}} = T \frac{dp_{\text{Schmelz}}}{dT} (V_{fl} - V_f)$$

### van't Hoff'sches Gesetz

Osmose: Semipermeable Membran erlaubt Diffusion von Lösungsmittelmolekülen, verhindert aber Diffusion von gelösten Molekülen. Dadurch stellt sich eine Druckdifferenz zwischen den Seiten der Membran ein, der osmotische Druck  $p_{\text{osm}}$ .

Dieser entspricht dem des Gases gleicher Konzentration ohne Lösungsmittel:

$$p_{\text{osm}} V = nRT \quad \Rightarrow \quad p_{\text{osm}} = cRT \quad \text{mit molarer Konzentration } c \text{ des gelösten Stoffs}$$

### Dampfdruckerniedrigung

In (verdünnten) Lösungen erhält man einen niedrigeren Sättigungsdampfdruck:

$$-\Delta p_{LM+L} = p_{LM} \frac{n_L}{n_{LM}}$$

### Raoult'sches Gesetz

Aus der Dampfdruckerniedrigung resultiert eine Erhöhung der Siedetemperatur:

$$\Delta T_{\text{Siede}} = \frac{RT^2}{W_V} \frac{n_L}{n_{LM}}$$

und analog eine Erniedrigung des Schmelzpunktes:

$$\Delta T_{\text{Schmelz}} = -\frac{RT^2}{W_S} \frac{n_L}{n_{LM}}$$

## 3 Nützliches

### 3.1 Konstanten

Name und Symbol	Wert	Einheit
Plancksches Wirkungsquantum $h$	$6,626 \cdot 10^{-34}$	$\text{J s} = \text{kg m}^2 \text{s}^{-1}$
reduziertes Wirkungsquantum $\hbar = h/2\pi$	$1,055 \cdot 10^{-34}$	$\text{J s} = \text{kg m}^2 \text{s}^{-1}$
Avogadro-Zahl $N_A$	$6,022 \cdot 10^{23}$	$\text{mol}^{-1}$
Boltzmann-Konstante $k_B$	$1,381 \cdot 10^{-23}$	$\text{J K}^{-1}$
Gaskonstante $R = N_A k_B$	8,314	$\text{J}/(\text{molK})$