

# Vorlesung 2:

---

---

## Roter Faden:

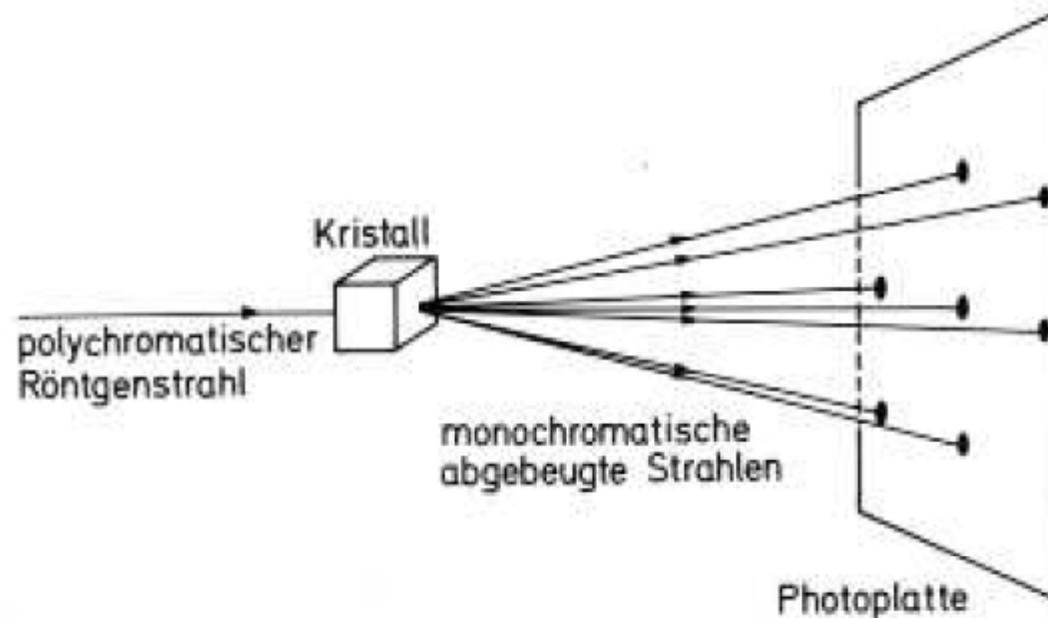
Größe der Atome  
Massenspektroskopie  
Atomstruktur aus  
Rutherfordstreuung (1911)

Folien auf dem Web:

<http://www-ekp.physik.uni-karlsruhe.de/~deboer/>

# Größe der Atome aus Röntgenbeugung

Berühmter Versuch von v. Laue, Friedrich, Knipping:



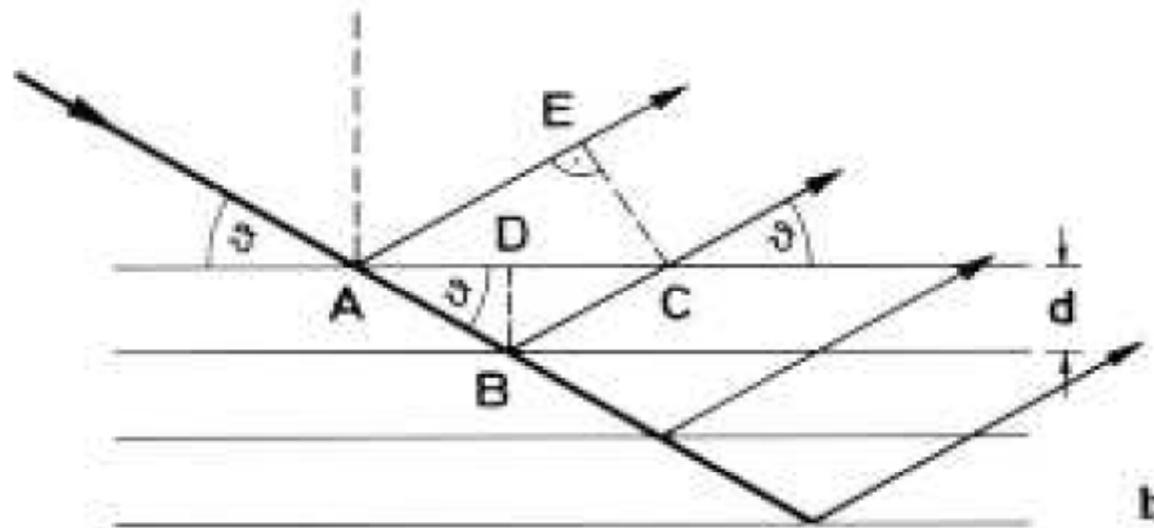
**Helle Punkte / konstruktive Interferenz für  $2d \sin\theta = n\lambda$**

**$\theta$  = Ablenkwinkel**

**$\lambda$  = Wellenlänge des gebeugten Strahls**

**$d$  = Gitterabstand der Netzebenen**

# Herleitung der Interferenzbedingung



Gangunterschied:

$$AB + BC - AE = 2AB - AE = 2 \frac{d}{\sin \theta} - 2 AD \cos \theta = \frac{2d}{\sin \theta} (1 - \cos^2 \theta) = 2d \sin \theta \equiv n\lambda$$

# Weitere Streumethoden

---

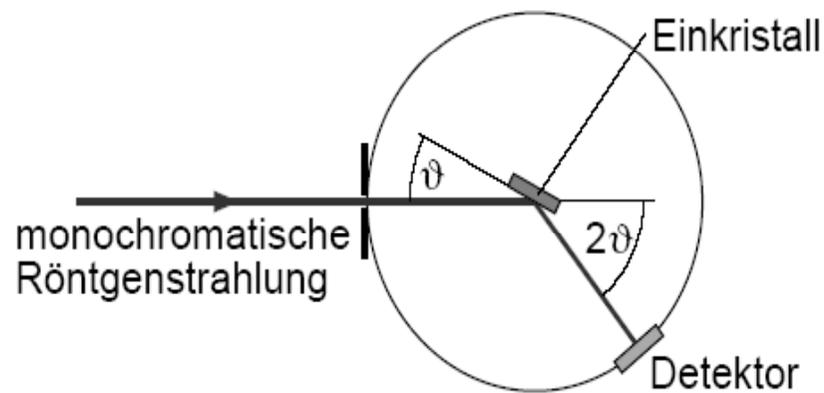
1)

Braggsches Drehkristall-Verfahren mit monochromatischem Röntgenlicht; Interferenzwinkel bestimmt durch Drehen bis Maximum auftritt.

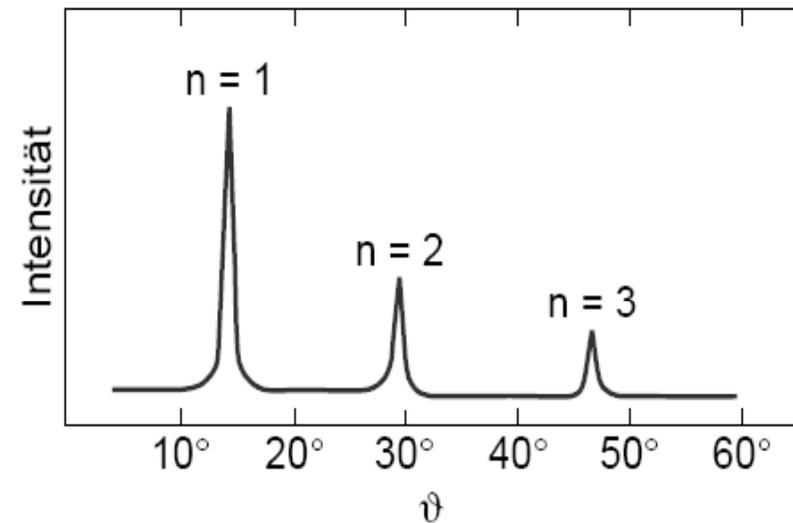
2.

