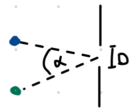
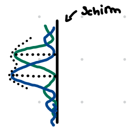
3/3

2.

a) Das Rayleigh-Kriterium besagt, dass man zwei Beugungsbilder eines Einzelspalts genau dann noch voneinander unterscheiden kann, wenn der Abstand der beiden Hauptintensitätsmaxima mindestens so groß ist, dass das Maximum des einen Bildes in das 1. Minimum des anderen fällt. Aus dieser Annahme wird dann der minimale Winkel α zwischen den beiden erzeugenden Punktquellen und dem Spalt der Breite D zugerechnet.

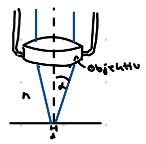
Für einen Spalt gilt: $\alpha = \frac{\lambda}{D}$; für eine kreisförmige Apertur gilt: $\alpha = 1{,}22\,\frac{\lambda}{D}$ (hier D = Durchmesser) $\Rightarrow \lambda$ = Wellenlänge





1/1

b) Das Abbe-Kriterium beschreibt die fundamentale, durch die Lichtbeugung begrenzte Auflösung eines optischen Systems. Es zeigt, dass die Auflösung nur durch die Verringerung der Wellenlänge oder die Erhöhung der numerischen Apertur des Systems verbessert werden kann. Die Auflösung/Abbildung eines Präparats (z.B. zwei Spalten) ist dann gut genug, wenn mindestens die ersten beiden Beugungsmaxima der Streuung am Präparat durch das optische System geleitet werden. Es gilt: $d = \frac{\lambda}{2n\sin\alpha}$, die kleinste auflösbare Struktur eines Objekts ist also proportional zur Wellenlänge und antiproportional zu $2n\sin\alpha$. Details die kleiner sind als λ, können nicht mehr aufgelöst werden.



n:= Brechungsindex des Mediums
d:= kleinste noch auflösbare Distanz
α:= halber Öffnungswinkel des Objektivs

1/1

c) Das Rayleigh-Kriterium definiert die Auflösung basierend auf der Trennung der Beugungsmuster, während das Abbe-Kriterium die Apertur des Objektivs berücksichtigt.

0,5/0,5

d) Das Rayleigh-Kriterium kann z.B. zur Bestimmung des Auflösevermögens eines Teleskops bei der Betrachtung eines Sterns (punktförmige Lichtquelle) verwendet werden.

Das Abbe-Kriterium ist beispielsweise bei Lichtmikroskopen nützlich, wenn feine Strukturen wie Zellorganelle untersucht werden. 0,5/0,5

1. $\frac{dn}{dt} = D\,\frac{d^2n}{dx^2}$ 5/5

a) $d_t F(n) = -k_x^2 D F(n) \quad \Rightarrow F_n = C\exp(-k_x^2 Dt)$ 1/1

b) $\tilde{n} = \int_{-\infty}^{\infty} n(x)|_{t=0}\, e^{-ik_x x}\, dk_x = \int_{-\infty}^{\infty} n_0\delta(x)\, e^{-ik_x x}\, dk_x = n_0 \quad \Rightarrow c = n_0 \quad \Rightarrow F_n = n_0\exp(-k_x^2 Dt)$ 1/1

c) $n(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int F(n)\, e^{ik_x x}\, dk_x = \frac{1}{2\pi}\int n_0 e^{-k_x^2 Dt + ik_x x}\, dk_x$ mit $-Dtk_x^2 + ik_x x = -Dt\left(k_x^2 - \frac{ik_x x}{Dt}\right) = -Dt\left[\left(k_x - \frac{ix}{2Dt}\right)^2 + \frac{x^2}{4D^2t^2}\right]$

