

Aufgabe 1

3 Punkte

Eine gedämpfte Schwingung mit Dämpfungskonstante $\gamma > 0$ und Winkelfrequenz $\omega_0 \geq 0$ ist gegeben durch die Funktion $f(t)$ mit

$$f(t) = \begin{cases} 0; & t < 0 \\ \exp(-\gamma t) \cdot \exp(-i\omega_0 t); & t \geq 0 \end{cases}$$

- a) Bestimmen Sie die Fouriertransformierte $\tilde{f}(\omega)$ von $f(t)$. **1 Punkt**
 b) Berechnen Sie das Betragsquadrat $\tilde{I}(\omega) = |\tilde{f}(\omega)|^2$ und zeichnen Sie diese Funktion für $\gamma = 0.1\omega_0$. Bestimmen Sie in allgemeiner Weise die Halbwertsbreite $\Delta\omega$ von $\tilde{I}(\omega)$. **2 Punkte**

Hintergrund: Die Funktion $f(t)$ kann zum Beispiel ein exponentiell abklingendes elektrisches Feld darstellen, wie es bei der Emission von Licht durch ein Atom entsteht. $\Delta\omega$ ist dann die spektrale Breite des emittierten Lichtes.

Aufgabe 1: $\gamma > 0; \omega_0 \geq 0; f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ e^{-\gamma t} e^{-i\omega_0 t} & t \geq 0 \end{cases}$

3/3

a) Fouriertransformation

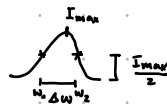
$$-\gamma t + i\omega t - i\omega_0 t = -\gamma t - (\omega_0 - \omega)t = -(\gamma + i(\omega_0 - \omega))t$$

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma t + i\omega t} \theta(t) e^{i\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(\gamma + i(\omega_0 - \omega))t} dt = \frac{1}{-(\gamma + i(\omega_0 - \omega))} \left[e^{-(\gamma + i(\omega_0 - \omega))t} \right]_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{-(\gamma + i(\omega_0 - \omega))} \left(\underbrace{\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(\gamma + i(\omega_0 - \omega))t}}_{\rightarrow 0} - \underbrace{e^{-(\gamma + i(\omega_0 - \omega))0}}_{=1} \right) = \frac{1}{(\gamma + i(\omega_0 - \omega))} \quad \checkmark \quad 1/1 \end{aligned}$$

2/2

b) Betragsquadrat $\tilde{I}(\omega) = |\tilde{f}(\omega)|^2 = \left| \frac{1}{\gamma + i(\omega_0 - \omega)} \right|^2 = \left| \frac{1}{\gamma + i(\omega_0 - \omega)} \cdot \frac{\gamma - i(\omega_0 - \omega)}{\gamma - i(\omega_0 - \omega)} \right|^2 = \left| \frac{\gamma - i(\omega_0 - \omega)}{\gamma^2 + (\omega_0 - \omega)^2} \right|^2 = \left(\frac{1}{\gamma^2 + (\omega_0 - \omega)^2} \sqrt{\gamma^2 + (\omega_0 - \omega)^2} \right)^2 = \frac{1}{\gamma^2 + (\omega_0 - \omega)^2} \quad \checkmark$

Spektalbreite $\Delta\omega$ ist Differenz bei halben Maximum



$\rightarrow$ das Maximum für $\tilde{I}(\omega)$ liegt bei $\omega = \omega_0 \Rightarrow \tilde{I}_{\max}(\omega) = \frac{1}{\gamma^2}$, dann ist ein halbes Maximum: $\frac{\tilde{I}_{\max}}{2} = \frac{1}{2\gamma^2}$

Einsetzen in $\tilde{I}$: $\frac{1}{2\gamma^2} = \frac{1}{\gamma^2 + (\omega_0 - \omega)^2} \Leftrightarrow 2\gamma^2 = \gamma^2 + (\omega_0 - \omega)^2 \Leftrightarrow |\gamma| = |\omega_0 - \omega| \Leftrightarrow \omega = \omega_0 \pm \gamma \Rightarrow \Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = (\omega_0 + \gamma) - (\omega_0 - \gamma) = 2\gamma = 2 \cdot 0,1\omega_0 = 0,2\omega_0 //$

