

Vorlesung 14:

Roter Faden:

Wiederholung

Lamb-Shift

Anomaler Zeeman-Effekt

Hyperfeinstruktur

Folien auf dem Web:

<http://www-ekp.physik.uni-karlsruhe.de/~deboer/>

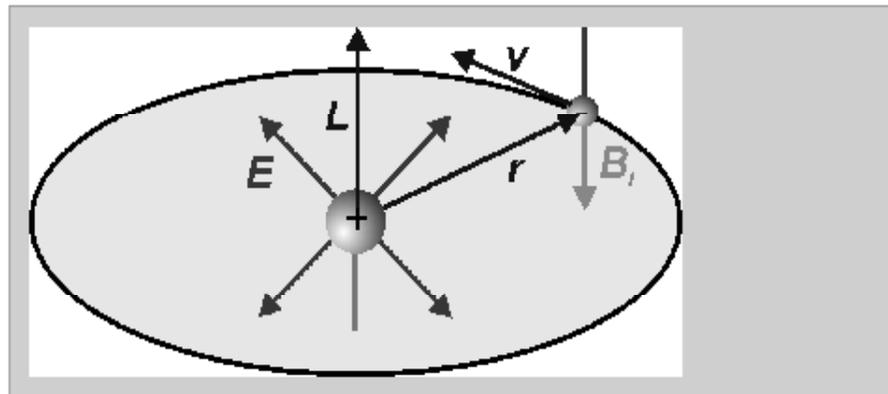
Siehe auch:

<http://www.uni-stuttgart.de/ipf/lehre/online-skript/>

Zusammenfassung Spin-Bahn-Kopplung

Bohr-Atommodell: Im E -Feld des Kerns bewegtes Elektron sieht B -Feld: \Rightarrow

$$B_l = \frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{E} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\vec{v} \times \vec{r}}{r^3}$$



Quantenmechanische Rechnung ergibt zusätzlichen Thomas-Faktor 1/2. Mit Coulomb-Feld:

$$B_l = -\frac{1}{2} \frac{\mu_0 e}{4\pi m_e r^3} \vec{L}$$

Es folgt die LS-Wechselwirkungsenergie \Rightarrow

$$E_{ls} = -\mu_s B_l = \frac{\mu_0 e^2}{8\pi m_e^2 r^3} \vec{S} \vec{L}$$

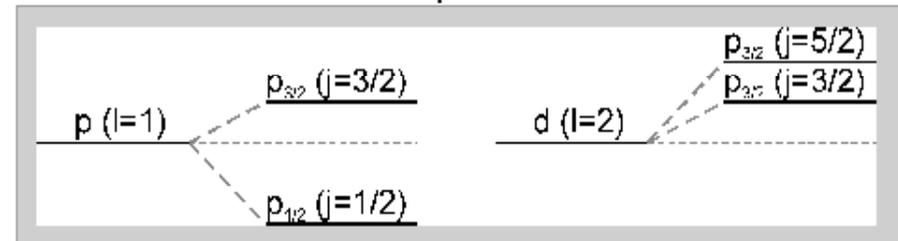
Mit $J^2 = L^2 + S^2 + 2\vec{L} \cdot \vec{S}$ und

$$\langle r^{-3} \rangle = \int r^{-3} |\psi|^2 d^3r$$

folgt eine Niveaushiftung um

$$E_{ls} \sim \frac{Z^4 (j(j+1) - l(l+1) - s(s+1))}{n^3 l(l+1/2)(l+1)}$$

Alle Niveaus außer $l=0$ spalten in Doubletten auf



Bei LS-Kopplung wird Zustand durch die Quantenzahlen $n l j m_j$ beschrieben. m_l und m_s sind unbestimmt.

Spektroskopische Nomenklatur: $n^{2s+1} l_j$

- ▶ $3^2 d_{5/2}$ ($n=3, s=1/2, l=2, j=5/2$)
- ▶ $1^2 s_{1/2}$ ($n=1, s=1/2, l=0, j=1/2$)

Zusammenfassung Spin-Bahn-Kopplung

Gesamtdrehimpuls des Elektrons setzt sich aus Spin- und Bahnanteil vektoriell zusammen:

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$$

Es gelten die quantenmechanischen Eigenschaften:

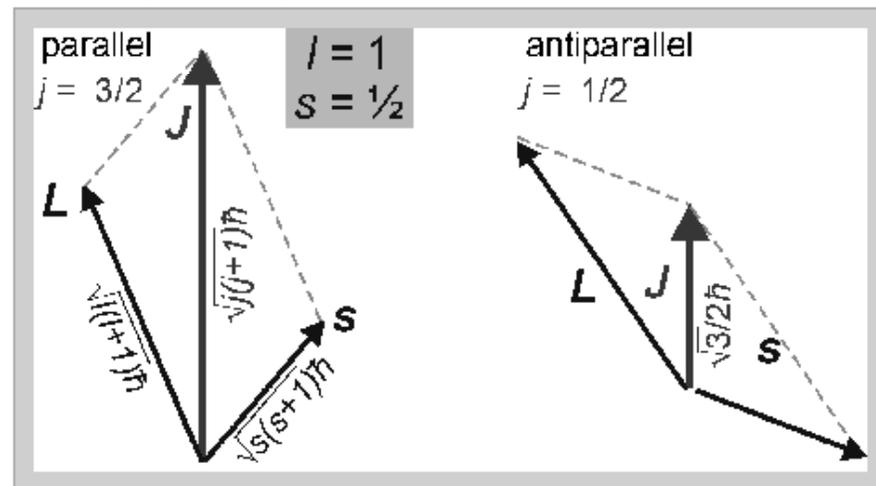
$$J^2 = j(j+1)\hbar^2$$

$$J_z = m_j \hbar$$

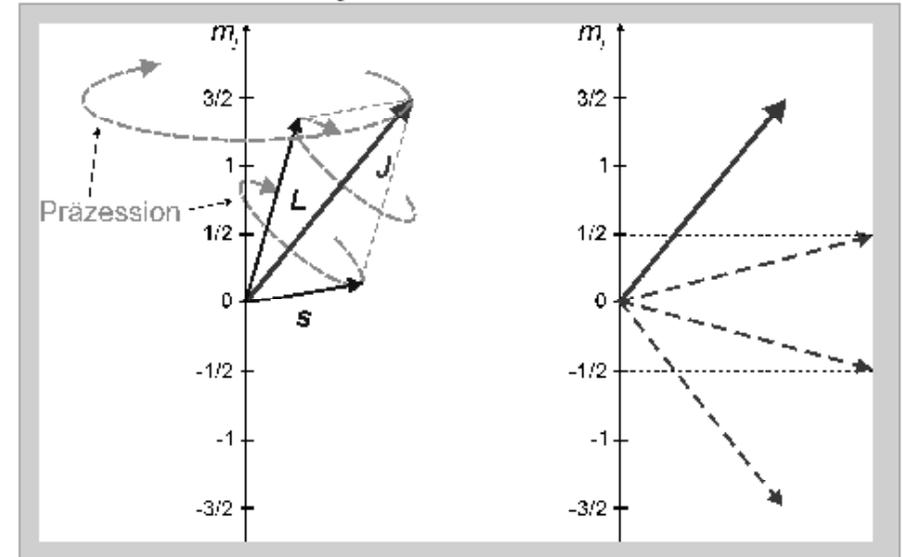
$$-j \leq m_j \leq j$$

Beim H-Atom kann die Gesamtspinquantenzahl je nach Kopplung zwei Werte annehmen:

- ▶ parallel: $j=l+1/2$
- ▶ antiparallel: $j=l-1/2$



Die Zustände sind $2j+1$ -fach entartet.



Gleichzeitig scharf gemessen können werden:

- ▶ Bahndrehimpuls $L^2 = l(l+1)\hbar^2$
- ▶ Gesamtdrehimpuls $J^2 = j(j+1)\hbar^2$
- ▶ Projektion des Gesamtdrehimpulses $J_z = m_j \hbar$

Nicht scharf messbar sind die

- ▶ Projektion des Bahndrehimpulses m_l
- ▶ Projektion des Spins m_s

Für Übergänge muss gelten: $\Delta l = \pm 1$, $\Delta j = 0, \pm 1$, $\Delta m_j = 0, \pm 1$. $\Delta j = 0$ (Spin-flip) ist unwahrscheinlicher.

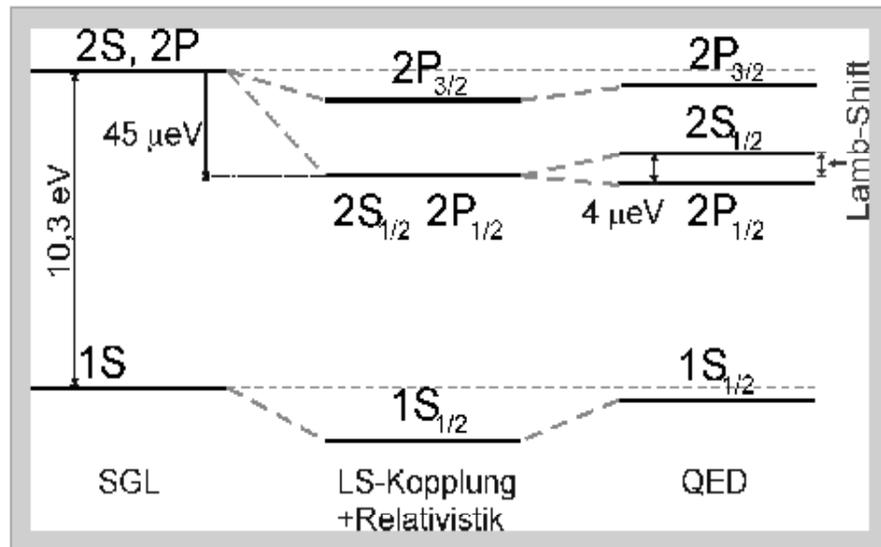
Relativ. Korrekturen und Lamb-Shift

Weitere Korrekturen sind Folge der relativistischen Massezunahme. Aus der relativistischen quantenmechanischen Dirac-Gleichung folgt für die Feinstrukturaufspaltung

$$E_{nj} = E_n \left(1 + \frac{\alpha^2}{n} \left(\frac{3}{4n} - \frac{1}{j+1/2} \right) \right)$$

