

Zur Erinnerung:

Termschema des H-Atoms

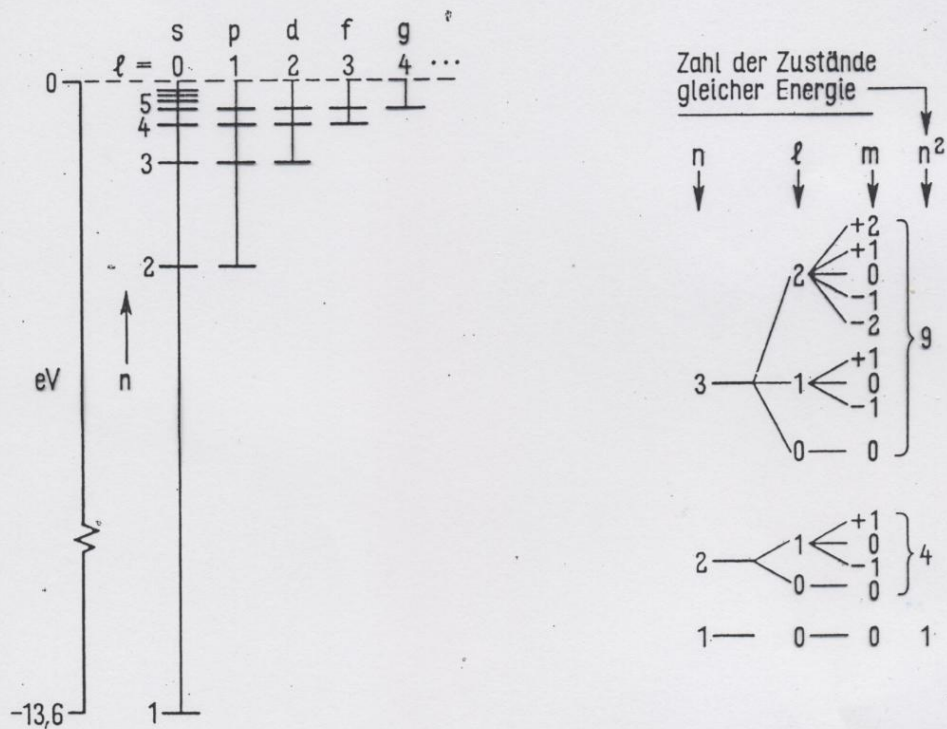


Fig. 28. Links: Termschema des Wasserstoffs. Die nach ℓ entarteten Terme zum gleichen n sind getrennt gezeichnet. Rechts: schematische Darstellung der möglichen Quantenzahlen ℓ und m zum gleichen n . Wenn keine äußeren Felder wirken, haben die Zustände mit gleichem n gleiche Energie

Energiezustände
$$E_n = - \frac{Z^2 e^4 m}{32 \pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2} \frac{1}{n^2}$$

7.4.2 Relativistische Effekte

$$E \ll m_e c^2 \quad \text{aber } E \neq 0$$

Näherung = Schrödingergl. $\oplus$ $\gamma m = m_e$

statt $H = \frac{p^2}{2m} + V$:

$$H = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} - m c^2 + V$$

$$= m c^2 \left[\sqrt{\frac{p^2}{m^2 c^2} + 1} - 1 \right] + V$$

$$\approx m c^2 \left(1 + \frac{p^2}{2 m^2 c^2} - \frac{p^4}{8 m^4 c^4} - 1 \right) + V$$

$$= \frac{p^2}{2m} - \frac{p^4}{8 m^3 c^2} + V$$

↑

Relativist. Korrektur

$$\Delta E_{\text{rel}} = - \int u_{ne}^*(\mathbf{r}) \frac{\hbar^2}{8 m_0^3 c^2} \Delta^2 u(\mathbf{r}) d^3 r$$

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}$$

$$= - \frac{m c^2}{2} (Z \alpha^4) \left(\frac{1}{n^3 (l + \frac{1}{2})} - \frac{3}{4 n^4} \right)$$

7.4.3 Zusammenfassung

Gesamtenergie

$$E_{n,j} = E_n + \underbrace{\Delta E_{es} + \Delta E_{rel}}_{\text{Feinstruktur}}$$

$$= E_n \left(1 + \frac{(Z\alpha)^2}{n} \left(\frac{1}{j + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4n} \right) \right)$$

