

a) Lorentz-Oszillator: $m\ddot{r} = \underbrace{-\gamma m \dot{r}}_{\substack{\text{"Reibungskraft"} \\ \Leftrightarrow \text{abgedämpfte} \\ \text{Schwingung im} \\ \text{Lorentz-Modell}}} - \underbrace{\omega_0^2 m r}_{\substack{\text{Bindungskraft} \\ \text{der schwingenden} \\ \text{Ladungen}}} + \underbrace{q E_0 e^{-i\omega t}}_{\substack{\text{Lorentzkraft des} \\ \text{E-Felds der Welle} \\ \text{auf die oszillierende} \\ \text{Ladung } q. \\ \text{(treibende Kraft)}}$

1/1

4,5/9

b) $F_{\text{ges}} = m\ddot{s} = -\gamma m \dot{s} - \omega_0^2 m s + q E_0 e^{-i\omega t}$

mit Auslenkung s

0,5/0,5

c) 1-D-Oszillator: $p := -q x = \frac{Q^2 E_0}{m(\Omega^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)} e^{i\omega t}$ (Dipolmoment)

$P := \frac{N}{V} p = \frac{N}{V} \frac{Q^2 E_0}{m(\Omega^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)} e^{i\omega t}$ (Polarisation)

1/1

d) $D = \epsilon_0 E + P = \epsilon_0 E + \epsilon_0 \chi E = \epsilon_0 E \epsilon(\omega)$ mit $E \chi \epsilon_0 = P = \frac{N}{V} \frac{Q^2 E_0}{m(\Omega^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)} e^{i\omega t}$
 $\Rightarrow \chi = \frac{N Q^2}{V m \epsilon_0 (\Omega^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)} \Rightarrow \epsilon(\omega) = 1 + \chi = 1 + \frac{N Q^2}{V m \epsilon_0 (\Omega^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)}$

1/1

e) $n(\omega) = \sqrt{\epsilon(\omega)} = \sqrt{1 + \frac{N Q^2}{V m \epsilon_0 (\Omega^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)}} \quad \chi \ll 0 \Rightarrow n(\omega) = 1 + \frac{1}{2} \frac{N Q^2}{V m \epsilon_0 (\Omega^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)} + O(\chi^2)$

0,5/0,5

f) $n(\omega) = n'(\omega) - i n''(\omega) = \sqrt{1 + \frac{N Q^2}{V m \epsilon_0 (\Omega^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)}}$

erweitert mit komplex konjugiertem

$= \sqrt{1 + \frac{N Q^2}{V m \epsilon_0 (\Omega^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)} \cdot \frac{V m \epsilon_0 (\Omega^2 - \omega^2) - i V m \epsilon_0 \gamma \omega}{V m \epsilon_0 (\Omega^2 - \omega^2) - i V m \epsilon_0 \gamma \omega}}$

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
 $= \sqrt{1 + \frac{N Q^2 V m \epsilon_0 (\Omega^2 - \omega^2) - i N Q^2 V m \epsilon_0 \gamma \omega}{V^2 m^2 \epsilon_0^2 ((\Omega^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 m^2)}}$

$= \sqrt{1 + \frac{N Q^2 V m \epsilon_0 (\Omega^2 - \omega^2)}{V^2 m^2 \epsilon_0^2 ((\Omega^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 m^2)}} + i \frac{N Q^2 V m \epsilon_0 \gamma \omega}{V^2 m^2 \epsilon_0^2 ((\Omega^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 m^2)}$

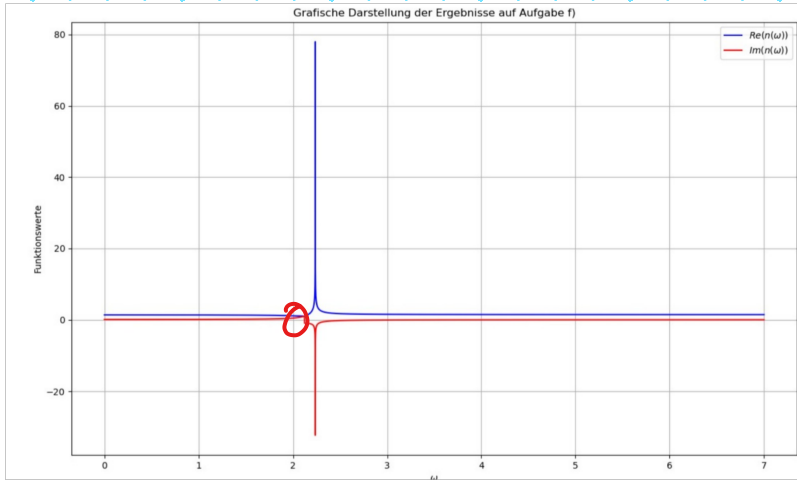
$\Rightarrow \epsilon'(\omega) = 1 + \frac{N Q^2 V m \epsilon_0 (\Omega^2 - \omega^2)}{V^2 m^2 \epsilon_0^2 ((\Omega^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 m^2)} \cdot \frac{1}{2}$

$$h(\omega) = \frac{N Q^2 \sqrt{m} \xi_0 (\Omega^2 - \omega^2)}{\sqrt{2} m^2 \xi_0^2 ((\Omega^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 m^2)}$$

0,5/1

$$\sqrt{\xi(\omega)} = \sqrt{\xi' + i \xi''}$$

g)



0/1

② a) Boltzmann-Verteilung: Verhältnis zw. zwei Teilchenmengen N_1 und N_2 in zwei versch. Zuständen (Energiewerte E_1 u. E_2)

$$\frac{N_1}{N_2} = e^{\frac{-E_1 - E_2}{k_B T}}$$

1/1

4/7

b) Maxwell-Verteilung: Statistische Verteilung der Geschwindigkeiten eines idealen Gases mit N Teilchen.