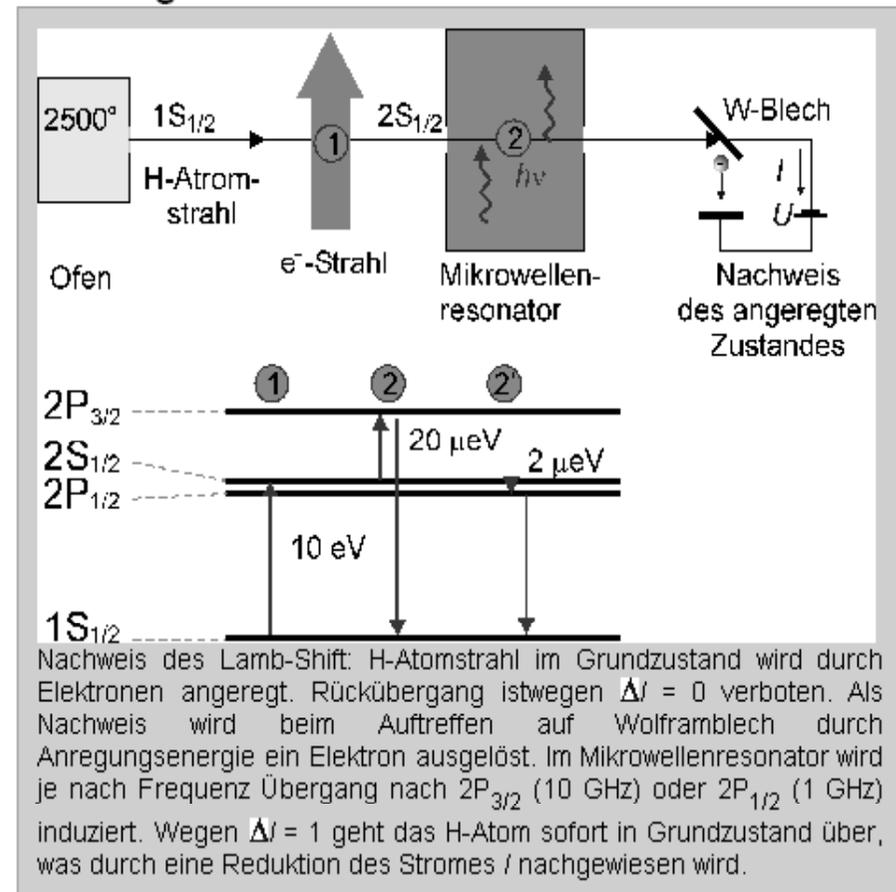
mit der Sommerfeld-Feinstrukturkonstanten

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \approx \frac{1}{137}$$



Weitere Korrekturen aus der Quantenelektrodynamik (QED): Elektron emittiert und absorbiert im Vakuum ständig Photonen und hat so für kurze Zeit eine veränderte kinetische Energie ($\Delta E \Delta t \geq \hbar$).

Messung der Lamb-Shift 1950



Lamb-Retherford-Experiment

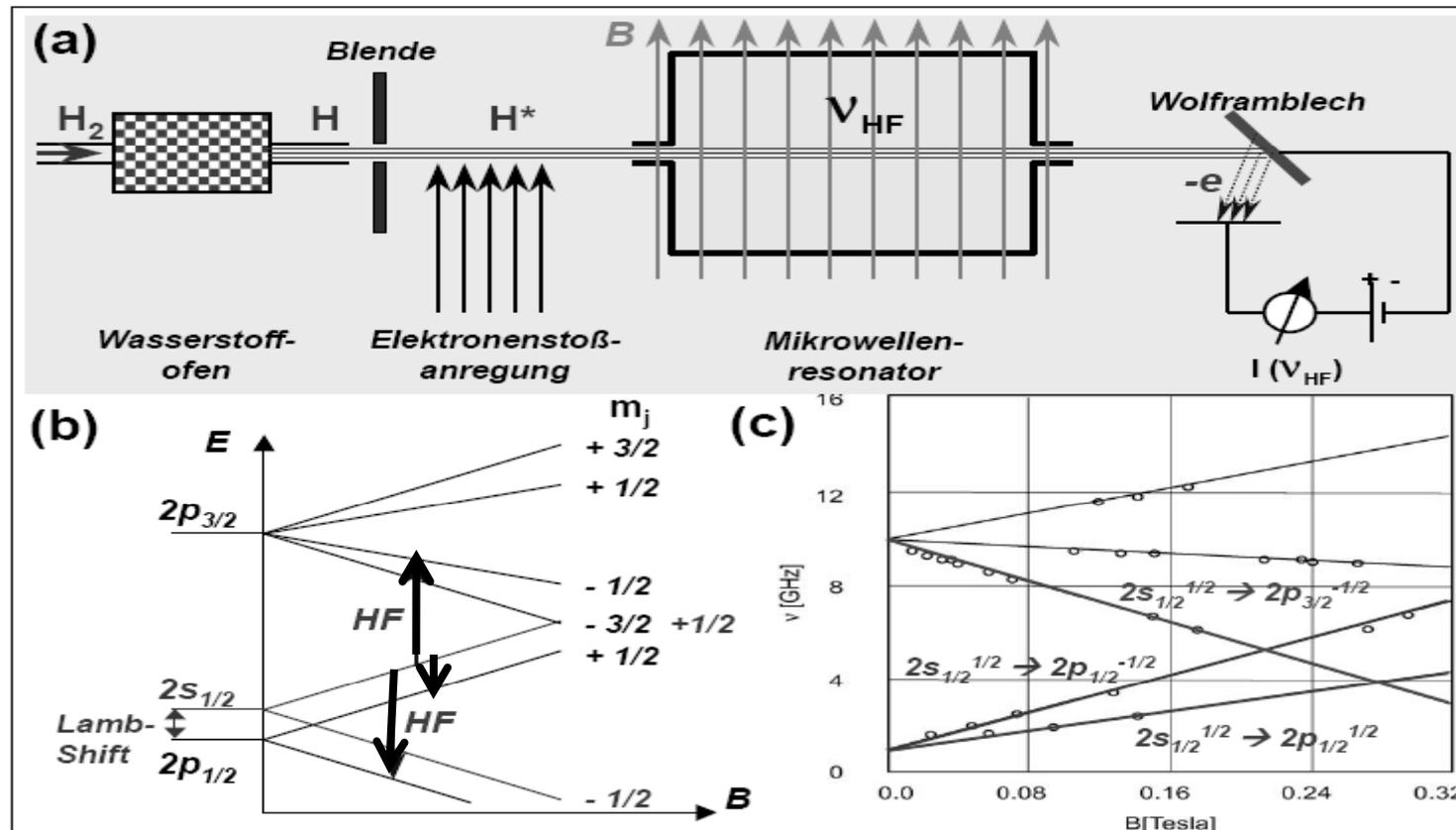
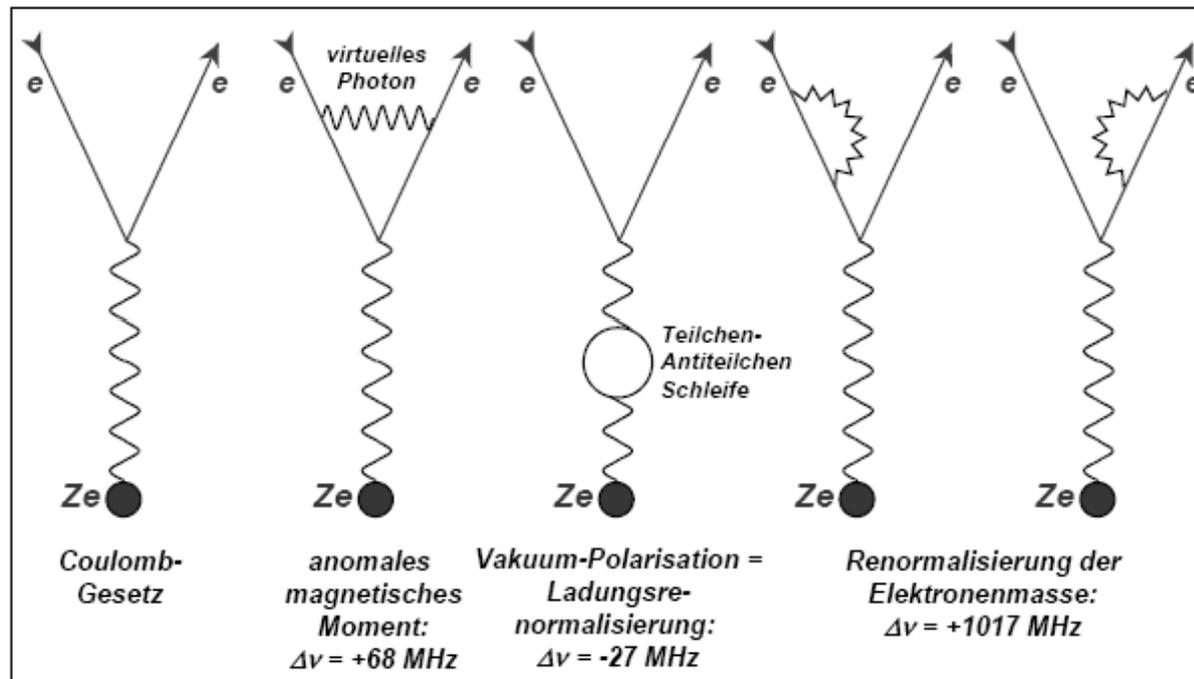


Abbildung 4.7: (a) Lamb-Retherford-Experiment. (b) Zeeman-Aufspaltung der $2s_{1/2}$ -, $2p_{1/2}$ - und $2p_{3/2}$ -Niveaus und ihre Ausnutzung zur Messung der Lamb-Shift. (c) Originaldaten von Lamb und Retherford (Phys. Rev. 79, 549 (1950)) zur Bestimmung der Niveaueverschiebung als Funktion des Magnetfelds im $2s/2p$ -System des Wasserstoffs. Die Punkte stellen die Messdaten dar, durchgezogene Linien entsprechen theoretischen Vorhersagen der Dirac-Theorie, wobei die Lamb-Verschiebung zusätzlich berücksichtigt wird. Man stellt fest, dass sich die Linien schon bei relativ schwachen Magnetfeldern kreuzen. Eine klare Trennung von Spin-Bahn-Kopplung und Zeeman-Effekt (siehe Abschnitt 4.6 und 4.7) ist nicht mehr möglich.

Lamb-Shift durch QED Korrekturen höherer Ordnung



Lamb-Shift kann genau berechnet werden in der QED und ist daher ein wichtiger Test für die QED

Abbildung 4.5: Feynman-Diagramme, die zur Streuung eines Elektrons an einer statischen Ladung beitragen. Das linke Diagramm entspricht dem uns vertrauten Coulomb-Gesetz. Die weiteren Diagramme sind von der Ordnung α^2 und ziehen eine Renormalisierung des magnetischen Moments, der Ladung und der Masse nach sich. Die Frequenzangaben zu den Diagrammen beziehen sich auf den jeweiligen Beitrag zur Verschiebung des $2s_{1/2}$ - gegenüber dem $2p_{1/2}$ -Niveau. Die Lamb-Verschiebung kann experimentell auf 0.1 MHz genau vermessen werden. Dies erlaubt es, die Beiträge der einzelnen Diagramme getrennt zu verifizieren. Dabei werden Diagramme höherer als der gezeigten Ordnung (2-Schleifen-Beiträge) von Bedeutung. Die eigentliche Grenze bei der theoretischen Vorhersage des Termschemas stellt der nicht exakt behandelbare Einfluss der Protonenstruktur auf die Elektronenfrequenzen dar.

