

Vorlesung 5:

Roter Faden:

Elektron als Welle
Heisenbergsche Unsicherheitsrelation

(Elektron: griechisch für Bernstein, das durch Reibung elektrostatisch aufgeladen wurde)

Folien auf dem Web:

<http://www-ekp.physik.uni-karlsruhe.de/~deboer/>

Erzeugung von Elektronen

a) Thermische Emission aus Festkörperoberflächen

Metall - auf hohe T aufheizen - frei bewegliche Elektronen erhalten hohe kinetische Energie - überwinden Austrittsarbeit W_a - Glühemission.

Elektrisches Feld - Elektronen gehen zu positiver Anode.

Richardson Gesetz: $j_S = A \cdot T^2 \cdot e^{-e \cdot U_A / kT}$

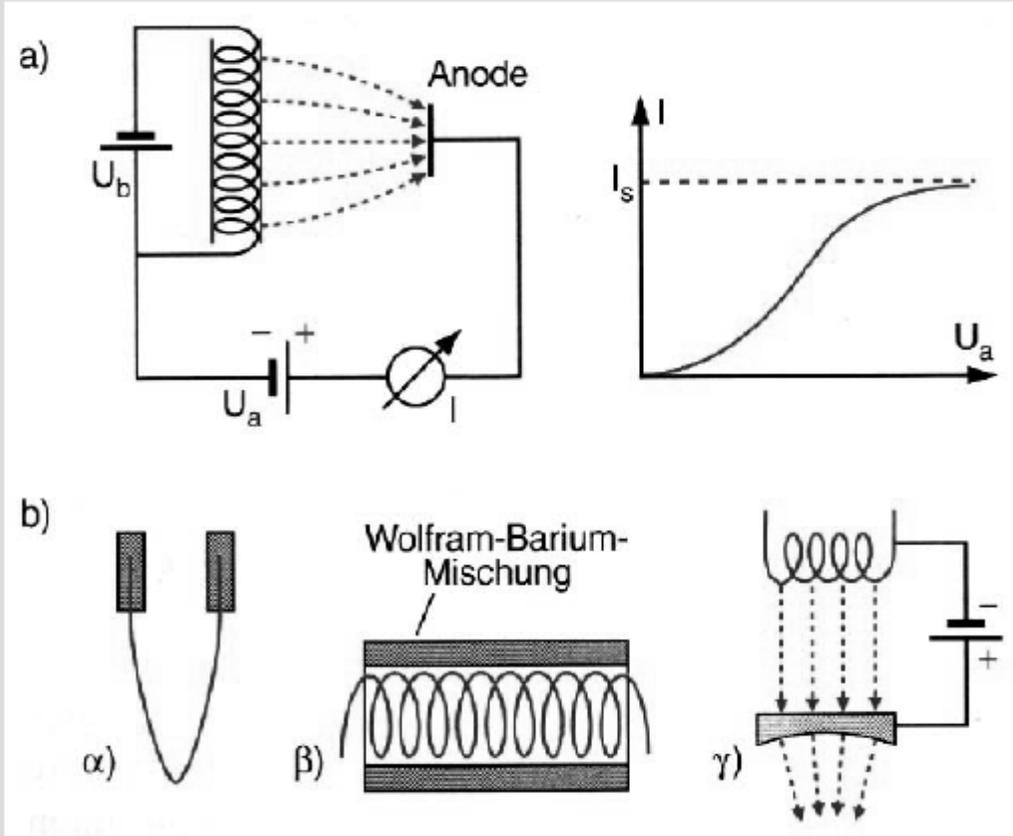
Konstante A materialabhängig.

Für hohe Stromdichten Materialien mit niedriger W_a aber sollen hohe Temperaturen aushalten; z.B.: W, Ba, Cs-Verbindungen.

Anwendung: Elektronenröhren, Fernsehröhren, Senderöhren

Erzeugung von Elektronen

Glühemissionskathoden
(a) Schematische Anordnung zur Messung des Emissionsstroms und Definition der Sättigungsstromdichte;
(b) technische Ausführungsformen von Glühkathoden: α) Haarnadelkathode β) durch eine Heizwendel geheiztes Kathodenröhrchen γ) durch Elektronenbombardement geheizte Kathode mit fokussierender Oberfläche



Erzeugung von Elektronen

Austrittsarbeiten $W_a = e \cdot U_a$ und Stromdichte-Emissions-Koeffizienten A einiger gebräuchlicher Glühkathodenmaterialien

Material	W_a/eV	$A/(\text{Am}^{-2}\text{K}^{-2})$
Barium	2,1	$6 \cdot 10^4$
Wolfram-Barium	1,66	$\sim 10^4$
Wolfram-Cäsium	1,4	$\sim 3 \cdot 10^4$
Thorium	3,35	$6 \cdot 10^5$
Tantal	4,19	$5,5 \cdot 10^5$
Wolfram	4,54	$(1,5-15) \cdot 10^5$
Nickel	4,91	$(3-130) \cdot 10^5$
Thoriumoxid	2,6	$(3-8) \cdot 10^4$

Erzeugung von Elektronen

b) Feldemission

Kathode - feine Spitze. Hohe Spannung zwischen Anode und Kathode ($E \sim 10^{11}$ V/m) - Elektronen treten aus ("Tunneleffekt").

c) Photoeffekt an Metalloberflächen

Oberfläche eines Metalls wird mit UV-Licht bestrahlt → Elektronen treten aus ("äußerer Photoeffekt").

$$W_{kin} = h \cdot \nu - W_a \quad (\text{Einstein})$$

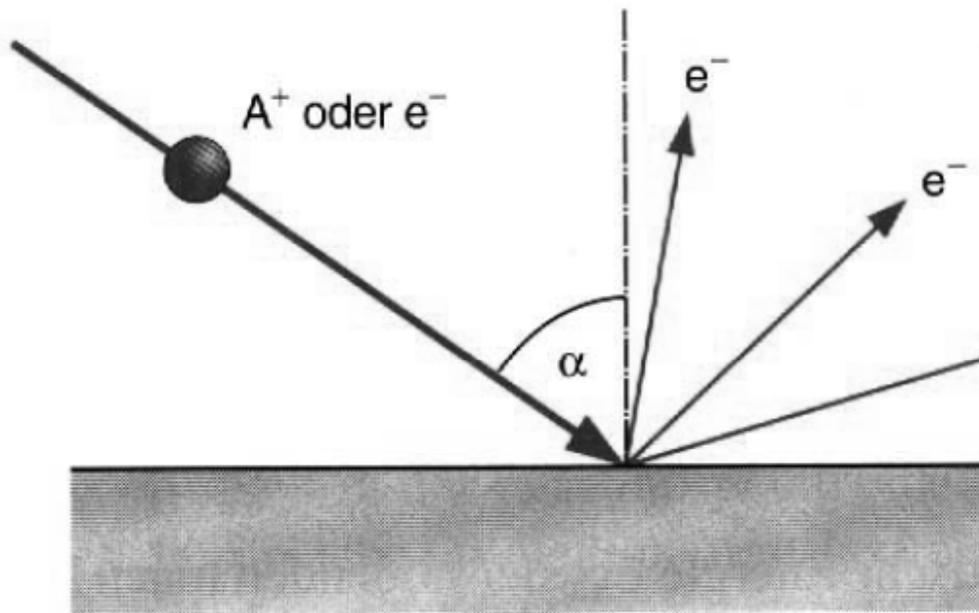
d) Sekundäremission aus Festkörperoberflächen

Beschuß von Festkörper mit schnellen Elektronen oder Ionen - Sekundärelektronen

Sekundärelektronenkoeffizient η

Hängt ab vom Material, Einfallswinkel α Art, Energie der einfallenden Teilchen - siehe Tabelle

Sekundäremission

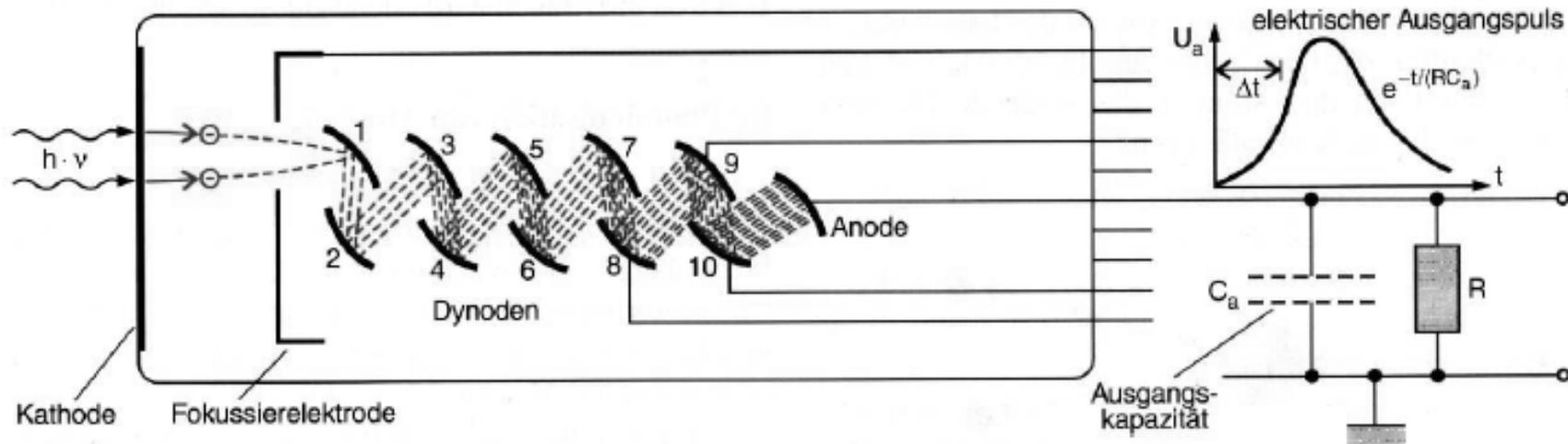


Erzeugung von Sekundärelektronen durch Beschuss Festkörperoberfläche mit Elektronen oder Ionen

Sekundäremissionskoeffizienten η bei der Energie W_{\max} der auftreffenden Primärelektronen, bei der η den maximalen Wert η_{\max} annimmt

Material	η_{\max}	W_{\max}/eV
Ag	1,5	800
Al	1,0	300
C (Diamant)	2,8	750
Na	0,8	300
W	1,4	650
KBr	14	1800
LiF	8,5	700
NaI	19	1300
MgO-Kristall	20–25	1500
MsO-Schicht	5–15	500–1500
GaP + Cs	120	2500

Photomultiplier: Photoeffekt plus Sekundäremission

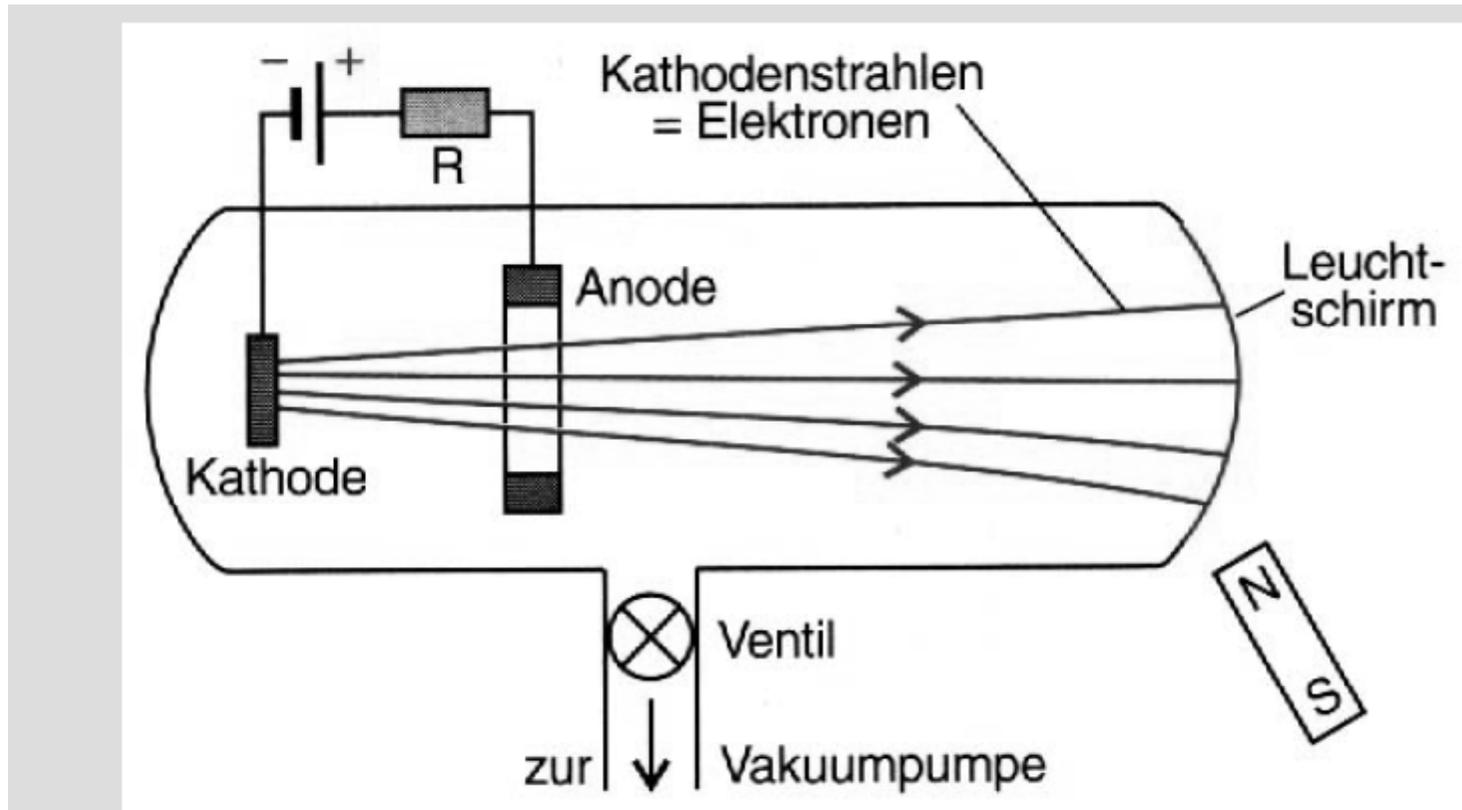


Prinzip des Sekundärelektronenvervielfachers (Photomultiplier). Die Anstiegszeit Δt des Ausgangspulses pro Photon gibt die Laufzeitverschmierung der Elektronen im Multiplier an. Die Abfallflanke hängt nur von C_a und R ab.