0,5/0,5

$$f(v) = 4\pi v^2 \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} e^{\left(-\frac{m}{2k_B T} v^2 \right)}$$

c) Gleichverteilungssatz: Bei gegebener Temperatur ist die kin. Energie proportional zur Anzahl der Freiheitsgrade (α): $E_{kin} = \sum_i N_i \sum_j \frac{1}{2} \frac{p_{ij}^2}{m}$

$$= \sum_i \sum_j N_i \frac{p_{ij}^2}{m} = (N k_B T)$$

0,5/0,5

d) Betrachtung ideales Gas in 3 Dimensionen $\Rightarrow E_{ges} = E_{kin}$

Maxwell'sche Verteilung: $f(v) = 4\pi v^2 \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right)$

Es gilt: $\bar{v} = \sum_i f(v_i) v_i \Rightarrow \bar{v}^2 = \int_0^\infty f(v) v^2 dv = \left(4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} \int_0^\infty v^3 \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right) dv \right)^2$

$$= \left(2\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\left[-\frac{1}{2} e^{-2u} \right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{1}{2} e^{-2u} du \right) \right)^2 = \left(2\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} \left[-\frac{e^{-2u}}{2} \right]_0^\infty \right)^2 = \left(2\pi \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}} \left(\frac{2k_B T}{m} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2$$

$$= \left(\frac{2\pi}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{2k_B T}{m}} \right)^2 = \frac{8}{\pi} \frac{k_B T}{m}$$

Es gilt allgemein der Zusammenhang: $\frac{2\pi}{8} \bar{v}^2 = \bar{v}^2$ (?)

$\Rightarrow$ also gilt: $\bar{v}^2 = \frac{3k_B T}{m}$; Gleichverteilungssatz: mit $\bar{v}^2 = \sum_i \frac{p_{vi}^2}{m^2} \Rightarrow \frac{3}{2} m \bar{v}^2 = N k_B T \Leftrightarrow \bar{v}^2 = \frac{3k_B T}{m}$

1/2

e) Für die unwahrscheinlichste Geschw. $\hat{v}$ gilt: $\frac{d}{dv} f(v) = 0 \Leftrightarrow f$ hat ein Extremum bei $v = \hat{v}$

$$0 = \frac{d}{dv} f(v) = \frac{d}{dv} \left(4\pi v^2 \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right) \right)$$

$$= 8\pi \hat{v} \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{m\hat{v}^2}{2k_B T}\right) - 4\pi \hat{v}^2 \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{m\hat{v}}{k_B T} \exp\left(-\frac{m\hat{v}^2}{2k_B T}\right) \Leftrightarrow 0 = \hat{v} \left(8\pi - 4\pi \frac{m}{k_B T} \hat{v}^2 \right)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dv} f(v_i) = 0 \text{ mit } v_i \in \left\{ 0, \sqrt{\frac{2k_B T}{m}}, -\sqrt{\frac{2k_B T}{m}} \right\}$$

$$\Rightarrow \hat{v} = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}}, \text{ da } \hat{v} > 0 \text{ sein soll.}$$

1/1

③ a) 4/4 Barometrische Höhenformel: Anwendung der Boltzmann-Verteilung und beschreibt Luftdruck rel. zur Höhe:

$$P(h) = P(0) e^{-\frac{\rho(0) g h}{P(0)}}$$

0,5/0,5

b) Ballon sinkt in Boden, falls Masse des Ballons größer ist als Masse der verdrängten Luft

$$PV = nRT \Rightarrow M_L n = M_L \frac{P_0 V_0}{TR} \stackrel{!}{\geq} m_B + m_H + M_H \frac{P_0 V_0}{TR}$$

$$\Rightarrow m_{\max} = M_L \frac{P_0 V_0}{TR} - m_B - M_H \frac{P_0 V_0}{TR} \quad \left| \begin{array}{l} M_H = 4 \cdot 10^{-3} \frac{\text{kg}}{\text{mol}} \\ M_L = 29 \cdot 10^{-3} \frac{\text{kg}}{\text{mol}} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow m_{\max} = 3,76 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \quad (\text{max. Gewicht, das der Brief haben darf})$$

2/2

c) Ballon platzt bei einem Volumen von $V = V_0 \cdot 1,2 = 9,012 \text{ m}^3$

$$P_L = P_0 e^{-\frac{\rho g h}{P_0}} = \frac{nRT}{V} = P_B, \quad n = \frac{P_0 V_0}{RT}$$

$$\Rightarrow h = \ln\left(\frac{nRT}{V P_0}\right) \frac{-P_0}{\rho g} \ln\left(\frac{V_0}{V}\right)$$

$$P_0 = \frac{m_0}{V_0} = \frac{P_0 V_0}{RT V_0} M_L \Rightarrow h = -\frac{RT}{g M_L} \ln\left(\frac{V_0}{V}\right) = 1,5088 \text{ km}$$

1,5/1,5