Lamb-Shift

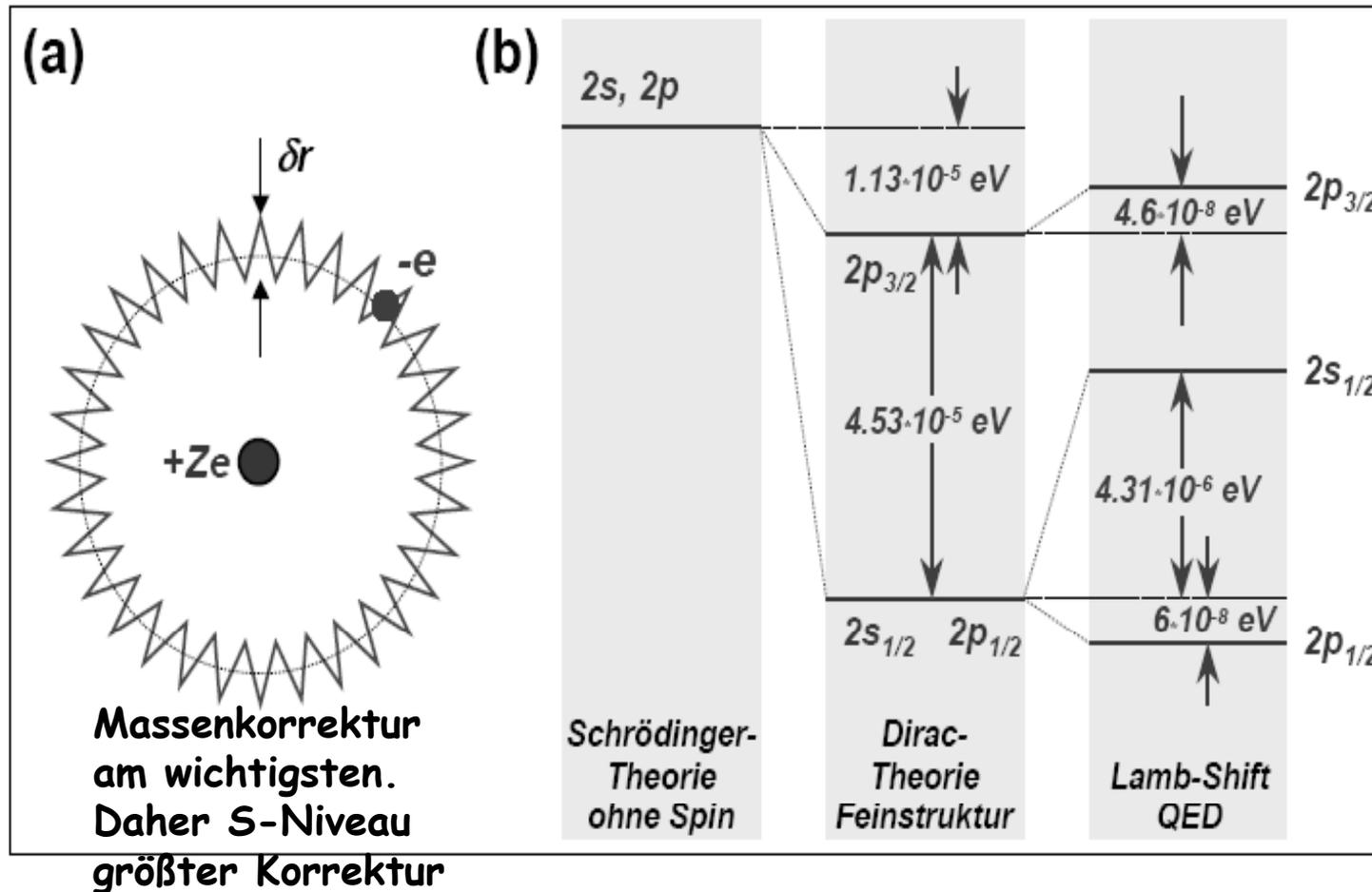


Abbildung 4.6: (a) Zur Veranschaulichung der Zitterbewegung eines Elektrons aufgrund der Emission und Absorption von virtuellen Photonen. (b) Feinstruktur und Lamb-Verschiebung beim Wasserstoffniveau mit $n = 2$.

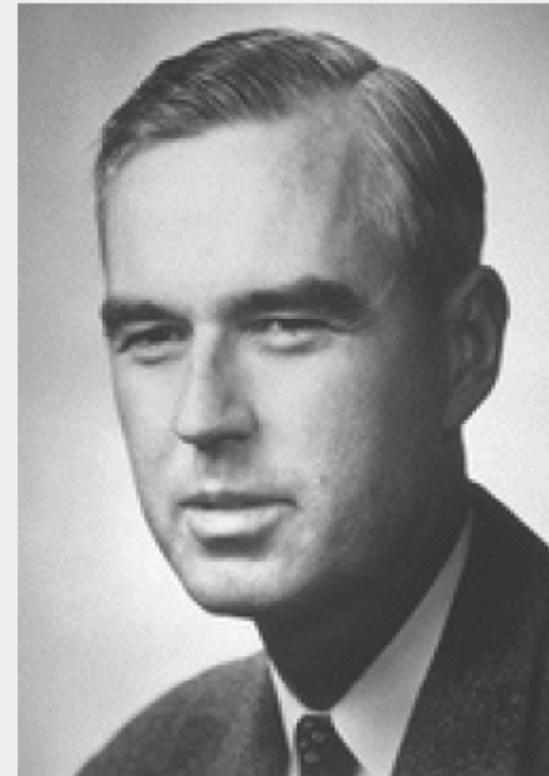
Nobelpreis Lamb

Willis Eugene Lamb (geb. 1913), Nobelpreis für Physik 1955:

Willis Eugene Lamb wurde am 12. Juli 1913 in Los Angeles geboren. Er begann 1930 sein Studium an der University of California at Berkeley und erhielt dort 1934 den Bachelor of Science in Chemie. Im Jahr 1938 erhielt er an der gleichen Universität seinen Dokortitel. Seine Doktorarbeit über die Analyse der elektromagnetischen Eigenschaften von Kernsystemen wurde von J.R. Oppenheimer betreut.

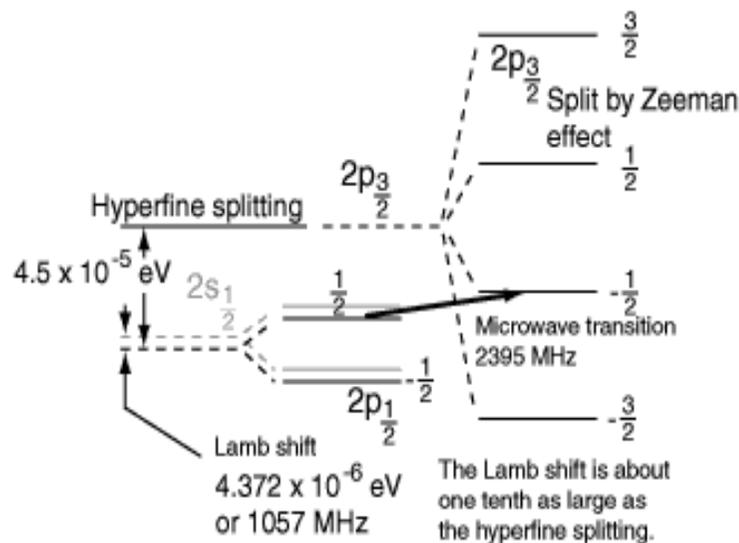
Nach seiner Doktorarbeit ging er an die Columbia University und wurde dort 1945 Assistant Professor, 1947 Associate Professor und 1948 schließlich Full Professor. Von 1943 bis 1951 war er auch mit dem Columbia Radiation Laboratory assoziiert, wo er seine mit dem Nobelpreis ausgezeichneten Arbeiten machte. 1951 ging er an die Stanford University als Professor für Physik. Von 1953-1954 war er Morris Loeb Lecturer an der Harvard University. Von 1956 bis 1962 war er Fellow of New College and Wykeham Professor of Physics an der University of Oxford, England. 1962 wurde er Henry Ford II Professor of Physics an der Yale University, New Haven, Conn.

Im Jahr 1953 erhielt er den Rumford Premium der American Academy of Arts and Sciences. Die University of Pennsylvania verlieh ihm einen Ehrendoktor im Jahr 1954. Er erhielt ferner 1955 den Research Corporation Award. Er ist Mitglied in einer Zahl von National Academy of Sciences und Fellow der American Physical Society.



Lamb-Retherford-Experiment

While the Lamb shift is extremely small and difficult to measure as a splitting in the optical or uv spectral lines, it is possible to make use of transitions directly between the sublevels by going to other regions of the electromagnetic spectrum. Willis Lamb made his measurements of the shift in the microwave region. He formed a beam of hydrogen atoms in the $2s(1/2)$ state. These atoms could not directly take the transition to the $1s(1/2)$ state because of the selection rule which requires the orbital angular momentum to change by 1 unit in a transition. Putting the atoms in a magnetic field to split the levels by the Zeeman effect, he exposed the atoms to microwave radiation at 2395 MHz (not too far from the ordinary microwave oven frequency of 2560 MHz).



Then he varied the magnetic field until that frequency produced transitions from the $2p(1/2)$ to $2p(3/2)$ levels. He could then measure the allowed transition from the $2p(3/2)$ to the $1s(1/2)$ state. He used the results to determine that the zero-magnetic field splitting of these levels correspond to 1057 MHz. By the Planck relationship, this told him that the energy separation was $4.372 \text{ E}^{-6} \text{ eV}$.