7.5 Hyperfeinstruktur

Einfluß des Kernspins:

Erwart. Kern Proton: $\vec{\mu} = \frac{g_p e}{2 m_p} \vec{s}$;

$$\mu_p = \frac{1}{1836} \cdot \mu_B$$

Neutronen: $\vec{\mu} = 0 !$

Aber: $\left. \begin{array}{l} g_p = 5,58 \neq 2 \\ g_n = 3,82 \neq 2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{da} \\ \text{aus} \\ \text{Quarks} \\ \text{zusammengesetzt} \end{array}$

zu erwartender Effekt:

Aufspaltung der Energieniveaus
je nach Orientierung von $\vec{j}$ und $\vec{I}$

Gesamt-drehimp. Kernspin:
des Atoms

$$V_{HFS} = -\vec{\mu}_I \cdot \vec{B}_j$$

$$|\vec{I}| = \sqrt{I(I+1)} \quad \hbar \quad (\text{Proton: } I = \frac{1}{2})$$

$$|I_z| = m_I \quad \hbar$$

$$\vec{\mu}_I = \frac{g_K \cdot \mu_K}{\hbar} \vec{I}, \quad \mu_K = \frac{\mu_B}{1836} = \frac{e\hbar}{2mp}$$

Kernmagneton

$$\vec{B}_j = B_0 \cdot \frac{\vec{j}}{j \cdot \hbar}$$

Magnetfeld der Hülle
bei $r=0$, d.h. am
Ort des Kernes.

$$\Rightarrow V_{HFS} \sim \vec{I} \cdot \vec{j}$$

Gesamt drehimpuls eines Atoms:

$$\vec{F} = \vec{I} + \vec{J}$$

$$|\vec{F}|^2 = I^2 + J^2 + 2 \vec{I} \cdot \vec{J}$$

$$\vec{I} \cdot \vec{J} = \frac{1}{2} (F(F+1) - I(I+1) - J(J+1))$$

$$\Delta E_{\text{HFS}} = - \frac{A}{2} (F(F+1) - I(I+1) - J(J+1))$$

Allgemein.

Für H-Atom:

$$\vec{\mu}_P = g_P \cdot \mu_K \cdot \frac{\vec{S}}{\hbar}$$

$$V_{\text{HFS}} = -\vec{\mu}_P \cdot \vec{B}_J = -\frac{g_P \mu_K}{\hbar} \vec{S}_P \cdot \vec{J} \cdot \frac{B_0}{J \hbar}$$

$$\text{Mit } B_0 = \frac{8\pi}{3} |\psi_m(0)|^2 g_s \mu_B$$

↑
Aufenthaltswahrsch. des e⁻
am Kernort

$$= \frac{8\pi}{3} g_s \mu_B \cdot \frac{1}{n^3 \pi a_0^3} \quad (l=0)$$

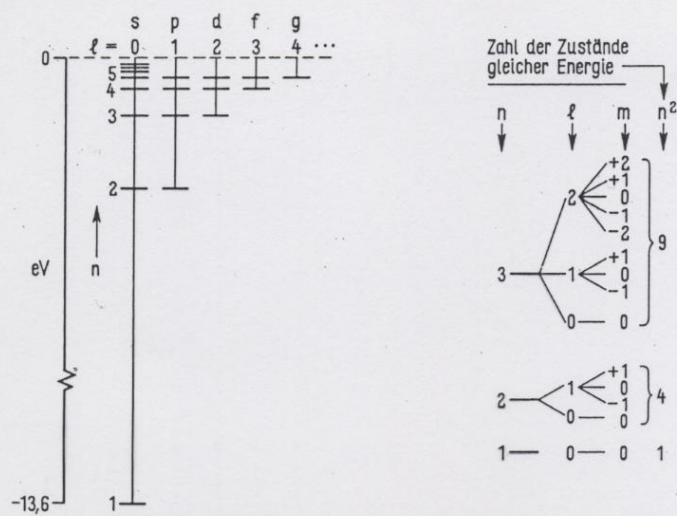


Fig. 28 Links: Termschema des Wasserstoffs. Die nach l entarteten Terme zum gleichen n sind getrennt gezeichnet. Rechts: schematische Darstellung der möglichen Quantenzahlen l und m zum gleichen n . Wenn keine äußeren Felder wirken, haben die Zustände mit gleichem n gleiche Energie

