

Kleiner Leitfaden durch die Optik-Vorlesung

Dieser Leitfaden erhebt keinerlei Anspruch auf Vollständigkeit und soll zur Orientierung dienen, warum die Vorlesung genau so aufgebaut war. Die wichtigsten Ergebnisse sind noch einmal zusammen gefasst.

0. Geschichtlicher Abriss

1. Was ist Licht?

Physikalische und Physiologische Größen, Kohärenz, Interferenz

2. Erinnerung an die Elektrodynamik

2.1. Die Maxwell-Gleichungen

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}$$

im Vakuum:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$$

zur Erinnerung:

2.1.1. Der Poynting-Vektor $\mathbf{S}$

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$$

Die Energiedichte des elektromagnetischen Feldes beträgt:

$$w = \frac{1}{2} (\mathbf{D} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H})$$

Diese Formel gilt nur für nicht-dispersive Medien!

$$\frac{\partial}{\partial t} w = - \underbrace{\operatorname{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H})}_{\text{Abstrahlung}} - \underbrace{\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}}_{\text{Umwandlung in Wärme (Ohmsche Gesetz)}}$$

Abstrahlung, beschrieben durch den Poynting-Vektor

Umwandlung in Wärme (Ohmsche Gesetz)

Der Poynting-Vektor gibt also die Richtung des Energieflusses an, sein Betrag dessen Größe.

2.1.2 Maxwellgleichungen in Medien

$$\rho = \rho_{int} + \rho_{ext}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_{ext}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{P} = -\rho_{int}$$

$\mathbf{P}$ wir Polarisation genannt. In $\mathbf{P}$ steckt die gesamte Information über die optischen Eigenschaften eines Materials.

Dennoch verwendet man meist noch andere Größen:

$$\epsilon, \chi, n, \alpha, \dots$$

2.2. Der Lorentz-Oszillator, eindimensional

Was passiert im Material, wenn Licht eingestrahlt wird? Ein einfaches eindimensionales Modell:

Die Newtonsche Bewegungsgleichung:

$$m \frac{\partial^2}{\partial t^2} x = -QE - (D_1 x + D_2 x^2 + D_3 x^3 + \dots)$$

D ist hier die Federkonstante und nicht die dielektrische Verschiebung!

Harmonischer Oszillator, d.h. E ist klein $\Rightarrow$ x klein ist $\Rightarrow$ Hooksches Gesetz; Alle Abweichungen werden in Kapitel 7., Nichtlineare Optik, behandelt.

$$P = \epsilon_0 \chi E$$

mit der optischen Suszeptibilität $\chi(\omega)$:

$$\chi = \frac{NQ^2}{Vm\epsilon_0} \frac{1}{\Omega^2 - \omega^2}$$

Mit $D = \epsilon_0 E + P$ folgt weiterhin:

$$D = \epsilon_0 E + \epsilon_0 \chi E = \epsilon_0 \underbrace{(1 + \chi)}_{=: \epsilon_r} E$$

Warnung: Der Index „r“ wird oft und gerne weg gelassen.

Damit folgt die (optische) dielektrische Funktion $\epsilon(\omega)$

$$\epsilon = 1 + \frac{NQ^2}{Vm\epsilon_0} \frac{1}{\Omega^2 - \omega^2}$$

Oft gibt es nicht nur eine, sondern mehrere Resonanzen.

Will man die höher frequenten Resonanzen (hier nur Ω_2) zusammen fassen, schreibt man:

$$\epsilon = \epsilon_b + \chi$$

wobei χ nur von Resonanz Nr. 1 in unserem Fall stammt, mit der Hintergrunddielektrizitätskonstante ϵ_b .

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E} = 0$$

Wellengleichung

mit der Mediumlichtgeschwindigkeit c

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \mu \epsilon_0 \epsilon}} = \frac{c_0}{n}$$

somit ist die Brechzahl n (der „Langsamkeitsfaktor“) gegeben durch:

$$n = \pm \sqrt{\mu \epsilon}$$

Die Wahl des Vorzeichens der im allgemeine komplexen Brechzahl folgt der Regel, dass der Imaginärteil positiv sein muss, für optisch passive Medien. Für die allermeisten Materialien ist im optischen Bereich $\mu = 1$, Ausnahmen siehe Metamaterialien.