m ...Dynoden $\Rightarrow \eta^m$ Elektronen

$$U_a = \eta^m \cdot e / C_a$$

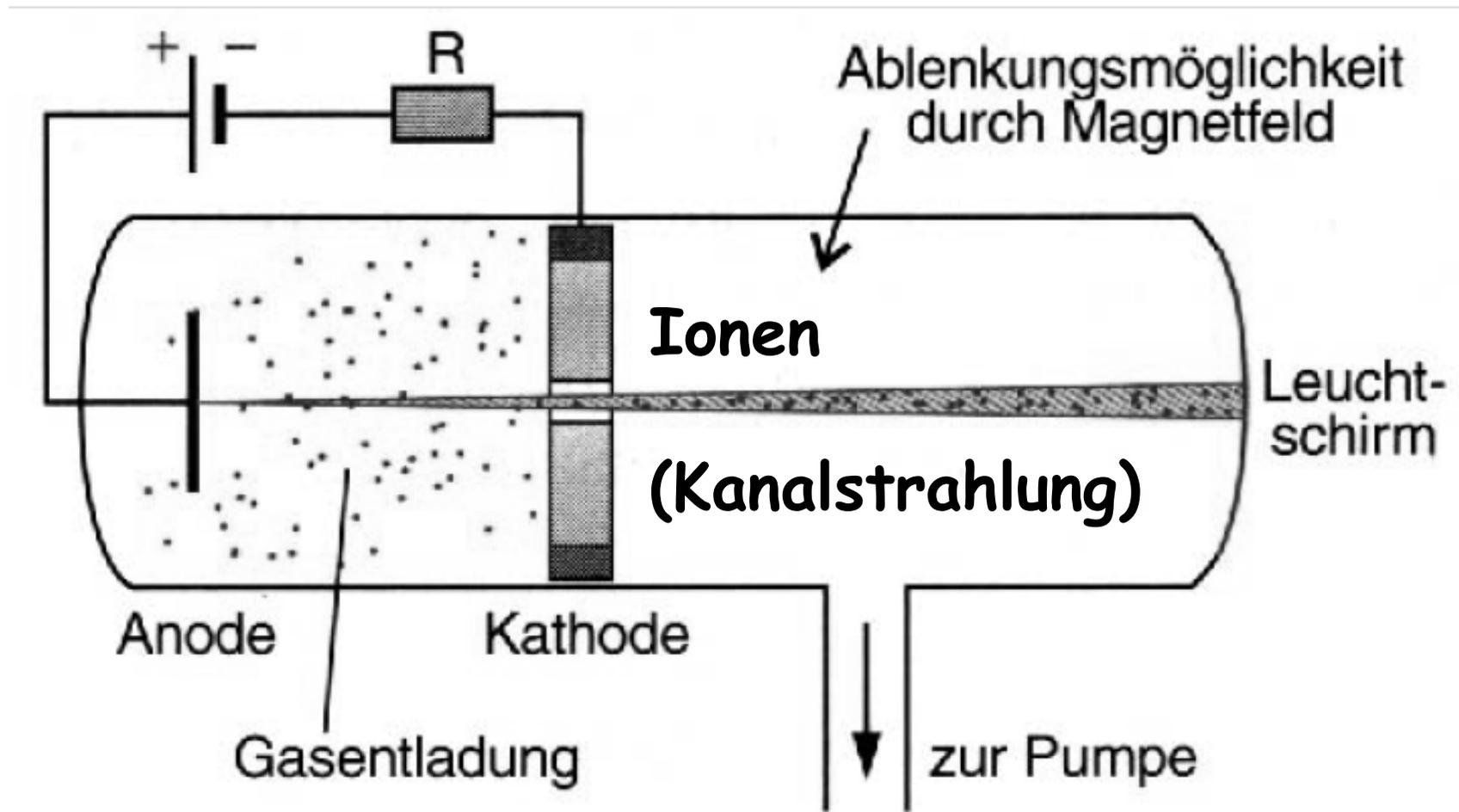
Erste Experimente mit Elektronen



Schematische Darstellung der Anordnung zur Beobachtung der Kathodenstrahlung auf einem Leuchtschirm. Die Anordnung ermöglicht die Ablenkung der Strahlen durch Magnete.

Gasentladungen ionisieren Gas -> neg. und pos. Teilchen

Erste Experimente mit Elektronen



Schematische Darstellung der experimentellen Realisierung von Kanalstrahlung in einer Gasentladung bei durchbohrter Kathode.

Schlussfolgerung

Kanalstrahlen - positive geladene Partikel - Ionen

Kathodenstrahlen - negativ geladene Teilchen - Elektronen

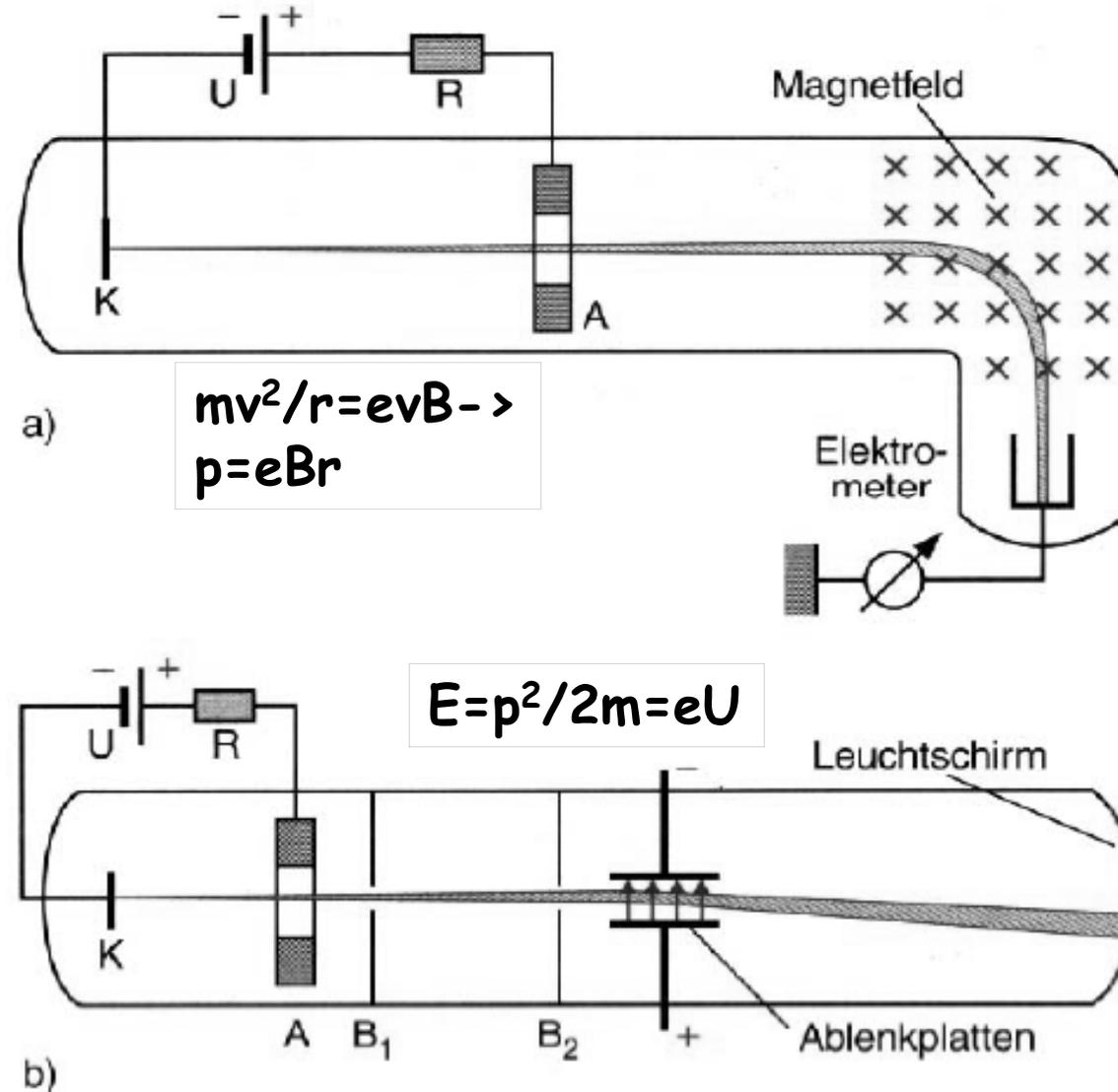
Atome bestehen aus *negativ geladenen Elektronen* + positiv geladenen Kern.

Positiv geladenen *Ionen*: Atome denen ein oder mehrere Elektronen fehlen.

Erste Experimente mit Elektronen

Anordnung von J.J. Thomson zur Bestimmung des Verhältnisses e/m der Kathodenstrahlung durch Ablenkung (a) im Magnetfeld, (b) im elektrischen Feld.

$$e/m = 2U/B^2r^2$$



Bestimmung der Elektronladung

Öltröpfchenmethode von Millikan (1910)

Öltröpfchen in Luft im elektrischen Feld eines Plattenkondensators:

$$\frac{4\pi a^3}{3}(\rho - \sigma)g = 6\pi\eta a v_0$$

Stokesche Reibungsgesetz

$$\frac{4\pi a^3}{3}(\rho - \sigma)g + E \cdot e = 6\pi\eta a v_1$$

Teilchenradius a , ρ Dichte des Teilchens, σ Dichte der Luft,

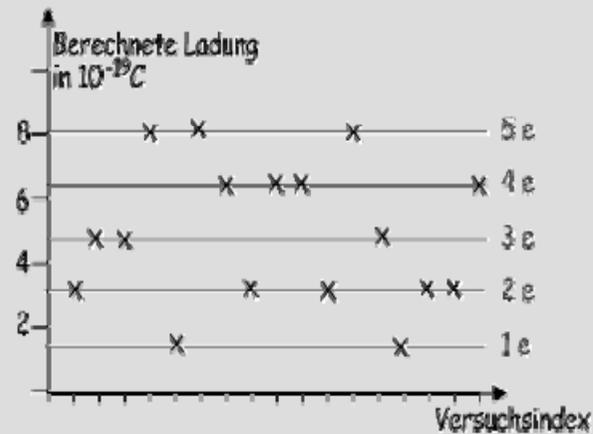
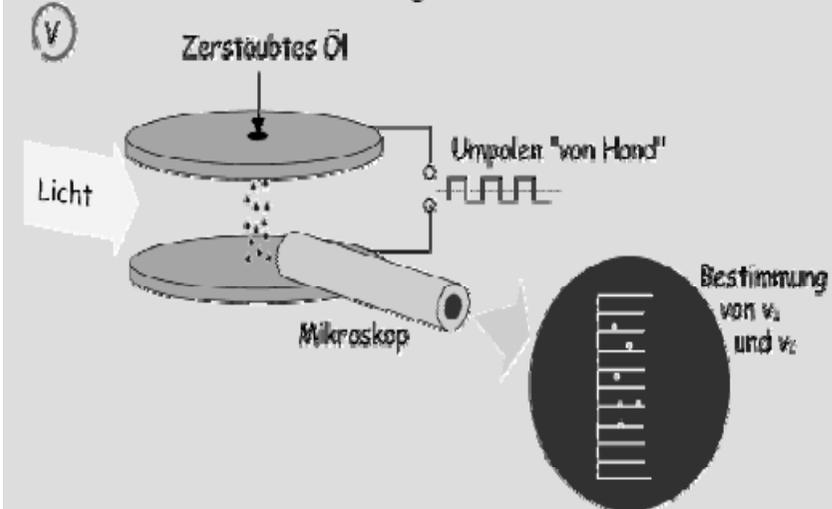
v_0 Sinkgeschwindigkeit (ohne E-Feld) gemessen mit Mikroskop

v_1 Sinkgeschwindigkeit (mit E-Feld) gemessen mit Mikroskop

Daraus folgt: Ladungen können nur in Vielfachen von e auftreten:

$$e = 1.60217733(30) \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

Millikanversuch-Durchführung



$$\text{ggT}(Q_1, Q_2, Q_3, \dots) = e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

Ladungen treten nur als Vielfache der Elementarladung e auf.