Lamb-Retherford-Experiment

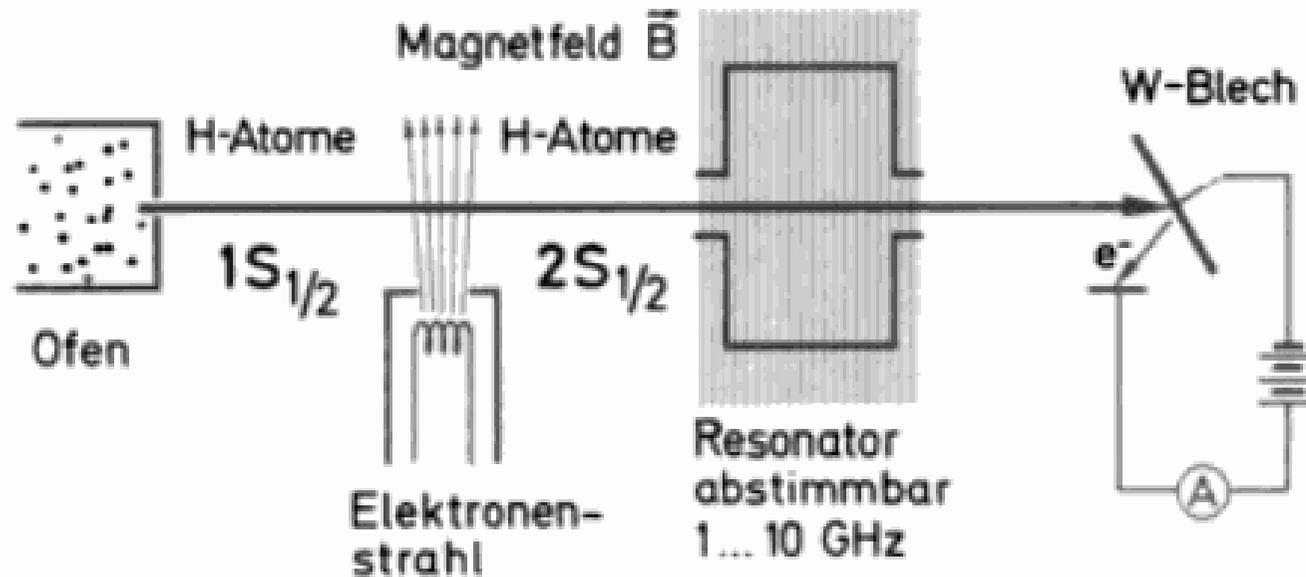


Abb. 12.22. Zur Messung der Lamb-Verschiebung: ein Atomstrahl aus H-Atomen wird durch Elektronenbeschuss in den metastabilen $2S_{1/2}$ -Zustand angeregt und durchfliegt so einen Resonator. Wenn dort elektromagnetische Übergänge induziert werden, vermindert sich die Anzahl der im angeregten Zustand auf das als Empfänger dienende Wolfram-Blech treffenden H-Atome und damit der gemessene Elektronenstrom. Das Magnetfeld \vec{B} dient zu einer zusätzlichen energetischen Trennung der Zustände $S_{1/2}$ und $P_{1/2}$. Damit wird eine Mischung dieser Zustände und damit ein unmittelbarer Zerfall über den Zustand $2P_{1/2}$ behindert

Lamb-Retherford-Experiment

Das Experiment von *Lamb* und *Retherford* ist in Abb.12.22 dargestellt. Ein Wasserstoff-Atomstrahl wird durch thermische Dissoziation bei 2500 °C aus H₂-Molekülen erzeugt. Durch Beschuß mit Elektronen wird ein kleiner Teil dieser Atome in den metastabilen Zustand $2^2S_{1/2}$ angeregt. Optische Übergänge zwischen diesem Zustand und dem Grundzustand $1^2S_{1/2}$ sind verboten. Die Atome gelangen dann durch einen abstimmbaren Resonator für Hochfrequenz- bzw. Mikrowellenstrahlung auf ein Wolframblech. Dort können die metastabilen Atome ihre Anregungsenergie abgeben. Sie lösen dabei in der Metalloberfläche Elektronen aus. Man mißt den Elektronenstrom und erhält dadurch ein Maß für die je Zeiteinheit ankommenden Atome im Zustand $2^2S_{1/2}$. – Diejenigen Atome, die im Resonator durch Absorption von Mikrowellenstrahlung im Bereich von 10000 MHz in den Zustand $2^2P_{3/2}$ gehoben werden (vgl. Termschema Abb. 12.21) gehen durch Aussenden der H_α-Linie (oder genauer von einer Komponente dieser Linie) in den Grundzustand über. Gleichzeitig nimmt der Elektronenstrom am Wolframblech ab, wenn eine solche Absorption erfolgt. – *Lamb* und *Retherford* fanden 1947, daß der gleiche Effekt, nämlich eine Abnahme des Elektronenstroms, auch bei Absorption oder induzierter Emission von Strahlung einer Frequenz von ca. 1000 MHz im Resonator erfolgte. Dabei handelt es sich um den Übergang aus dem Zustand $2^2S_{1/2}$ in den Zustand $2^2P_{1/2}$.

Energieniveaus des H-Atoms mit relativ. Korrekturen nach Dirac und Feinstruktur der L.S-Kopplung

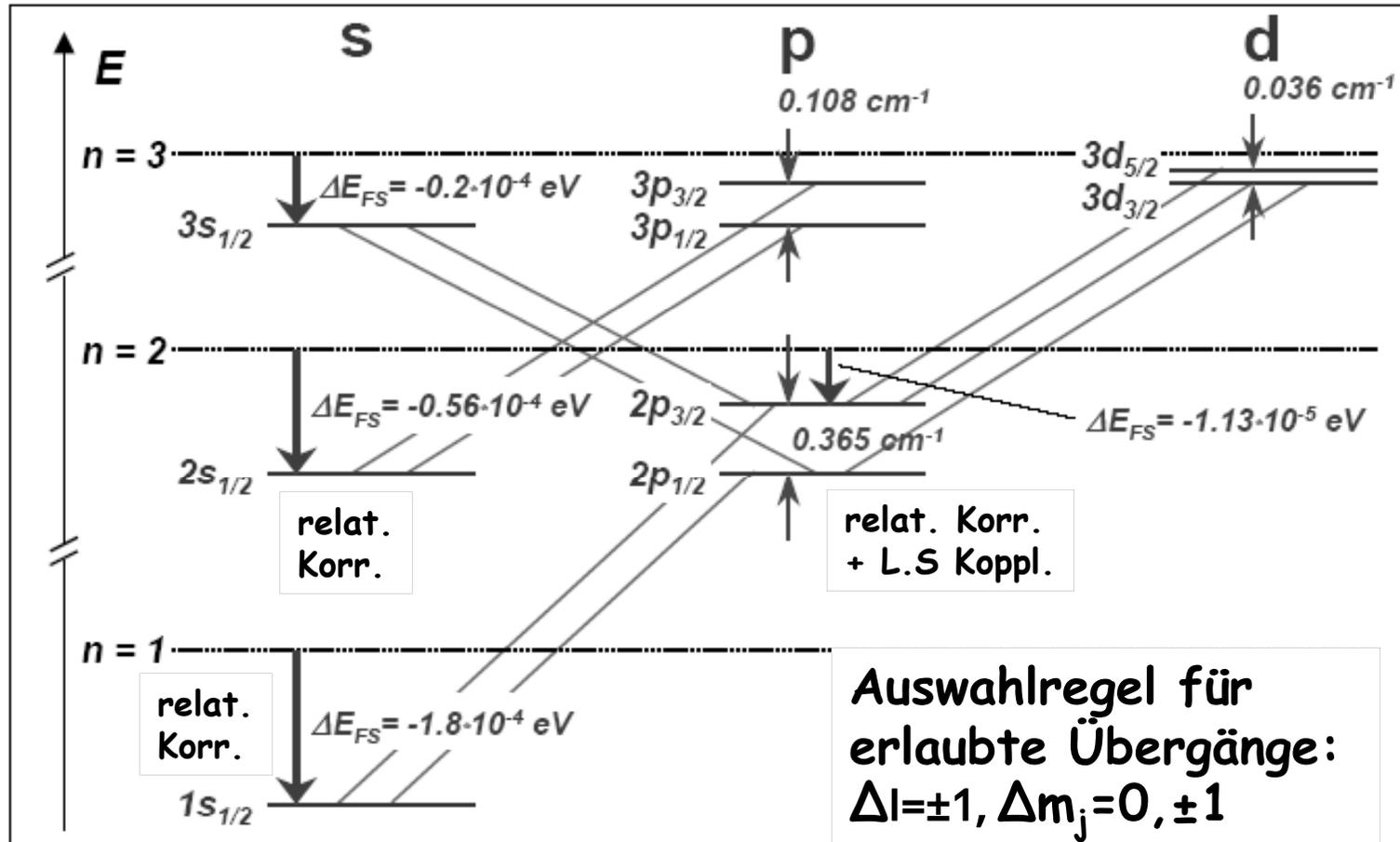


Abbildung 4.4: Termschema des Wasserstoffatoms bei Berücksichtigung der Spin-Bahn-Wechselwirkung und der relativistischen Massenzunahme. Die gestrichelten Linien geben die Lage der Energieniveaus E_n ohne die Korrekturterme an.

Aufhebung der Entartung bei der Wasserstoff Balmer-Linie H_α

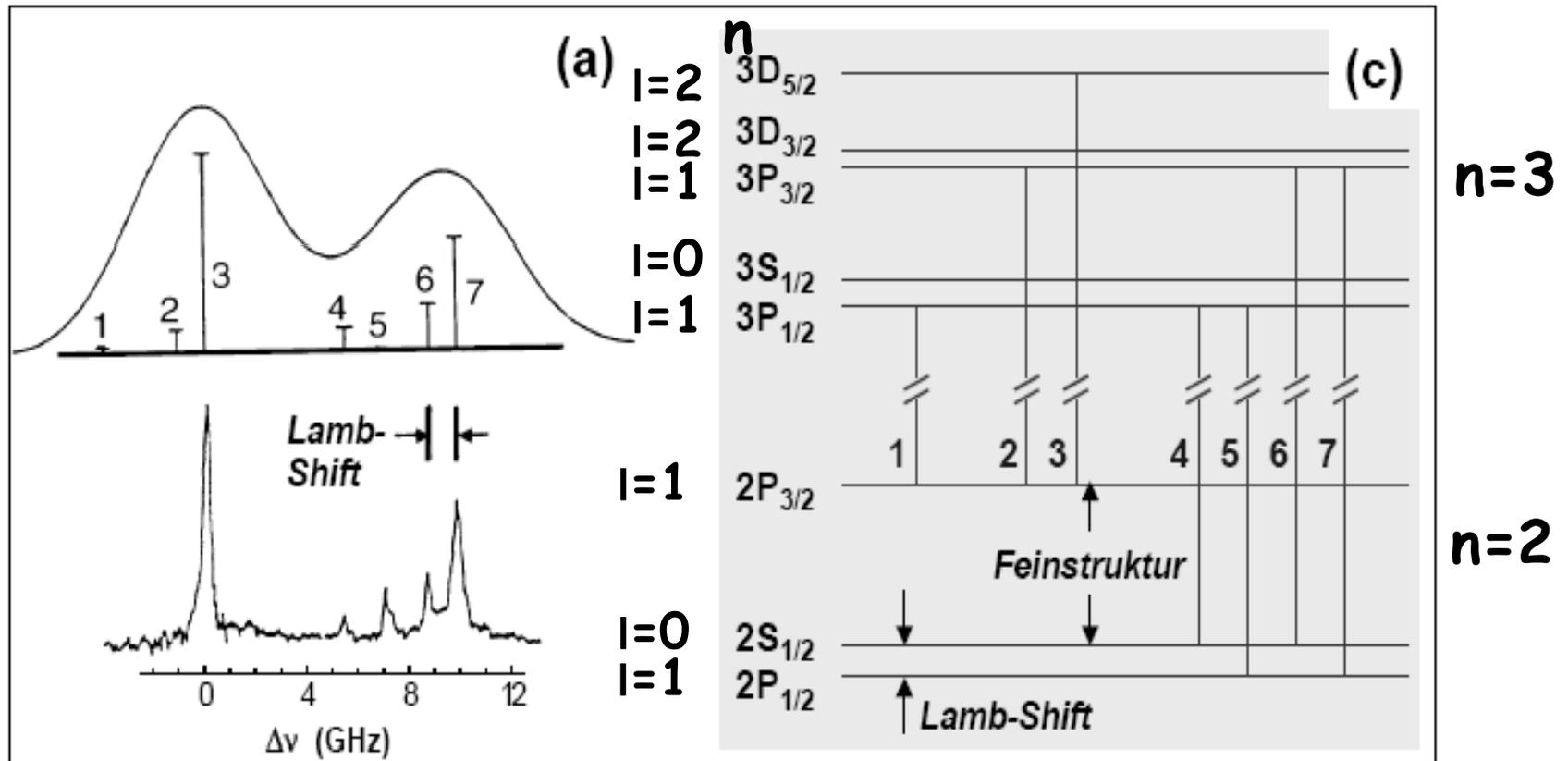


Abbildung 4.1: Feinstruktur der Balmer-Linie H_α gemessen mit (a) hochauflösender Spektroskopie und (b) mit höchstauflösender Laser-Spektroskopie. (c) Verfeinertes Termschema des Wasserstoffs. Die erlaubten Übergänge werden durch die Auswahlregeln bestimmt, die wir erst später diskutieren werden.