2.2.1. Gruppengeschwindigkeit

Wir definieren:

$$v_{gr} = \frac{d\omega}{dk}$$

$$v_{gr} = \frac{c_0}{n' + \omega \frac{dn'}{d\omega}}$$

D.h. nur für dispersionslose Medien ($n \neq n(\omega)$) gilt, dass $v_{gr} = v_{ph}$!

2.3. Der Lorentz-Oszillator, Doppelbrechung

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \bar{\chi} \mathbf{E}$$

Die Suszeptibilität wird zu einem Tensor (3×3 -Matrix):

$$\bar{\chi} = \begin{pmatrix} \chi_{xx} & \chi_{xy} & \chi_{xz} \\ \chi_{yx} & \chi_{yy} & \chi_{yz} \\ \chi_{zx} & \chi_{zy} & \chi_{zz} \end{pmatrix}$$

3. Wellenoptik

3.1. Reflexion und Brechung von Licht

3.1.1. Senkrechter Einfall von Licht auf einen Halbraum

Wir haben es mit einer Grenzfläche zu tun. Für die gesamte Analyse werden die Stetigkeitsbedingungen nötig sein, sowie das Wissen, welche Vektoren ein Rechtssystem bilden. Wir wollen die Frage beantworten, wie sich die Felder nach Reflexion und Transmission verhalten – in Amplitude und Phase.

Die Vektoren ***k***, ***E***, ***B*** bilden ein Rechtssystem (in dieser Reihenfolge)!

An den Grenzflächen sind die Tangentialkomponenten von ***E*** und ***H*** stetig und die Normalkomponenten von ***D*** und ***B***!

$$\frac{E_r}{E_i} = \frac{\left(\frac{n_i \mu_t}{n_t \mu_i} - 1\right)}{\frac{n_i \mu_t}{n_t \mu_i} + 1} = \frac{\frac{n_i}{\mu_i} - \frac{n_t}{\mu_t}}{\frac{n_i}{\mu_i} + \frac{n_t}{\mu_t}} =: r$$

r ist der komplexe Feldreflexionskoeffizient.

$$\frac{E_t}{E_i} = \frac{\frac{2n_i}{\mu_i}}{\frac{n_i}{\mu_i} + \frac{n_t}{\mu_t}} =: t$$

t ist der komplexe Feldtransmissionskoeffizient.

Diese Gleichungen heißen Fresnelsche Gleichungen (für den senkrechten Einfall).

Phasensprünge an Grenzflächen ($\mu = 1$):

$n_t > n_i$: Phasensprung von π für $\mathbf{E}$, von 0 für $\mathbf{B}$

$n_t < n_i$: Phasensprung von 0 für $\mathbf{E}$, von π für $\mathbf{B}$

Somit werden die Koeffizienten für die Intensität:

$$|\mathbf{S}| = |\mathbf{E} \times \mathbf{H}| = |\mathbf{E}|^2 \sqrt{\frac{\epsilon_0 \epsilon}{\mu_0 \mu}} = |\mathbf{E}|^2 \frac{1}{Z}$$

R := Intensitäts-Reflexionskoeffizient

T := Intensitäts-Transmissionskoeffizient

$$R = r^2$$

$$T = t^2 \frac{Z_i}{Z_t}$$

Es gilt für absorptionsfreie Medien:

$$R + T = 1$$

NICHT JEDOCH $r + t = 1$!

3.1.2. Schräger Einfall von Licht auf einen Halbraum

Gleiche Aufgabenstellung wie eben, diesmal aber schräger Einfall.