Aus e/m Bestimmung und e -Bestimmung konnte relat. Massenanstieg bestimmt werden

5.2 1901 Kaufmann

entdeckte die relativistische Massenzunahme, die Messung von $\frac{e}{m}$ als Funktion der Energie ergab :

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \equiv \gamma m_0. \quad (E = 1\text{MeV} \rightarrow \gamma = \frac{E}{m_0 c^2} = \frac{1\text{MeV}}{0,5\text{MeV}} = 2 \rightarrow \beta = \frac{v}{c} \approx 0,9),$$

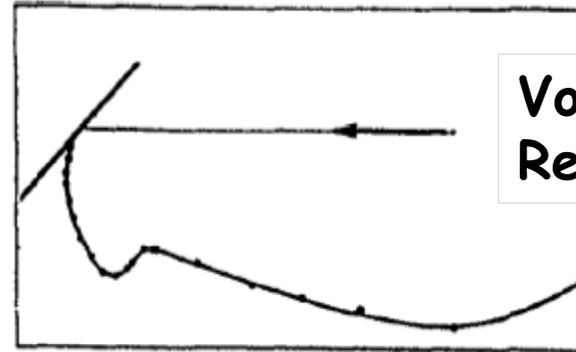
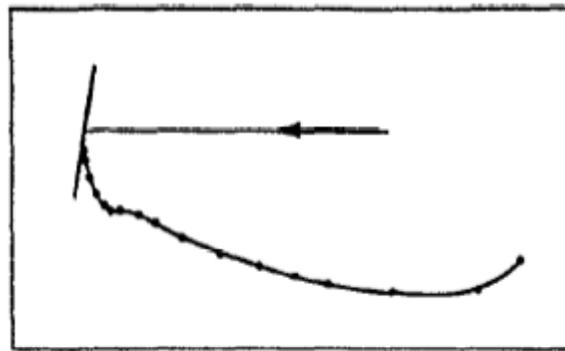
$$\text{Beachte: } \begin{cases} E = mc^2 \\ \beta = \frac{p}{E} \\ \gamma = \frac{E}{mc^2} \end{cases}$$

E und m beide in Einheiten von eV , wenn $c = \hbar = 1$ (übliche Einheiten).

$$\text{LEP - Beschleuniger: } E = 100\text{GeV} \rightarrow \gamma = \frac{E}{m_0} = 2 \times 10^5 \rightarrow \beta = 0,999$$

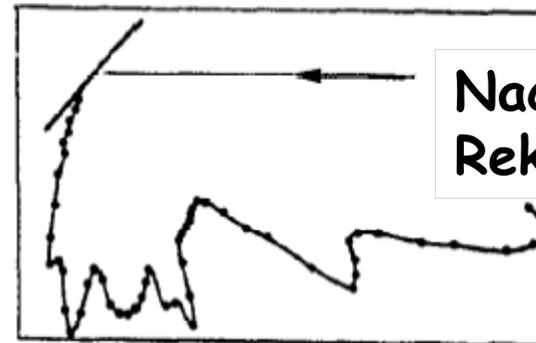
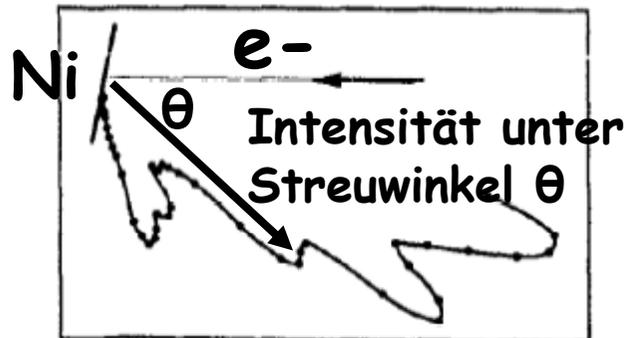
Entdeckung der relat. Massenzunahme von Kaufmann
VOR der Relativitätstheorie in 1905 von Einstein!

Davisson und Germer: Elektron Streuung an Nickel Kristallen



Vor
Rekristallisierung

SCATTERING OF 75 VOLT ELECTRONS FROM
A BLOCK OF NICKEL (MANY SMALL CRYSTALS)



Nach
Rekristallisierung

SCATTERING OF 75 VOLT ELECTRONS FROM
SEVERAL LARGE NICKEL CRYSTALS

g. 1. Scattering curves from nickel before and after crystal growth had occurred.

Zufällige Entdeckung der Bragg-peaks bei
Streuung von Elektronen an Ni-Kristalle

Davisson und Germer: Elektron Streuung an Nickel Kristallen

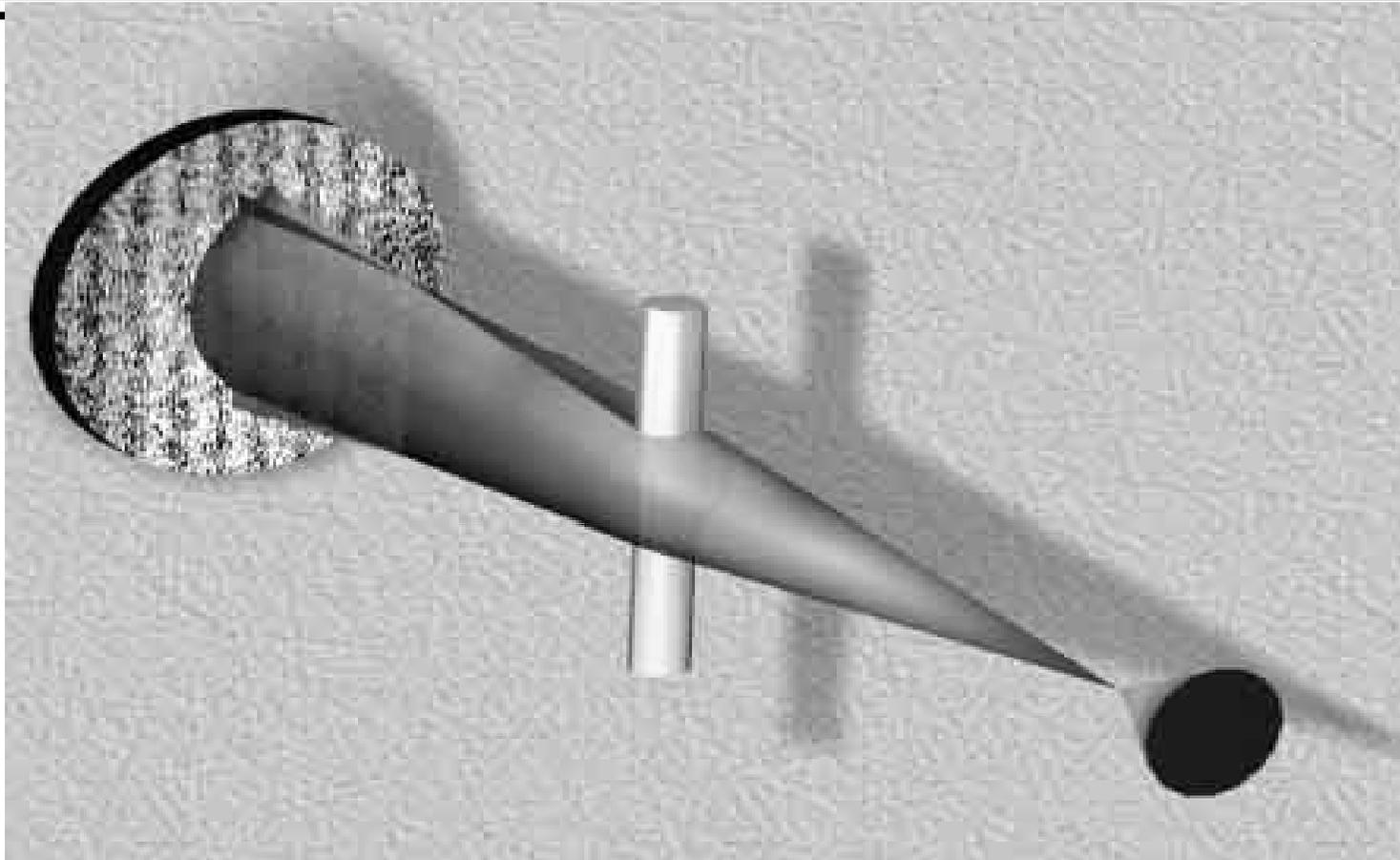
Versuch von
C. Davisson und L.H. Germer
Phys. Rev. 30, p705 (1927)

THE investigation reported in this paper was begun as the result of an accident which occurred in this laboratory in April 1925. At that time we were continuing an investigation, first reported in 1921,¹ of the distribution-in-angle of electrons scattered by a target of ordinary (polycrystalline) nickel. During the course of this work a liquid-air bottle exploded at a time when the target was at a high temperature; the experimental tube was broken, and the target heavily oxidized by the intruding air. The oxide was eventually reduced and a layer of the target removed by vaporization, but only after prolonged heating at various high temperatures in hydrogen and in vacuum.

When the experiments were continued it was found that the distribution-in-angle of the scattered electrons had been completely changed. Specimen curves exhibiting this alteration are shown in Fig. 1. These curves are all for a bombarding potential of 75 volts. The electron beam is incident on the target from the right, and the intensities of scattering in different directions are proportional to the vectors from the point of bombardment to the curves. The upper curves (for different angles of incidence) are characteristic of the target prior to the accident. They are of the type described in the note in "Science" in 1921, and are similar to curves that have been obtained for nickel in four or five other experiments. The lower curves—obtained after the accident—were the first of their sort to be observed. This marked alteration in the scattering pattern was traced to a re-crystallization of the target that occurred during the prolonged heating. Before the accident and in previous experiments we had been bombarding many small crystals, but in the tests subsequent to the accident we were bombarding only a few large ones. The actual number was of the order of ten.

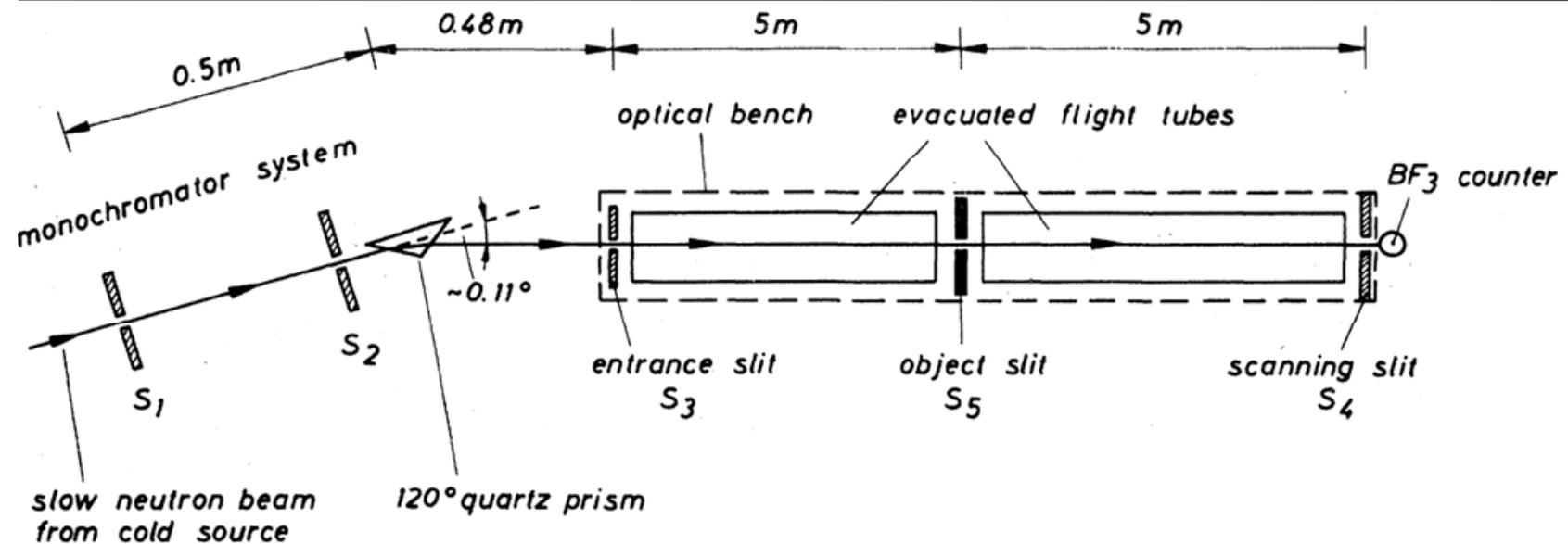
It seemed probable from these results that the intensity of scattering from a single crystal would exhibit a marked dependence on crystal direction, and we set about at once preparing experiments for an investigation of this dependence.

