II Schrödinger-Gleichung und Wasserstoffatom

II.A Wellencharakter von Teilchen

de Broglie-Hypothese (1924)

Dualismus (Komplementarität) Welle – Teilchen

Licht → Materieteilchen

λ_0

$c_0 = \lambda_0 \cdot \nu$

$E_{Photon} = h\nu = mc^2$

v: Geschwindigkeit d. T.

$p_{Photon} = mc = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$

$p_m = mv = \frac{h}{\lambda} \rightsquigarrow \boxed{\lambda = \frac{h}{mv}}$

Phasengeschwindigkeit d. W.

$c_p = \lambda \cdot \nu$

$= \frac{h}{mv} \cdot \frac{mc^2}{h} = \frac{c^2}{v}$

$\boxed{c_p \cdot v = c^2}$

$c_p > c$, $v < c$

Wellenzahl (!) $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{p}{\hbar}$

$\boxed{\vec{k} = \frac{\vec{p}}{\hbar}}$

Teilchen-Interferenzexperimente $\rightsquigarrow \lambda$ (1923 – 1927)

Elektronenbeugung (Davisson, Kunsman, Germer)

Neutronen-, Atom-Beugung z.B.

→ λ direkt meßbar

ν, c_p (nur) Rechengrößen

Heisenbergsche Quantenmechanik (1925)

Heisenbergsche Unschärfe-Relation (1927)

$$\Delta p_x \cdot \Delta x \geq \frac{h}{2\pi} \qquad \text{u.ä.}$$

unvermeidbar, wenn zur Beschreibung Wellen- und Teilcheneigenschaften erforderlich sind. (Wellenpakete)

Schrödingersche Wellenmechanik (1926)

Wellengleichung des Materie-Wellenfeldes

Atom: System stehender Materiewellen

→ Theorie D (Quantenmechanik I)

Teil "Wellenmechanik"

mechan.
allgemein: Wellengleichung $\Delta \Psi = \frac{1}{c_p^2} \ddot{\Psi}$
el. magn.

Wellenfunktion $\Psi = \Psi(x, y, z, t)$

in der Regel komplex

konjugiert komplex Ψ^*

stationäre Zustände

$$\Psi = \psi(x, y, z) \cdot e^{-i\omega t}$$

$$= \psi(x, y, z) \cdot e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t}$$

statistische Deutung (Max Born 1926)

$|\Psi|^2 = \Psi^* \Psi$ Wahrscheinlichkeitsdichte

$\Psi^* \Psi \cdot d\tau$ Aufenthaltswahrscheinlichkeit in $d\tau = dx \cdot dy \cdot dz$

$$\iiint_{-\infty}^{+\infty} \Psi^* \Psi \, d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^* \Psi \cdot dx\, dy\, dz = 1$$

Normierung, 1 Teilchen

$$\iiint \Psi_n^* \Psi_m \, d\tau = \delta_{nm}$$

Orthonormiert Eigenfunktionen zu verschiedenen Energieeigenwerten E_n, E_m

---

$$\overline{F(\vec{r})} = \iiint \Psi^* F(\vec{r}) \Psi \, d\tau = \langle F(\vec{r}) \rangle$$

Erwartungswerte (Mittelwert vielfacher Messung)

zB $\overline{\vec{r}} = \langle \vec{r} \rangle = \iiint \Psi^* \vec{r} \Psi \, d\tau$

$\overline{r} = \langle r \rangle = \iiint \Psi^* r \Psi \, d\tau$

aber $\overline{\vec{p}} = \langle \vec{p} \rangle \overset{?}{=} \iiint \Psi^*(x,y,z,t)\, \vec{p}\, \Psi(x,y,z,t)\, d\tau$

Übersetzungsschema

Physikalische Größe	Differential-Operatoren („Orts"darstellung der ")
$\vec{p}$	$\frac{\hbar}{i}\,\vec{\mathrm{grad}} = \frac{\hbar}{i}\,\vec{\nabla}$
$p_x\,,\ p_z$	$\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\,,\ \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial z}$
$\frac{p^2}{2m} + V(r) = \frac{m v^2}{2} + V(r)$	$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(r)$
$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$	$\vec{r} \times \frac{\hbar}{i}\,\vec{\mathrm{grad}}$
L_z	$\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial \varphi}$
$W_{ges}\,,\ \mathcal{H}$	$-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}$

Stationäre Zustände des H-Atoms

$$\boxed{\Psi = \psi(x,y,z)\, e^{-\frac{i}{\hbar}Et}}$$

$$W_{kin} + W_{pot} = W_{ges}$$

$$\frac{m}{2}v^2 - \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{p^2}{2m} + V(r) = W_{ges}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi + V(r)\,\Psi = -\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}\Psi$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi + V(r)\,\Psi = E\,\Psi$$

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + (V(r) - E)\,\psi = 0}$$

zeitfreie
zeitunabhängige
Schrödinger-Gleichung