(1) Ein schwarzer Körper ist eine idealisierte thermische Strahlungsquelle, bei der angenommen wird, dass 100 % der auftreffenden elektromagnetischen Strahlung frequenzunabhängig absorbiert wird. Er sendet em-Strahlung als Wärmestrahlung aus, deren Intensität und Spektrum nicht von der Beschaffenheit des Körpers, sondern nur von dessen Temperatur abhängt.

a) Wände aus nichttransparentem Material werden auf eine konstante Temperatur gebracht und strahlen in einem thermischen Gleichgewicht Wärmestrahlung ab.
Die em Strahlung im Hohlraum heißt dann Hohlraumstrahlung.
Da die Energiedichte und das abgestrahlte Frequenzspektrum nur von der Temperatur und nicht vom Volumen abhängt, ist die Hohlraumstrahlung äquivalent zu der eines schwarzen Körpers. 1/1

b) Plancksches Strahlungsgesetz:

$$w(\nu,t) = \frac{8\pi h}{c_0^3} \frac{\nu^3}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right)-1}$$

Die Annahme, unter der das Gesetz hergeleitet werden konnte, ist, dass Energie nicht kontinuierlich, sondern nur in diskreten Vielfachen der Frequenz
$\Leftrightarrow E = h\nu$ mit der Planckschen Konstante h.
Diese Annahme gilt somit als Geburtsstunde der Quantenphysik

1/1

c) Ohne die Annahme der Quantisierung (kontinuierliche Energie) verändert sich

$$w(\nu,t) = \frac{8\pi h}{c_0^3} \frac{\nu^3}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right)-1} \text{ zu}$$

$$w(\nu,t) = \frac{8\pi}{c_0^3} \nu^2 k_B T \quad \text{(Rayleigh-Jeans-Gesetz)}$$

Für hohe Frequenzen ν würde die Energiedichte unphysikalisch und entgegen der experimentellen Erwartung unendlich steigen (Ultraviolett-Katastrophe)
Plancks Annahme löst dieses Problem durch exponentielle Dämpfung bei hohen Frequenzen

1/1

② Die benötigte Energie zum Garen ist

$$Q = m_K\, c_W\, (T_G - T_K) \quad \text{mit} \quad m_K = \rho_K V_K \quad \text{und} \quad T_{\cancel{G}\,F} = 1073{,}15\,K,\ T_K = 293{,}15\,K$$

$$= 997\,\frac{kg}{m^3} \cdot 5\cdot 10^{-4}\,m^3 \cdot 4182\,\frac{J}{kg\,K}\,(373{,}15\,K - 293{,}15\,K) = 166778{,}16\,J \checkmark$$

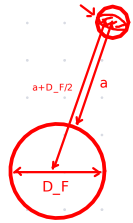
$A_K = \pi r_K^2$

Intensität der Wärmestrahlung auf der Kartoffel:

$A_F = 4\pi r_F^2 = \pi D_F^2$

$$I = \sigma T_F^4 \frac{A_F}{4\pi a^2} = \sigma T_F^4 \frac{D_F^2}{4a^2} \approx \cancel{300063{,}67}\ 3\cdot 10^5\,\frac{W}{m^2}$$

Die Übung Meinte, dass die Entfernung zwischen der Kartoffel und dem Feuer ist nicht a, sondern a+D_F/2.
Aber ich stimme Ihnen zu, die Skizze auf dem Übungsblatt ist nicht eindeutig.



Leistung auf Kartoffel:

$$P = I\,A_K = I\,\cancel{4}\pi r_K^2 = I\,\cancel{4}\pi \left(\frac{3V_K}{4\pi}\right)^{\frac{2}{3}} \approx 915{,}882\,W$$

$A_K = \pi r_K^2$

A_K ist der Querschnitt der Kartoffel, weil die Kartoffel nur von einer Seite bestrahlt wird

$$t_{gar} = \frac{Q}{P} \approx 182{,}096\,s$$ (= ca. 3 Minuten bis Kartoffel Gartemperatur erreicht hat)

2/3

③ $$w_\nu(\nu,T) = \frac{8\pi h}{c^3}\,\frac{\nu^3}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1}$$

Mit der Quotientenregel und

$f = \nu^3$, $g = \exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1$

$f' = 3\nu^2$, $g' = \frac{h}{k_B T}\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right)$

$$\frac{dw_\nu(\nu,T)}{d\nu} = \frac{8\pi h}{c^3}\left[\frac{3\nu^2\left(\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1\right) - \nu^3 \frac{h}{k_B T}\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right)}{\left(\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1\right)^2}\right]$$

Maximum: $\frac{dw_\nu(\nu,T)}{d\nu} \overset{!}{=} 0$:

$$\Leftrightarrow \quad \frac{3\nu^2\left(\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1\right) - \nu^3 \frac{h}{k_B T}\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right)}{\left(\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1\right)^2} \overset{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 3\cancel{\nu^2}\left(\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1\right) = \nu^{\cancel{3}} \frac{h}{k_B T}\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad 3 - \frac{h\nu}{k_B T}\,\frac{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right)}{\left(\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1\right)} = 0$$