In[152]:=

$\omega_0 := 1$

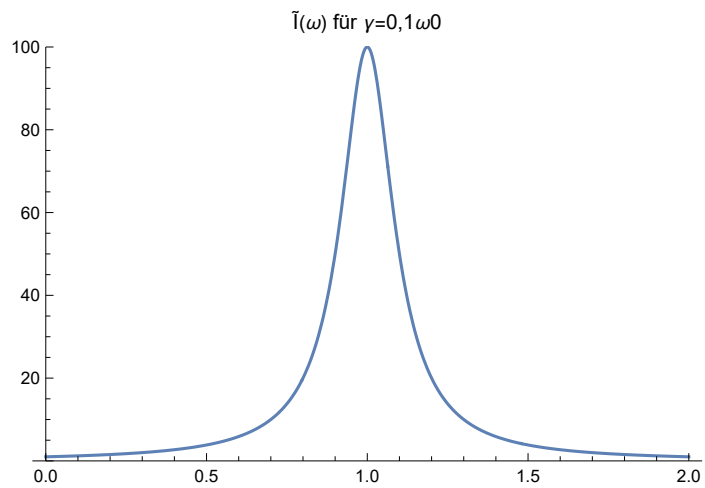
$\gamma := 0.1 * \omega_0$

$g[\omega_] := 1 / (\gamma^2 + (\omega_0 - \omega)^2)$

Plot[$g[\omega]$, { ω , 0, 2}, **PlotLabel** → " $\tilde{I}(\omega)$ für $\gamma=0,1\omega_0$ ",
[_stelle Funktion graphisch dar](#) [_Beschriftung der Graphik](#)

PlotLegends → **Automatic**, **PlotRange** → {0, 1} {0, 100}]
[_Legenden der G...](#) [_automatisch](#) [_Koordinatenbereich der Graphik](#)

Out[155]=

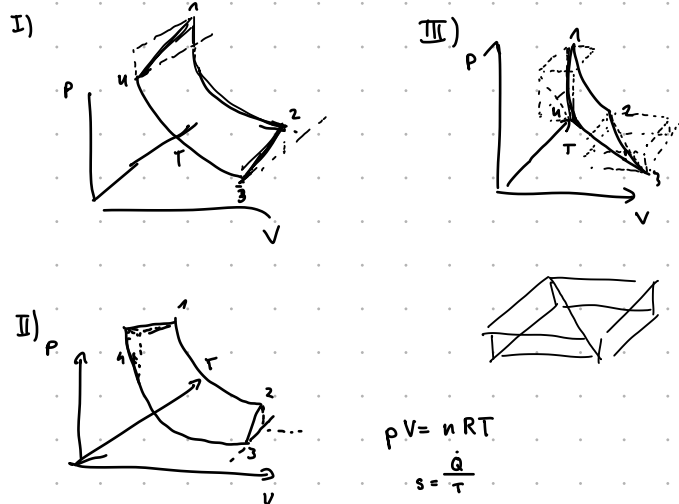
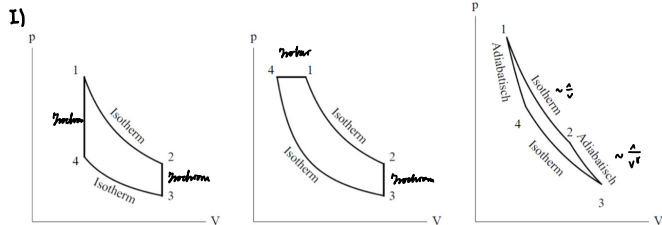


4/5

Aufgabe 4

5 Punkte

Gegeben sind folgende p-V-Diagramme von Kreisprozessen, die ein ideales Gas durchläuft. Seine Teilchenzahl sei dabei konstant.



- Skizzieren Sie für jeden der drei Prozesse die zugehörigen T-V-, p-T- und T-S-Diagramme.
Anmerkung: Dies bedeutet die Darstellung der Funktionen $T(V)$, $p(T)$ und $T(S)$.
4,5 Punkte
- Erläutern Sie, warum man aus jedem Diagrammtyp die vollständige Information über das System erhält. Warum verwendet man häufiger die p-V- und die T-S-Auftragung anstatt einer der anderen? 0,5 Punkte

Aufgabe 4:

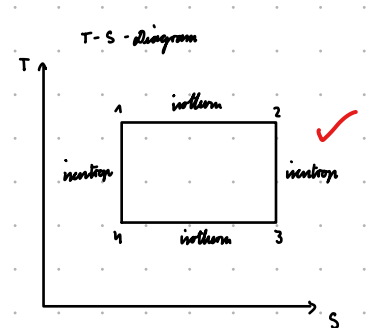
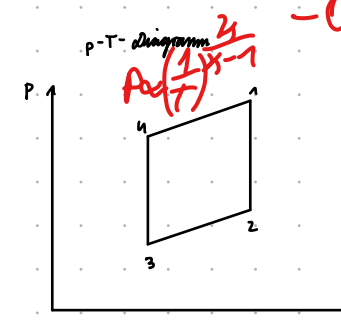
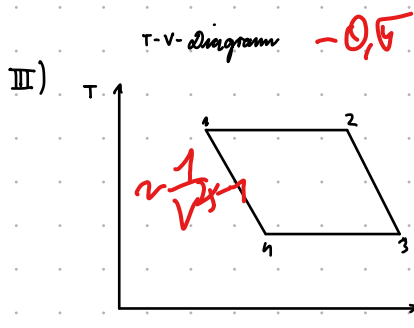
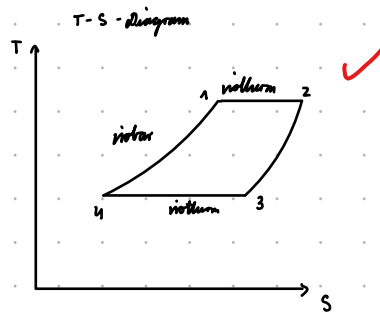
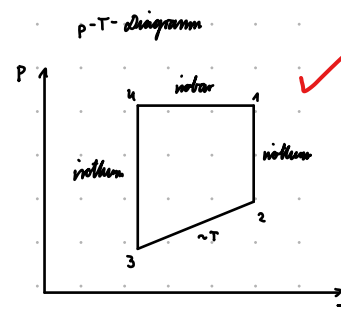
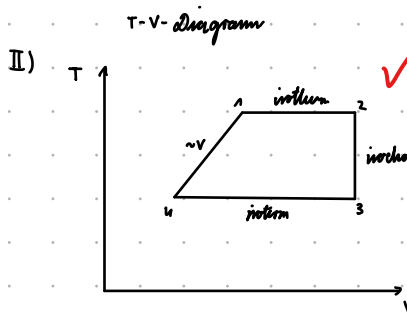
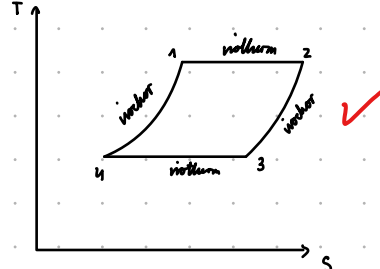
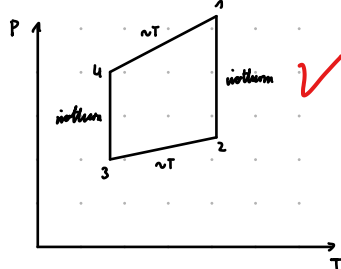
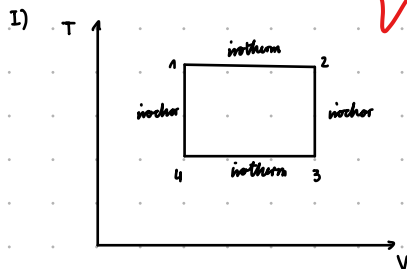
$$T(V) = \frac{p}{nR} \cdot V$$

$$p(T) = \frac{nR}{V} T$$

T-V-Diagramm

p-T-Diagramm

T-S-Diagramm



- Es gilt: $pV = nRT$ und $S = \frac{Q}{T}$. Sind zwei Größen bzw. Verhältnisse / Proportionalitäten bekannt, so lässt sich der Rest herleiten.

Aus dem p-V-Diagramm lässt sich die Arbeit direkt berechnen mit $W = - \int_{V_1}^{V_2} p dV$

Aus dem T-S-Diagramm lässt sich die zu- bzw. abgeführte Wärme $Q = \int_{S_1}^{S_2} T dS$ berechnen. Daher sind p-V- und T-S-Diagramme die bevorzugte Darstellung.

0,5/0,5

2.