Weitere Feinheiten der Energieniveaus

Anomaler Zeeman-Effekt
Hyperfeinstruktur

Bahnmagnetismus (klassisches Modell)

Elektron auf Kreisbahn mit Frequenz $f = v/2\pi r \rightarrow$ elektr. Strom

$I = -e \cdot f = -e \cdot v/2\pi r \rightarrow$ magnetisches Moment

$p_m = I \cdot \vec{A} = I \cdot \pi r^2 \hat{n} = -e \cdot v(r/2) \cdot \hat{n}$ mit

$\vec{A} = \pi r^2 \hat{n}$ Flächennormale senkrecht zu πr^2

Bahndrehimpuls des Elektrons: $\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p} = m_e \cdot r \cdot v \cdot \hat{n}$

$$v = \frac{2\pi r}{t}$$

$$f = 1/t$$

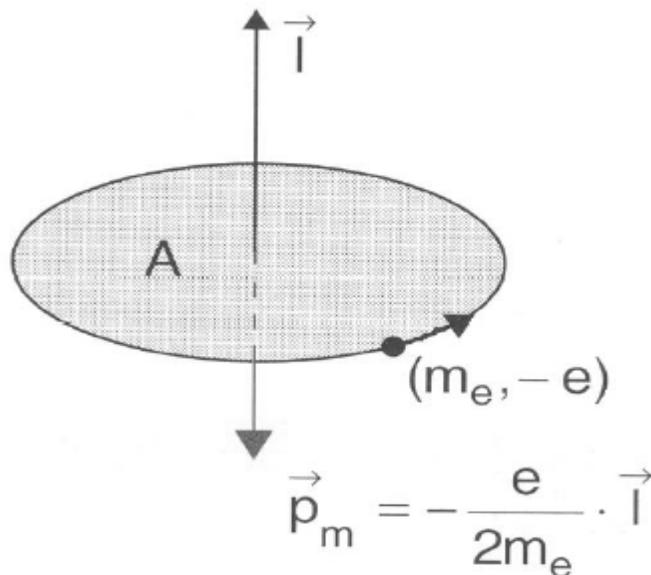


Abb. 5.8. Klassisches Modell für Drehimpuls l und magnetisches Moment p_m eines auf einer Kreisbahn umlaufenden Atoms

Normaler Zeeman-Effekt

Beobachtung von Zeeman 1896

Spektrallinien von Atomen im Magnetfeld:

- ▶ Spalten in 3 Linien auf (Triplets)
- ▶ Linienabstand wächst mit B
- ▶ Linienabstand ist für alle Atome gleich

Elektron auf Kreisbahn: magnetisches Moment \Rightarrow

$$\vec{p}_m = -\frac{e}{2m_e} \vec{L}$$

Dadurch ändert sich potentielle Energie im Hamilton-Operator um \Rightarrow

$$E_B = -\vec{p}_m \vec{B} = \frac{e}{2m_e} BL_z$$

Die Energieentartung der Zustände ist aufgehoben:

$$E_{nm} = E_n + \frac{eB}{2m_e} \hbar m = E_n + \mu_B B m$$

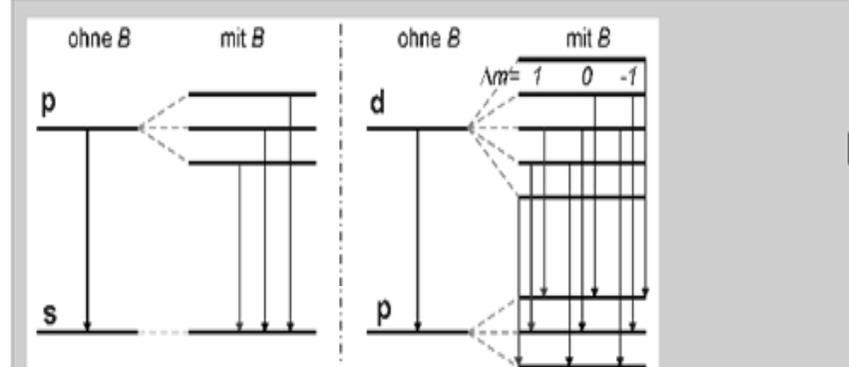
Mit dem Bohr-Magneton

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 9,2732 \cdot 10^{-24} \frac{\text{J}}{\text{T}}$$

Die Zeeman-Aufspaltung ist

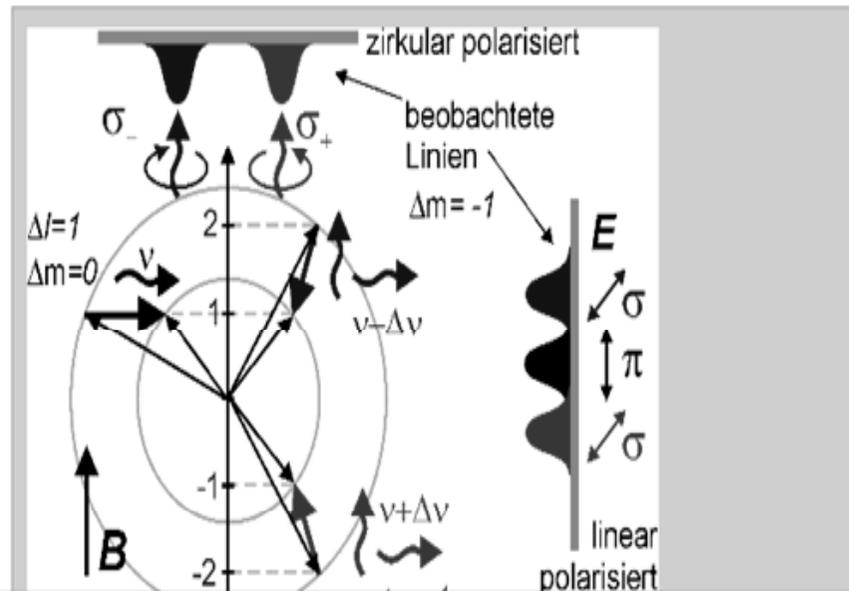
$$\Delta E = E_{n,m+1} - E_{n,m} = \mu_B B$$

Aufspaltung von Linien in Triplets



In beiden Fällen mit Magnetfeld werden Photonen mit drei unterschiedlichen Energien emittiert.

Beobachtete Linien



Der anomale Zeeman-Effekt (mit Spin) (= Normalfall!)

Gesamt magnetisches Moment aus Spin und Bahnanteil:

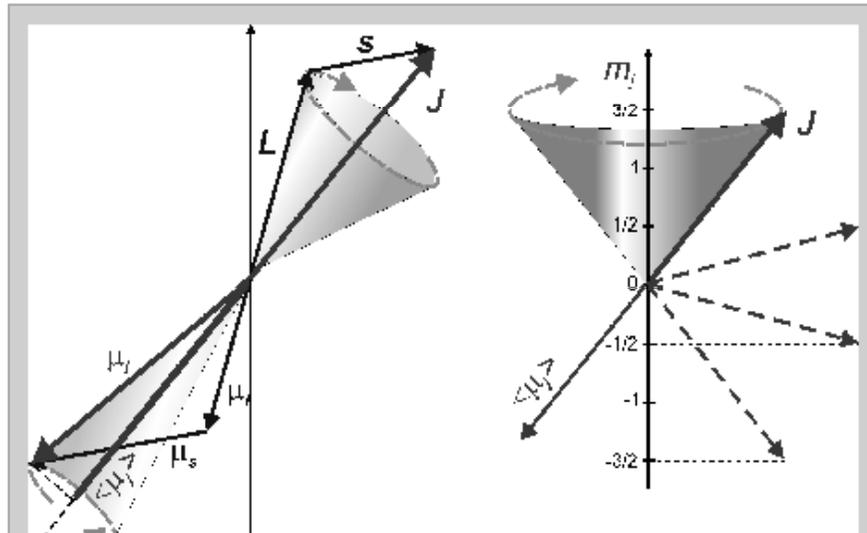
$$\vec{\mu}_j = -\frac{e}{2m_e} (\vec{L} + g_s \vec{S})$$

Wegen Präzession um \mathbf{J} ist nur die Projektion relevant

$$\langle \vec{\mu}_j \rangle = \frac{\vec{\mu}_j \cdot \vec{J}}{J} = g_j \mu_B J / \hbar$$

mit dem Landé-Faktor

$$g_j = 1 + \frac{j(j+1) - l(l+1) + s(s+1)}{2j(j+1)}$$



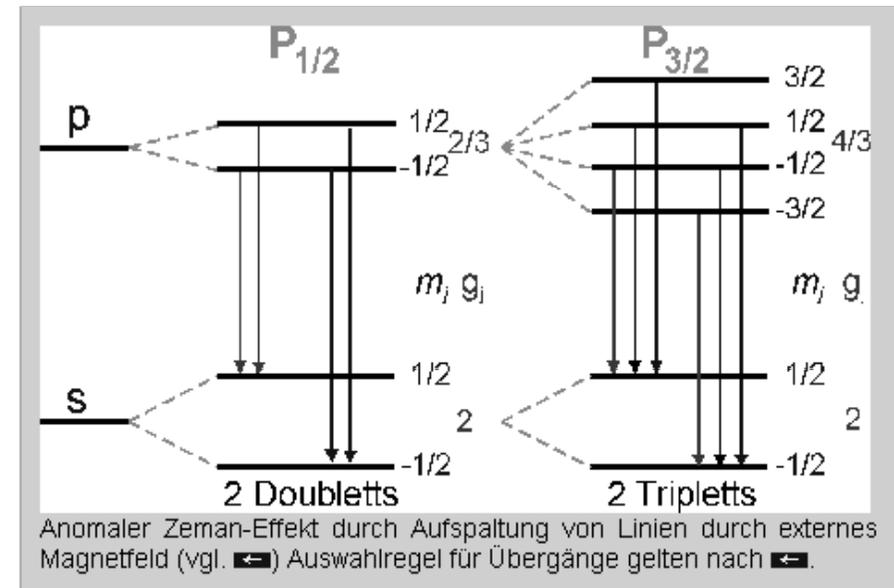
Linienaufspaltung im Magnetfeld analog zu \leftarrow