Diese transzendente Gleichung kann numerisch gelöst werden:

$$\frac{h\nu_{max}}{k_B T} \approx 2{,}821$$

$$\Leftrightarrow \quad \nu_{max} = 2{,}821 \cdot \frac{k_B T}{h}$$

$$\Leftrightarrow \quad \nu_{max} \propto T$$

1/1

b) $w_\nu(\nu,T) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{\exp(\frac{h\nu}{k_B T})-1}$

Spektrale Energiedichte $w_\nu d\nu$:

$$\frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{\exp(\frac{h\nu}{k_B T})-1} d\nu \qquad \nu = \frac{c}{\lambda} \Leftrightarrow \frac{d\nu}{d\lambda} = -\frac{c}{\lambda^2} \Leftrightarrow d\nu = -\frac{c}{\lambda^2} d\lambda$$

$$\Rightarrow w_\lambda(\lambda,T) = \frac{8\pi h}{\lambda^5} \frac{c}{\exp(\frac{hc}{\lambda k_B T})-1}$$

NR: $\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{1}{\lambda^5}\right) = -\frac{5}{\lambda^6}$, $\frac{d}{d\lambda}\left(\exp(\frac{hc}{\lambda k_B T})-1\right)^{-1} = \left(\exp(\frac{hc}{\lambda k_B T})-1\right)^{-2} \frac{hc}{\lambda^2 k_B T} \exp(\frac{hc}{\lambda k_B T})$

$$\Rightarrow \frac{dw_\lambda(\lambda,T)}{d\lambda} = 8\pi hc\left[-\frac{5}{\lambda^6}\frac{1}{\exp(\frac{hc}{\lambda k_B T})-1} + \frac{1}{\lambda^5}\frac{hc\exp(\frac{hc}{\lambda k_B T})}{\lambda^2 k_B T\left(\exp(\frac{hc}{\lambda k_B T})-1\right)^2}\right] \overset{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{\lambda^6}\frac{1}{\exp(\frac{hc}{\lambda k_B T})-1} = \frac{hc\exp(\frac{hc}{\lambda k_B T})}{\lambda^7 k_B T\left(\exp(\frac{hc}{\lambda k_B T})-1\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow 5\left(\exp(\frac{hc}{\lambda k_B T})-1\right) = \frac{hc}{\lambda k_B T}\exp\left(\frac{hc}{\lambda k_B T}\right)$$

Die transzendente Gleichung kann numerisch gelöst werden:

$$\frac{hc}{\lambda_{max} k_B T} \approx 4{,}965$$

$$\Rightarrow \lambda_{max} = \frac{hc}{4{,}965\, k_B T}$$

$$\Leftrightarrow \lambda_{max} \propto \frac{1}{T} \quad \text{bzw.} \quad \lambda_{max}\cdot T = \frac{hc}{4{,}965} = \text{const.}$$

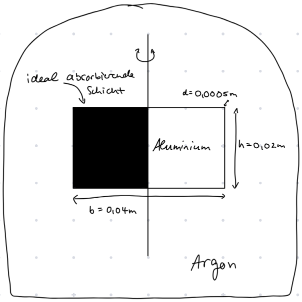
1.5/1.5

c) Da $d\lambda = \frac{c}{\nu^2} d\nu$ ist, wird für jedes Wellenlängenintervall $d\lambda$ das dazugehörige Frequenzintervall für größere Frequenzen immer breiter. Daher ist $\lambda'_{max} = \frac{c}{\nu_{max}} = \frac{ch}{2{,}821\cdot k_B T} \neq \frac{hc}{4{,}965\, k_B T} = \lambda_{max}$ falsch.

0.5/0.5

Was bedeutet "breiter"?
Die Intervalle der Frequenz und der Wellenlänge sind in verschiedenen Einheiten, wie kann man ihre Breiten vergleichen?

④



a) Ohne Lichteinstrahlung herrscht im Inneren des Glaskolbens thermisches Gleichgewicht (statistisch gleich viele Stöße der Gasmoleküle auf die schwarze und die Aluminiumfläche). Bei Lichteinstrahlung erwärmt sich die schwarze Fläche deutlich mehr ($\Leftrightarrow$ stärkere Molekularbewegung). Treffen dann Gasmoleküle auf die schnell schwingenden Teilchen der schwarzen Fläche, so haben sie beim Wegfliegen einen größeren Impuls. Damit Kräftegleichgewicht herrscht, erfährt die schwarze Platte einen Rückstoß, der größer ist als der der Aluminiumplatte. So kommt es dann zu einer Drehbewegung