Debye-Scherrer-Verfahren: monochromatisches Röntgenlicht wird an einem Polykristall ("Pulver") gestreut; Punkte werden Kegel, da jede Netzebene in allen Orientierungen vorkommt  
Die Ausdehnung der Atome ist groß im Vergleich zu *Wellenlänge*,  
*d.h.* keine Punkte, die streuen, sondern ausgedehnte Objekte

# Braggsche Drehkristall-Verfahren



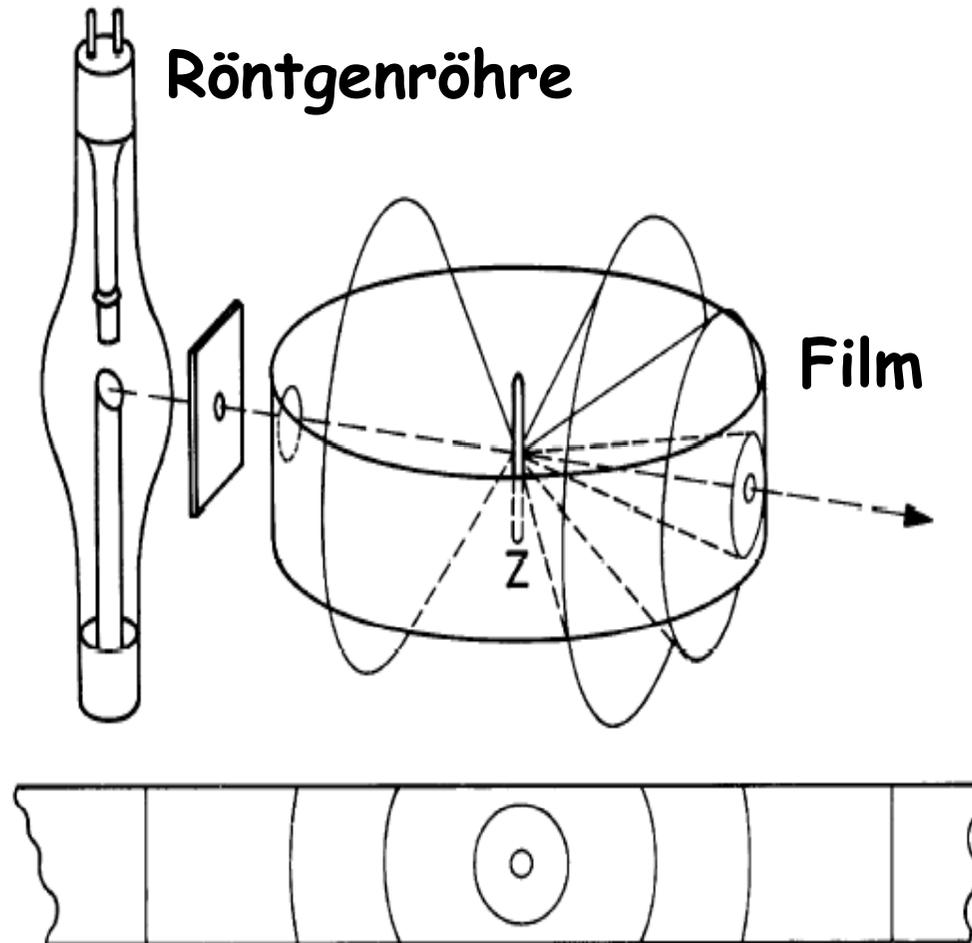
Schema einer Vorrichtung zur Aufnahme eines Röntgenspektrums nach dem Drehkristallverfahren



Röntgenspektrum nach dem Drehkristallverfahren

# Debye-Scherrer Verfahren

## Debye-Scherrer-Verfahren

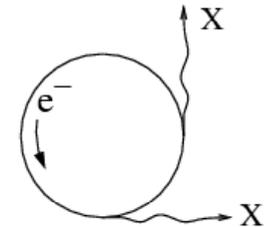


Debye-Scherrer-Verfahren:  
Röntgenbeugung von monochromatischem Röntgenlicht an einem Polykristall Z. Auf dem Film erscheinen die Schnittlinien der Beugungskegel an den verschiedenen Netzebenenscharen. Zur Erzeugung von monochromatischem Röntgenlicht verwendet man entweder die charakteristische Röntgenstrahlung nach Abb. 18.3, oder man muß einen Einkristall als Monochromator nach (2.31) verwenden

# Strahlungstypen

---

1. Röntgenstrahlung, heute ganz überwiegend in Form von Synchrotronstrahlung aus Elektronen-Synchrotrons; Effektivität der Beugungsexperimente besser bei hohem  $Z$



2. Neutronenstrahlen (z.B. Hochfluss-Reaktoren wie ILL Grenoble,   München): Wechselwirkung mit Atomkernen; besonders interessant für leichte Atome wie Wasserstoff

Anwendungen:

Strukturanalyse von Kristallen, Flüssigkeiten, chemischen und biologischen Molekülen etc.

# Massenspektroskopie

Methoden zur Trennung von Atomen mit unterschiedlichen Massen oder, genauer, unterschiedlichen  $e/m$

## 1913 Parabelmethode von Thomson

- $\vec{F}_E = e\vec{E}$
- $\vec{F}_B = e\vec{v} \times \vec{B}$  (Lorentzkraft  $\perp B$ )

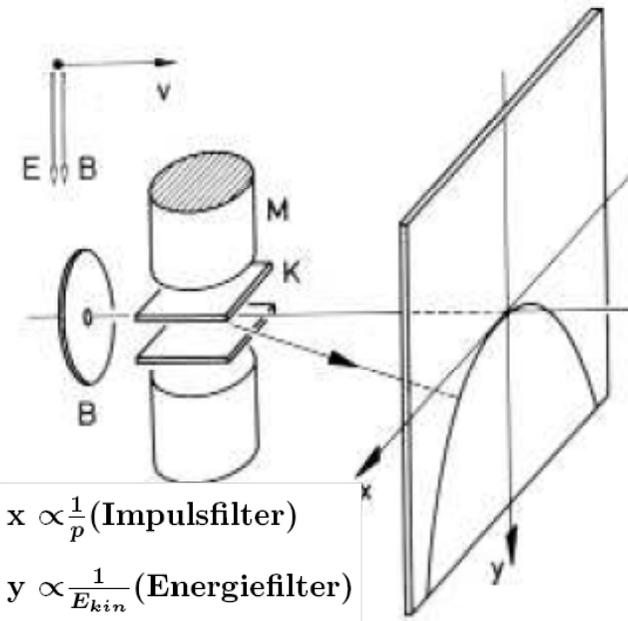
$$1. F_E = ma_y = m\ddot{y} = eE \rightarrow y = \frac{1}{2} \frac{eE}{m} t^2 = \frac{eE}{2m} \frac{p^2}{v^2}$$

$$2. F_B = ma_x = m\ddot{x} = evB \rightarrow x = \frac{evB}{2m} t^2 = \frac{eB}{2m} \frac{l^2}{v}$$

Aus (1) und (2)  $v$  eliminieren  $\rightarrow$

$$y = \frac{2E}{l^2 B^2} \frac{m}{l} x^2 \quad (= \text{Parabel unabhängig von } v!!)$$

Anwendung: Isotopentrennung, z.B. angereichertes oder depletiertes Uran



# Struktur der Atome

**Lenard:**

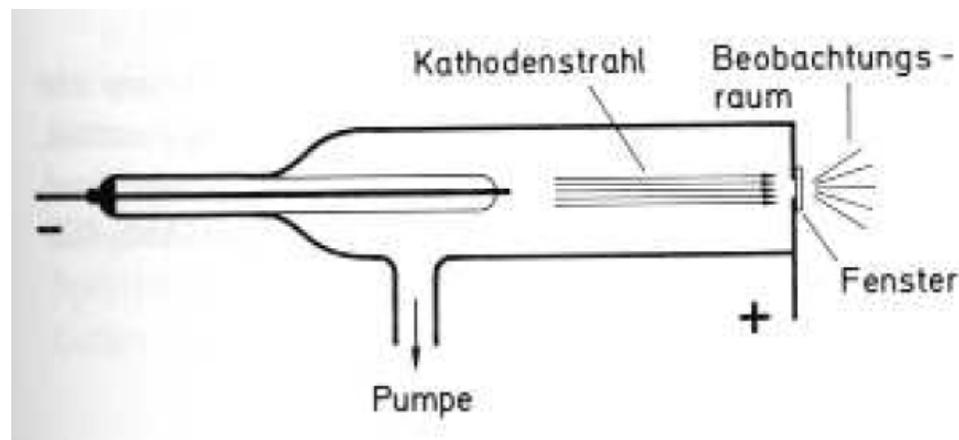
Elektronen haben Reichweite von einigen cm in Luft, aber sehr Energieabhängig.