Einzel und Doppelspalt Beugung von Elektronen



Max. und Min. in der Intensitätsverteilung nach Streuung an einem Draht zeigen Interferenz, d.h. Wellencharakter der Elektronen

Einzel und Doppelspalt Beugung von Neutronen

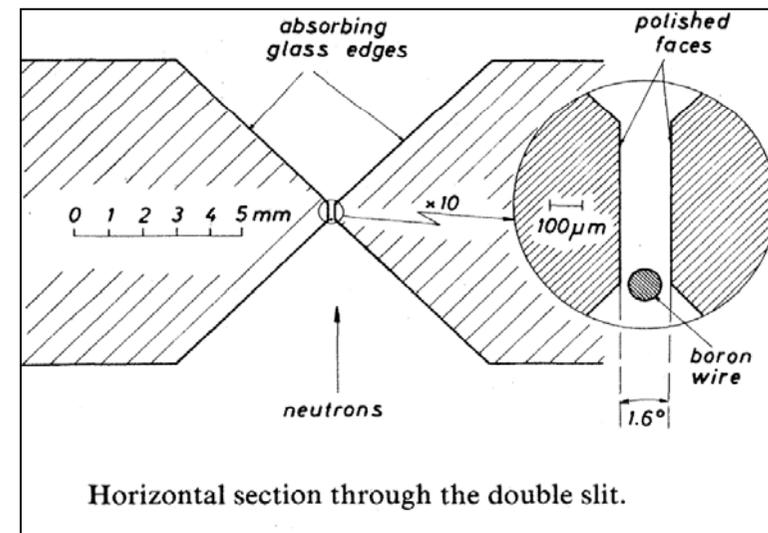


Experiment mit langsamen Neutronen
($v=200\text{m/s}$, $\lambda_{\text{dB}} \sim 2\text{ nm}$)

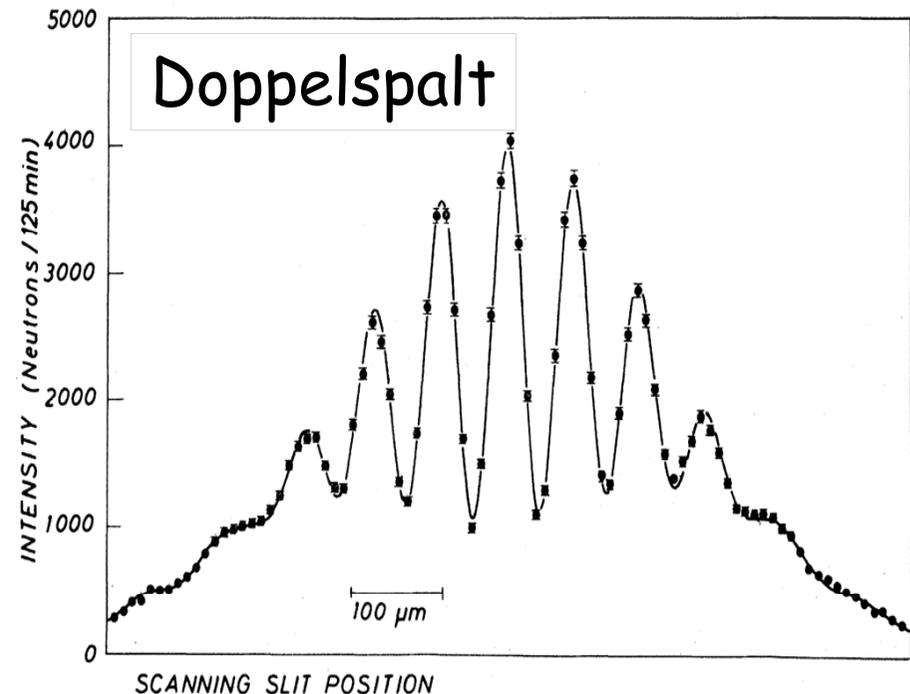
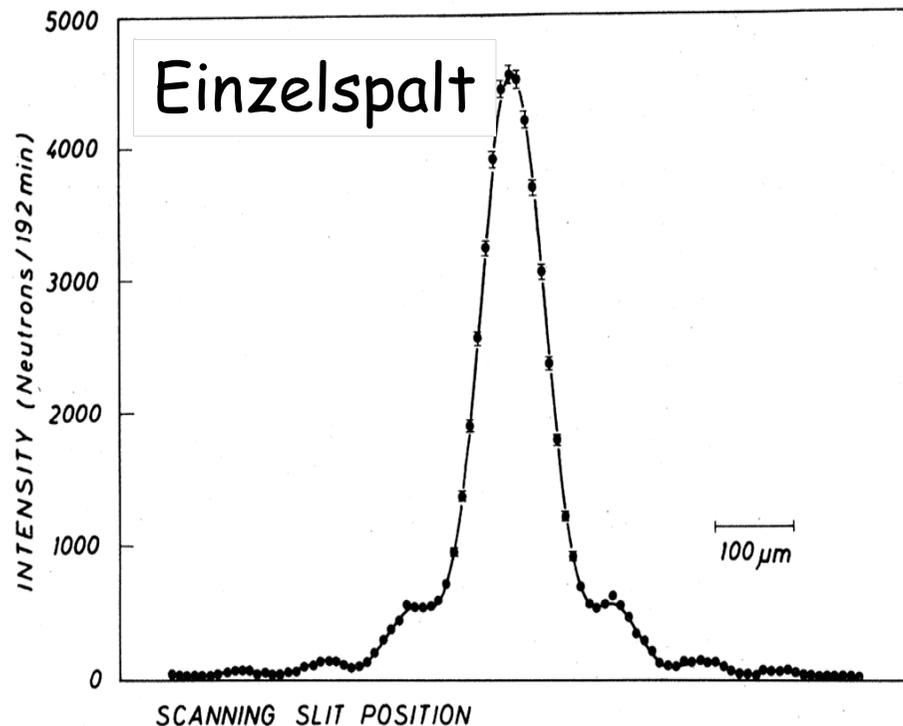
Doppelspalt: 23 μm bzw. 22 μm breit
 104 μm Abstand

Beugungswinkel $\sim 50\ \mu\text{rad}$ ($\sim 10''$)

A. Zeilinger et al. Rev. Mod. Phys. 60, p.1067 (1988)



Einzel und Doppelspalt Beugung von Neutronen



Durchgezogene Linie: Vorhersage der (linearen) Quantenmechanik (unter Berücksichtigung aller Parameter wie Geometrie, Geschwindigkeitsverteilung etc ...) A. Zeilinger et al. Rev. Mod. Phys. 60, p.1067 (1988)

De-Broglie Beziehung

Photon: $E=hc/\lambda$ und $E^2=p^2c^2+m^2c^4$
Daher: für $m=0$ gilt: $E=pc=hc/\lambda$ oder

$$p=h/\lambda \text{ (de Broglie)}$$

Um Interferenzen der Elektronen zu erklären postulierte de Broglie das diese Beziehung auch für Teilchen gilt!

Elektronenmikroskop

Benutzt zur Abbildung Elektronen: $e \cdot U = h \cdot \nu = h \left(\frac{c}{\lambda} \right)$

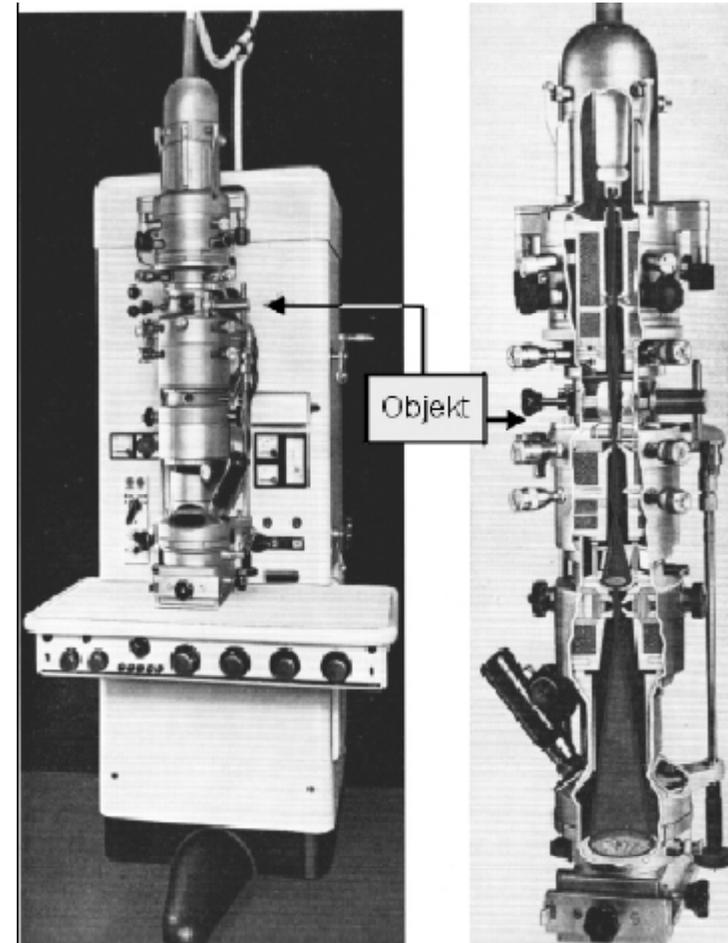
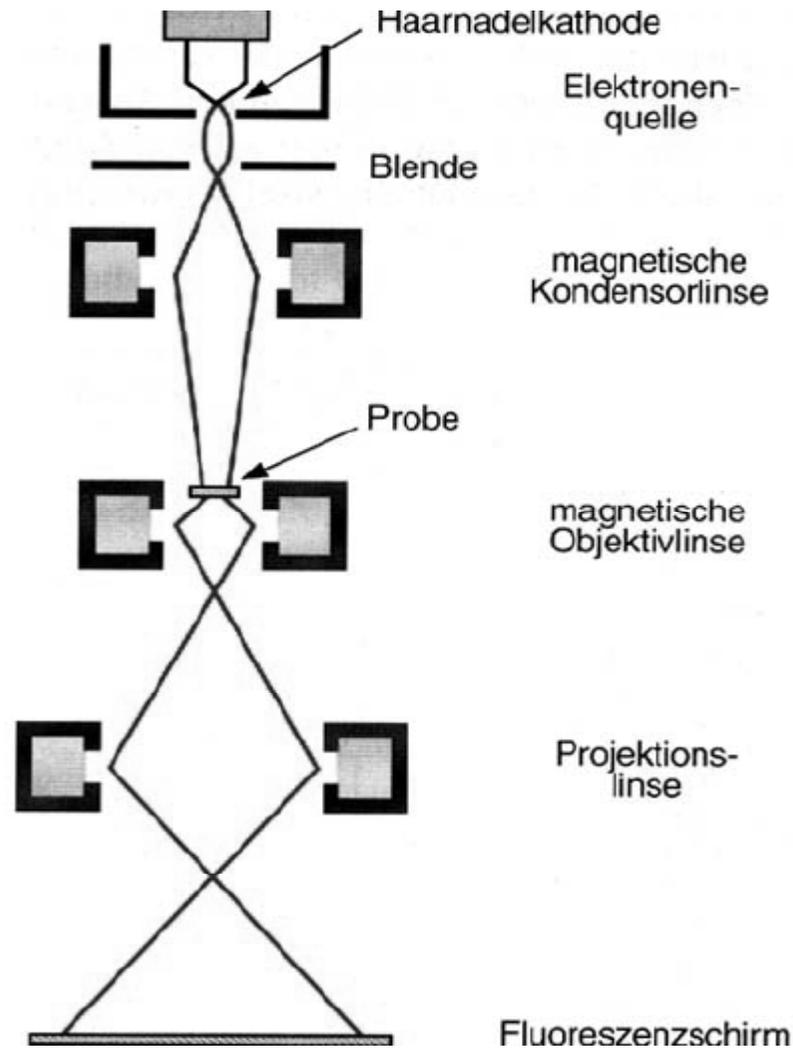
$\lambda = \frac{hc}{eU} \rightarrow$ je höher U umso kleiner λ .

