

Aufgabe 1

a) $\frac{2\pi}{k} = \lambda \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} = k$

$$v_{gr} = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{\partial v_p k}{\partial k} = v_p + k \frac{\partial v_p}{\partial k} = v_p + \lambda \frac{2\pi}{\lambda^2} \frac{\partial v_p(\lambda)}{\partial k} \stackrel{\text{kettenregel}}{=} v_p - \lambda \frac{\partial v_p(\lambda)}{\partial \lambda}$$

b) normale dispersion: $\frac{dn}{d\omega} > 0$

$$v_{ph} = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{2\pi} \lambda \quad \lambda = \frac{\omega n}{2\pi c_0}$$

$$\lambda \frac{\partial v_p(\lambda)}{\partial \lambda} = \frac{\lambda}{2\pi} \frac{\partial \omega \lambda}{\partial \lambda} = \frac{\lambda}{2\pi} \left(\omega + \lambda \frac{\partial \omega}{\partial \lambda} \right) = \frac{\lambda \omega}{2\pi} + \lambda \frac{1}{\frac{\partial \omega}{\partial \lambda}} = \frac{\lambda \omega}{2\pi} + \lambda \frac{1}{\frac{d}{d\omega} \frac{\omega n}{2\pi c_0}} = \frac{\lambda \omega}{2\pi} + \lambda \frac{2\pi c_0}{n + \omega \frac{dn}{d\omega}} > 0$$

so bei norm. Disp.

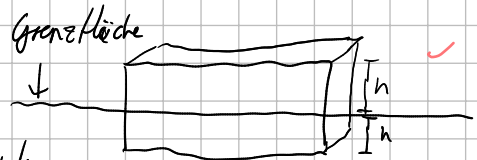
$$\Rightarrow v_{gr} = v_p - \lambda \frac{\partial v_p(\lambda)}{\partial \lambda} < v_p$$

c) $\omega = \frac{c_0}{n} k \Leftrightarrow \frac{\omega n}{c_0} = k$

$$v_{gr} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{\frac{dk}{d\omega}} = \frac{1}{\frac{1}{c_0} \left(n + \omega \frac{dn}{d\omega} \right)} = \frac{c_0}{n + \omega \left(0 + \frac{2\omega^2}{\omega^3} \right)} = \frac{c_0}{n + 2 \frac{\omega^2}{\omega^3}} = \frac{c_0}{1 + \frac{\omega^2}{\omega^3}} = \frac{c_0}{1 + \frac{1}{\omega^2}} < \frac{c_0}{1} = c_0$$

Aufgabe 2

Für $\vec{f}(\vec{r}) \in \mathbb{R}^3$ mit $\vec{\nabla} \cdot \vec{f} = 0$



Sei Q ein Quader mit zwei zur Grenzfläche parallelen Seiten

im Abstand h von der Grenzfläche. Mit $h \rightarrow 0$ ist der Fluss von f ausschließlich durch die parallelen Flächen. Da $\vec{\nabla} \cdot \vec{f} = 0$ muss der Fluss F insgesamt auch 0 sein.

Es gilt $F = \int_{\text{oben}} \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{n} d\vec{o} + \int_{\text{unten}} \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{n} d\vec{o} = 0 \Rightarrow \int_{\text{oben}} \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{n} d\vec{o} = - \int_{\text{unten}} \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{n} d\vec{o} \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\text{oben}} \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{n} d\vec{o} = \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\text{unten}} \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{n} d\vec{o}$ mit der Oberflächennormalen $\vec{n}$ der Grenzfläche und $\vec{r}_0$ auf der Grenzfläche für infinitesimale Oberflächen.
 $\Rightarrow$ Oberflächennormale ist stetig

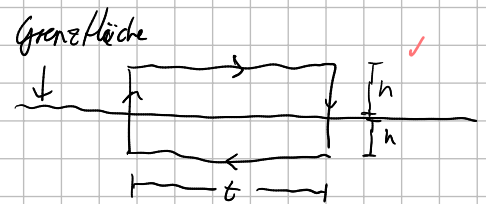
Für $\vec{p}(\vec{r}) \in \mathbb{R}^3$ mit $\text{rot } \vec{p} = 0$

Sei s das Rechteck um die Grenzfläche

mit $h \rightarrow 0$ folgt da $\text{rot } \vec{p} = 0$ nach Satz von Stokes,

dass $\int_{\text{oben}} \vec{E} d\vec{s} = \int_{\text{unten}} \vec{E} d\vec{s}$ da das Kreisintegral über die Seiten mit $h \rightarrow 0$ wegfällt.

Für $h \rightarrow 0$ folgt die Stetigkeit der Tangentialkomponente an der Grenzfläche.



$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \neq 0$ Warum verschwindet das Integral $\int_A \text{rot } \vec{F} d\vec{A}$?

a) Es fließt kein Strom $\Rightarrow \text{rot } \vec{E} = 0 \Rightarrow$ Tangentialkomponente stetig.

b) Es gibt an der Grenzfläche keine äußeren Ladungen

$\Rightarrow \text{div } \vec{D} = 0 \Rightarrow$ Normalkomponente stetig.

Wie siehts mit den jeweils anderen Komponenten aus?