$$E_{m_j} = -\langle \vec{\mu}_j \rangle \cdot \vec{B} = \mu_B g_j m_j B$$

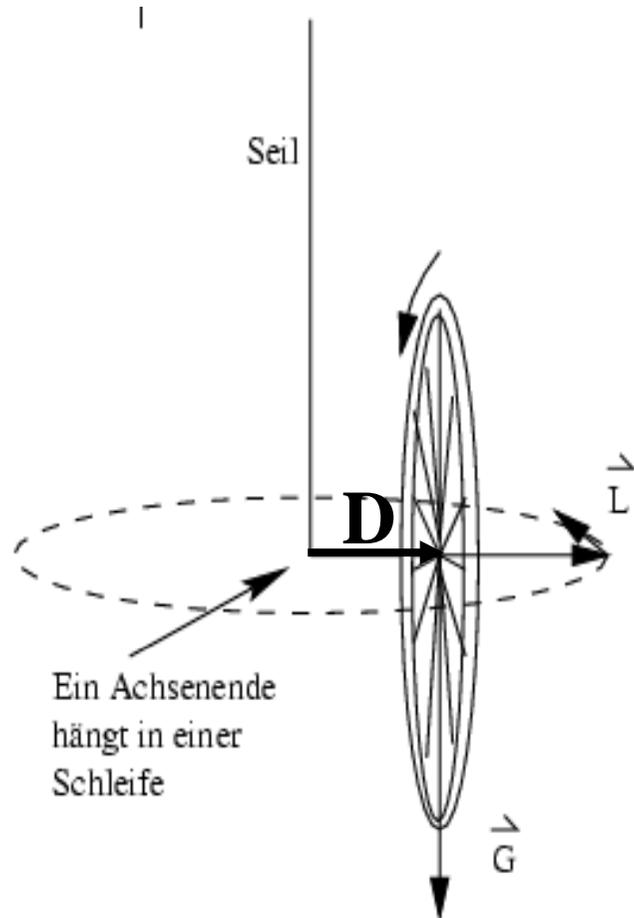
wegen g_j hängt die Aufspaltung von j ab.

Beispiele:

- ▶ $s=0, j=l \Rightarrow g_j=1$
- ▶ $l=0, j=s \Rightarrow g_j=2$
- ▶ $l=1, j=1/2 \Rightarrow g_j=2/3$
- ▶ $l=1, j=3/2 \Rightarrow g_j=4/3$



Präzessionsversuch



Beobachtung: drehendes Rad fällt nicht, sondern dreht sich in horizontaler Ebene.

Erklärung: Drehimpuls \underline{L} hat Tendenz sich Drehmoment \underline{M} parallel zu richten (wie Impuls \underline{p} parallel \underline{F}).

Gewichtskraft übt Drehmoment in horizontaler Richtung aus und $M=mgD=dL/dt$ schiebt

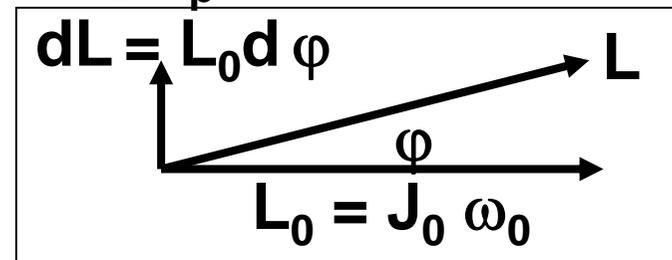
$\underline{L}_0=J_0 \underline{\omega}_0$ in die horizontale Richtung!
Diese Bewegung nennt man Präzession.

Präzessionsfrequenz aus

$$M=dL/dt=L_0 d\varphi/dt=L_0 \omega_p \text{ oder}$$

$$\omega_p=M/L_0=$$

$$M/J_0 \omega_0$$



Vektormodell und Präzession im B-Feld

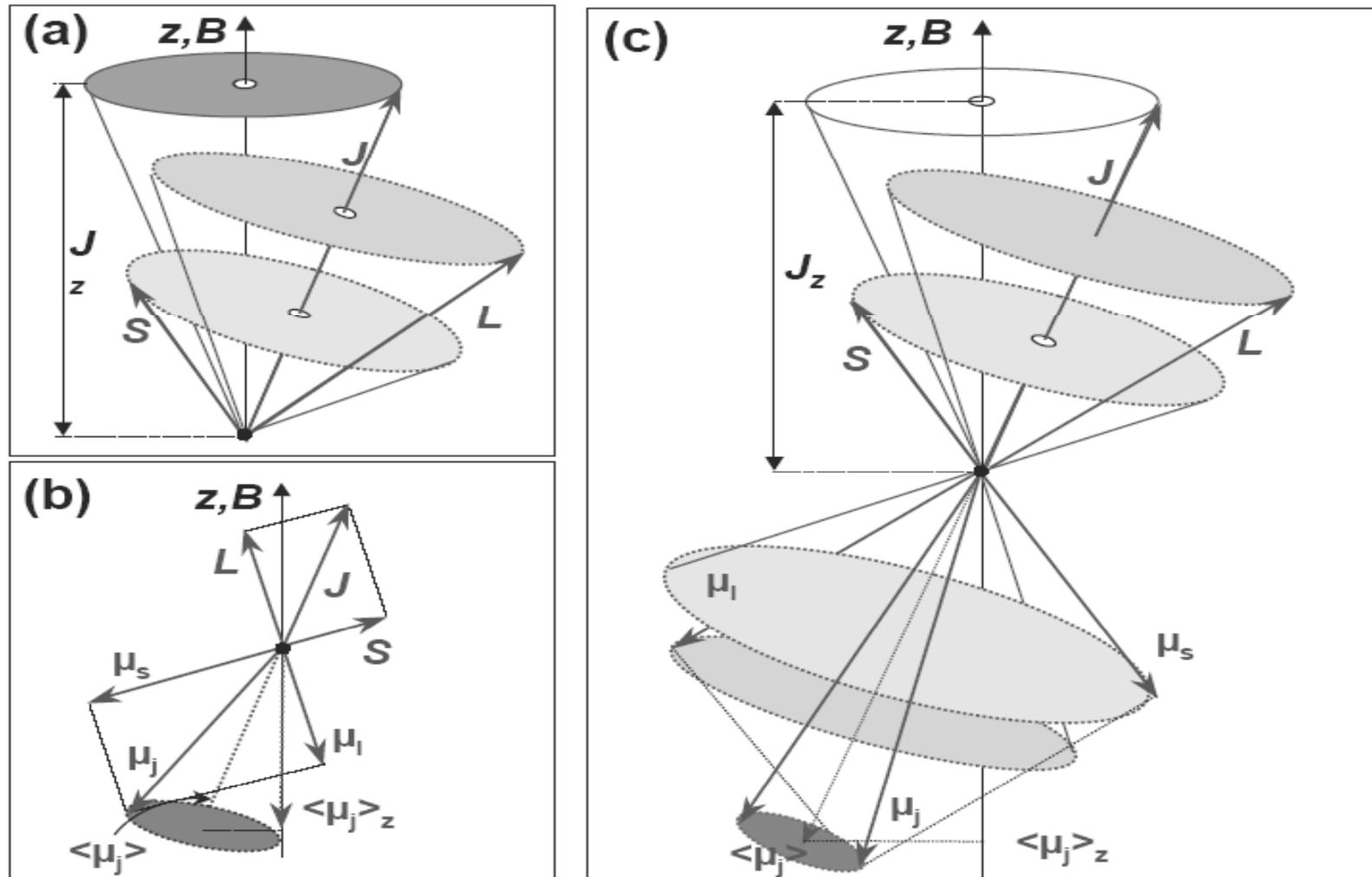


Abbildung 4.15: (a) Präzession von \mathbf{J} um die z -Achse in einem äußeren Magnetfeld. (b) Vektorielle Zusammensetzung des Drehimpulses und des von ihm erzeugten magnetischen Moments. (c) Präzession aller magnetischen Momente und Drehimpulse um die Magnetfeldrichtung.

Berechnung des Landé-Faktors

$$\begin{aligned}\langle \mu_j \rangle &= \frac{\mu_j \cdot \mathbf{J}}{|\mathbf{J}|} \\ &= -\frac{\mu_B}{\hbar} \left(g_l \frac{\mathbf{L} \cdot \mathbf{J}}{|\mathbf{J}|} + g_s \frac{\mathbf{S} \cdot \mathbf{J}}{|\mathbf{J}|} \right) .\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle \mu_j \rangle &= -\mu_B \frac{3j(j+1) - l(l+1) + s(s+1)}{2\sqrt{j(j+1)}} \\ &= g_j \mu_B \sqrt{j(j+1)} \\ &= g_j \mu_B \frac{|\mathbf{J}|}{\hbar}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{L} \cdot \mathbf{J} &= \frac{1}{2} [\mathbf{J}^2 + \mathbf{L}^2 - \mathbf{S}^2] \\ &= \frac{1}{2} \hbar^2 [j(j+1) + l(l+1) - s(s+1)]\end{aligned}$$

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{J} = \frac{1}{2} \hbar^2 [j(j+1) - l(l+1) + s(s+1)]$$

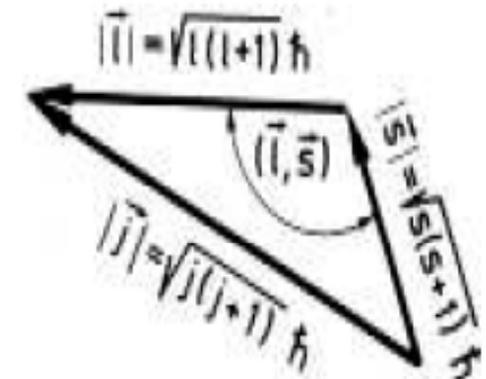
aus

VEKTORMODELL : $\vec{j} = \vec{l} + \vec{s}$ (zuerst für ein Elektron)

Mathe : $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cos \alpha$ ergibt mit $\left\{ \begin{array}{l} a^2 = l(l+1)\hbar^2 \\ b^2 = s(s+1)\hbar^2 \\ c^2 = j(j+1)\hbar^2 \end{array} \right\}$

$$\Rightarrow \frac{|l||s|}{\hbar^2} \cos \alpha = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{2} \rightarrow \text{aus (3)} :$$

$$V_{l,s} = \frac{a}{2} [j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)]$$