Gleiche Überlegungen wie eben, zusätzlich:

Die Komponente von $\mathbf{k}$ parallel zur Grenzfläche bleibt erhalten (Translationsinvarianz entlang der Grenzfläche, Noether Theorem), die Komponente senkrecht zur Oberfläche verhält sich gemäß 3.1.1.

$$n_t \sin \Theta_t = n_i \sin \Theta_i$$

Snellius-Brechungsgesetz

$$\Theta_t = 90^\circ \Rightarrow \sin \theta_t = 1$$

$$n_i \sin \Theta_G = 1$$

Grenzwinkel der Totalreflexion Θ_G bei Reflexion am optisch dünneren Medium.

p-Polarisation

$$r_p = \frac{\frac{n_i}{\mu_i} \cos \Theta_t - \frac{n_t}{\mu_t} \cos \Theta_i}{\frac{n_i}{\mu_i} \cos \Theta_t + \frac{n_t}{\mu_t} \cos \Theta_i} = \frac{Z_t \cos \Theta_t - Z_i \cos \Theta_i}{Z_t \cos \Theta_t + Z_i \cos \Theta_i}$$

$$t_p = \frac{2 \frac{n_i}{\mu_i} \cos \Theta_i}{\frac{n_i}{\mu_i} \cos \Theta_t + \frac{n_t}{\mu_t} \cos \Theta_i} = \frac{2 Z_t \cos \Theta_i}{Z_t \cos \Theta_t + Z_i \cos \Theta_i}$$

s-Polarisation

$$r_s = \frac{\frac{n_i}{\mu_i} \cos \Theta_i - \frac{n_t}{\mu_t} \cos \Theta_t}{\frac{n_i}{\mu_i} \cos \Theta_i + \frac{n_t}{\mu_t} \cos \Theta_t} = \frac{Z_t \cos \Theta_i - Z_i \cos \Theta_t}{Z_t \cos \Theta_i + Z_i \cos \Theta_t}$$

$$t_s = \frac{2 \frac{n_i}{\mu_i} \cos \Theta_i}{\frac{n_i}{\mu_i} \cos \Theta_i + \frac{n_t}{\mu_t} \cos \Theta_t} = \frac{2 Z_t \cos \Theta_i}{Z_t \cos \Theta_i + Z_i \cos \Theta_t}$$

Θ_t folgt jeweils aus dem Snellius-Brechungsgesetz.

r_s, r_p, t_s, t_p bilden die Fresnelschen-Gleichungen

Zur Erinnerung: Der Hertzsche Dipol strahlt nicht entlang seiner Achse ab.

$$\Rightarrow \tan \Theta_B = \frac{n_t}{n_i}$$

Brewster-Winkel

Winkel, unter dem E_r verschwindet.

3.2. Dielektrischen Schichtsystemen

Mehrere Grenzflächen werden jetzt betrachtet, meistens unter senkrechtem Einfall.

3.2.1. $\lambda/4$ -Antireflexbeschichtung

Es soll kein Licht reflektiert werden. Dies kann durch Interferenz der einfallenden und der reflektierten Welle erreicht werden. Hierzu muss die Phasenverschiebung von allen beiden Grenzflächen richtig angepasst sein. Desweiteren müssen die Amplituden der Partialwellen an allen Grenzflächen gleich stark sein, damit Auslöschung erreicht wird.

$$d = \frac{\lambda}{4}$$

Lambdaviertel-Schicht mit λ im Medium der Schicht.

Perfekte Auslöschung erfolgt für gleiche Amplituden der Partialwellen!

$$R_i = R_t \Rightarrow \left(\frac{n_i - n_{AR}}{n_i + n_{AR}} \right)^2 = \left(\frac{n_{AR} - n_t}{n_{AR} + n_t} \right)^2$$

$$\Rightarrow n_{AR} = \sqrt{n_i n_t}$$

Für einen optimalen Effekt brauchen wir das geometrische Mittel der Brechungsindizes.

3.2.2. Transfermatrixmethode, dielektrische Spiegel

Wie sieht das Verhalten an vielen Grenzflächen aus? Wieder senkrechter Einfall. Diesmal wird erst ein Rechenverfahren aufgestellt, das auf beliebige Schichtsysteme anwendbar ist. Es geht hier wieder um Stetigkeitsbedingungen.

$$\begin{pmatrix} E_I \\ H_I \end{pmatrix} = M_I \begin{pmatrix} E_{II} \\ H_{II} \end{pmatrix}$$

mit M_I : charakteristische Matrix oder Transfermatrix.