Für schnelle Elektronen sind Atome  $10^8$ mal durchlässiger als für langsame Elektronen.

Heute wissen wir: schnelle Elektronen streuen nur am Kern, langsame an ganze Hülle (große Wellenlänge!)

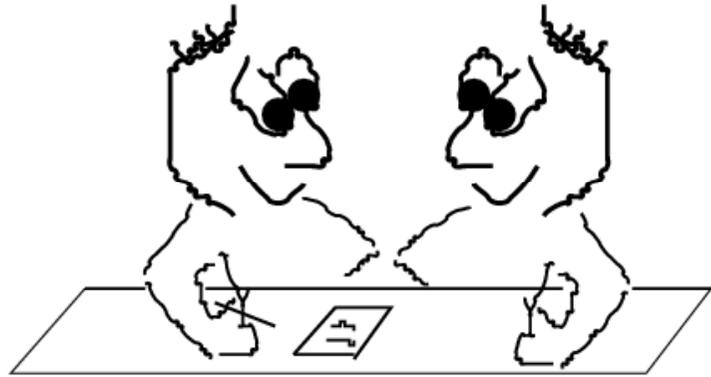
“Das Innere des Atoms ist so leer wie das Weltall.”

Denn wenn Atome für Elektronen undurchdringbar wären, würde Reichweite in Luft nur typische gaskinetische freie Weglänge von  $10^{-5}$  cm betragen und würden Elektronen auch nicht Alu-Fenster von 10000 Atomschichten durchdringen können.



**Lenard:**  
Elektronen erzeugt durch Gasentladungen.

Glühelktrode noch nicht bekannt.



Frage: Wenn das Atom "leer" ist, was erwarten Sie für die Streuung von schweren Teilchen (wie z.B.  $\alpha$ -Teilchen) an Atomen?

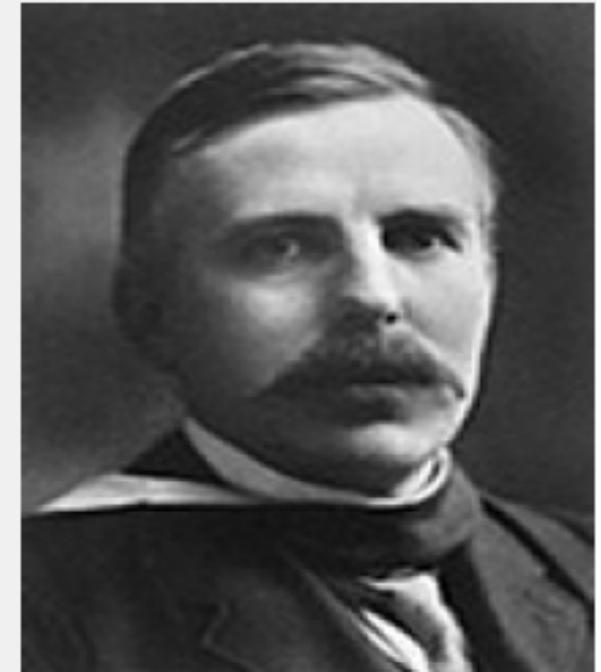


**Ernest Rutherford** wurde am 30. August 1871 in Brightwater, Neuseeland geboren.

Nach außergewöhnlichen schulischen Leistungen studierte er von 1890 bis 1894 in Christchurch (Neuseeland) und von 1895 bis 1898 am Cavendish-Laboratorium in Cambridge (England). Die Entdeckung der Radioaktivität durch Antoine Henri Becquerel im Februar 1896 gab seiner Laufbahn eine bestimmende Richtung. Im Sommer 1898 erhielt er eine Berufung als Professor für Physik an die McGill-Universität in Montreal, Kanada. Hier untersuchte er die ionisierende Wirkung radioaktiver Strahlung auf Gase. Außerdem stellte er eine These über den Atomzerfall auf und identifizierte die Alphastrahlung als Heliumionen. 1902 erkannte er die Radioaktivität als Element-Umwandlung und formulierte das radioaktive Zerfallsgesetz. 1903 gelang ihm die Ablenkung von  $\alpha$ -Teilchen im starken Magnetfeld und wies deren positive Ladung nach. Dass es sich um zweifach positiv geladene Heliumionen handelt, zeigten 1908 die beiden Mitarbeiter Rutherfords, Hans Geiger und Thomas Royds. 1907 kehrte Rutherford nach England auf den Langworthy-Lehrstuhl in Manchester zurück. Für die Untersuchungen über den Zerfall der Elemente und die Chemie der radioaktiven Materie erhielt er 1908 den Nobelpreis für Chemie. Rutherford arbeitete u.a. mit Radium, das ihm die Wiener Akademie der Wissenschaften lieh. Hans Geiger und Ernest Marsden entdeckten 1911 in Rutherfords Labor, dass einige  $\alpha$ -Teilchen beim Durchstrahlen einer sehr dünnen Goldfolie stark abgelenkt werden. Daraus entwickelte er 1911 eine Streuformel sowie ein Atommodell, das auch heute noch in Schulen gelehrt wird. Niels Henrik Bohr entwickelte das Rutherfordsche Atommodell 1913 unter Berücksichtigung der klassischen Elektrodynamik fort; Henry Moseley schloss aus den Frequenzen radioaktiver Strahlen auf die Kernladungszahl der sie aussendenden Substanzen und ordnete sie demgemäß in das Periodensystem der Elemente.