Aufspaltung beim anomalen Zeeman-Effekt

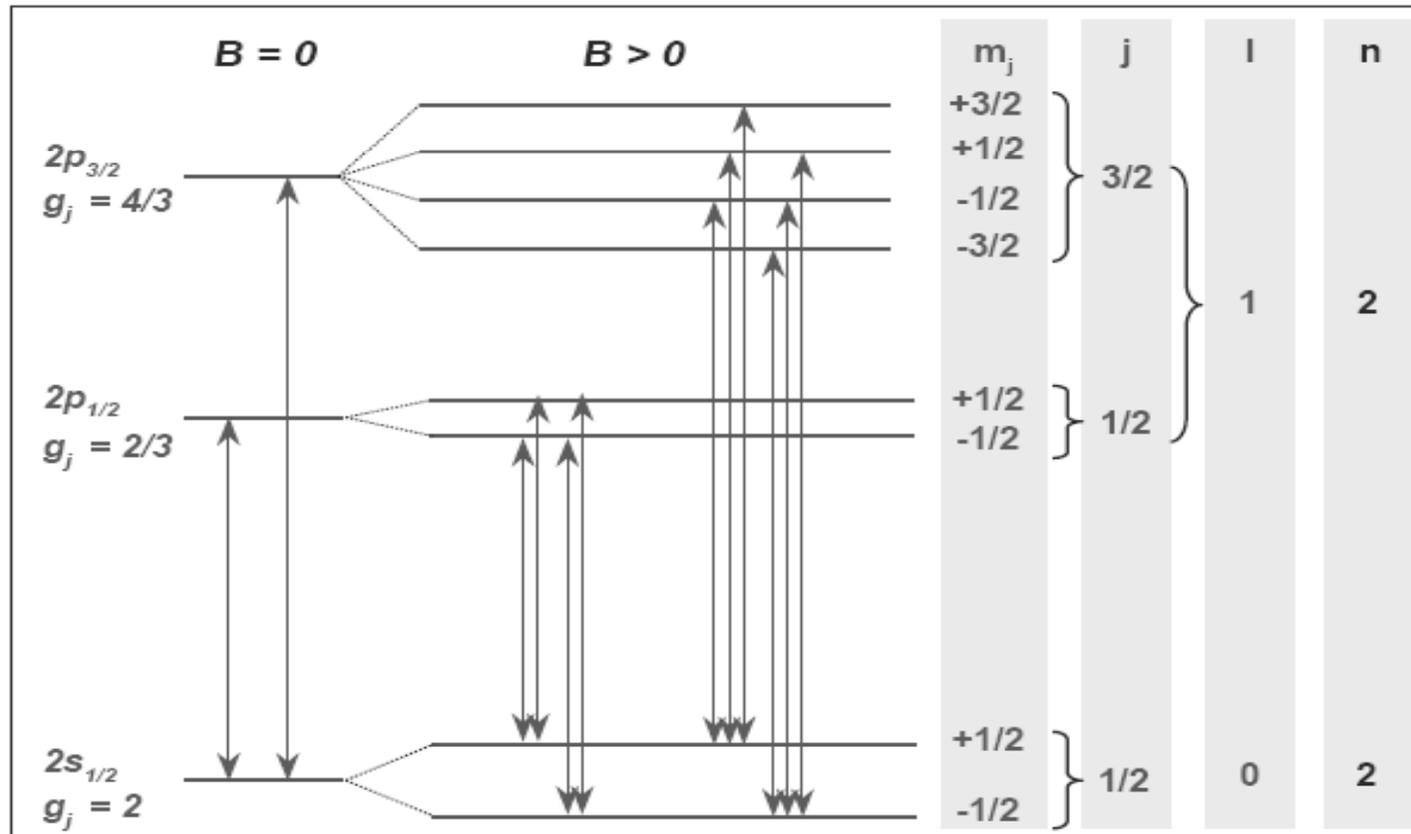


Abbildung 4.16: Zeeman-Aufspaltung für die Zustände $1s_{1/2}$, $2p_{1/2}$ und $2p_{3/2}$ des Wasserstoffs.

Da der Landé-Faktor g_j vom Zustand (j, l) abhängt, ist die Aufspaltung für Niveaus mit unterschiedlichen Quantenzahlen (j, l) im Gegensatz zum normalen Zeeman-Effekt verschieden. Das Aufspaltungsbild ist somit beim anomalen Zeeman-Effekt komplizierter.

Hyperfinestruktur

Jetzt 3 magnetische Momente:
Bahnmagn., Elektronspin, Kernspin

Bei extremer Auflösung ist jede Feinstrukturkomponente aufgespalten.

Grund: Ausrichtung des Kernspins I im Magnetfeld der Elektronen.

$$|\vec{I}| = \sqrt{I(I+1)}\hbar$$

Gesamtdrehimpuls des Atoms

$$|\vec{F}| = |\vec{I} + \vec{J}| = \sqrt{F(F+1)}\hbar$$

mit $F=j+l, j+l-1 \dots j-l$

Damit ist ein magnetisches Kernmoment verbunden:

$$\mu_I = g_I \mu_k I$$

mit dem Kernmagneton

$$\mu_k = \frac{e}{2m_p} \hbar = \frac{m_e}{m_p} \mu_B = 5,0510^{-27} \text{ J/T}$$

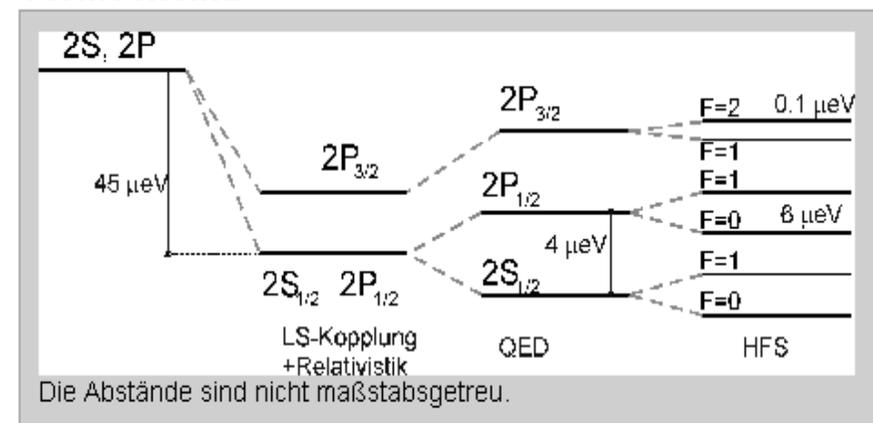
Die aus der Wechselwirkung mit dem inneren Magnetfeld resultierende Energieaufspaltung ist:

$$\Delta E \sim g_k \mu_k \frac{F(F+1) - j(j+1) - I(I+1)}{\sqrt{j(j+1)}}$$

Beispiele für das Kernmagneton:

| Kern | I | g_I |
|--------------------|-----|-------|
| Proton | 1/2 | 5,58 |
| Neutron | 1/2 | -3,82 |
| Kern | 1 | 0,86 |
| α -Teilchen | 0 | - |

Termschema



Hyperfeinstruktur

Wir müssen jetzt die Wechselwirkung des Gesamtdrehimpulses \mathbf{J} des Hüllenelektrons mit dem Kernspin \mathbf{I} betrachten. Diese Wechselwirkung besteht aus zwei Beiträgen, die zur Aufspaltung und Verschiebung der Energieniveaus der Elektronenhülle führt:

- Die Wechselwirkung des magnetischen Kernmoments mit dem durch das Elektron am Kernort erzeugten Magnetfeld (Zeeman-Effekt des Kernmomentes im atomaren Magnetfeld).
- Die Wechselwirkung des elektronischen magnetischen Moments mit dem vom Kernmoment erzeugten Magnetfeld.

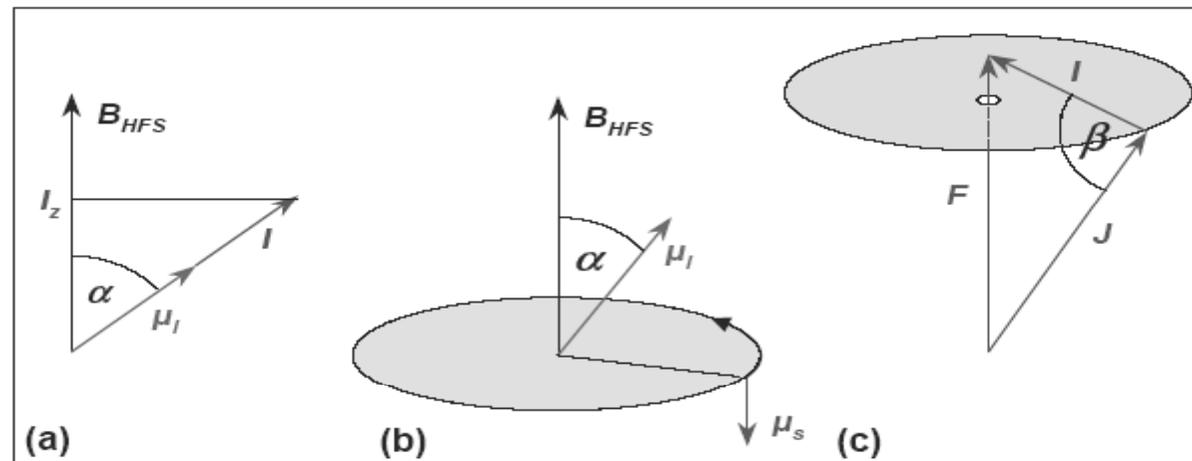


Abbildung 4.9: Zur Wechselwirkung zwischen dem magnetischen Kernmoment $\boldsymbol{\mu}_I$ und dem Magnetfeld \mathbf{B}_{HFS} , das (a) durch die Bahnbewegung des Elektrons und (b) durch das magnetische Spinnmoment $\boldsymbol{\mu}_s$ des Elektrons am Kernort erzeugt wird. (c) Kopplung des Gesamtdrehimpulses \mathbf{J} des Elektrons und des Kernspins \mathbf{I} zum raumfesten Gesamtdrehimpuls des Atoms $\mathbf{F} = \mathbf{J} + \mathbf{S}$.