Ganz analog zu einer Grenzfläche können auch N Schichten behandelt werden:

$$\begin{pmatrix} E_I \\ H_I \end{pmatrix} = \underbrace{M_I M_{II} \dots M_N}_{M} \begin{pmatrix} E_{N+1} \\ H_{N+1} \end{pmatrix}$$

$$M \Rightarrow 2 \times 2 \text{ Matrix mit } M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}$$

Hiermit können r und t leicht bestimmt werden:

$$\begin{pmatrix} E_{II} + E_{rI} \\ Z_i^{-1}(E_{II} - E_{rI}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{tN+1} \\ Z_{N+1}^{-1} E_{tN+1} \end{pmatrix}$$

3.2.3 Fabry-Perot Interferometer

Wieder nur zwei Grenzflächen aber andere Herangehensweise: Explizite Berücksichtigung der Vielfachreflexionen. Dies erklärt das Farbenspiel von Ölfilmen und Seifenblasen.

$$E_t = E_i t' t \left(1 + r^2 e^{i\delta} + (r^2 e^{i\delta})^2 + \dots \right)$$

$$= E_i t' t \sum_{m=0}^{\infty} \underbrace{\left((r^2 e^{i\delta})^m \right)}_{=: q}$$

Es folgt letztendlich

$$\frac{I_t}{I_i} = \frac{1}{1 + F \sin^2 \frac{\delta}{2}}$$

Airy-Formel

mit dem Finesse-Faktor F

$$F := \left(\frac{2r}{1 - r^2} \right)^2$$

und

$$r = \frac{n - 1}{n + 1}$$

3.2.4. Photonische Kristalle

Hier betrachten wir wieder die Propagation senkrecht zu Grenzflächen, diesmal aber explizit unendlich viele, d.h. wir betrachten ein periodisches System mit Gittertranslationsinvarianz.

$$n(x + a) = n(x)$$

Es gilt Gittertranslationsinvarianz

Ansatz:

$$E(x, t) = \tilde{E}(x) e^{-i\omega t}$$

mit

$$\tilde{E}(x) = e^{ikx} u_k(x)$$

Bloch-Funktion

mit der gitterperiodischen Funktion $u_k(x)$

$$u_k(x + a) = u_k(x)$$

$$\tilde{E}(x + a) = e^{ika} \tilde{E}(x)$$

Bloch-Theorem

$\tilde{E}(x)$ ist nicht gitterperiodisch!

Idee:

Beschränke mich daher bei der Darstellung auf ein Intervall der Breite $2\pi/a$, d.h. auf die „1.Brillouin-Zone“.

3.2.5. Wellenleiter

Wieder mehrere dielektrische Schichten, diesmal aber Propagation parallel zu den Schichten. Bisher konnte der Wellenvektor in jeder Schicht explizit angegeben werden, jetzt klappt das nicht mehr, da die Welle mehrere Schichten gleichzeitig sieht. es muss daher der Wellenvektor in Ausbreitungsrichtung berechnet werden.

Beschreibe Ausbreitung von Licht mit Wellengleichung:

$$\Delta E_y - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0$$

Mit der Mediumlichtgeschwindigkeit:

$$c = c_0/n(x)$$

Ansatz

$$E_y(x, z, t) = \tilde{E}_y(x) e^{i(k_z z - \omega t)}$$

Einsetzen:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \underbrace{\left[n^2(x) \frac{\omega^2}{c_0^2} - k_z^2 \right]}_{=: \gamma^2} E_y = 0$$

γ ist in einem Medium konstant (da $n=\text{const.}$).