3/4

- a) Der Gauß-Strahl ist ein Konzept der paraxialen Optik zur Beschreibung der Lichtausbreitung, indem sich Methoden der Strahlen- und Wellenoptik verbinden. Im Querschnitt zeigt er ein Profil gemäß einer Gauß-Kurve. Der Strahl verjüngt sich bis zum Erreichen der schmalsten Stelle (Fokus, Taille) und weitet danach ebenso wieder an. Gaußstrahlen beschreiben besonders gut die Lichtemission vieler Laser und werden außerdem in Mikroskopen verwendet. ✓

1/1

b) $I(r) = I_0 e^{-\frac{r^2}{w_0^2}}$ mit $w_0 = 0,5 \text{ m}$

$$P_0 = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} I_0 e^{-\frac{r^2}{w_0^2}} r dr d\varphi \quad [\text{Sub. } u = \frac{r^2}{w_0^2}; dr = \frac{w_0^2}{2r} du]$$

$$= 2\pi I_0 \int_0^\infty e^{-u} \frac{w_0^2}{2} du = 2\pi I_0 \frac{w_0^2}{2} [-e^{-u}]_0^\infty = \pi I_0 w_0^2 \quad \checkmark$$

1/1

c) $W(\lambda) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)^2}$ Die Entfernung zum Mond beträgt ca. $384\,400 \text{ km} = 384,4 \cdot 10^6 \text{ m}$; $w_0 = 0,5 \text{ m}$; $\lambda = 532 \cdot 10^{-9} \text{ m}$

$$w_M = 0,5 \text{ m} \cdot \sqrt{1 + \frac{(532 \cdot 10^{-9})^2 \cdot 384,4 \cdot 10^6}{\pi \cdot (0,5 \text{ m})^2}} = 0,8 \text{ m} \quad \checkmark$$

d) $P_M = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} I_{M,0} e^{-\frac{r^2}{w_M^2}} r dr d\varphi = \pi I_{M,0} w_M^2 = \pi I_0 w_0^2 \Rightarrow I_{M,0} = I_0 \frac{w_0^2}{w_M^2}$

$$I_M(r) = I_0 \frac{w_0^2}{w_M^2} e^{-\frac{r^2}{w_M^2}} \quad \checkmark$$

1/1

e) für $w_M = w_0$ gilt $I_{\text{Det}} = I_0 e^{-\frac{r^2}{w_0^2}}$?

3/3

3.

- a) Im Inneren einer Wärmepumpe läuft ein geschlossener Prozess aus 4 Schritten ab: Verdampfen, Verdichten, Verflüssigen und Entspannen eines Kältemittels. Dabei nimmt das Kältemittel Umweltwärme auf und wird mit Hilfe von Strom auf ein nutzbares Temperaturniveau für das Heizsystem gebracht.

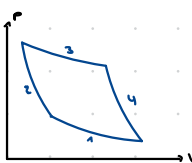
Eine Kältemaschine funktioniert ähnlich, jedoch mit umgekehrter Zielsetzung. Das Kältemittel nimmt in einem Verdampfer Wärme aus dem Innenraum auf und wird gasförmig.

Ein Kompressor komprimiert das Gas $\Rightarrow$ Temperatur steigt stark an. Im Verflüssiger gibt das heiße Kältemittel die Wärme an die Außenluft ab und wird wieder flüssig.

Ein Expansionsventil senkt den Druck, wodurch das Kältemittel abkühlt.

Der Prozess wiederholt sich.

1/1

- b) 
1. isotherme Kompression: $V_1 > V_2$; $T_1 = T_2$; $p_1 < p_2$
 2. isentrope Kompression: $V_2 > V_3$; $T_2 < T_3$; $p_2 < p_3$
 3. isotherme Expansion: $V_3 < V_4$; $T_3 = T_4$; $p_3 < p_4$
 4. isentrope Expansion: $V_4 < V_1$; $T_4 > T_1$; $p_4 > p_1$

1/1

- c) Die Leistungszahl ϵ_{KM} gibt die Effizienz einer Kältemaschine an und ist das Verhältnis der abgeführten Wärme zur aufgewandten Energie: $\epsilon_{\text{KM}} = \frac{Q_2}{W} = \frac{Q_1}{Q_1 - Q_2}$ ✓

- d) ϵ_{WP} ist das Verhältnis der zugeführten Wärme zur aufgewandten Energie: $\epsilon_{\text{WP}} = \frac{Q_2}{W} = \frac{Q_1}{Q_1 - Q_2}$ ✓

1/1