

ÜBUNGSAUFGABEN (IX)

(Besprechung Donnerstag, 22.12.16)

Aufgabe 1: (4 Punkte)

Mittels einer Laufzeitmessung von Licht kann heutzutage die Entfernung Erde-Mond mit einer Genauigkeit von bis zu 5 mm vermessen werden. Dazu werden von der Erde Laserpulse der Wellenlänge $\lambda = 532 \text{ nm}$ durch ein Teleskop zum Mond gestrahlt, die von bei Mondlandungen hinterlassenen Retroreflektoren wieder Richtung Erde reflektiert werden. Die vom Teleskop aufgefangenen Reflexintensität I_{Det} ist jedoch schon allein aufgrund der Beugung von hinlaufendem und reflektiertem Strahl sehr schwach. Bestimmen Sie zu deren Berechnung zunächst den Durchmesser des Laserstrahls, wenn er auf die Mondoberfläche trifft. Gehen Sie dazu aus von einem aus dem Teleskop austretenden parallelen Strahlbündel mit gaußförmigem Intensitätsprofil $I(r) = I_0 \exp(-r^2/w_0^2)$ und Radius $w_0 = 0.5 \text{ m}$. Der Retroreflektor habe mit $A = \pi w_0^2$ etwa die gleiche Fläche wie die Teleskopöffnung. Wie groß ist dann das Verhältnis $v = I_{\text{Det}}/I_0$?

Hinweis: Nehmen Sie Einfachheit halber an, dass der reflektierte Strahl ebenfalls ein gaußsches Profil mit Radius w_0 hat.

Aufgabe 2: (4 Punkte)

Gegeben seien n gleichartige Zellen Z_i , $i \in \{1..n\}$, auf die insgesamt N Teilchen zufällig verteilt werden. Zeigen Sie, dass die (im Allgemeinen nicht normierte!) „thermodynamische Wahrscheinlichkeit“ W , bestimmte „Besetzungszahlen“ $N_1, N_2, \dots, N_n$ der Zellen Z_i vorzufinden, gegeben ist durch

$$W(N_1, N_2, \dots, N_n) = \frac{N!}{N_1! \cdot N_2! \cdot \dots \cdot N_n!} \quad .$$

Benutzen Sie dann die Stirlingsche Näherungsformel $\ln N! \approx N \ln N - N$ und die Boltzmannsche Definition der Entropie $S = k_B \ln W$, um den in der Vorlesung eingeführten Ausdruck

$$S = -k_B N \sum_{i=1}^n p_i \ln p_i \quad , \quad p_i = N_i/N$$

herzuleiten.

Aufgabe 3: (4 Punkte)

In drei gleichartigen Gefäßen befinden sich unterschiedliche ideale Gase mit den Molzahlen $n_1 = 1$, $n_2 = 2$ und $n_3 = 3$. Nun werden die drei Gefäße durch Öffnen von Ventilen miteinander verbunden. Wie groß ist der Anstieg der Entropie (in J/K)? Wie ändert sich das Ergebnis, wenn es sich um drei gleiche Gase handelt?

Hinweis: Verwenden Sie zur Berechnung der Entropie die in Aufgabe 2 dargestellte Formel.

Aufgabe 4: (4 Punkte)

Die Zustandsgrößen eines thermodynamischen Systems sind von besonderer Bedeutung, da ihre jeweilig aktuellen Werte nur voneinander abhängen, aber nicht von den Zwischenzuständen,

die zum betrachteten Zustand geführt haben. Um diese Prozessunabhängigkeit zu gewährleisten, muss das Differential einer Zustandsgröße $F(x, y)$ eine *Integrabilitätsbedingung* erfüllen: wenn $dF(x, y) = A(x, y) dx + B(x, y) dy$, dann wird gefordert, dass

$$A(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} ; B(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial A(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial B(x, y)}{\partial x} \quad .$$

Betrachten Sie für ein monoatomares ideales Gas das Differential δQ_{rev} als Funktion von T und V und zeigen Sie, dass die insgesamt reversibel zugeführte Wärme Q_{rev} keine Zustandsgröße ist. Zeigen Sie weiter, dass mit der Ersetzung $\delta Q_{\text{rev}} = T dS$ die Größe S dagegen die Integrabilitätsbedingung erfüllt. Bestimmen Sie $S(T, V)$ für das ideale Gas durch Integration von dS .