Teillösungen:

1. Fall: $\gamma^2 = \gamma_H^2 > 0$; d.h. große Brechzahl bei festem ω .

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \gamma_H^2 E_y = 0$$

2. Fall: $\gamma^2 = -\gamma_L^2 < 0$; d.h. kleine Brechzahl bei festem ω .

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - \gamma_L^2 E_y = 0$$

Randbedingungen:

- * $\widetilde{E}_y(x \rightarrow \pm\infty) = 0$
- * $\widetilde{E}_y$ bei $x = \pm d$ stetig
- * Ableitung von $\widetilde{E}_y$ bei $x = \pm d$ stetig

Einsetzen und Rechnen liefert

$\gamma_H \tan(\gamma_H d) = \gamma_L$
--

Lösung nur grafisch oder numerisch möglich.

Die unterschiedlichen Lösungen werden oft auch als Moden bezeichnet.

3.3. Doppelbrechung

Bisher sind wir davon ausgegangen, dass sich die Materialien durch einen Brechungsindex beschreiben lassen, d.h., dass sie isotrop sind.

Nun nehmen wir den Tensor für die dielektrische Funktion explizit mit.

3.3.1. Wellenplättchen

E senkrecht auf c : $n_{senk} = n_o$ =: ordinäre Polarisation

E parallel zu c : $n_{para} = n_e$ =: extraordinary Polarisation

Reflexionen seien vernachlässigt, es werden wieder nur zwei Grenzflächen betrachtet und alles wird unter senkrechtem Einfall bearbeitet.

$$E(z = 0) = E_0 \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\omega t}$$

Rückseite:

$$E(z = d) = E_0 e^{i \frac{k_{senk} + k_{para}}{2} d} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{i\phi}{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\phi}{2}} \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\omega t}$$

ϕ ist die Phasenverschiebung zwischen x- und y-Komponente.

$$\phi = \pi \rightarrow 180^\circ =: \underline{\text{Halbwellenplättchen}}$$

$$\phi = \frac{\pi}{2} \rightarrow 90^\circ =: \underline{\text{Viertelwellenplättchen}}$$

lineare Polarisation wird zu zirkularer Polarisation hinter dem Plättchen.

3.3.2. Doppelbrechung, Polarisation

Hier versuchen wir zu verstehen, wie sich die einzelnen Felder zueinander im doppelbrechenden Material ausrichten. Wiederum sind hier die Stetigkeitsbedingungen und die Rechtshändigkeit entscheidend.

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \bar{\epsilon} \mathbf{E}$$

D.h., im Allgemeinen stehen $\mathbf{D}$ und $\mathbf{E}$ nicht parallel zueinander!

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{D} = 0$$

D.h., $\mathbf{k}$ steht senkrecht auf $\mathbf{D}$. Daraus folgt sofort, dass im Allgemeinen $\mathbf{E}$ nicht senkrecht auf $\mathbf{k}$ steht.

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0$$

D.h., $\mathbf{B}$ steht senkrecht auf $\mathbf{k}$.

Mit $\mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H}$ und $\mu = 1$ folgt, dass $\mathbf{B}$ parallel zu $\mathbf{H}$ steht.

Wegen $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ und $\mathbf{k}$ senkrecht auf $\mathbf{H}$ folgt:

Im Allgemeinen steht $\mathbf{S}$ nicht mehr parallel zu $\mathbf{k}$.

Aber, wir wissen, dass $\mathbf{S}$ senkrecht auf $\mathbf{E}$ stehen muss.

3.4. Beugung von Licht

Bisher haben wir immer nur ebene Wellen betrachtet. Jetzt weichen wir hiervon ab, indem wir eine Amplitudenmodulation aufprägen, sei es durch Einbringen von Objekten oder „einfach so“.

3.4.1. Das Huygensche Prinzip

Jeder Punkt einer Wellenfläche kann als Ausgangspunkt einer Elementarwelle (=Kugelwelle) angesehen werden.

3.4.2. Fraunhoferbeugung (Spalt, Doppelspalt, Gitter)

Sofern der Schirm nahe an der Öffnung ist, ist die Situation äußerst kompliziert, weil die Amplituden der verschiedenen Elementarwellen unterschiedlich sind.

(Amplitude $\sim 1/\text{Abstand}$ bei Elementarwellen (Kugelwellen)).

Ist der Schirm hingegen sehr weit weg, also im Fernfeld, so kann man die kleinen Unterschiede vernachlässigen.

