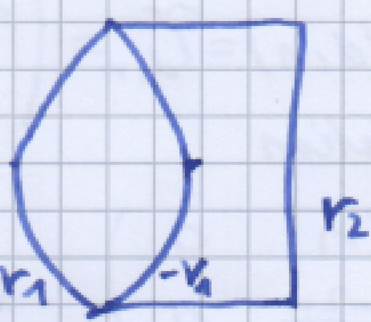
Aufg. 1.

Geg.: $f_{ges} = 0{,}25\,m$, $r_1' = -r_1$

$n_1 = 1{,}621$, $n_2 = 1{,}618$

$\left.\frac{dn_1}{d\lambda}\right|_{\lambda_0} = -0{,}06\,\frac{1}{\mu m}$, $\left.\frac{dn_2}{d\lambda}\right|_{\lambda_0} = -0{,}15\,\frac{1}{\mu m}$



Linsengleichung: ...

$$\Rightarrow D_1 = \frac{1}{f_1} = (n_1-1)\cdot\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1'}\right) = (n_1-1)\cdot\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_1}\right)$$

$$\Rightarrow D_1 = 2(n_1-1)\cdot\frac{1}{r_1}$$

$$D_2 = \frac{1}{f_2} = (n_2-1)\cdot\left(\frac{1}{r_1'} - \frac{1}{r_2}\right) = (n_2-1)\cdot\left(-\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

$$\Rightarrow D_2 = (1-n_2)\cdot\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$$

Es gilt: $D_{ges} = D_1 + D_2 = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{f_{ges}}$

$$\Rightarrow 2\cdot(n_1-1)\cdot\frac{1}{r_1} + (1-n_2)\cdot\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) = \frac{1}{f_{ges}} \quad (1)$$

Es muss gelten: $\frac{dD_{ges}}{d\lambda} \overset{!}{=} 0$ (bei λ_0)

$$\Rightarrow 2\frac{dn_1}{d\lambda}\cdot\frac{1}{r_1} - \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)\cdot\frac{dn_2}{d\lambda} \overset{!}{=} 0 \quad (2)$$

$$\overset{(2)}{\Longrightarrow} \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{2\cdot\frac{dn_1}{d\lambda}}{r_1\cdot\frac{dn_2}{d\lambda}} \Rightarrow r_2 = \frac{r_1\cdot\frac{dn_2}{d\lambda}}{2\frac{dn_1}{d\lambda} - \frac{dn_2}{d\lambda}}$$

In (1): $$\frac{2\cdot(n_1-1)}{r_1} + \frac{2(1-n_2)\cdot\frac{dn_1}{d\lambda}}{r_1\cdot\frac{dn_2}{d\lambda}} = \frac{1}{f_{ges}}$$

$$\Rightarrow r_1 = \left[(n_1-1) + \frac{(1-n_2)\cdot\frac{dn_1}{d\lambda}}{\frac{dn_2}{d\lambda}}\right]\cdot 2f_{ges} = 18{,}69\,cm$$

$$\Rightarrow r_2 = -93{,}45\,cm$$

2) aus VL: Translationsmatrix:

$$T(d,n) = \begin{pmatrix} 1 & d/n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad n = 1 \text{ Luft}$$

Hohlspiegel-Abbildungsmatrix:

$$R(r,n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2n}{r} & 1 \end{pmatrix} \qquad n = 1,\ r = d$$

Jeder Lichtstrahl legt die Strecke d zurück und wird dann gespiegelt

$$\Rightarrow R \cdot T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{d} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & d \\ -\frac{2}{d} & -1 \end{pmatrix}$$

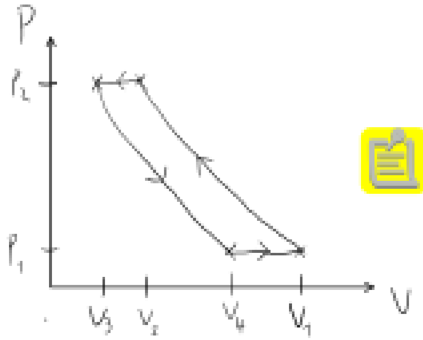
4 Spiegelungen entsprechen $(R \cdot T)^4$

$$(R \cdot T)^4 = \left((R \cdot T)^2\right)^2 = \left(\begin{pmatrix} 1 & d \\ -\frac{2}{d} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d \\ -\frac{2}{d} & -1 \end{pmatrix} \right)^2$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^2 = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}}$$

Der gesamte Vorgang wird durch die Einheitsmatrix beschrieben. Wird diese auf einen Ortsvektor angewandt, verändert sich dieser nicht → Nach 4 Reflexionen ist der Lichtstrahl wieder im Anfangszustand.