0.5/0.5

b) $p_0 = 1\,Pa$, $T_0 = 20°C = 293{,}15\,K$, $P_L = 1000\,\frac{W}{m^2}\cdot A$

Wärmestrahlung (ohne Licht):

$T_0^4\sigma = \frac{P_0}{A}$ (Stefan-Boltzmann-Gesetz)

Lichteinstrahlung:

$T^4\sigma = \frac{P_L}{A}$

$$\Rightarrow T_1 = \sqrt[4]{\left(\frac{P_0}{A} + \frac{P_L}{A}\right)\frac{1}{\sigma}} = \sqrt[4]{\frac{P_L}{A\sigma} + T_0^4} \approx \sqrt[4]{\frac{1000\,\frac{W}{m^2}}{5{,}670374\cdot 10^{-8}\,\frac{W}{m^2K^4}} + (293{,}15)^4\,K^4} \approx 397{,}72\,K = 124{,}57°C$$

1/1

c) $\frac{pV}{T} = \text{konst.}$ (allg. Gasgesetz)

$$\Rightarrow \frac{p_0 \cancel{V}}{T_0} = \frac{p_s \cancel{V}}{T_1}$$

$$\Leftrightarrow p_1 = \frac{p_0}{T_0} T_1$$

$$\Rightarrow \Delta p = p_s - p_0 = p_0 \frac{T_1}{T_0} - p_0 = 1\,Pa\,\frac{397{,}72\,K}{293{,}15\,K} - 1\,Pa \approx 0{,}3567\,Pa$$

0.5/0.5

d) $p_s = \frac{\gamma I}{c}$ mit $\gamma = \begin{cases} 1, & \text{schwarze Fläche} \\ 2, & \text{Aluminium} \end{cases}$

$$\Rightarrow \Delta p_s = p_{s,0} - p_{s,s} = \frac{2I}{c} - \frac{I}{c} = \frac{I}{c} = \frac{1000\,\frac{W}{m^2}}{2{,}99792\cdot 10^8\,\frac{m}{s}} = 3{,}335\cdot 10^{-6}\,Pa$$

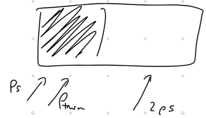
1/1

e) Aufgrund der Rotationssymmetrie ist die Kraft auf das gesamte Plättchen 0 N.

$h = 0{,}02\,m$, $b = 0{,}04\,m$

$$M = 2\cdot\int_0^{\frac{b}{2}} \Delta p\, r\, h\, dr = \left[r^2 h \Delta p\right]_0^{\frac{b}{2}} = \frac{b^2}{4}\cdot h\Delta p = \frac{(0{,}04)^2\,m^2}{4}\cdot 0{,}02\,m\cdot 0{,}3567\,Pa = 2{,}8536\cdot 10^{-6}\,N\cdot m$$

0.5/0.5



f) $2p_{s,0} \overset{!}{=} p_{ss} + p_{therm}$

$\frac{2I^*}{c} = \frac{I^*}{c} + \frac{p_0}{T_0} T_1 \quad \Big| \quad T_1 = \left(\frac{I}{\sigma}\right)^{\frac{1}{4}}$

Sie haben im Punkt b) gezeigt, dass $T = \sqrt[4]{I/\sigma + T_0^4}$
aber jetzt T_0 tatsächlich vernachlässigbar

$\frac{I^*}{c} = \frac{p_0}{T_0} \left(\frac{I^*}{\sigma}\right)^{\frac{1}{4}}$

$I^* = \frac{p_0 c}{T_0 \sigma^{\frac{1}{4}}} I^{*\frac{1}{4}} \quad \Big| : I^{*\frac{1}{4}}$

$I^{*\frac{3}{4}} = \frac{p_0 c}{T_0 \sigma^{\frac{1}{4}}} \Rightarrow I^* = \left(\frac{p_0 c}{T_0 \sigma^{\frac{1}{4}}}\right)^{\frac{4}{3}} \approx 2{,}68 \cdot 10^{10} \frac{W}{m^2}$ ✓

Die benötigte Lichtintensität müsste extrem hoch sein und die Temperatur der schwarzen Platte $T = \sqrt[4]{\frac{I^*}{\sigma} + T_0^4} \approx 26219{,}9\,K$ ✓ würde ein vielfaches der Temperatur der Sonnenoberfläche annehmen.
Der Fall ist also nicht realisierbar.

0.5/0.5

g) Senkung des Drucks ~~=>~~ Senkung der Temperatur (konstantes Volumen)

$PV = \underbrace{n}_{\neq \text{const}} k_B T$

Nein, weil die Stoffmenge nicht konstant bleibt, wir pumpen Argon aus

Die schwarzen Flächen nehmen dann eine niedrigere Temperatur an als die Aluminiumflächen und die Mühle dreht sich mit der gleichen Erklärung wie in a) in die andere Richtung

0/0.5