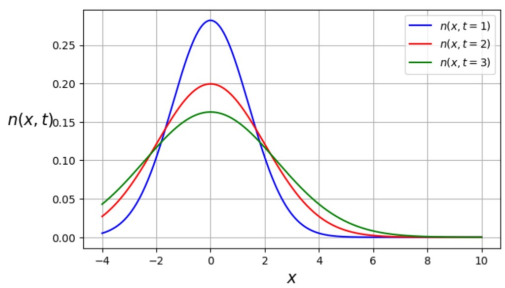
$\Rightarrow \frac{1}{2\pi}\exp\left[-\frac{x^2}{4Dt}\right]\int n_0\, e^{-Dt\left(k_x - \frac{ix}{2Dt}\right)^2} dk_x$ [Sub. $u = k_x - \frac{ix}{2Dt}$, $du = dk_x$] $\Rightarrow$ Gaußintegral ($\int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$) $\Rightarrow n(x,t) = \frac{1}{2\pi} n_0 \exp\left[\frac{-x^2}{4Dt}\right]\int e^{-Dtu^2}\, du$

$n(x,t) = \frac{1}{2\pi}\exp\left[\frac{-x^2}{4Dt}\right]\sqrt{\frac{\pi}{Dt}} = \sqrt{\frac{n_0^2}{4\pi Dt}}\exp\left[\frac{-x^2}{4Dt}\right]$ ✓

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

x = np.linspace(-4.,10.,1000)
def n(x,t):
    return 1/(2*np.pi)*np.sqrt(np.pi/t)*np.exp(-x**2/(4*t))