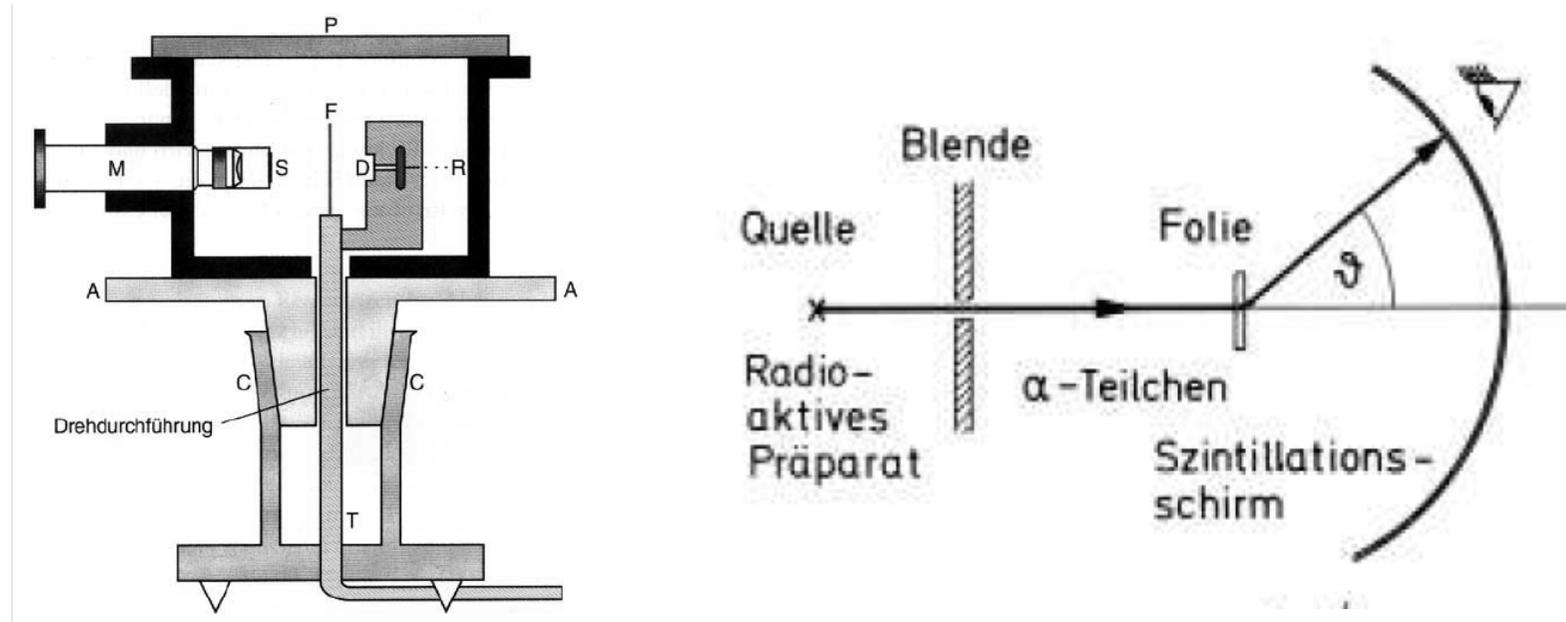
Rutherford wurde 1914 zum Ritter geschlagen. 1919 gelang ihm die erste künstlich erzielte Kernumwandlung durch Beschießen von Stickstoff mit  $\alpha$ -Teilchen. Im gleichen Jahr wurde Rutherford Direktor des Cavendish - Laboratoriums in Cambridge und hatte nach 1920 auch einen Lehrstuhl an der Royal Institution of Great Britain in London inne. Im Jahre 1925 wurde er zum Präsidenten der Royal Society gewählt und 1931 zum Lord ernannt (Lord Rutherford of Nelson).

Ernest Rutherford verstarb am 19. Oktober 1937 in Cambridge und wurde in Westminster Abbey nahe dem Grabe Newtons bestattet.



# Kernstruktur aus "Rutherfordstreuung"

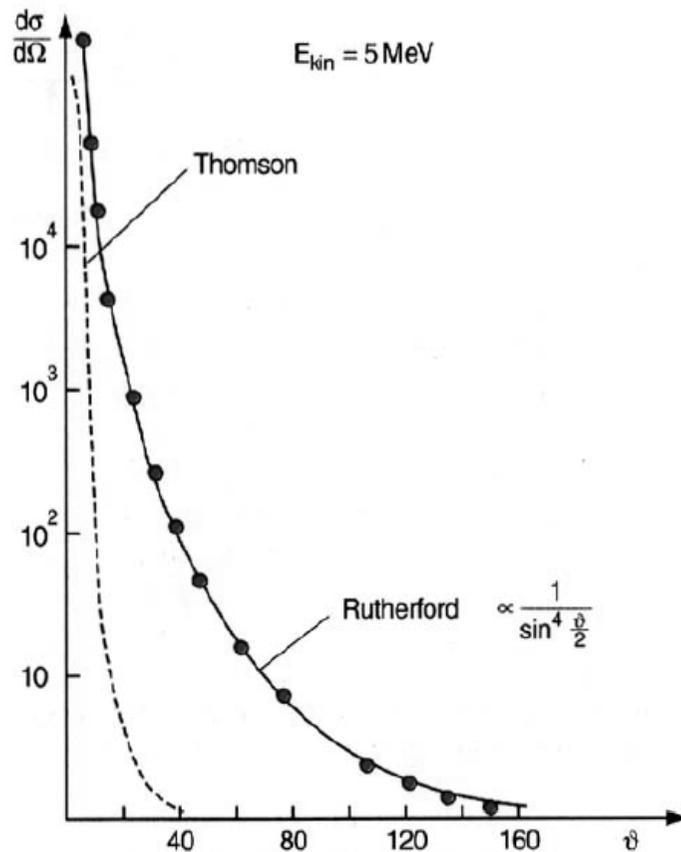
$\alpha$ -Teilchen (He-Kerne aus radioaktivem Präparat): Reichweite 3,5 cm in Luft bei  $E = 5 \text{ MeV}$ . (Geiger + Marsden, Studenten von Rutherford)



Mit  $S$  wird die Intensität der durchgelassenen Strahlung durch dünne Goldfolie als Funktion vom Ablenkungswinkel  $\theta$  gemessen !  
*Meiste Teilchen fliegen durch, wie erwartet, wenn Atom "leer" ist.  
Jedoch manchmal Rückstöße unter großen Winkeln:  
"Gewehrkuugel prallt an einem Plumpudding ab."*

# Winkelabhängigkeit der Rutherford-Streuung

Interpretation: Masse von Goldatom *schwerer* als Masse von  ${}^4\text{He}$  Atom und diese Masse ist konzentriert in einem Kern mit einem Radius  $R$  von ca.  $10^{-12}$  cm mit Ladung  $Ze$ .



Rutherford konnte zeigen, dass die  $1/\sin^4(\theta/2)$  Abhängigkeit der Winkelverteilung gerade die Coulomb Streuung an einer punktförmigen Ladung entspricht.

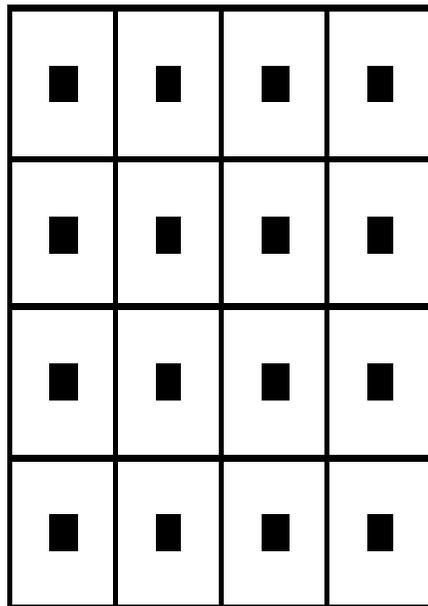
$$\text{Coulombkraft: } F_C = \frac{(Ze)(2e)}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$Ze$  = Ladung des Kerns  
 $2e$  = Ladung des He-Atoms

# Begriff Wirkungsquerschnitt

---

Es kommen  $N$  Teilchen pro  $\text{cm}^2$  und Sekunde bei den modellhaft gezeichneten Atomen an. Wie groß ist die Rate, die hängenbleibt, wenn die  $N$  Teilchen nur mechanische Stöße machen?