Auflösung heute bis zu 0.1 nm

Nachteile:

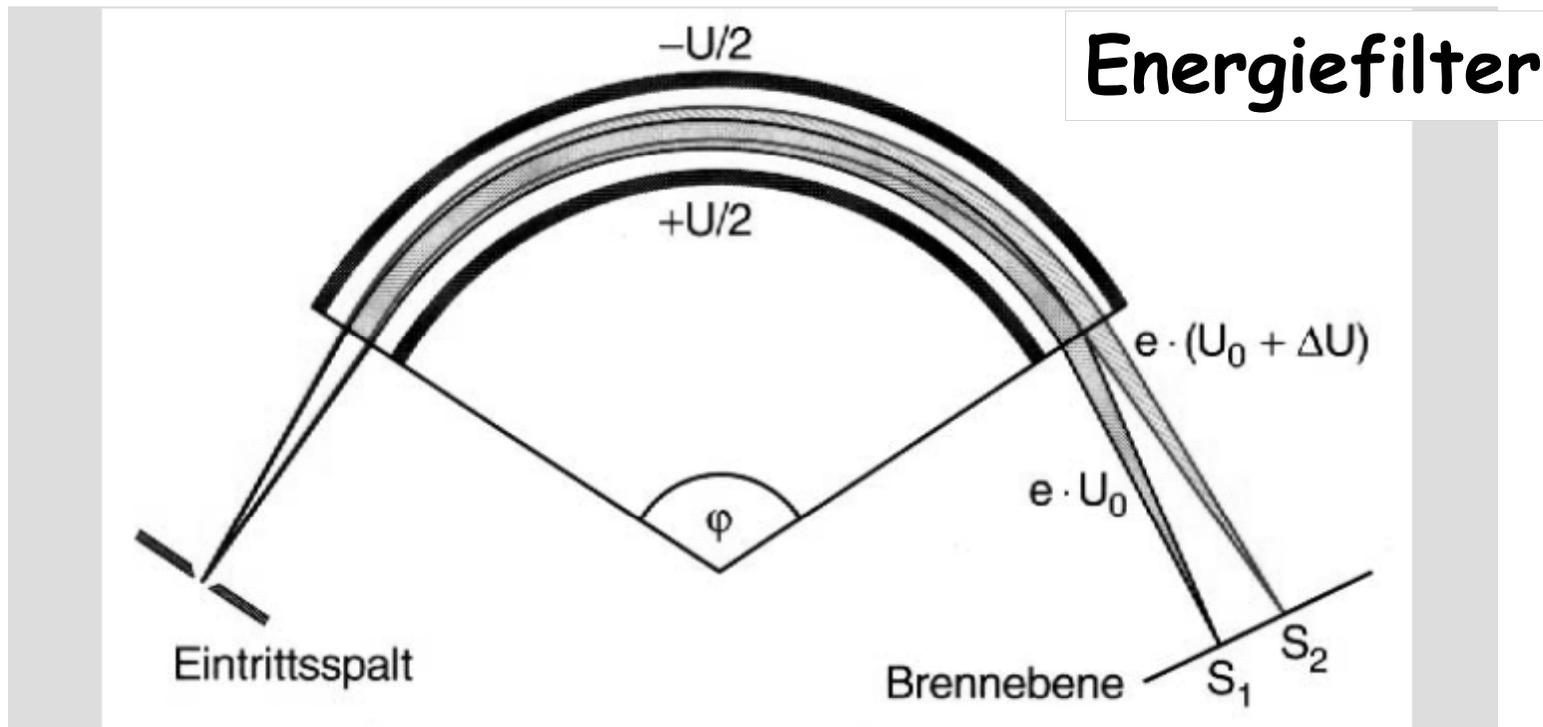
- In Transmission nur dünne Schichten
- Elektronenstrahl hat hohe Energie und hohe Intensität
- Heitzt Probe auf!

Elektronenmikroskop



**Wohldefinierte Energie=
Wohldefinierte Wellenlänge - >
hohe Auflösung**

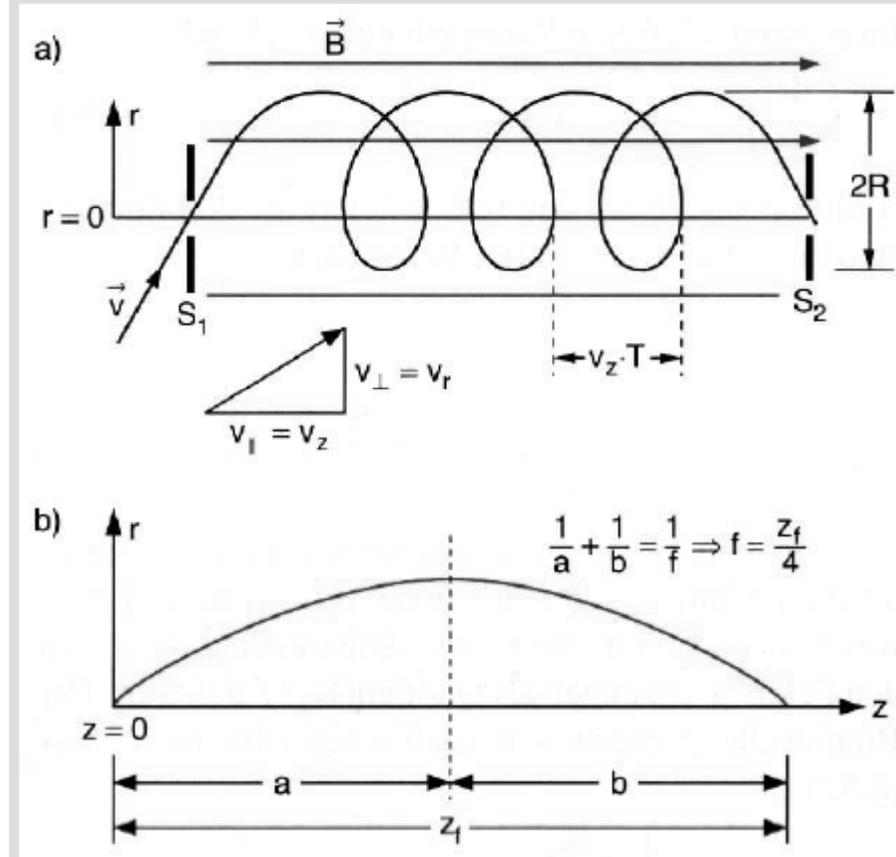
Realisierung elektrostatischer Linsen



Elektrischer Zylinderkondensator als Elektronen-Zylinderlinse mit Energieselektion. Lage des Spaltbildes hängt von der Energie $e \cdot U_0$ der eintretenden Elektronen ab – wirkt daher als Energieanalysator. Für Elektronen mit der Energie $(m/2)v^2 = e \cdot U_0$ - muss Spannung U zwischen den Platten $U = 2U_0 \ln(R_2/R_1)$ sein.

Magnetische Linsen

Elektronen laufen schräg in ein homogenes Magnetfeld B - siehe Abb

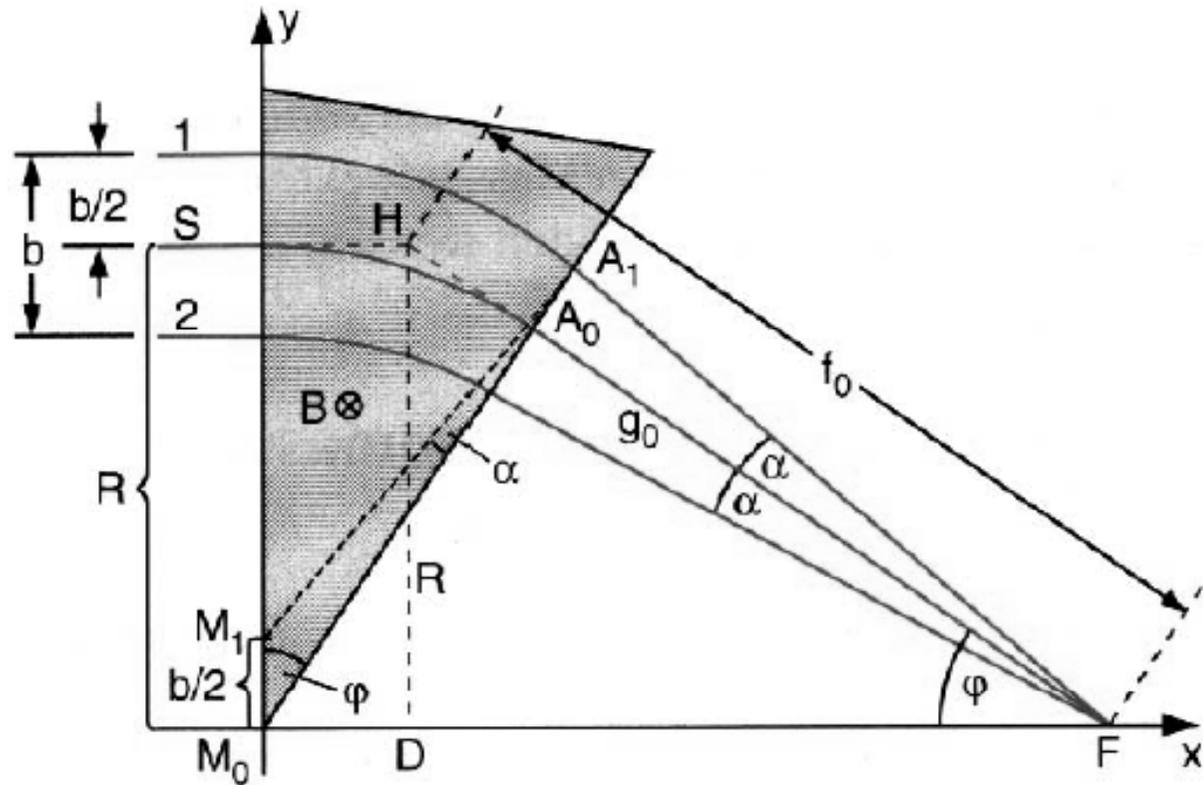


Impulsfilter

Homogenes magnetisches Längsfeld als Elektronenlinse.

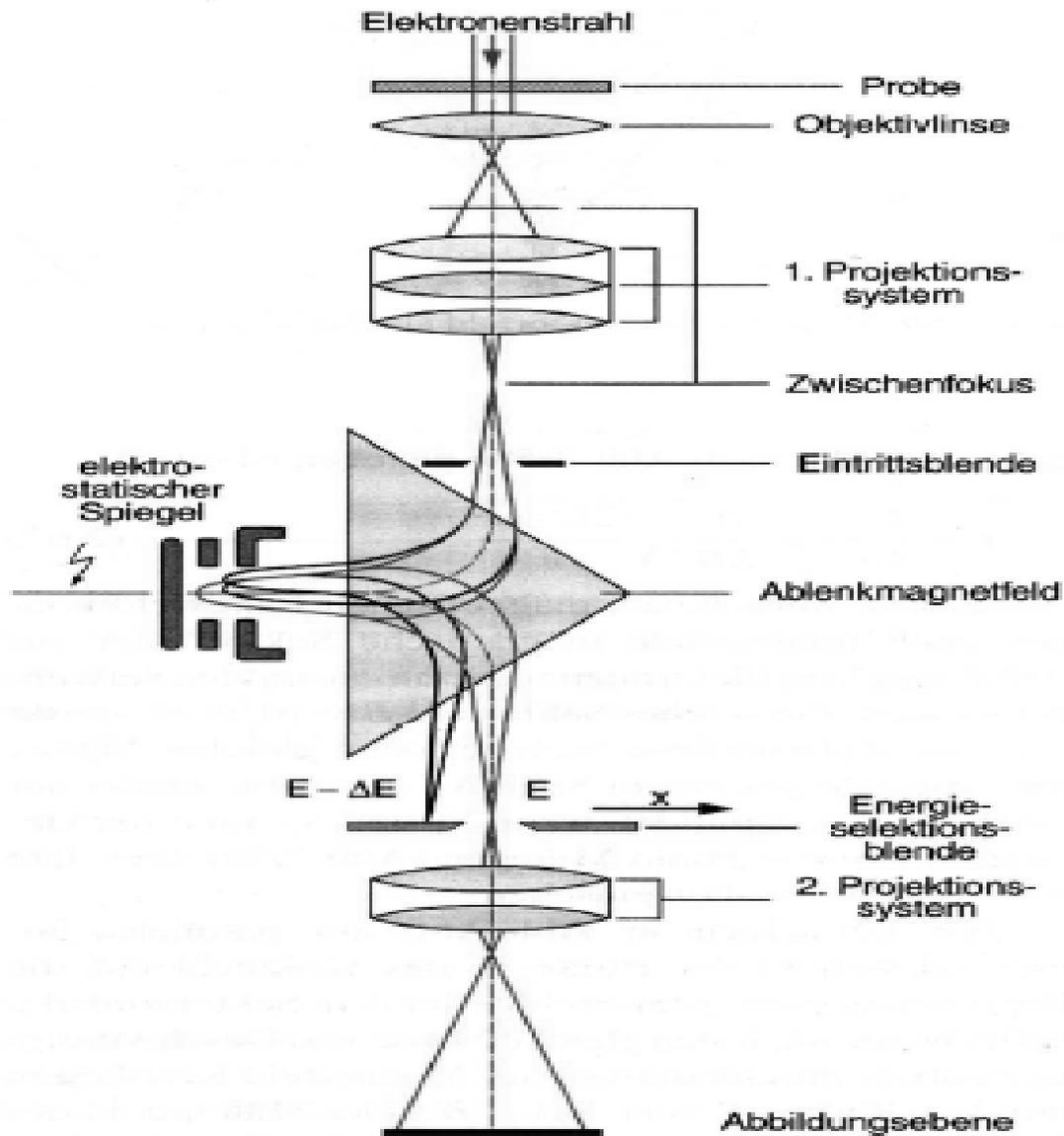
(a) Darstellung der Kreisspiralbahn; (b) zur Definition der rennweite für $a = b = z/2$