=> Fraunhoferbeugung

Feld auf dem Schirm:

$$E \sim \int_{-\infty}^{+\infty} T(x) e^{i(kr - \omega t)} dx$$

$T(x)$ heißt Transmissionsfunktion. Hier: $T(x)=1$ im Spalt, $T(x)=0$ außerhalb.

Messe die Intensität:

$$\frac{I}{I_0} = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} T(x) e^{i(kr - \omega t)} dx \right|^2$$

$$\frac{I}{I_0} = \left| \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} (T(x) e^{ik_x x}) dx}_{\text{Fouriertransformierte von } T(x)} \right|^2$$

Fouriertransformierte von $T(x)$

Fraunhoferbeugung: Das Beugungsbild einer begrenzenden Öffnung ist das Betragsquadrat der Fouriertransformierten der begrenzenden Öffnung.

$$\frac{I}{I_0} = b^2 \left(\frac{\sin X}{X} \right)^2 =: I_1$$

Beugungsfunktion eines Einzelspalts

$$\frac{I}{I_0} = I_1 \frac{\sin^2 \left(p \frac{\pi a}{\lambda} \sin \alpha \right)}{\sin^2 \left(\frac{\pi a}{\lambda} \sin \alpha \right)}$$

Beugungsfunktion eines Gitters mit p -Spalten

3.4.3. Gaußförmige Profile

Wir betrachten folgendes zweidimensionale Problem:

$$T(x, y) = e^{-\frac{x^2+y^2}{w_0^2}} = e^{\left(-\frac{r}{w_0}\right)^2}$$

mit $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

Grafik

$$\frac{I}{I_0} = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(k_x x + k_y y)} e^{-\frac{x^2+y^2}{w_0^2}} dx dy \right|^2$$

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{\lambda z}{\pi w_0^2} \right)^2} \text{ für beliebige } z$$

Öffnungswinkel α :

$$\alpha \approx \frac{w}{z} = \frac{\lambda}{\pi w_0}$$

Rayleigh-Länge z_R :

$$w(z_R) = \sqrt{2} w_0$$

Diese Definition ist willkürlich, aber etabliert.

Daraus folgt für die Rayleigh-Länge:

$$z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}$$

Betrachten wir das Problem „umgekehrt“:

Was ist das kleinste erreichbare w_0 , d.h. der kleinste erreichbare Strahl- oder Spotdurchmesser?

$$w_0 = \frac{\lambda}{\pi \sin \alpha} = \frac{\frac{\lambda_0}{n}}{\pi \sin \alpha}$$

daraus

$$w_0 = \frac{\lambda_0}{\pi NA}$$

mit der numerischen Apertur NA

$$NA = n \sin \alpha$$

Wegen $NA \leq n$ ist der kleinste erreichbare Spotdurchmesser $2 w_0$ von der Größenordnung der Wellenlänge des Lichtes (im Medium).

3.4.4. Fresnelbeugung

Problem: Die Breite von a geht gegen unendlich. Daher gilt die Fraunhofer-Näherung nicht mehr. Dort wurde ein Abstand des Schirms zur Spaltbreite mit $d \gg a$ vorausgesetzt!

Das Problem lässt sich mathematisch durch die Überlagerung von Kugelwellen einfach aufschreiben, aber extrem schwer ausarbeiten!

3.5. Metamaterialien

Materialeigenschaften werden nicht nur über elektrische sondern auch über magnetische Dipole bestimmt. Das Verhalten der Felder lässt sich wieder über die Stetigkeitsbedingungen und die Rechtshändigkeit erschließen.

Erinnerung: Ein LC-Schwingkreis besteht aus einer Kapazität C und einer Induktivität L.

Wir treiben ein Magnetfeld mit optischen Frequenzen. Damit weicht die magnetische Permeabilität in der Nähe der Resonanz deutlich von eins ab!

$$\mu(\omega) = 1 + \frac{F \omega^2}{\omega_{LC}^2 - \omega^2 + i\Gamma\omega}$$

Durch die Kombination von SRR mit $\mu < 0$ in einem schmalen Frequenzbereich in der Nähe der Resonanz ω_{LC} und Drähten mit $\epsilon < 0$ lässt sich ein künstliches (griechisch „meta“) Material herstellen, das für einen kleinen Frequenzbereich $n < 0$ aufweist.