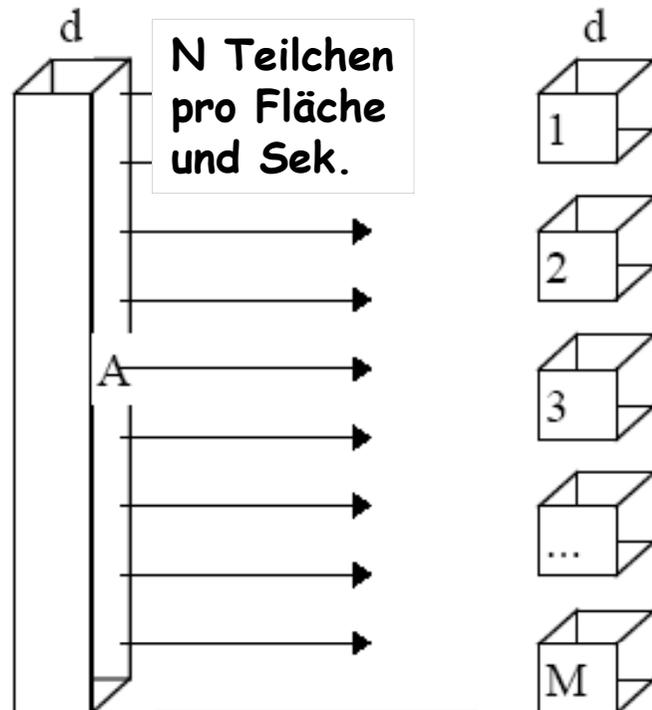
Es sei:

Kantenlänge der Atome:  $10^{-10}$  m, Kantenlänge der Kerne:  $10^{-14}$  m

$$\frac{\text{Widerstandsfläche}}{\text{Gesamtfläche}} = \frac{10^{-28} \text{ m}^2}{10^{-20} \text{ m}^2} = 10^{-8}$$

$$dN = 10^{-8} \cdot N \quad d\sigma = 10^{-8} \text{ cm}^2. \quad \text{Was bedeutet dies anschaulich?}$$

# Begriff Wirkungsquerschnitt



Wieviele Teilchen bleiben hängen?

Gesamtfläche:  $A$

Effektive Widerstandsfläche:  $M \cdot d^2$

Wid.fläche pro Gesamtfläche:  $(M \cdot d^2 / A)$

Rate, die hängenbleibt:  $dN = (M \cdot d^2 / A) \cdot N$

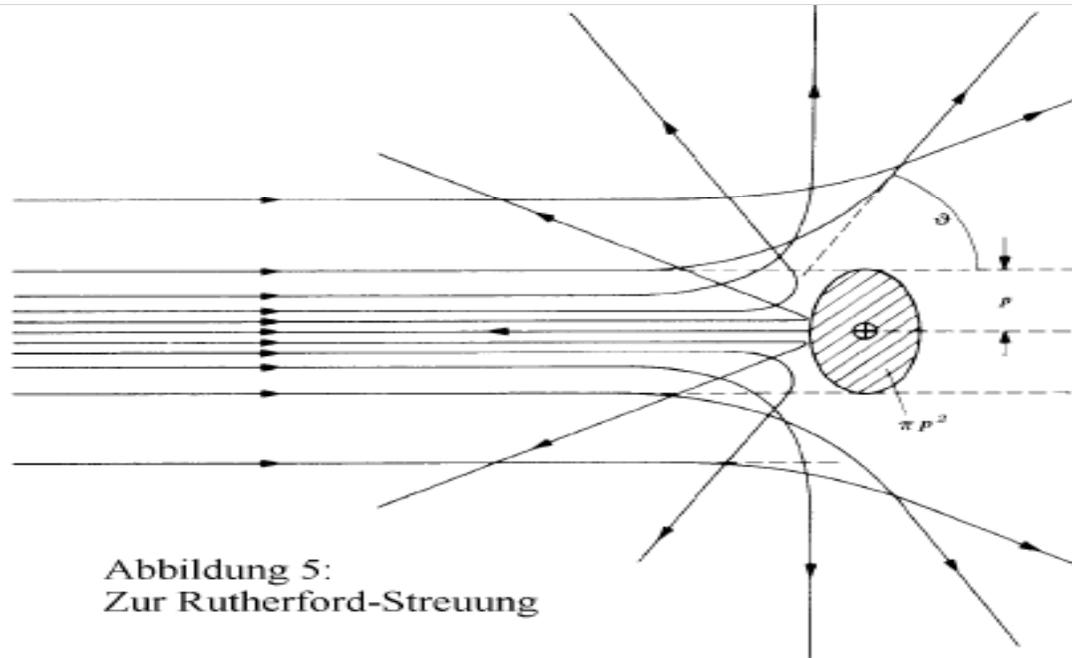
Gibt es  $n$  Würfel pro Volumen in der dünnen Schicht

$$\rightarrow dN = \frac{A \cdot \tau \cdot n \cdot d^2}{A} \cdot N = \tau \cdot n \cdot d^2 \cdot N \quad (1)$$

$\tau =$  Schichtdicke  
 $d^2 =$  Streufläche  
 $M = A \tau n =$  Anzahl der Streuzentren

# Streuung im kugelförmigen Coulombpotential

Bei Kugeln als Streuzentren nicht einfach Absorption oder Durchlass, sondern Streuwinkel Fkt. von Impaktparameter



Beziehung zwischen Impaktparameter  $p$  und Streuwinkel  $\theta$ :

Aus Kepler-Kegelschnitten und Flächensatz folgt (Herleitung nachher)

$$p = \frac{1}{2} r_{0\min} \cdot \cot \frac{\vartheta}{2} \quad (2)$$

# Minimaler Abstand vom Kern

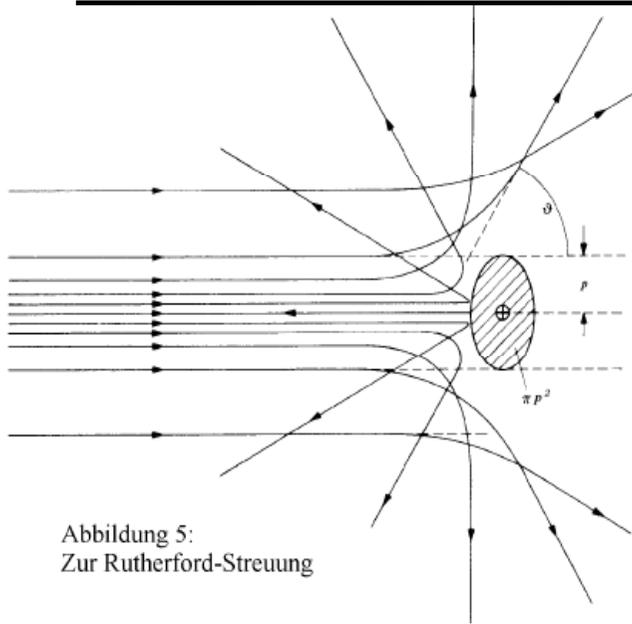


Abbildung 5:  
Zur Rutherford-Streuung

Abstoßung:  $E(\alpha) > 0 \Leftrightarrow$  Hyperbel

$$E(\alpha) = \frac{1}{2} m_{\alpha} v_{-\infty}^2 =$$

$$\underbrace{\frac{1}{2} m_{\alpha} v_0^2 + \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_0}}_{\text{Periheldurchgang}}$$

(Periheldurchgang:  $r_0$  ist minimaler Abstand vom Kern)

**Minimaler Abstand wenn  $E_{kin}=0$**

$$r_{0min} = \frac{4Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m_{\alpha} v_{-\infty}^2}$$

Nukleonen werden im Kern durch das anziehende Potential  $V_k$  der Kernkräfte gebunden. Da  $V_k$  scharf begrenzt ist, kann man aus der kinetischen Schwellenenergie  $W_S$ , bei der der Übergang der normalen zur ARS erfolgt, den Kernradius bestimmen.

