

Übungsblatt 5

Ausgabe: 25.11.2025

Abgabe: 02.12.2025, vor 10:00 Uhr (Ilias)

Besprechung: 04.12.2025 (Tutorien)

Aufgabe 1

5 Punkte

Eine Lichtwelle mit der zeitlichen Abhängigkeit $E(t) = E_0 e^{i\omega t}$ tritt in Wechselwirkung mit einem Medium. Im Modell des Lorentz-Oszillators werden dabei die Valenzelektronen zu erzwungenen gedämpften harmonischen Schwingungen um die als ortsfest angenommenen Ionenrümpfe angeregt.

- Welche für das Modell des Lorentz-Oszillators relevanten Kräfte wirken auf ein Elektron? **½ Punkt**
- Wie lautet die Bewegungsgleichung eines Oszillators für kleine Kräfte? **½ Punkt**

Aus der Bewegungsgleichung ergibt sich mit dem Ansatz $x(t) = x_0 e^{i\omega t}$ für die Amplitude einer Schwingung $x_0 = -\frac{QE_0/m}{(\Omega^2 - \omega^2) + i\gamma\omega}$.

- Berechnen Sie das Dipolmoment p eines Oszillators sowie die dielektrische Polarisation P im Medium mit einer Oszillatordichte N/V . **½ Punkt**
- Berechnen Sie die dielektrische Funktion $\varepsilon(\omega)$ über die dielektrische Verschiebungsdichte D . **½ Punkt**

In der Optik wird anstelle der komplexen dielektrischen Funktion üblicherweise der komplexe Brechungsindex $n(\omega)$ verwendet.

- Für verdünnte Medien (etwa Gase) ist im nichtresonanten Fall ($\omega \neq \Omega$) der Beitrag des Resonanzterms klein gegen 1 und es gilt $\varepsilon(\omega) \approx 1$. Berechnen Sie für diesen Fall $n(\omega) = \sqrt{\varepsilon(\omega)}$ näherungsweise durch eine Taylorentwicklung erster Ordnung. **½ Punkt**
- Berechnen Sie den Realteil $n(\omega)$ und den Imaginärteil $n''(\omega)$ von $n(\omega) = n'(\omega) - in''(\omega)$. **½ Punkt**
- Skizzieren Sie $n'(\omega)$ und $n''(\omega)$. **½ Punkt**
- Zeigen Sie allgemein, dass der Realteil $n'(\omega)$ einer komplexen Funktion $n(\omega)$ die Ausbreitung einer sich im Medium ausbreitenden Lichtwelle $E = E_0 e^{i(\omega t - kz)}$ charakterisiert. Nutzen Sie dazu den Zusammenhang $k = \frac{\omega}{c} \cdot n(\omega)$. **½ Punkt**
- Zeigen Sie ebenso, dass der Imaginärteil $n''(\omega)$ mit der Absorption der Lichtwelle verbunden ist. Wie lässt sich ein Absorptionskoeffizient α definieren? **½ Punkt**
- Recherchieren Sie: Was versteht man unter einer evaneszenten Welle? Wann tritt sie auf? **½ Punkt**

Aufgabe 2

4 Punkte

Wir haben in Aufgabe 1 gezeigt, dass der Realteil $n'(\omega) \approx 1 + \frac{1}{2} \frac{NQ^2}{Vm\epsilon_0} \frac{\Omega^2 - \omega^2}{(\Omega^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}$ des komplexen Brechungsindex die Ausbreitung einer Lichtwelle in einem Medium charakterisiert.

Benutzen Sie im Folgenden diese Zahlenwerte: $\frac{NQ^2}{Vm\epsilon_0} = 1/s^2$, $\Omega = 4/s$, $\gamma = 1/s$.

Anmerkung: Für sichtbares Licht und ein verdünntes Medium wie ein Gas würde Ω in der Größenordnung von $10^{16}/s$ liegen.