Magnetische Linsen



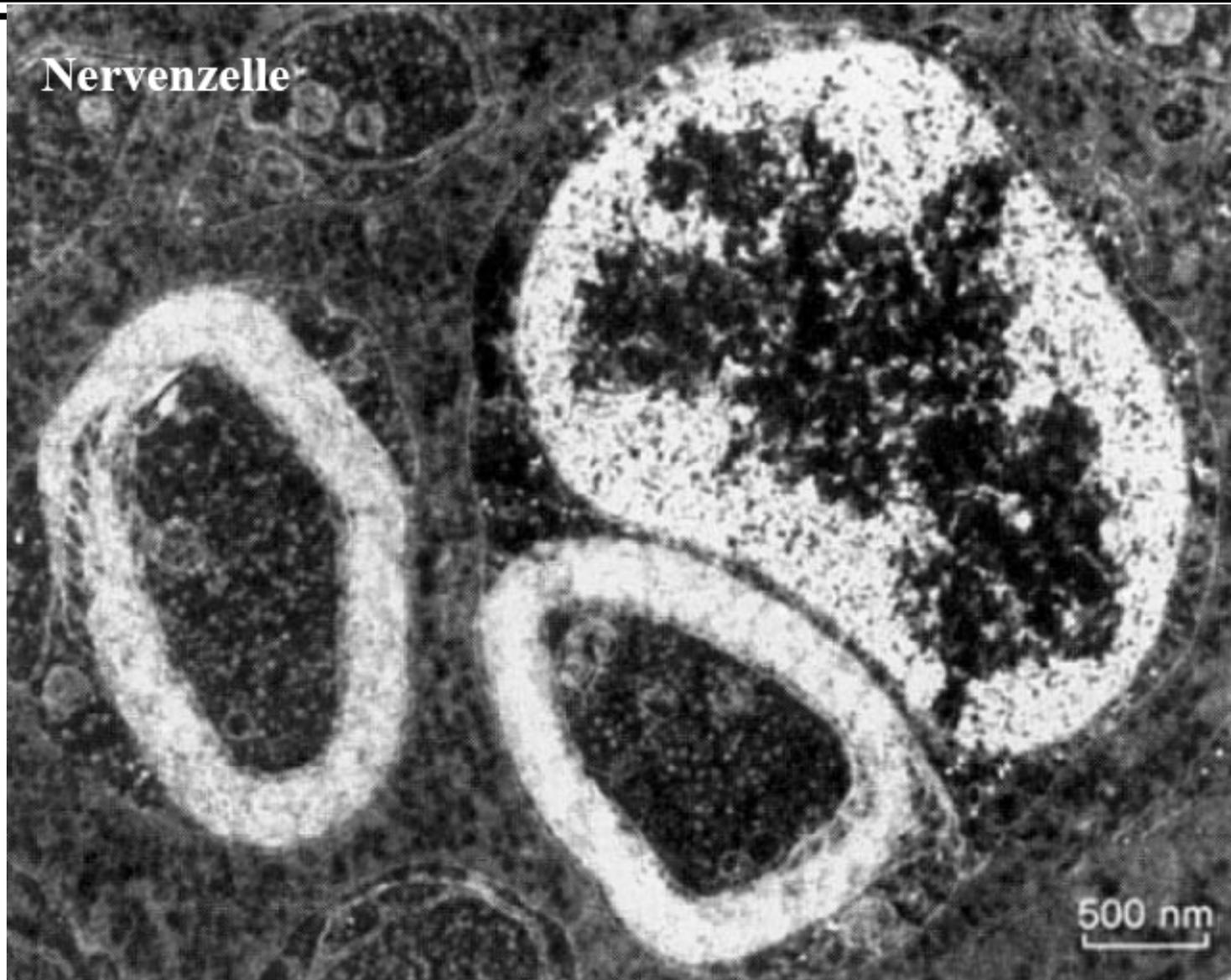
Fokussierung eines parallelen Ionenstrahls durch ein magnetisches Sektorfeld.

Elektronenmikroskop

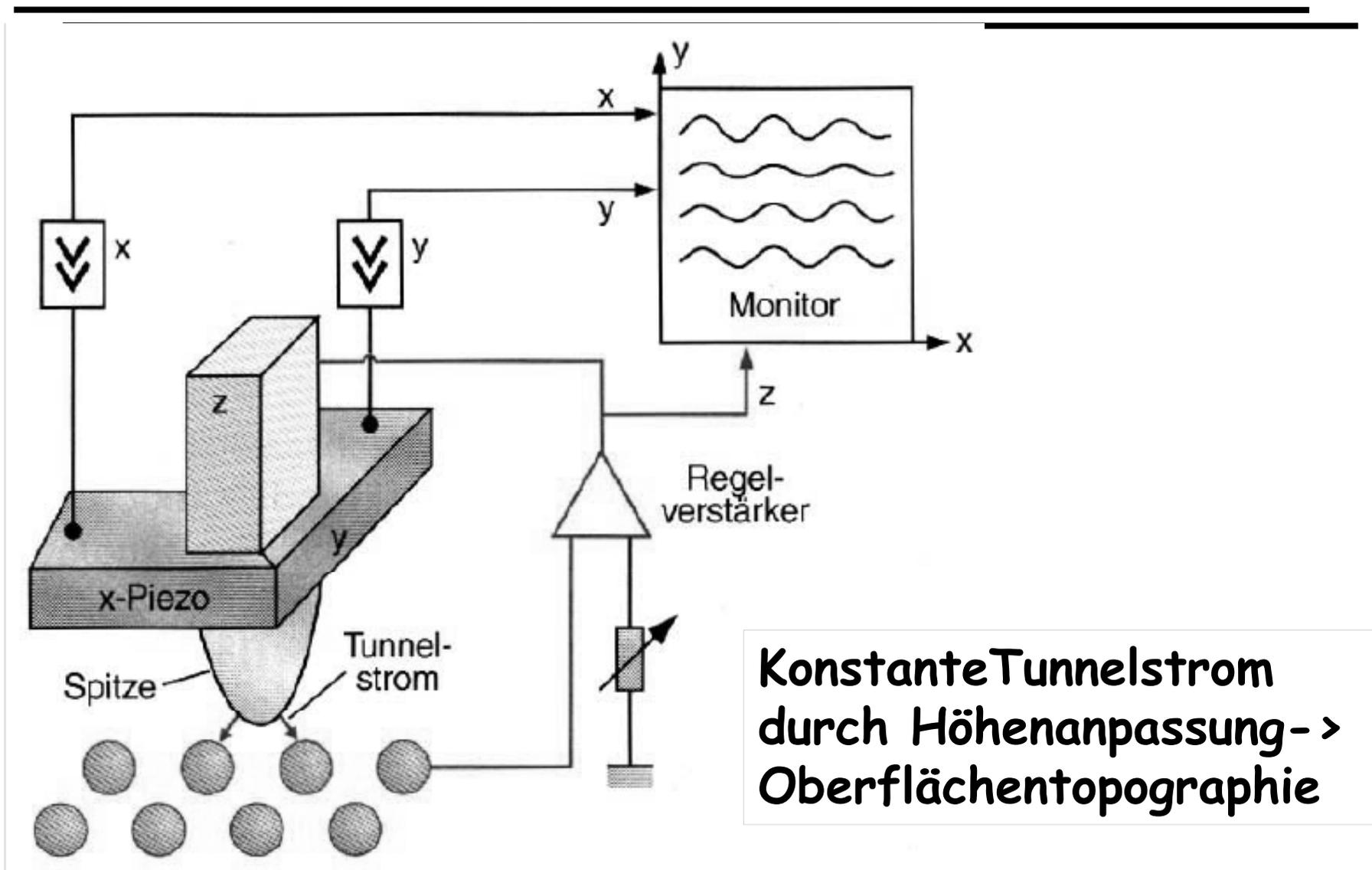


wohldefinierte
Energie=
wohldefinierte
Wellenlänge ->
hohe Auflösung

Elektronenmikroskop



Rastertunnelmikroskop

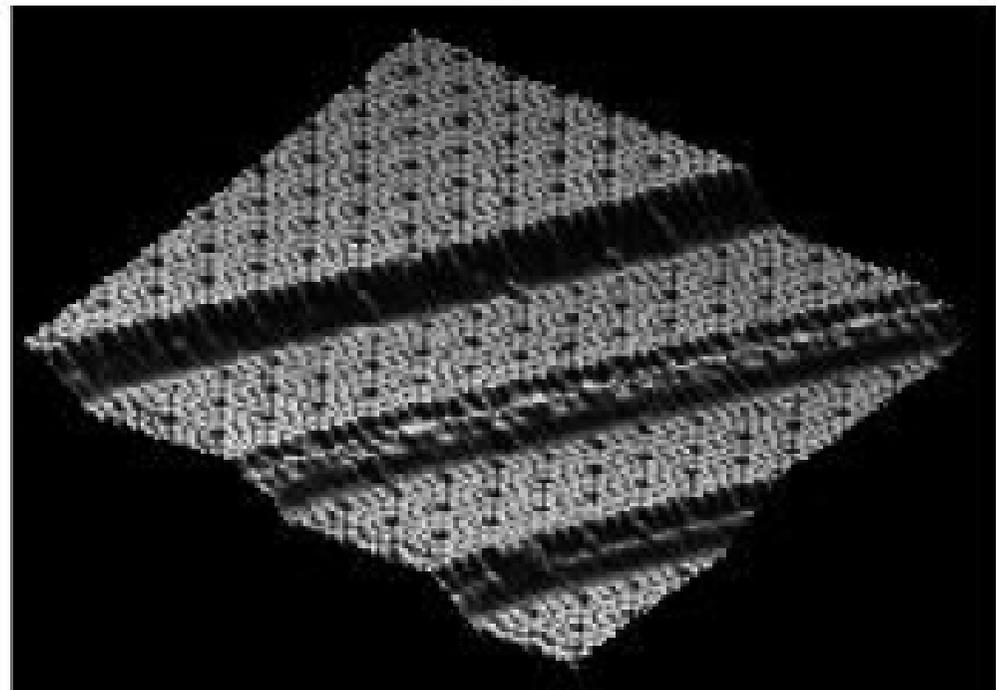
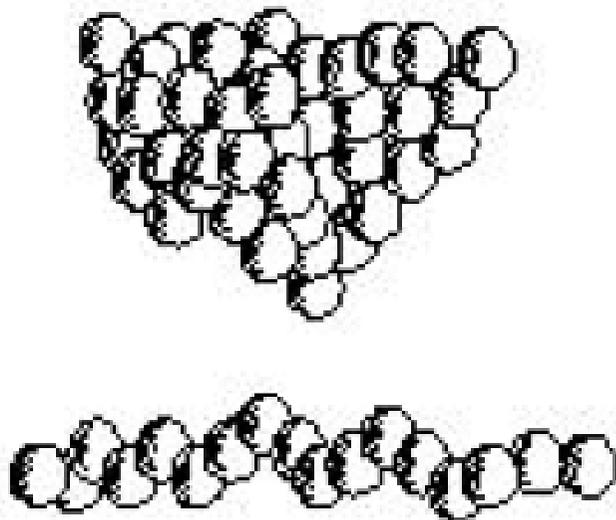