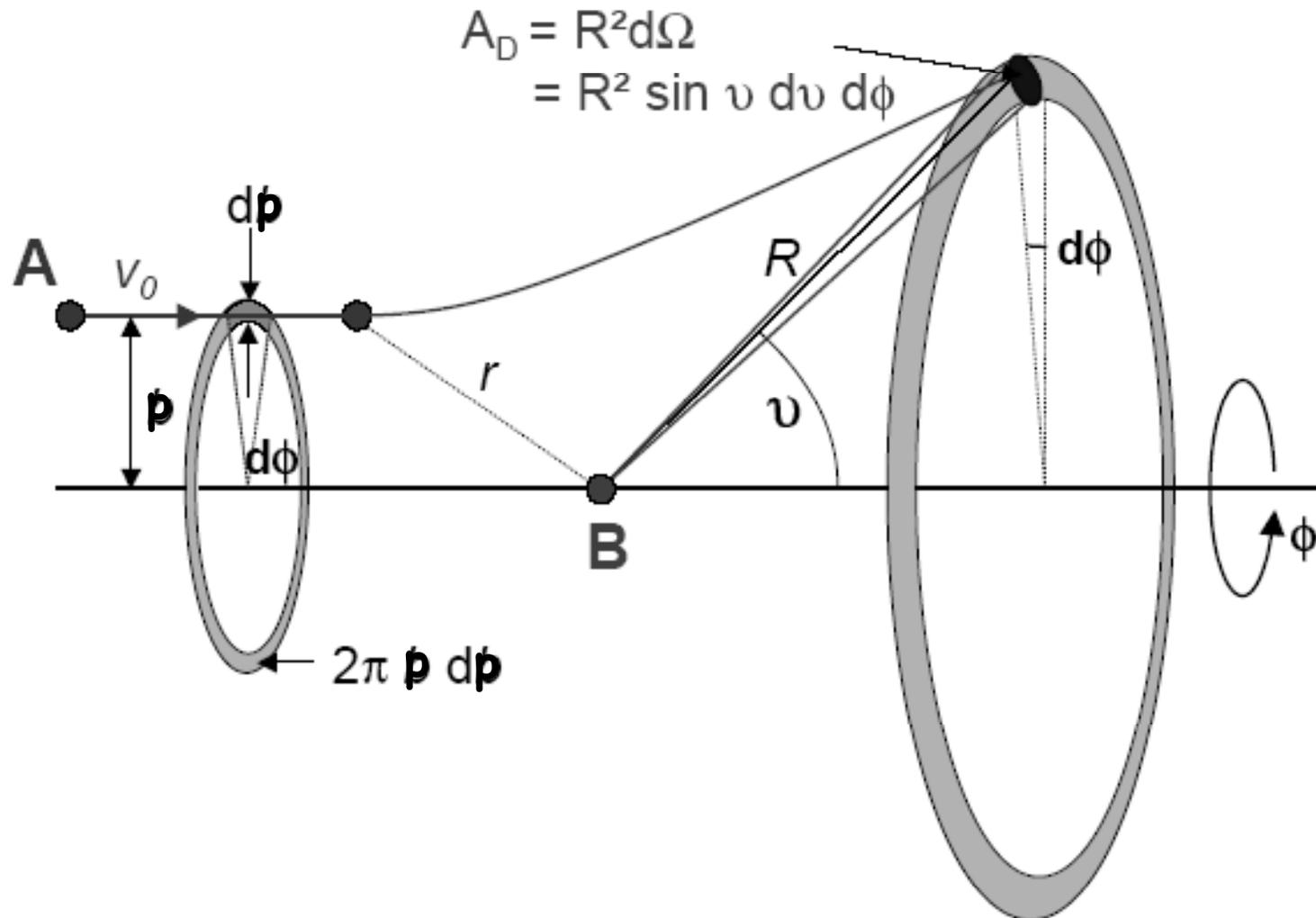
$$\text{Aus } \frac{2e^2 Z}{4\pi\epsilon_0 R_K} = W_S \rightarrow R_K.$$

Aus Messungen an vielen Kernen  $R_K = (0,75 + 1,26 M^{\frac{1}{3}}) 10^{-15} \text{ cm}$ ,

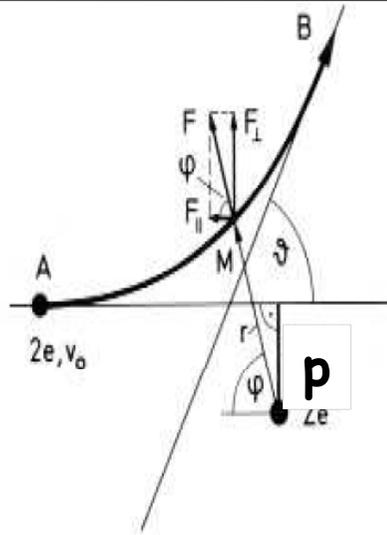
$M =$  Massenzahl des Kerns, daher  $M \propto R^3 \propto V$ ;

$\rightarrow$  Volumens des Kerns  $\propto$  Anzahl der Nukleonen

# Impaktparameter $p \Rightarrow$ Streuwinkel $\theta$



# Herleitung Beziehung zwischen Streuwinkel und Impaktparameter



1. Streuwinkel  $\theta$  hängt vom Impaktparameter  $p$  ab

$$2. F_{\perp} = F \sin \varphi \quad (1); \quad F_{\parallel} = F \cos \varphi \quad (2); \quad F = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (3);$$

$r$  variiert während der W(Integrieren über die Zeit, um  $\theta$  zu bekommen)

3. Drehimpulserhaltung (Radialkraft, d.h.  $\vec{F} \times \vec{r} = F \cdot r \cdot \sin \varphi = 0$ );

$$\Rightarrow \vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \text{ in } \left\langle \begin{array}{l} A: \quad mv_0 p \\ B: \quad mv_B r = (v = \dot{\varphi} r) = m\dot{\varphi} r^2 \Rightarrow \frac{1}{r^2} = \frac{\dot{\varphi}}{v_0 b} \end{array} \right\rangle (4)$$

## Herleitung Beziehung zwischen Streuwinkel und Impaktparameter

4. Senkrechtbewegung:  $F_{\perp} = m \frac{dv_{\perp}}{dt} = [(1) + (3)] = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sin \varphi$  (5)

(4) in (5) : mit  $k = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0}$  und integrieren über die Zeit:

$$\int_{t_A}^{t_C} \frac{dv_{\perp}}{dt} dt = \frac{k}{mv_0 p} \int_A^C \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt} dt \quad (6)$$

A bei  $-\infty$ :  $v_{\perp} = 0$ ,  $\varphi = 0$

C bei  $+\infty$ :  $v = v_0$  (Energieerhaltung)

Aus (6):  $\int_0^{v_0 \sin \theta} dv_{\perp} = \frac{k}{mv_0 p} \int_0^{\pi - \theta} \sin \varphi d\varphi$  (7)

oder  $v_0 \sin \theta = \frac{k}{mv_0 p} (1 + \cos \theta)$  (8)