fig, ax = plt.subplots(figsize=(7, 4))
ax.plot(x,n(x,t=1),label= r'$n(x,t=1)$',color='b')
ax.plot(x,n(x,t=2),label= r'$n(x,t=2)$',color='r')
ax.plot(x,n(x,t=3),label= r'$n(x,t=3)$',color='g')
ax.legend(loc='upper right', frameon=True)
plt.xlabel(r'$x$', fontsize=15)
plt.ylabel(r'$n(x,t)$', rotation=0, labelpad=20, fontsize=15)
plt.grid(True)
plt.show()
```



2/2

d) Aus $n(x,t) = \sqrt{\frac{n_0^2}{4\pi Dt}}\exp\left[\frac{-x^2}{4Dt}\right]$ ist ersichtlich, dass die Breite der Verteilung mit steigender Zeit zunimmt.

Physikalisch ist dies sinnvoll, da sich die Teilchen frei bewegen und so zu einem späteren Zeitpunkt aufgrund der Entropie und der angestrebten homogenen Wärmeverteilung im Mittel weiter vom Ort $x = 0$ entfernt sind. Die Teilchendichte nimmt also mit der Zeit um den Ort $x = 0$ ab.

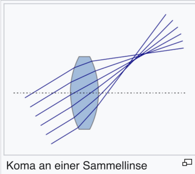
1/1

5/5

Aufgabe 3 a) i) Die chromatische Aberration resultiert aus der Wellenlängenabhängigkeit der Dispersion $n(\lambda)$, je nach Wellenlänge wird das Licht also unterschiedlich stark gebrochen. Kurzwelliges Licht wird stärker gebrochen als langwelliges, dies führt zu Farblängs- bzw. Farbquerfehlern. ✓

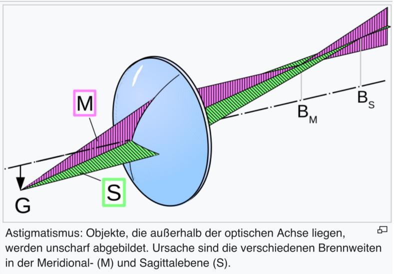
ii) Die sphärische Aberration entsteht, weil Lichtstrahlen die weiter von der optischen Achse entfernt sind und durch den Rand der Linse gehen stärker gebrochen werden, als zentrale Strahlen. Dies führt zu Unschärfe. ✓

iii) Liegt ein Objekt abseits der optischen Achse, so wird die Strahlenbündel schräg einfallend und es entsteht ein unsymmetrischer Bildpunkt im Bildfeld. Dies bezeichnet man als Koma. ✓



Koma an einer Sammellinse

Quelle: Wikipedia



Astigmatismus: Objekte, die außerhalb der optischen Achse liegen, werden unscharf abgebildet. Ursache sind die verschiedenen Brennweiten in der Meridional- (M) und Sagittalebene (S).

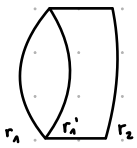
Quelle: Wikipedia

iv) Astigmatismus schiefer Bündel tritt ebenfalls bei schief einfallenden Strahlenbündel auf, die in der Meridional- und Sagittalebene unterschiedlich stark gebrochen werden. Das Objekt wird also auf zwei unterschiedliche Bildebenen projiziert. ✓

v) Axialer Astigmatismus: Aufgrund fehlender Rotationssymmetrie bzgl. der optischen Achse, z.B. unterschiedliche Krümmungsradien der orthogonalen Meridionalebenen. ✓

2,5/2,5

b)



Bikonvexlinse: $r_1 = -r_1'$; Brechungsindex $n_1 = 1{,}621$ und Dispersion $\frac{dn_1}{d\lambda} = -0{,}06\,\mu m^{-1}$ bei λ_0

Konvexkonkav: " $n_2 = 1{,}618$ " $\frac{dn_2}{d\lambda} = -0{,}15\,\mu m^{-1}$ "

Die Gesamtbrechkraft des Systems ist gegeben durch: $D = D_1 + D_2$ (I) und es gilt $f = \frac{1}{D}$ (II) sowie bei Achromaten $\frac{dD}{d\lambda} = \frac{dD_1}{d\lambda} + \frac{dD_2}{d\lambda} = 0$ (III)

mit $f = 250\,mm$ (II) $D = \frac{1}{f} = 0{,}004\,\frac{1}{mm} = 4\,\frac{1}{m}$

für dünne Linsen gilt: $D_i = (n_i - 1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$

$$\rightarrow D_1 = (n_1-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1'}\right) = (n_1-1)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_1}\right) = \frac{2(n_1-1)}{r_1} = \frac{2}{r_1} n_1 - \frac{2}{r_1} \Rightarrow \frac{dD_1}{d\lambda} = \frac{2}{r_1}\frac{dn_1}{d\lambda}$$

$$\rightarrow D_2 = (n_2-1)\left(\frac{1}{r_1'} - \frac{1}{r_2}\right) = -(n_2-1)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) = -\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) n_2 + \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) \Rightarrow \frac{dD_2}{d\lambda} = -\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)\frac{dn_2}{d\lambda}$$

Relationen einsetzen in Bedingungen:

$$\text{(III)} \quad 0 = \frac{dD}{d\lambda} = \frac{2}{r_1}\frac{dn_1}{d\lambda} - \frac{1}{r_1}\frac{dn_2}{d\lambda} - \frac{1}{r_2}\frac{dn_2}{d\lambda} = \frac{1}{r_1}\left(2\frac{dn_1}{d\lambda} - \frac{dn_2}{d\lambda}\right) = \frac{1}{r_2}\frac{dn_2}{d\lambda} \Leftrightarrow r_1 = r_2\left(2\frac{dn_1}{d\lambda} - \frac{dn_2}{d\lambda}\right)\frac{1}{dn_2/d\lambda} = r_2(-0{,}12 + 0{,}15)\frac{1}{-0{,}15} = -0{,}2\,r_2$$

$$\Leftrightarrow r_2 = -5\,r_1$$

dies in (I) und (II): $4\frac{1}{m} = D = \frac{2(n_1-1)}{r_1} - (n_2-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{5r_1}\right) = \frac{2(n_1-1)}{r_1} - (n_2-1)\frac{4}{5}\frac{1}{r_1} \Leftrightarrow r_1 = \frac{1}{4\,1/m}\left(2(n_1-1) - (n_2-1)\frac{4}{5}\right) = \frac{1}{4}\left(2\cdot 0{,}621 - 0{,}618\,\frac{4}{5}\right) \approx 0{,}1869\,m$

$\Rightarrow r_1 = 0{,}1869\,m = r_1'$ ✓

$\Rightarrow r_2 = -5\,r_1 = -0{,}9345\,m$ ✓

2,5/2,5