Kernmoment im Magnetfeld der Elektrons

Das Kernmoment μ_i hat in dem vom Elektron mit Gesamtdrehimpuls $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$ am Kernort erzeugten *Hyperfeinfeld* \mathbf{B}_{HFS} (siehe Abb. 4.9) die Zusatzenergie

$$\Delta E_{\text{HFS}} = -\mu_i \cdot \mathbf{B}_{\text{HFS}} = -|\mu_i| |\mathbf{B}_{\text{HFS}}| \cos(\angle(\mathbf{J}, \mathbf{I})) . \quad (4.5.5)$$

Man führt nun, wie bei der Kopplung von \mathbf{L} und \mathbf{S} zu \mathbf{J} , den Gesamtdrehimpuls von Kern und Elektrohülle als Vektorsumme

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{J} + \mathbf{I} & |\mathbf{F}| &= \sqrt{f(f+1)} \hbar & f &= j \pm i \\ & & F_z &= m_f \hbar & m_f &= -f, -(f-1), \dots, (f-1), f \end{aligned} \quad (4.5.6)$$

$$\begin{aligned} \cos(\angle(\mathbf{J}, \mathbf{I})) &= \frac{\mathbf{J} \cdot \mathbf{I}}{|\mathbf{J}| |\mathbf{I}|} \\ &= \frac{1}{2} \frac{f(f+1) - j(j+1) - i(i+1)}{\sqrt{j(j+1)} \sqrt{i(i+1)}} \end{aligned}$$

Cosinussatz:
 $\mathbf{F}^2 = \mathbf{J}^2 + \mathbf{I}^2 + 2\mathbf{J} \cdot \mathbf{I}$

Mit $|\mu_i| = g_i \mu_K \sqrt{i(i+1)}$ beträgt die Hyperfeinenergie des Wasserstoffatoms dann

$$\begin{aligned} \Delta E_{\text{HFS}} &= \frac{A}{2} [f(f+1) - j(j+1) - i(i+1)] \\ A &= \frac{g_i \mu_K B_{\text{HFS}}}{\sqrt{j(j+1)}} \end{aligned}$$

Hyperfeinstruktur

Für das Wasserstoffatom im Grundzustand ist $i = 1/2$ und $j = 1/2$ und damit $f = 0$ oder $f = 1$. Damit erhält man die Hyperfeinaufspaltung (siehe Abb. 4.10)

$$E_{\text{HFS}}(f = 0) = E_{1,0,1/2} - \frac{3A}{4}$$
$$E_{\text{HFS}}(f = 1) = E_{1,0,1/2} + \frac{A}{4}$$

$$E_{\text{HFS}} = E_{n,l,j} + \frac{A}{2} [f(f+1) - j(j+1) - i(i+1)]$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{J} + \mathbf{I} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \text{ (Ortho-Wasserstoff)}$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{J} + \mathbf{I} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 \text{ (Para-Wasserstoff)}$$

(4.5.15)

Das Hyperfeinfeld \mathbf{B}_{HFS} am Ort $\mathbf{r} = 0$ des Kerns hängt außer vom Drehimpuls \mathbf{J} des Elektrons von seiner räumlichen Aufenthaltswahrscheinlichkeit ab. Diese wird durch das Absolutquadrat der Wellenfunktion $|\Psi_{n,l}|^2$ bestimmt. Für s -Zustände erhält man

$$A = \frac{2}{3} \mu_0 g_l \mu_B g_I \mu_K |\Psi_n(r=0)|^2.$$

Der Grundzustand $1s_{1/2}$ des Wasserstoffatoms spaltet in die Terme $f = 0$ und $f = 1$ auf. In einem kleinen Magnetfeld (das Magnetfeld muss so klein sein, dass die Kopplung von \mathbf{J} und \mathbf{I} zu \mathbf{F} erhalten bleibt: anomaler Zeeman-Effekt, siehe Abschnitt 4.6) bleibt der $f = 0$ Zustand ungestört, da nur $m_f = 0$ erlaubt ist, während der $f = 1$ Zustand eine Zeeman-Aufspaltung in drei Terme zeigt ($m_f = 0, \pm 1$). Man spricht daher vom *Singulett-* ($f = 0$) oder *Parawasserstoff* und *Triplet-* ($f = 1$) oder *Orthowasser-*

Hyperfeinstruktur, 21cm Linie des Wasserstoffs

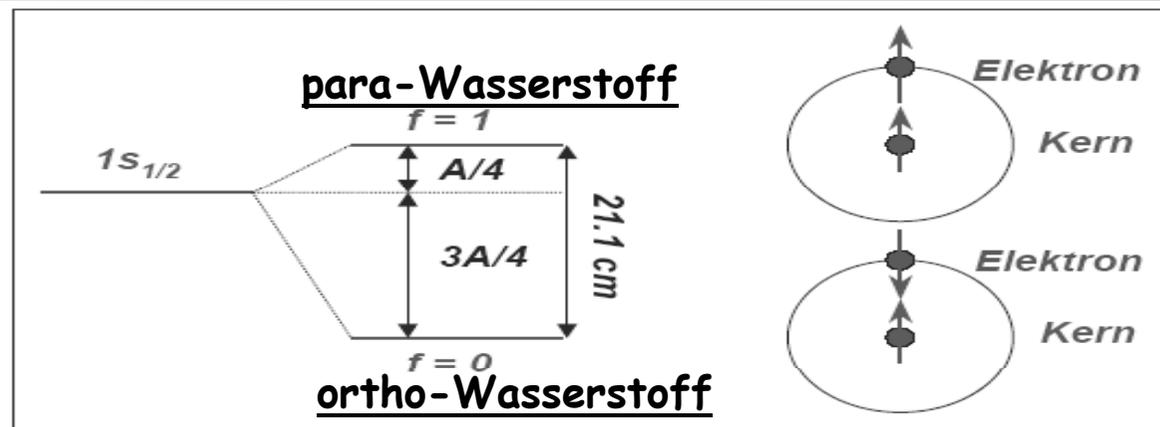


Abbildung 4.10: Hyperfeinstrukturaufspaltung des Grundzustandes im Wasserstoffatom. Beim Übergang zwischen dem Triplett- und dem Singulett-Zustand wird Strahlung der Frequenz $\nu_H = 1.42 \text{ GHz}$ bzw. der Wellenlänge $\lambda_H = 21.1 \text{ cm}$ ausgesandt, die im Mikrowellenbereich liegt. Beim Aussenden der Strahlung muss der Spin des Elektron gekippt werden, man spricht deshalb von einem Spin-Flip-Übergang. Gemäß den allgemeinen Auswahlregeln für Dipolstrahlung, auf die wir später noch zu sprechen kommen, sind Spin-Flip-Übergänge verboten. Das heißt, die Übergangswahrscheinlichkeit bei Strahlungsemission ist nur über höhere Momente möglich und daher sehr klein. Im Labor kann man deshalb diesen Übergang kaum beobachten, da die Abregung eher durch Stoß stattfindet. Da aber im Weltraum im interstellaren Gas große Mengen an atomarem Wasserstoff vorliegen, wird trotzdem die 21 cm Linie in genügender Intensität ausgesendet, um sie auf der Erde mit empfindlichen Antennen beobachten zu können.¹³ Die Untersuchung der 21 cm Linie spielt in der *Radioastronomie* eine wichtige Rolle, weil ihre Untersuchung Auskunft über die Dichteverteilung, Geschwindigkeiten und Temperatur von Wasserstoffatomen im Universum gibt.

Vollständiges Termschema des H-Atoms

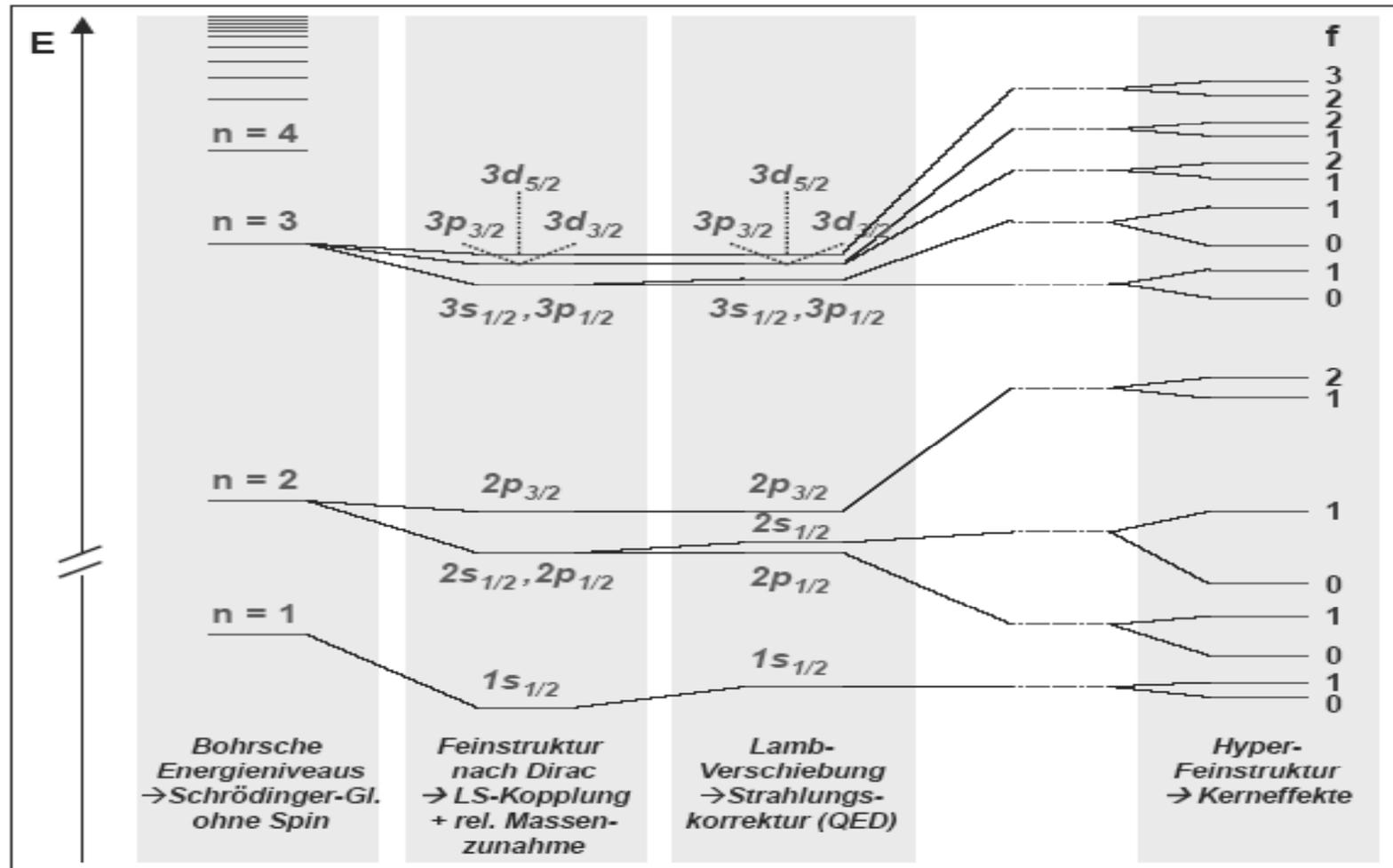


Abbildung 4.19: Vollständiges Termschema des Wasserstoffatoms mit allen bisher bekannten Wechselwirkungen. Die Fein- und Hyperfeinstruktur, sowie die Lamb-Shift sind aus Gründen der Übersichtlichkeit nicht maßstabsgerecht gezeichnet.

Zum Mitnehmen

Feinstruktur der Spektrallinien im Wasserstoff durch:

Spin-Bahn-Kopplung (Feinstruktur)

relativistische Korrekturen (E nur abhängig von QZ n, j)

QED Korrekturen (Lamb-Shift)

Hyperfeinstruktur (Kernspin)

Kombination von Spin- und Bahnmagnetismus mit

$g_s=2$ und $g_l=1$ führt zum Landé-Faktor zwischen 1 und 2.

Dies kann als anomaler Zeeman-Effekt beobachtet werden