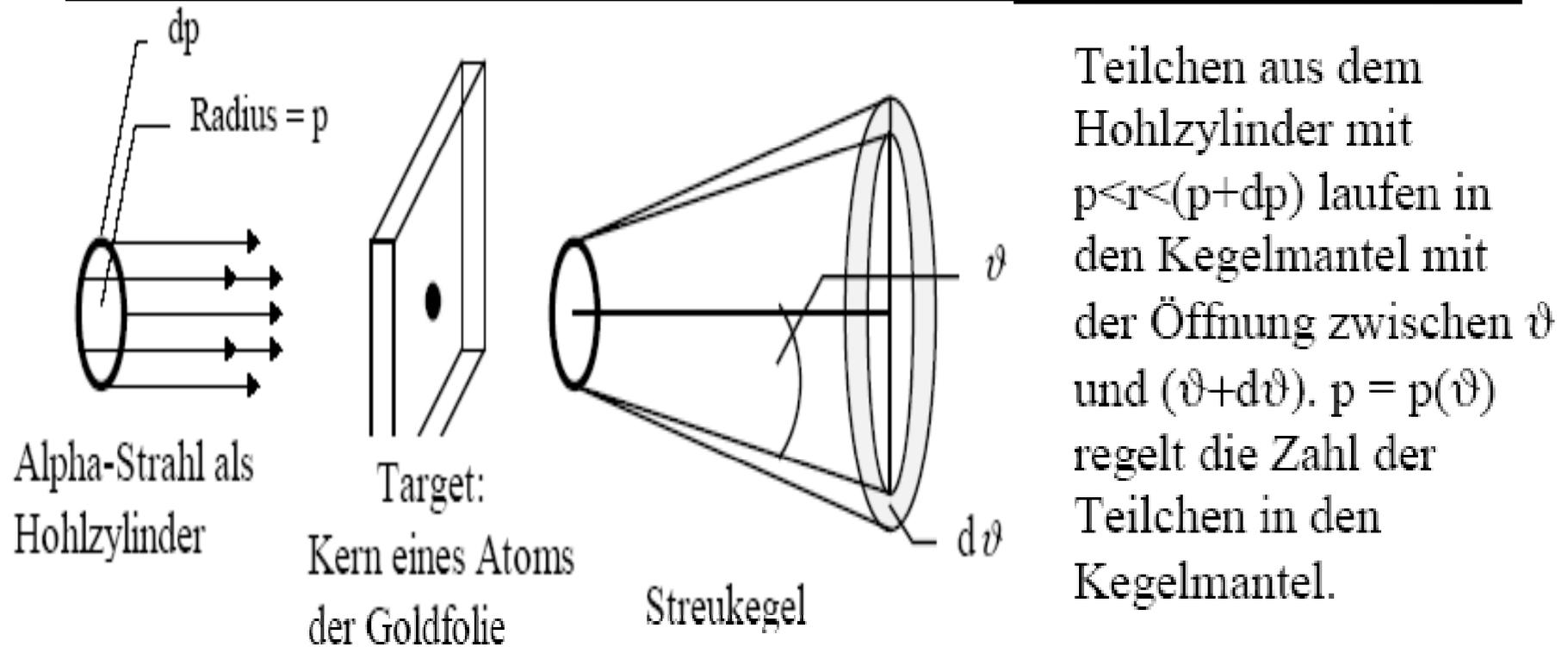
$$\frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} \equiv \cot \frac{\theta}{2} \quad (9)$$

Aus (8) + (9):

$$p = \frac{k}{mv_0^2} \cot \frac{\theta}{2} = r_{0\min} / 2 \cot (\theta/2)$$

(= Beziehung zwischen Impaktparameter und  $\theta$  durch  $\int F dt$ .)

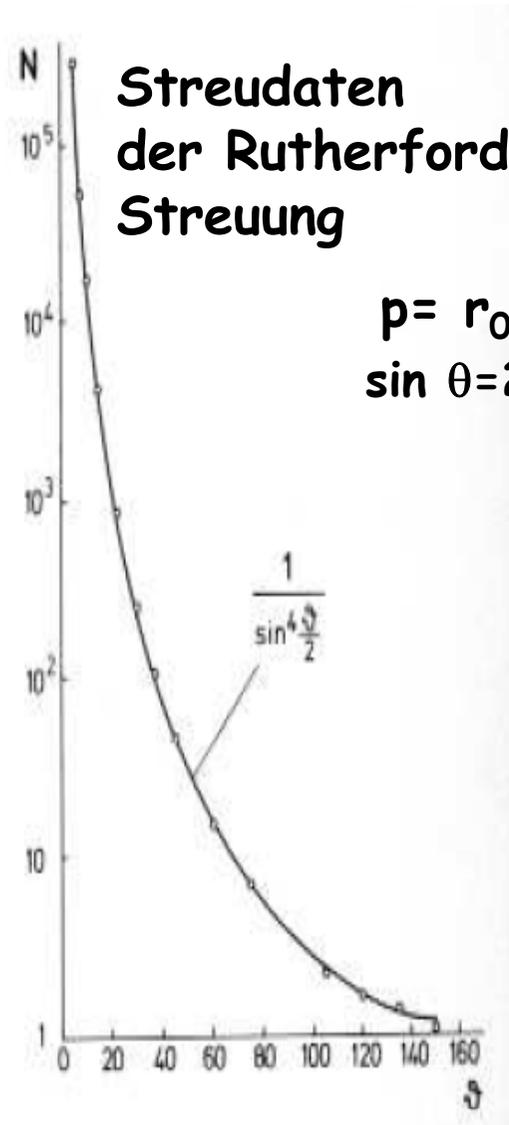
# Rutherford-Streuung: Alpha-Strahl wird an dünne Goldfolie gestreut



$N$  ankommende Teilchen pro  $\text{cm}^2$  und Sekunde mit Kernabstand zwischen  $p$  und  $(p + dp)$ ,  $dN$  sind die Teilchen, die in den Kegelmantel laufen mit  $d\Omega = 2\pi \sin\vartheta d\vartheta$

$$(3) \quad dN = 2\pi p \cdot dp \cdot \tau \cdot n \cdot N \quad n = \text{DICHTE der Streuzentren}$$

# Winkelverteilung der Rutherfordstreuung



Wir verwenden jetzt:

$$j = \frac{N}{\text{cm}^2 \cdot \text{s}} \quad (4)$$

und erhalten:

$$\frac{dN}{j} = d\sigma = 2\pi p \cdot dp \cdot \tau \cdot n \quad (5)$$

$$\frac{dp}{d\vartheta} = \frac{1}{4} r_{0\text{min}} \cdot \frac{-1}{\sin^2 \frac{\vartheta}{2}}$$

(6) aus (2)

$$p = r_{0\text{min}}/2 \cot(\theta/2)$$

$$\sin \theta = 2 \sin(\theta/2) \cos(\theta/2)$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{p \cdot \tau \cdot n \cdot dp}{\sin \vartheta d\vartheta} = \frac{n\tau}{16} r_{0\text{min}}^2 \cdot \frac{1}{\sin^4 \frac{\vartheta}{2}} \quad (7)$$

Interpretation des Ergebnisses:

i)  $\frac{d\sigma}{d\Omega} \sim Z^2$

Möglichkeit der Kernladungsbestimmung (vgl. S.6)

ii)  $\frac{d\sigma}{d\Omega} \sim \frac{1}{E_\infty^2}$

Je energiereicher die Teilchen, desto kleiner der Wirkungsquerschnitt

iii)  $\frac{d\sigma}{d\Omega} \sim \frac{1}{\sin^4 \frac{\vartheta}{2}}$

Vorwärtsstreuung eigentlich unendlich groß; Abnahme für wachsende  $\vartheta$ ;

aber auch Rückwärtsstreuung möglich.

**Abweichungen für hohe Energien der  $\alpha$ -Teilchen (Anomale Rutherford-Streuung (ARS)) durch "Berührung" der Kernpotentiale, also nicht nur Coulombpotential  $\Rightarrow$  Kernradius!**

# Beispiel

---

$$r_{0\min} = \frac{4Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m_\alpha v_\infty^2} \quad Z\text{-abhängig}$$

$$r_{0\min} \cdot v_\infty^2 = \text{konst.}$$

$r_{0\min}$  ist eine obere Grenze für den Kernradius

**Beispiel:** Streuung von  $\alpha$ -Strahlen aus RaC an Goldfolie:

$$m_\alpha = 6,69 \cdot 10^{-27} \text{ kg}, \quad \epsilon_0 = 8,9 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C} \cdot \text{b}}{\text{V} \cdot \text{m}}, \quad v_\infty = 1,9 \cdot 10^7 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad Z(\text{Gold}) = 79$$

$$r_{0\min} \approx 3 \cdot 10^{-14} \text{ m} = 30 \text{ fm}$$

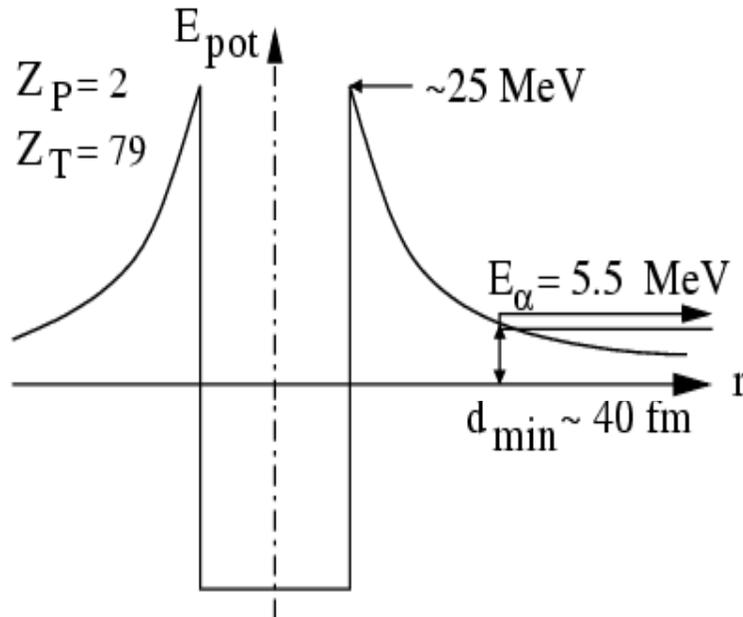
$$\text{Atom} = 1,5 \times 10^{-10} \text{ m}$$