3.6. Optische Aktivität

Im letzten Kapitel hatten wir gesehen, dass ich ein Magnetfeld mit einem elektrischen Feld treiben kann. Ebenso kann ich ein elektrisches Feld mit einem Magnetfeld treiben.

Wir müssen dies in den Materialgleichungen berücksichtigen:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}(\mathbf{E}, \mathbf{H})$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{M}(\mathbf{E}, \mathbf{H})$$

Dazu bietet sich die Matrixschreibweise an:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{D} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_0 \hat{\vec{\epsilon}} & -ic_0^{-1} \vec{\xi} \\ ic_0^{-1} \vec{\xi} & \mu_0 \vec{\mu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix}$$

Im Allgemeinen werden die Felder, die erzeugt werden, nicht parallel zu den anregenden Feldern stehen. $\mathbf{D}$ ist also nicht parallel zu $\mathbf{E}$ und $\mathbf{D}$ ist auch nicht parallel zu $\mathbf{H}$.

4. Nahfeldoptik

Was passiert, wenn wir z.B. den Spalt in Kapitel 3.4.2. immer kleiner werden lassen? Entspricht einem metallischen Wellenleiter.

Herangehensweise analog zum Wellenleiter, nur die Randbedingungen sind anders.

Annahme: $b \ll d$ (oder formal $d \rightarrow \infty$)

Randbedingungen: $E\left(x = -\frac{b}{2}\right) = 0$ und $E\left(x = \frac{b}{2}\right) = 0$

Ansatz:

$$E = E_0 e^{i(k_y y + k_z z - \omega t)} \cos\left(x \frac{\pi}{b}\right)$$

stehende Welle

o.B.d.A.: $k_y = 0$

Einsetzen:

$$k_z^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2}$$

Phasengeschwindigkeit v_{ph} :

$$\begin{aligned}
 v_{ph} &= \frac{\omega}{k_z} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\omega^2}{c_0^2} - \left(\frac{\pi}{b}\right)^2}} \\
 &= \frac{c_0}{\sqrt{1 - \frac{c_0^2}{\omega^2} \left(\frac{\pi}{b}\right)^2}} \\
 &= \frac{c_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2b}\right)^2}} \geq c_0
 \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$v_{ph} \rightarrow \infty$ für $\frac{\lambda}{2b} = 1$ bzw. für eine Spaltbreite von $b = \frac{\lambda}{2}$

v_{ph} wird imaginär für $\frac{\lambda}{2b} > 1$, also für Spaltbreiten $b < \frac{\lambda}{2}$

Daraus folgt:

k_z imaginär und damit für Propagation entlang z: exponentiell gedämpfte Welle in z-Richtung.

Solche exponentiell gedämpften Wellen nennt man auch evaneszente Wellen (Tunneln von Licht).

5. Geometrische Optik

Definition:

Wir zerlegen eine ebene Welle in Partialwellen. Jede einzelne Partialwelle kann durch ihren Poynting-Vektor $\mathbf{S}$ (meist, aber nicht immer parallel zu $\mathbf{k}$) charakterisiert werden.

Wir vernachlässigen Beugungseffekte!

Unter diesen Bedingungen bezeichnen wir die Menge der Vektoren $\mathbf{S}$ als Lichtstrahlen.

5.1. Linsen und deren Fehler

$$f = \frac{r}{n - 1}$$

Brennweite der Linse

Mit den gemachten Näherungen sehen wir, dass f nicht von der Höhe h abzuhängen scheint.

Häufig definiert man die Brechkraft D

$$D := \frac{1}{f}$$

Für größere h hängt die Brennweite offensichtlich doch von h ab. Die „Verschiebung“ des Brennpunktes ist eine Folge der sphärischen Aberrationen

Da die Brechzahl von der Wellenlänge abhängt, tut die Brennweite dies auch.