Rastertunnelmikroskop

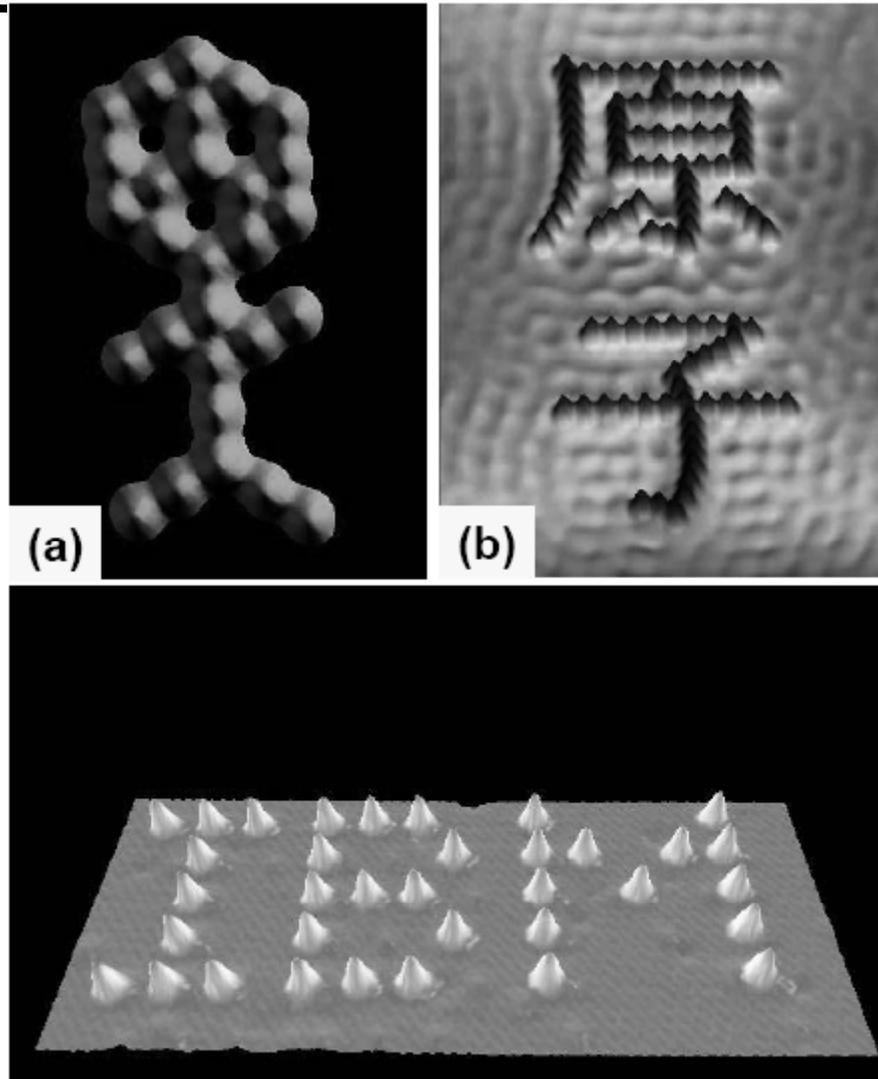
Wechselwirkung: (Tunnel-) Strom (bis pA)

- atomare Oberflächentopographie von elektrischen Leitern
- elektron. Eigenschaften der Oberfläche (“Leitfähigkeit”)

Sonde:



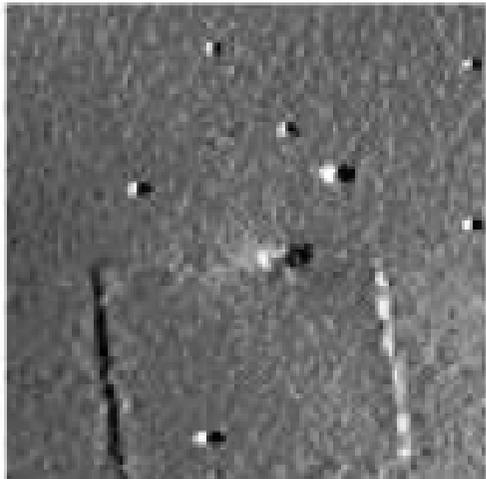
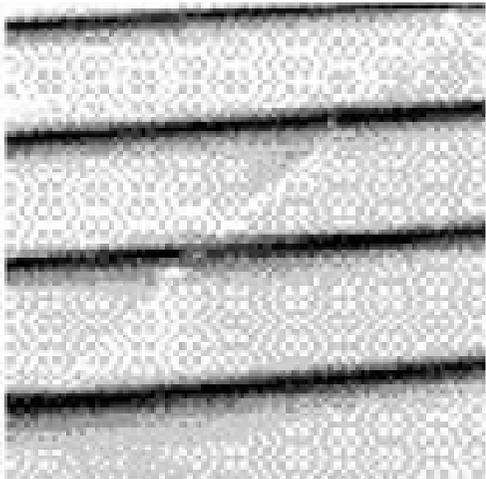
Rastertunnelmikroskop



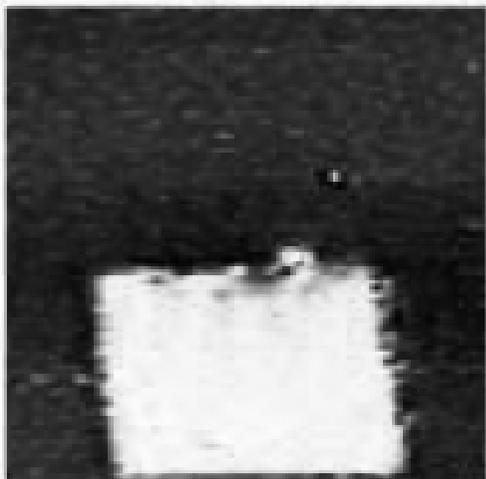
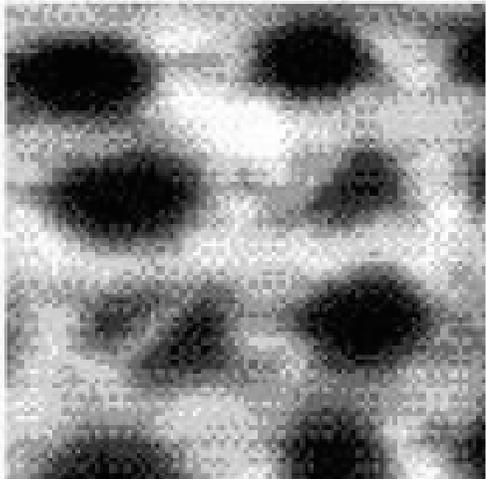
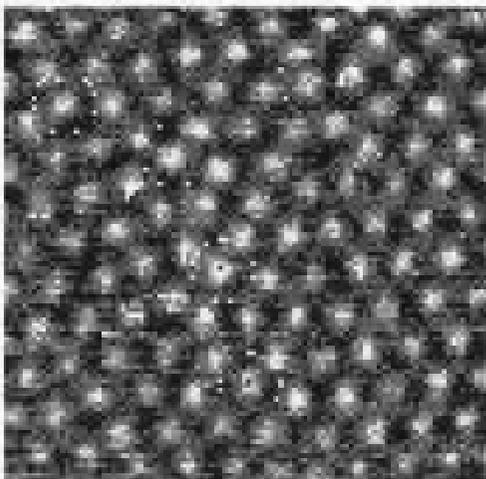
Manipulation einzelner Atomen mit Tunnelspitze

Rastertunnelmikroskop

Topo



WWW



STM: Flusslinien in Supraleiter NbSe₂

SFM: Bits auf einer magneto-opt. Platte

SNOM: Domänen in Flüssigkristallfilm

Zusammenfassung

Beugung und Interferenz am Spalt, Draht (Fresnel, Möllenstedt) und an Kristallen (Davisson und Germer ,1927) → Bilder.

De Broglie förderte das "Photonbeziehung" $p = \frac{h}{\lambda}$ auch für Teilchen gilt

$$\rightarrow \lambda = \frac{h}{p}.$$

$$\text{Numerisch: } \lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m_0 E_{kin}}} = \frac{12.3}{\sqrt{u}}$$

(U = Beschleunigungsspannung → $E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2 = eU$)

E_{kin}	[eV]	10	10^2	10^3	10^6	$10^9 (=1\text{GeV} = m_p)$
λ	[Å]	3,9	1,2	<u>0,4</u>	<u>9×10^{-3}</u>	<u>10^{-5}</u>

$E_{kin} = \frac{3}{2}kT$ (Edelgas, **3** Freiheitsgrade)

$$\lambda_{He} = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} = \left\{ E = \frac{1}{2}mv^2 \right\} = \frac{h}{\sqrt{2mE}} = \frac{h}{\sqrt{3mkT}} \text{ wurde bestätigt}$$

Neutronenbeugung: Interferenz wie bei Röntgenstrahlung (6.13)

Schlussfolgerung: $\lambda = \frac{h}{p}$ gilt für Strahlung UND Materie,

d.h. jede Energieform hat sowohl Teilchen als auch Wellencharakter.

Welcher Charakter überwiegt, hängt vom Frequenzspektrum ab!

Wenn Energien, Orte oder Impulse im Bereich $E=hv$ und $\lambda=p/h$ kommen, werden Quanteneffekte wichtig!

Welle-Teilchen Dualismus

De Broglies Erklärung für die Quantisierung der Atomniveaus und die Interferenzpatrone der Teilchen (Davisson, Germer, Doppelspalt) beweisen eindeutig den Wellencharakter. Jedoch ist das Elektron auch ein Teilchen mit wohl definierter Masse und Ladung, das eindeutige Spuren e.g. in einem Nebelkammer hinterlässt. Wie kann man diese Eigenschaften vereinen?

Max Born schlug in 1926 vor, dass, wie bei einer elektromagn. Welle, die Wahrscheinlichkeit ein Teilchen vorzufinden, gegeben wird durch die Energiedichte, d.h. das Quadrat der Amplitude der Welle oder $|\Psi|^2 dV$ ist die Wahrscheinlichkeit das Teilchen im Volumen dV zu finden (und das Integral über dV ist natürlich 1, da das Teilchen irgendwo sein muss).

Wie ist Bahn des Teilchens mit Fortpflanzung der Welle verknüpft?

Teilchen: $E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2 = E = hf$, $mv = p = h/\lambda$.

Die Geschwindigkeit der Welle wäre $v = \lambda f = (h/mv)$. $(\frac{1}{2}mv^2/h) = \frac{1}{2}v$, d.h. die Welle pflanzt sich nur mit halber Teilchengeschwindigkeit fort! **WAS IST FALSCH?**

De Broglie Wellen

Wiederholung: Ebene, monochromatische Welle in x-Richtung:

$$\psi(x, t) = Ae^{i\varphi}, \quad \varphi = kx - \omega t = \text{Phase}$$

Die vorkommenden Größen

$$\begin{aligned} E &= h\nu = \hbar\omega \\ p &= h/\lambda = \hbar k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Kreisfrequenz: } \omega &= 2\pi\nu \\ \text{Wellenzahl } k &= |\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda} \end{aligned}$$

sind grundsätzlich unabhängig voneinander definiert.

Ebene Flächen mit konstanter Phase propagieren mit:

$$v_{\text{ph}} = \frac{\omega}{k} \quad \text{„Phasengeschwindigkeit“}$$

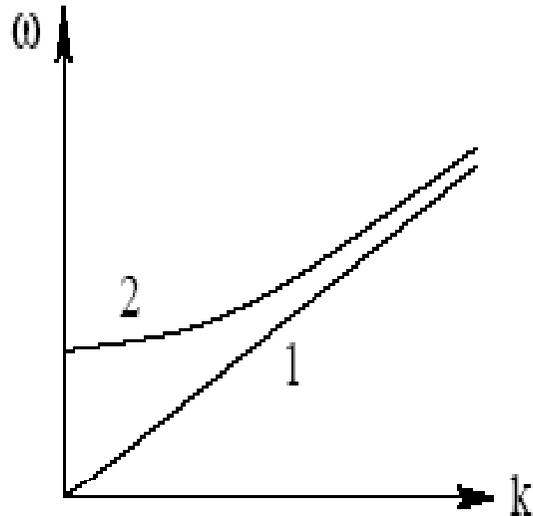
Zusätzlich wird später benötigt werden:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \quad \text{„Gruppengeschwindigkeit“}$$

Der Zusammenhang

$$\omega = \omega(k) \quad \text{heißt } \textit{Dispersionsrelation}.$$

De Broglie Wellen



- Wenn $v_{\text{ph}} = \text{const.}$, unabhängig von ω , ist die Welle *dispersionsfrei*; die Dispersionsrelation ist linear (Beispiel 1).
- Wenn $v_{\text{ph}} = v_{\text{ph}}(\omega)$, zeigt die Welle *Dispersion*; die Dispersionsrelation ist nichtlinear (Beispiel 2). Dies ist der Normalfall in der Natur.

Dispersionsfreie Wellen sind z.B. EM-Wellen in Vakuum. Wellen mit Dispersion sind z.B. Wasserwellen, EM-Wellen in Materie, schwingende Pianosaiten und de Broglie-Wellen (mehr dazu s. 2.52).