5000 x so groß wie Kern

# Gründe für Erfolg dieser klassischen Experimente

- $M_\alpha \gg M_{el}$  ( $10^4$ ): Ablenkung durch Streuung an Elektronen vernachlässigbar; nur Streuung durch den positiv geladenen Atomkern
- reine „Coulomb-Streuung“ am Atomkern  $\Rightarrow$  zentrales Potential. Die Ausdehnung des Kernes ist nicht relevant, weil der minimale Abstand  $d_{min} > R_{Kern}$  ist (s.u.): Das Potential einer sphärisch symmetrischen Ladungsverteilung ist außerhalb gleich dem einer Punktladung.

Ladung/Masse für Projektil  $Z_P e/M_P$ , für Targetkern  $Z_T e/M_T$

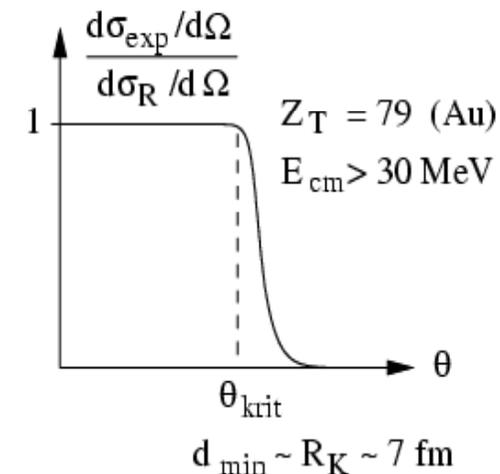
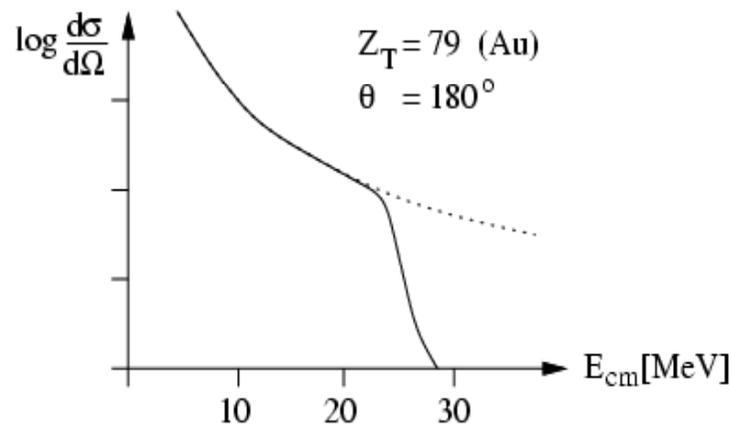


Streupotential:

$$E_{pot}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z_P Z_T e^2}{r}$$

## Zusatz-Bemerkungen

- Divergenz von  $d\sigma_R/d\Omega$  für kleine  $\theta$  nur mathematisch. Ist  $b$  vergleichbar mit Atomdurchmesser: Kernladung zunehmend abgeschirmt durch Elektronen. Im Grenzfall  $b > \text{Atomradius}$  geht die streuende Ladung  $Z_{T\text{eff}} \rightarrow 0$ . Damit bleibt  $d\sigma_R/d\Omega$  auch bei kleinen  $\theta$  endlich.
- Bei  $\alpha$ -Energien  $> 20$  MeV (für  $Z > 82$ ) wird  $d_{\min} < R_{\text{Kern}}$ . Zusätzlich zu den elektrostatischen Kräften treten dann kurzreichweitige Kernkräfte auf, die zu einer Veränderung der Ablenkfunktion  $\theta(b)$  führen. Insbesondere kann das  $\alpha$ -Teilchen vom Kern absorbiert werden. Dies führt zu einer drastischen Reduktion von  $d\sigma_R/d\Omega$  gegenüber der Rutherfordstreuung.



Aus der Abweichung der gemessenen Streuverteilung kann der Radius  $R_K$  des Atomkerns abgeschätzt werden. Man erhält daraus, dass die Nukleonen den Kern mit einer konstanten Dichte ausfüllen. Es gilt:

$$R_K \approx r_0 A^{1/3}$$

# Und Wellencharakter der Teilchen spielt bei diesen Energien und Abständen noch keine Rolle!

---

- de-Broglie-Wellenlänge des  $\alpha$ -Teilchens

$$\lambda = \frac{h}{mv} \approx 6 \text{ fm (5.5 MeV } \alpha\text{-Energie)} \leq \text{Kerndurchmesser} \ll \text{Atomdurchmesser}$$

⇒ Das  $\alpha$ -Teilchen ist ein gut lokalisiertes Wellenpaket, die „klassische Bahn“ ist eine sinnvolle Vorstellung. Ein reines  $1/r$ -Potential liefert in jedem Fall für klassische und quantenmechanische Behandlung das gleiche Resultat (sonst wäre Behandlung mit Schrödingergleichung notwendig).

# GRÖSSENVERHÄLTNISSE

PROTONEN SIND 100000x KLEINER  
ALS ATOME (1911)

Atomkern : Atomhülle

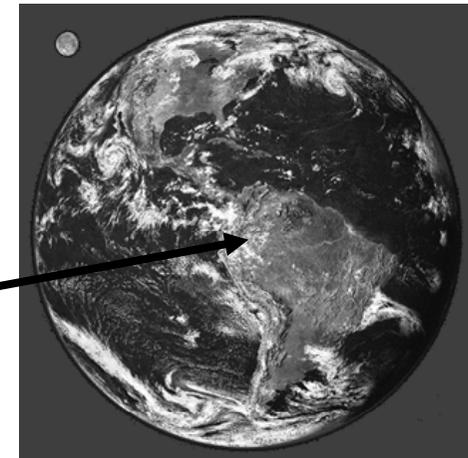
= Knopf : Innenstadt



QUARKS, LEPTONEN SIND MIND. 10000x KLEINER  
ALS PROTONEN (1998)

Quark : Atomhülle

< Knopf : Erde



# Zum Mitnehmen

Atomgröße aus Röntgenbeugung: ca.  $1 \text{ \AA}$  (Ängström= $10^{-10}\text{m}$ )  
Dies bedeutet, dass Quanteneffekte eine Rolle spielen, da  
mit  $\Delta p \approx p = mv$  und  $\Delta x \approx x$  gilt: ( $v/c \approx 0.01$  für Elektronen in Atomen)  
 $\Delta p \cdot \Delta x = 10^{-30}\text{kg} \cdot 3 \cdot 10^6\text{m} \cdot 10^{-10}\text{m} = 10^{-34} \text{ Js}$  ist vergleichbar  
mit der Planck Konstante  $h = 10^{-34} \text{ Js}$ .

Rutherford-Streuung: Kern-Kernstreuung zeigt,  
dass Kerne SEHR klein sind im Vergleich zu Atomen!

Kernradius / Atomradius =  
Erbse / Kölner Dom



4000x