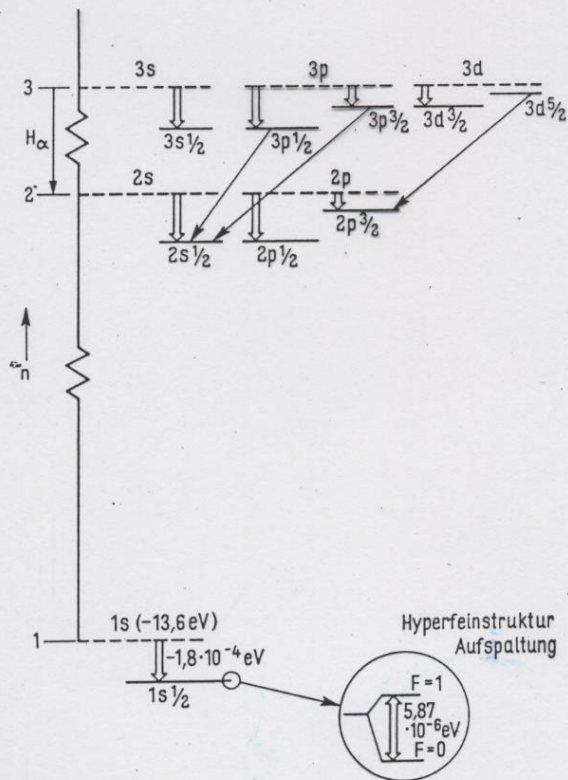
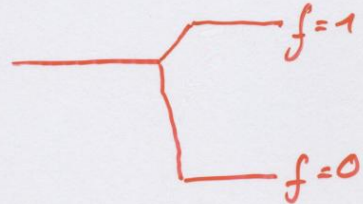


Fig. 44
Feinstrukturaufspaltung der $n = 1, 2, 3$ Zustände beim Wasserstoff. Nicht maßstäblich! Die energetische Verschiebung durch die Feinstruktur gegenüber den ursprünglichen Niveaus ist durch offene Pfeile angedeutet. Man beachte die Entartung nach j. Die durchgezogenen Pfeile sind Komponenten der H_{α} Linie (näheres in Fig. 51). Die Hyperfeinstrukturaufspaltung ist vergrößert eingezeichnet

Ergebnis für $n=1$, $j=s=\frac{1}{2}$
 $f=0$ oder 1 :

$$\Delta E_{\text{HFS}} = \begin{matrix} + \frac{1}{4} A \\ - \frac{3}{4} A \end{matrix}$$



$$A = 5,9 \cdot 10^{-6} \text{ eV}$$

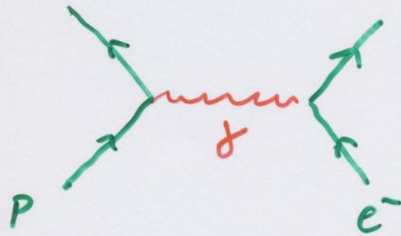
$$\hat{=} 1420 \text{ MHz}$$

$$\hat{=} \lambda = 21 \text{ cm}$$

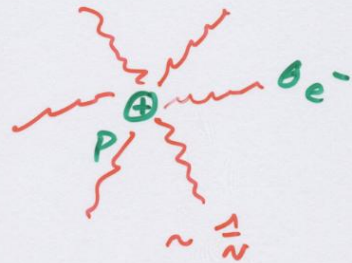
7.6. QED - Effekte (Lamb-Verschiebung)

Berücksichtigung der Quantisierung des
Feldes $\rightarrow$ Strahlungskorrekturen

a) Grund-Diagramm für Coulomb-Feld:



