

2) Plancksches Strahlungsgesetz:

$$w(\nu, T) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

a) für ~~große~~ ^{kleine} λ , d.h. ^{große} ν :

$\frac{h\nu}{kT} \ll 1$ ✓; mit der Näherung $e^x - 1 \approx x$ für $x \ll 1$:

$$w(\nu, T) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3 kT}{h\nu}$$

$$= \frac{8\pi k}{c^3} \nu^2 \frac{T}{\nu} \quad \checkmark \text{ Rayleigh-Jeans}$$

b) für ~~kleine~~ ^{kleine} λ , d.h. ^{große} ν : $e^{\frac{h\nu}{kT}} \gg 1$; $e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1 \approx e^{\frac{h\nu}{kT}}$ ✓

$$w(\nu, T) = \frac{8\pi h}{c^3} \nu^3 e^{-\frac{h\nu}{kT}}$$

$$= a_1 \nu^3 e^{-a_2 \frac{\nu}{T}} \quad \checkmark \text{ Wien-Strahlungsgesetz}$$

c) Planck: $w(\lambda, T) = \frac{8\pi c^2}{\lambda^5} \frac{hc}{e^{\frac{hc}{\lambda T}} - 1}$

$$\frac{dw}{d\lambda} = \frac{-40\pi c^2}{\lambda^6} \frac{hc}{e^{\frac{hc}{\lambda T}} - 1} - \frac{8\pi c^2}{\lambda^5} \frac{hc e^{\frac{hc}{\lambda T}}}{\left(e^{\frac{hc}{\lambda T}} - 1\right)^2} \cdot \frac{hc}{\lambda T} \cdot \frac{-1}{\lambda^2}$$

$$= \frac{8\pi c^2 hc}{\lambda^5 \left(e^{\frac{hc}{\lambda T}} - 1\right)} \left(\frac{-5}{\lambda} + \frac{e^{\frac{hc}{\lambda T}}}{e^{\frac{hc}{\lambda T}} - 1} \cdot \frac{hc}{\lambda T \lambda^2} \right) \stackrel{!}{=} 0 \quad | \cdot \lambda$$

$$-5 + \frac{1}{1 - e^{-x}} x = 0 \quad \text{mit } x = \frac{hc}{\lambda T}$$

Lösung: $\frac{hc}{\lambda T} = 4,965$ ✓

Wien'sches Verschiebungsgesetz

$$\Rightarrow T \cdot \lambda_{\max} = 0,0029 \text{ m} \cdot \text{K} \quad \checkmark$$

d) Strahlungsleistung pro Fläche eines schwarzen Körpers im Halbraum (laut Vorlesung):

$$\frac{dP}{dA} = \frac{c}{4} \int_0^\infty w(\nu, T) d\nu = \frac{c}{4} \int_0^\infty \frac{8\pi}{c^3} \frac{h\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} d\nu$$

Substitution $x = \frac{h\nu}{kT} \Rightarrow \nu = \frac{xkT}{h} \Rightarrow d\nu = \frac{kT}{h} dx$

$$\Rightarrow \frac{dP}{dA} = \frac{2\pi h}{c^2} \left(\frac{kT}{h}\right)^4 \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{2\pi^5 h}{15c^2} \left(\frac{kT}{h}\right)^4 \quad \checkmark$$

$$\approx 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4} \cdot T^4 = \sigma T^4 \quad \checkmark$$