③
a)



keine Änderung der Temperatur, wie in Aufgabenstellung gefordert ($T_1 = const.$)

b)

$V_1 = x_R \cdot A$ $\qquad$ $V_3 = x_L \cdot A$ $\qquad$ $A = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 = 0{,}1\, m^2$

$T_1 = const.$

1. Prozessschritt: Kolben von x_R bis x_1 (hier ist p_2 erreicht)

Druckdifferenz zw. Innerem und Äußerem des Behälters: $p_2 - p_1 = 0{,}9 \cdot 10^6\, Pa$

Druckdifferenz zw. Innerem und Äußerem des Kolbens: $\Delta p(s) = p(s) - p_1$

$V_1 \cdot p_1 = V_2\, p_2 \quad \Rightarrow V_2 = \frac{p_1}{p_2} V_1 = 0{,}1 \cdot V_1$

$x_2 = \frac{V_2}{\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2} = \frac{0{,}1\, V_1}{\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2} = 0{,}1\, x_R$

$V_1\, p_1 = V(s)\, p(s)$ $\qquad$ $p(s) = \frac{V_1}{V(s)}\, p_1 = \frac{x_R}{s}\, p_1$ $\qquad$ $\Delta p(s) = p_1 \frac{x_R}{s} - p_1 = p_1\left(\frac{x_R}{s} - 1\right)$

$W_1 = -\int_{x_R}^{x_2} \Delta p(s) \cdot A\, ds = -A\, p_1 \int_{x_R}^{x_2} \left(\frac{x_R}{s} - 1\right) ds = -A\, p_1 \left(\left[x_R \ln(s)\right]_{x_R}^{x_2} - x_2 + x_R\right) = -A\, p_1 \left(x_R \ln\left(\frac{x_2}{x_R}\right) - x_2 + x_R\right) = -A\, p_1\, x_R \left(\ln(0{,}1) + 0{,}9\right) = 2805\, J$

2. Prozessschritt: Kolben von x_2 zu x_L ($p_2 = const.$), Luft wird in den Behälter gepumpt

Druckdifferenz zw. Innerem und Äußerem des Behälters: $p_2 - p_1 = 0{,}9 \cdot 10^6\, Pa$

Druckdifferenz zw. Innerem und Äußerem des Kolbens: $\Delta p = p_2 - p_1 = 9 \cdot 10^5\, Pa$

$W_2 = -\int_{x_2}^{x_L} \Delta p \cdot A\, ds = -\Delta p\, A\, \left[s\right]_{x_2}^{x_L} = -\Delta p \cdot A\, (x_L - 0{,}1\, x_R) = 900\, J$

3. Prozessschritt: Kolben von x_L zu x_4 (hier ist p_1 erreicht)

Druckdifferenz zw. Innerem und Äußerem des Behälters: $p_2 - p_1 = 0{,}9 \cdot 10^6\, Pa$

Druckdifferenz zw. Innerem und Äußerem des Kolbens: $\Delta p(l) = p(l) - p_1$

$V_3 \cdot p_2 = V_4\, p_1 \quad \Rightarrow \quad V_4 = \frac{p_2}{p_1} V_3 = 10 \cdot V_3$

$V_4 = x_4 \cdot A \quad \Rightarrow \quad x_4 = 10 \cdot \frac{V_3}{A} = 10 \cdot x_L$

$V_3 \cdot p_2 = V(l) \cdot p(l) \quad \Rightarrow \quad p(l) = \frac{V_3}{V(l)}\, p_2 = \frac{x_L}{l}\, p_2$ $\qquad$ $\Delta p(l) = \frac{x_L}{l}\, p_2 - p_1 = p_2\left(\frac{x_L}{l} - 0{,}1\right)$

$W_3 = -\int_{x_L}^{x_4} A \cdot \Delta p(l)\, dl = -A\, p_2 \int_{x_L}^{x_4} \left(\frac{x_L}{l} - 0{,}1\right) dl = -A\, p_2 \left(x_L \ln\left(\frac{x_4}{x_L}\right) - 0{,}1\,(x_4 - x_L)\right) = -A\, p_2\, x_L \left(\ln(10) - 0{,}9\right) = -1401\, J$

4. Prozessschritt: Kolben von x_4 zu x_R ($p_1 = const.$), Luft wird aus der Umwelt in den Kolben gezogen

Druckdifferenz zw. Innerem und Äußerem des Behälters: $p_2 - p_1 = 0{,}9 \cdot 10^6\, Pa$

Druckdifferenz zw. Innerem und Äußerem des Kolbens: $\Delta p = p_1 - p_1 = 0$

$W_4 = -\int_{x_4}^{x_R} A \cdot \Delta p\, dl = 0$

geleistete Arbeit pro Zyklus: $W_\Sigma = \sum_{i=1}^{4} W_i = 2805\,J + 900\,J - 1403\,J - 0\,J = \underline{2302\,J}$

c)

Zyklen: $\frac{240\,\frac{\ell}{min}}{V_1 - V_3} = \frac{240\,\frac{\ell}{min}}{A(0{,}1x_1 - x_3)} = \frac{240\,\frac{\ell}{min}}{10^{-3}\,m^3} = 240\,\frac{1}{min} = 4\,\frac{1}{s}$

Benötigte Energie pro Sekunde: $P = 4\,\frac{1}{s}\,W_\Sigma = \underline{9208\,W}$

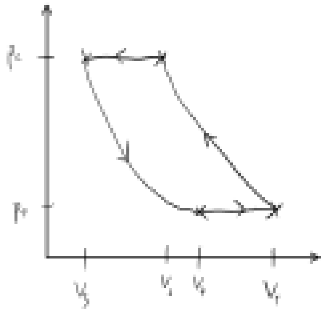
d) Die in Schritt 2 geleistete Arbeit wird durch die Behälterkonstruktion gespeichert.