- Gibt es einen Bereich von ω , in dem die Phasengeschwindigkeit $v_{Ph} = c/n'(\omega)$ größer wird als die Vakuumlichtgeschwindigkeit c ? Lösen Sie die Aufgabe graphisch, indem Sie $n'(\omega)$ mit einer geeigneten Software plotten (z.B. mit Python im Jupyter Hub des KIT). **1 Punkt**
- Gibt es einen Bereich von ω , in dem die Gruppengeschwindigkeit $v_{Gr} = \frac{c}{n' + \omega \frac{dn'}{d\omega}}$ größer wird als c ? Lösen Sie die Aufgabe graphisch durch einen geeigneten Plot. Sie können dabei der Einfachheit halber $\frac{dn'}{d\omega}$ numerisch durch den Differenzenquotienten berechnen. **1 Punkt**
- Wie verhält sich der Imaginärteil $n''(\omega) \approx \frac{1}{2} \frac{NQ^2}{Vm\epsilon_0} \frac{\gamma\omega}{(\Omega^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}$ des komplexen Brechungsindex in dem in b) identifizierten Bereich? Zeigen Sie auch dies durch einen Plot. Was bedeutet das Ergebnis für die Lichtwelle? **1 Punkt**
- Wie lassen sich Ihre Ergebnisse aus a) und b) mit dem Postulat der Relativitätstheorie vereinen, dass c eine obere Schranke für alle Geschwindigkeiten darstellt, mit denen Signale übertragen werden können? **1 Punkt**

Aufgabe 3

3 Punkte

- Zeigen Sie, dass zwischen der Phasengeschwindigkeit $v_{Ph} = \omega/k$ und der Gruppengeschwindigkeit $v_{Gr} = d\omega/dk$ einer elektromagnetischen Welle der folgende Zusammenhang besteht:

$$v_{Gr}(\lambda) = v_{Ph}(\lambda) - \lambda \frac{dv_{Ph}(\lambda)}{d\lambda}. \quad \mathbf{1 \text{ Punkt}}$$

- Folgern Sie aus a), ob bei normaler Dispersion die Gruppengeschwindigkeit größer oder kleiner als die Phasengeschwindigkeit ist. **1 Punkt**

- Im Röntgenbereich ist die Brechzahl für elektromagnetische Wellen etwas kleiner als 1:

$$n \approx 1 - \frac{a^2}{\omega^2}, \quad \frac{a^2}{\omega^2} < 1, \quad a = \text{const.}$$

Zeigen Sie, dass die Gruppengeschwindigkeit kleiner als die Lichtgeschwindigkeit c bleibt, obwohl die Phasengeschwindigkeit größer als c ist. **1 Punkt**

Aufgabe 4

4 Punkte

- a) Wie groß ist der Adiabatenkoeffizient κ eines Gases aus Wassermolekülen (H_2O), wenn die Temperatur nicht zu hoch und die Bindung zwischen Wasserstoff und Sauerstoff daher starr ist? Wie erklärt sich dies? Wie viele Freiheitsgrade sind bei Wasser maximal möglich, also bei sehr hohen Temperaturen? **1 Punkt**
- b) Für die in der Vorlesung verwendete Simulation zweidimensionaler Gase wird anstatt einzelner Scheiben ("Atome") ein gewinkelt "Wassermolekül" bestehend aus einem "Atom" O und zwei "Atomen" H verwendet, die gegeneinander schwingen können. Berechnen Sie die molare Wärmekapazität C_V und den Adiabatenkoeffizienten κ , die sich bei Durchführung der 2D-Simulation ergeben würden.
Hinweis: κ kann in 2D nach derselben Formel wie in 3D aus der Anzahl der vorliegenden Freiheitsgrade berechnet werden. **1 Punkt**
- c) Sie haben zwei wärmeisolierte Gefäße bei Raumtemperatur. In einem befindet sich 1 Mol Argon, im anderen 1 Mol Stickstoff. Beiden Gasen wird die gleiche Wärmemenge zugeführt. Welches Gas erwärmt sich stärker? Begründen Sie Ihre Antwort. **1 Punkt**
- d) Bestimmen Sie die maximale isobare Wärmekapazität C_P von Ethin (C_2H_2), einem linearen Molekül. Recherchieren Sie für Ihre Antwort, wie Sie die Anzahl der inneren Vibrationsfreiheitsgrade des Moleküls bestimmen können. **1 Punkt**