Dieses Verhalten nennt man chromatische Aberration.

Merkregeln für dünne Linsen:

- Strahlen parallel zur optischen Achse werden zu Brennpunktstrahlen (und umgekehrt).
- Mittelpunktstrahlen bleiben unverändert.
- parallele Strahlen treffen sich in einem Punkt auf der Brennebene.

5.2 Matrixoptik

Wiederum der Ansatz, komplexe Systeme durch eine „einfache“ Mathematik zu erledigen.

Idee:

Charakterisiere Strahl an einem Punkt der optischen Achse durch zwei Parameter:

- Abstand zur optischen Achse h
- Winkel zur optischen Achse ϕ

Beide Größen fassen wir in einem „Vektor“ zusammen.

Matrix für freie Propagation über eine Strecke L

$$\vec{M}_{frei} = \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrix für eine dünne Linse mit Brennweite f

$$\vec{M}_{konvex} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}$$

für konkave Linsen gilt das Gleiche, jedoch mit $f \rightarrow -f$.

Matrix für Brechung an einer Grenzfläche (z.B. Luft/Glas)

$$\vec{M}_{Brech} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix}$$

Matrix eines Spiegels:

$$M_{Spiegel} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}$$

mit $f = \frac{R}{2}$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}$$

„Abbildungsgleichung (Linsengleichung)“

Vergrößerung (oder Verkleinerung) in der Bildebene:

$$M_{11} = 1 - \frac{b}{f}$$

5.3 Optische Geräte

Vergrößerung Objekt/Bild heißt auch Abbildungsmaßstab:

$$M_{11} = 1 - \frac{b}{f} = -\frac{b}{g}$$

Der Abbildungsmaßstab hängt nur von der Brennweite des optischen Systems ab.

Beim Auge ist die Vergrößerung anders definiert:

Grafik

Objekte im Abstand der deutlichen Sehweite $s_0 = 25 \text{ cm}$ sehen wir unter einer Vergrößerung von 1. Diese Vergrößerung entspricht einem Sehwinkel α .

Um ein Objekt „besser“ (größer) sehen zu können, müssen wir es näher heranholen, d.h., den Sehwinkel vergrößern (dies versagt aber ab dem Nahpunkt bei ungefähr 10cm vor dem Auge).

=> Verwendung optischer Systeme.

$$\text{Vergrößerung} = \frac{\text{Sehwinkel mit Instrument}}{\text{Sehwinkel ohne Instrument}}$$

5.3.1. Lupe (Brille)

Betrachtung mit entspanntem Auge, d.h., Objekte, die „unendlich“ weit weg sind, werden scharf abgebildet (gesehen):

Vergrößerung der Lupe:

$$\beta = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{s_0}{f}$$

5.3.2. Diaprojektor

Idee: Möglichst gute und gleichmäßige Ausleuchtung des Dias

Realisierung: Lampe wird auf die Abbildungslinse abgebildet durch einen Kondensor (eine weitere Linse). Das Dia wird möglichst nahe an dem Kondensor platziert, um sicherzustellen, dass jeder Bildpunkt von allen Strahlen der Lampe durchsetzt wird.

5.3.3. Das Fernrohr

„Unendlich“ weit entfernte Objekte sollen vergrößert dargestellt werden.

Vergrößerung des Fernrohrs:

$$\beta = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{h}{f_2} \frac{f_1}{h} = \frac{f_1}{f_2}$$

Kepler-Fernrohr: Baulänge entspricht der Summe der Brennweiten.

Gallilei-Fernrohr: Baulänge entspricht der Differenz der Brennweiten.

5.3.4. Das Mikroskop

Idee: Ein nahes Objekt, also ungefähr im Abstand $g = f$ vergrößert abbilden. Dazu wird ein Zwischenbild am Ende vom Tubus erzeugt, das mit einer Lupe weitervergrößert wird.

Gesamtvergrößerung des Mikroskops:

$$\beta = \frac{t}{f_{obj}} \frac{s_0}{f_{ok}}$$