Der Rest der Arbeit wird in Wärme umgewandelt (wird von der Kühlung abgeführt)

$Q = W_\Sigma - W_2 = 1402\,J$

bei 4 Zyklen pro Sekunde: $\frac{Q}{s} = 5608\,J$

e) T nicht mehr konstant $\qquad \kappa = 1{,}4$ (Luft)



V_3 ist kleiner als in a) und V_1 ist größer

Damit ist die eingeschlossene Fläche größer

1. Prozessschritt:

$p_2 = p_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^\kappa \Rightarrow V_2 = V_1 \sqrt[\kappa]{\frac{p_1}{p_2}} \Rightarrow x_2 = x_1 \sqrt[\kappa]{0{,}1}$

$p(V) = p_1\left(\frac{V_1}{V(s)}\right)^\kappa = p_1\left(\frac{x_1}{s}\right)^\kappa \qquad \Delta p(s) = p_1\left(\left(\frac{x_1}{s}\right)^\kappa - 1\right)$

$W_1 = -\int_{x_1}^{x_2} A\cdot\Delta p(s)\,ds = -A p_1 \int_{x_1}^{x_2}\left(\left(\frac{x_1}{s}\right)^\kappa - 1\right) ds = -A p_1\left(x_1^\kappa\left[\frac{1}{1-\kappa} s^{-\kappa+1}\right]_{x_1}^{x_2} - (x_2 - x_1)\right) = -A p_1\left(x_1^\kappa\left(\frac{1}{1-\kappa} x_1^{1-\kappa}\left(\sqrt[\kappa]{0{,}1}^{\,1-\kappa} - 1\right)\right) + x_1 - x_1\sqrt[\kappa]{0{,}1}\right) = 3040\,J$

2. Prozessschritt:

$\Delta p = p_2 - p_1 = 0{,}9\,p_2$

$W_2 = -\int_{x_2}^{x_3} A\cdot\Delta p\,ds = -0{,}9\,p_2 A(x_3 - x_2) = 2575\,J$

3. Prozessschritt

$p_1 = p_2\left(\frac{V_3}{V_4}\right)^\kappa \Rightarrow V_4 = V_3 \sqrt[\kappa]{\frac{p_2}{p_1}} = V_3\sqrt[\kappa]{10} \Rightarrow x_4 = x_3 \cdot \sqrt[\kappa]{10}$

$p_2 = p(l)\left(\frac{V(l)}{V_3}\right)^\kappa \Rightarrow p(l) = p_2\left(\frac{x_3}{l}\right)^\kappa \qquad \Delta p(l) = p_2\left(\frac{x_3}{l}\right)^\kappa - p_1$

$W_3 = -\int_{x_3}^{x_4} A\,\Delta p(l)\,dl = -A\int_{x_3}^{x_4}\left(p_2\left(\frac{x_3}{l}\right)^\kappa - p_1\right) dl = -A\left(p_2 x_3^\kappa\left[\frac{1}{1-\kappa} l^{1-\kappa}\right]_{x_3}^{x_4} - p_1(x_4 - x_3)\right) = -A\left(p_2 x_3^\kappa \frac{1}{1-\kappa} x_3^{1-\kappa}\left(\sqrt[\kappa]{10}^{\,1-\kappa} - 1\right) - p_1 x_3\left(\sqrt[\kappa]{10} - 1\right)\right) = -787\,J$

4. Prozessschritt:

$\Delta p = p_1 - p_1 = 0$

$W_4 = 0$

geleistete Arbeit pro Zyklus: $W_\Sigma = \sum_{i=1}^{4} W_i = 3040\,J + 2575\,J - 787\,J + 0\,J = \underline{4828\,J}$

$T_2 = T_1\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1-\kappa}{\kappa}} = 300\,K \cdot 0{,}1^{-\frac{0{,}4}{1{,}4}} = \underline{579\,K}$

Aufg. 4.

Leistungszahl: $\varepsilon_1 = \frac{T_{H1}}{T_{H1} - T_K}$, $\varepsilon_2 = \frac{T_{H2}}{T_{H2} - T_K}$

Mit $T_{H1} = 35°C$, $T_K = 7°C$, $T_{H2} = 40°C$

$\Longrightarrow \varepsilon_1 = 11$ und $\varepsilon_2 \cong 9{,}5$

$\eta = 1 - \frac{T_K}{T_H}$