=

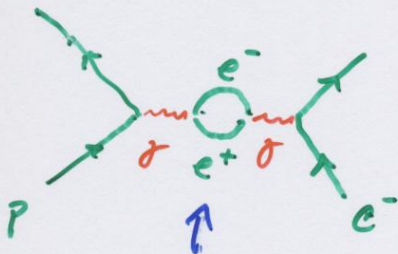


b) Höhere Korrekturen



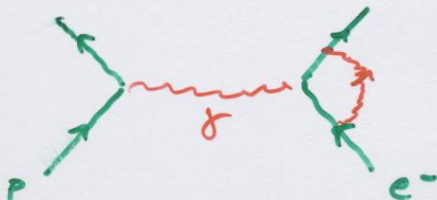
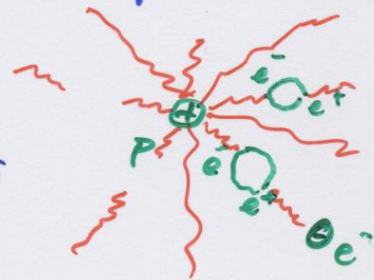
Elektronen "zittert"

⇒ Korrektur der Masse m_e



Vakuum polarisation

möglich wenn $\Delta E \cdot \Delta t \approx \hbar$



Korrektur des Magn. Moments $g_s \approx 2 \cdot (1 + \frac{\alpha}{2\pi})$

Korrekturen führen zu einer Energieverschiebung (Lamb)

$$\Delta E_{\text{Lamb}} = \alpha^5 m c^2 \frac{1}{4n^3} \left\{ 0,05 \pm \frac{1}{\pi \cdot (j + \frac{1}{2})} \right\}$$

$(l + \frac{1}{2})$

$$\text{für } j = l \pm \frac{1}{2}$$

$$\hat{=} 10\% \text{ von } E_{\text{LS}}$$

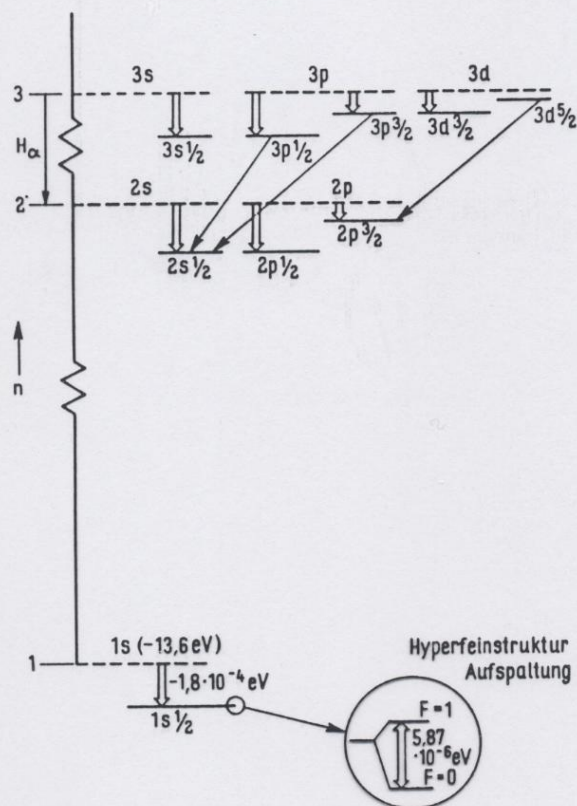
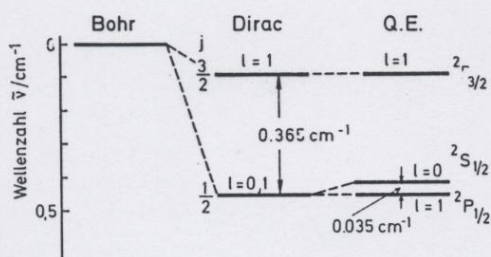


Fig. 44
Feinstrukturaufspaltung der $n = 1, 2, 3$ Zustände beim Wasserstoff. Nicht maßstäblich! Die energetische Verschiebung durch die Feinstruktur gegenüber den ursprünglichen Niveaus ist durch offene Pfeile angedeutet. Man beachte die Entartung nach j . Die durchgezogenen Pfeile sind Komponenten der H_α -Linie (näheres in Fig. 51). Die Hyperfeinstrukturaufspaltung ist vergrößert eingezeichnet



Abt. 12.21. Zur Lamb-Verschiebung: Feinstruktur des $n=2$ -Niveaus beim H-Atom nach Bohr, nach Dirac und quantenelektrodynamisch unter Berücksichtigung der Lamb-Verschiebung. Die j -Entartung ist aufgehoben