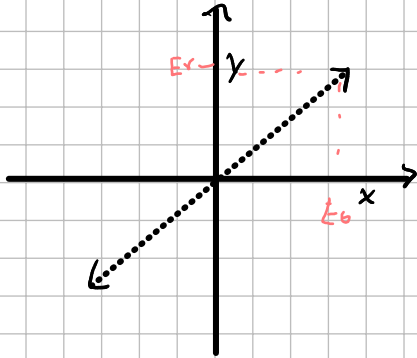
3/5

Aufgabe 3

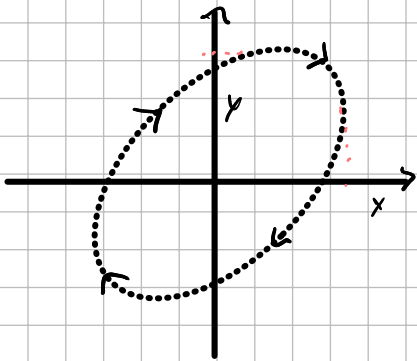
Da das Argument des Kosinus nur von z abhängt und nicht von x und y , ist z die Ausbreitungsrichtung.

positive oder negative z -Richtung?

a) Da $\vec{E}_x = \vec{E}_y$ ist die Welle linear polarisiert und hat keinen Drehsinn.



b) Es handelt sich um eine elliptische Polarisation. Der Drehsinn ist negativ.

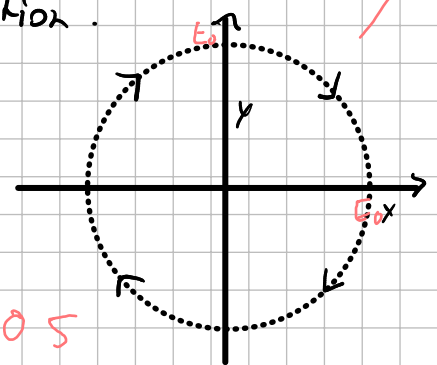


$\rightarrow \sigma^+ / \sigma^-$

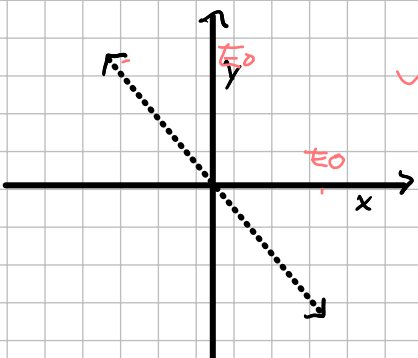
$\rightarrow$ rechts / links?

c) Es handelt sich um eine zirkuläre Polarisation. Der Drehsinn ist negativ.

$\rightarrow \sigma^+ / \sigma^-$
rechts / links?



d) Da $\vec{E}_x = -\vec{E}_y$ ist die Welle linear polarisiert und hat keinen Drehsinn.



25/4

Aufgabe 4

$$a) \quad n^2(\omega) = 1 + \frac{q_e^2}{\epsilon_0 m_e} \sum_j \left(\frac{N_j f_j}{\omega_{0j}^2 - \omega^2} \right) = 1 + \frac{q_e^2 N}{\epsilon_0 m_e (\omega_0^2 - \omega^2)}$$

$$\Rightarrow n(\omega) = \sqrt{n^2(\omega)} = \sqrt{1 + \underbrace{\frac{q_e^2 N}{\epsilon_0 m_e (\omega_0^2 - \omega^2)}}_{=: x}} = \sqrt{1+x} \stackrel{\text{Taylor um } x=0}{=} 1 + \frac{1}{2}x = 1 + \frac{q_e^2 N}{2\epsilon_0 m_e (\omega_0^2 - \omega^2)}$$

Diese Rechnung ergibt m.E. keinen Sinn. 1, 1, 1

$$b) \quad N = \frac{1 \text{ mol}}{22,4 \text{ L}} = 2,6875 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3}$$

OK

$$\omega = \frac{c_0 2\pi}{\lambda} \text{ mit } n \approx 1$$

$$n\left(\frac{c_0 2\pi}{\lambda}\right) = 1 + \frac{N q_e^2}{2\epsilon_0 m_e} \left(\frac{1}{\omega_0^2 - \left(\frac{c_0 2\pi}{\lambda}\right)^2} \right)$$

$$= 1 + \frac{(2,6875 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3}) (1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C})^2}{2 (8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}}) (9,109 \cdot 10^{-31} \text{ kg})} \cdot \frac{1}{\left(7 \cdot 10^{16} \text{ Hz}\right)^2 - \left(\frac{2\pi \cdot 299792458 \text{ m/s}}{500 \cdot 10^{-9} \text{ m}}\right)^2}$$

$$= 1,0005$$

1

$$c) \quad n^2(\omega) - 1 = \frac{q_e^2}{\epsilon_0 m_e} \sum_j \frac{N_j f_j}{\omega_{0j}^2 - \omega^2}$$

$$= \sum_j \underbrace{\frac{q_e^2 N_j f_j}{\epsilon_0 m_e \omega_{0j}^2}}_{=: B_j} \frac{\omega_{0j}^2}{\omega_{0j}^2 - \frac{c_0^2}{n^2 \lambda^2}} = \sum_j B_j \frac{\lambda^2}{\lambda^2 - \underbrace{\frac{c_0^2}{n^2 \omega_{0j}^2}}_{=: \lambda_{0,j}^2}} = \sum_j \frac{B_j \lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_{0,j}^2}$$

15

3.5/4

```

In[ ]:= N0 = 2.6875 × 1025;
w0 = 1016;
λ = 500 × 10-9;
qe = 1.602 × 10-19;
ε0 = 8.854 × 10-12;
me = 9.109 × 10-31;
c0 = 299 792 458;

```

$$\text{In[]:= } 1 + \frac{N_0 q_e^2}{2 \epsilon_0 m_e \left(w_0^2 - \left(c_0 \frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \right)}$$

```

Out[ ]:= 1.0005

```