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 \quad \text{oder} \quad (\hbar \omega)^2 = (\hbar k)^2 c^2 + m^2 c^4$$

Für $m=0$ dispersionsfrei, sonst $\hbar \omega = mc^2$ für $k=0$

Lokalisierung eines Teilchens

Wenn ein Elektron ein wohldefinierter Impuls hat, dann hat es auch eine wohldefinierte Wellenlänge. Die einzige Wellengleichung für eine wohldefinierte Wellenlänge ist $\psi(x,t) = A \sin(kx - \omega t)$

mit $k = 2\pi/\lambda$, and $\omega = 2\pi f$.

Das Problem: die Amplitude geht nicht gegen Null im Unendlichen, d.h. das Teilchen ist nicht lokalisiert!

Lösung des Problems: Wellen können interferieren wenn die Impulse -und damit die Wellenlängen - NICHT scharf definiert sind.

Dann Teilchen lokalisiert in Wellenpaket. Wenn Teilchen sehr scharf lokalisiert, muss Unsicherheit in Impuls groß sein. Dies ist Prinzip der Heisenbergsche Unsicherheitsrelation.

Superposition von ZWEI Wellen ergibt Schwebungen:

$$\sin((k - \Delta k)x - (\omega - \Delta \omega)t) + \sin((k + \Delta k)x - (\omega + \Delta \omega)t) = 2 \sin(kx - \omega t) \cos((\Delta k)x - (\Delta \omega)t)$$

Superposition von zwei Wellen

$A(x,t) = A \cos(kx - \omega t)$ (klassische Wellengleichung), $k \equiv \frac{2\pi}{\lambda}$, $\omega = 2\pi\nu$

$$A_1 + A_2 = A_0 [\cos(k_1 x - \omega_1 t) + \cos(k_2 x - \omega_2 t)]$$

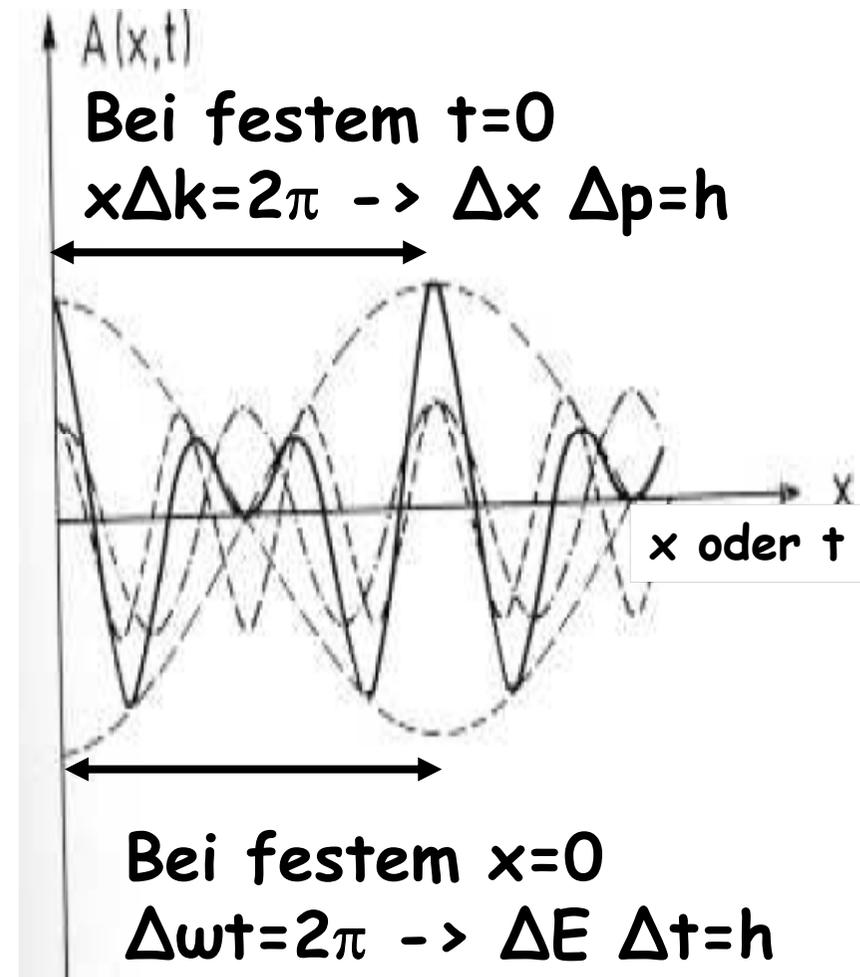
$$= 2A_0 \cos[\Delta k x - \Delta \omega t] \cos(kx - \omega t),$$

wobei $k = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$; $\Delta k = \frac{1}{2}(k_1 - k_2)$

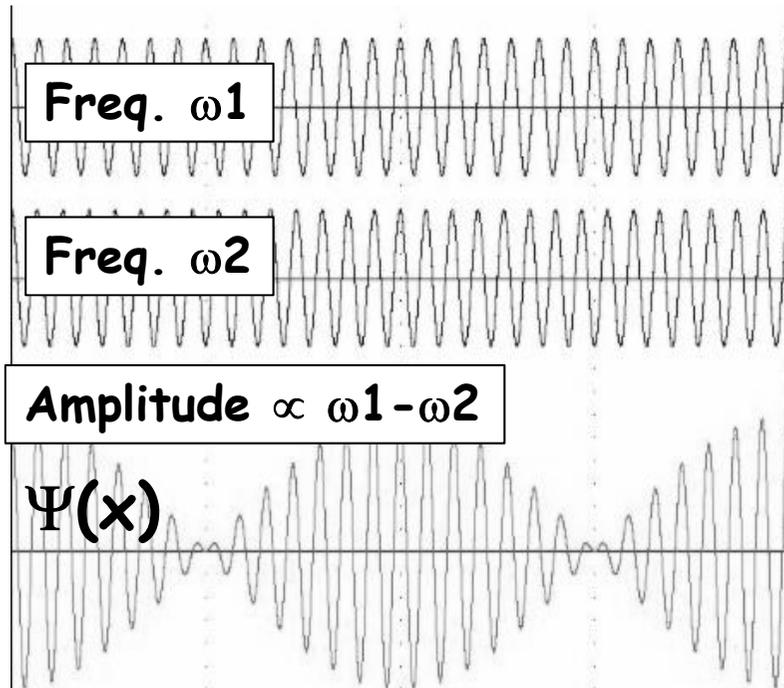
und $\omega = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$; $\Delta \omega = \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)$

(Benutze: $\cos u + \cos v = 2 \cos \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$)

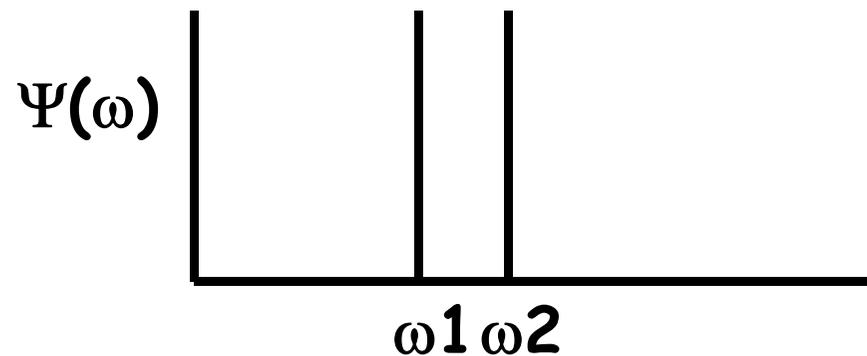
**Schwebungen konzentrieren
Energiedichte und daher
Aufenthaltswahrscheinlichkeit
eines Teilchens -> Lokalisierung**



Superposition von zwei Wellen



Man kann Resultat der Interferenz Entweder im Ortsraum oder im Frequenzraum (oder k-Raum oder Impulsraum) darstellen, wobei $k=2\pi/\lambda=p/\hbar$



X-Raum: $\Psi(x, t)$

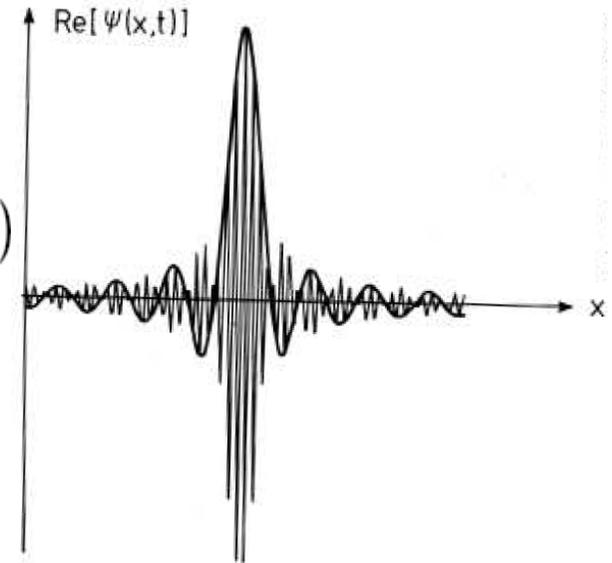
Frequenz-Raum $\Psi(\omega, t)$ oder $\Psi(k, t)$
(Länge -> Amplitude)

Es reicht wenn ich Amplituden und Frequenzspektrum angebe, also $\Psi(k, t)$.
um $\Psi(x, t)$ auszurechnen. Beide Darstellungen völlig equivalent. Transformation vom Ortsraum zum Impulsraum oder umgekehrt, nennt man Fouriertransformation

Superposition unendlich vieler Wellen

$$\Psi(x,t) = \int_{k_0-\Delta k}^{k_0+\Delta k} a \exp[i(kx - \omega t)] dk \quad (1)$$

Fouriertrafo
von Orts- zu
Impulsraum
für $t=0$!



Reihenentwicklung von ω um k_0 mit $k = k_0 + k - k_0$ (2)

$$\text{ergibt: } \omega = \omega_0 + \frac{d\omega}{dk}(k - k_0) \equiv \omega_0 + \omega' \xi \quad (3)$$

(3) + (2) in (1) ergibt:

$$\begin{aligned} \Psi(x,t) &= a \exp[-i(\omega_0 t - k_0 x)] \int_{-\Delta k}^{\Delta k} \exp[-i(\omega' t - x)\xi] d\xi \\ &= a \exp[i(\omega_0 t - k_0 x)] \cdot 2 \frac{\sin(\omega' t - x)\Delta k}{(\omega' t - x)} \end{aligned}$$

$$\left(\text{Benutze: } \int_{-\Delta x}^{\Delta x} \exp(-i\alpha x) dx = -\frac{1}{i\alpha} [\exp(-i\alpha \Delta x) - \exp(i\alpha \Delta x)] = 2 \frac{\sin \alpha \Delta x}{\alpha} \right)$$

Wellenpakete SEHR lokalisiert, wenn $x = \omega' t$, d.h. wenn Gruppengeschwindigkeit Teilchengeschwindigkeit entspricht

Gruppengeschwindigkeit = Teilchengeschwindigkeit

Wellenpakete stark lokalisiert im Bereich $x = \omega' t$: Maximum bewegt sich mit der Geschwindigkeit

$$\omega' = \frac{d\omega}{dk} = \frac{\partial E}{\partial p} = \frac{\partial \frac{p^2}{2m}}{\partial p} = \frac{p}{m} = v_{\text{Teilchen}}.$$

D.h. die Gruppengeschwindigkeit des Wellenpaketes

entspricht der Teilchengeschwindigkeit $v_T = \frac{p}{m}$;

die Welle selbst pflanzt sich mit Phasengeschwindigkeit $v_p = \frac{\omega}{k}$ fort.

$$\begin{aligned} \text{(Gilt auch relativistisch: } \omega' &= \frac{d\omega}{dk} = \frac{dE}{dp} = \frac{d\sqrt{p^2 + m^2}}{dp} = \\ &= \frac{1}{2} (p^2 + m^2)^{-\frac{1}{2}} 2p = \frac{p}{E} = \beta = \frac{v}{c}). \end{aligned}$$

<..\Downloads\GroupVelocity.htm>

Auseinanderlaufen der Wellenpakete

Gruppengeschwindigkeit $v_g = p/m$

Unschärefelation $p + \Delta p \Rightarrow \Delta v_g = \frac{1}{m} \Delta p = \frac{1}{m} \frac{h}{\Delta x_0}$

$x + \Delta x_0$ Ortsunschärfe zur Zeit $t = 0$

Unschärfe wächst linear mit t an: $\Delta x(t) = \Delta v_g \cdot t = \frac{h}{m \cdot \Delta x_0} \cdot t$

Fläche unter Wellenpaket bleibt wegen $\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x, 0)|^2 dx = 1$ gleich

<http://www.itkp.uni-bonn.de/~metsch/pdm/pdmquanttxt.html#ylm>

Heisenbergsche Unschärferelation

$\Psi(x) \sim \frac{\sin(x\Delta k)}{x}$ für feste zeit , z.B. $t = 0$:

Ortsunsicherheit \geq Abstand zwischen Minima, d.h. :

$$\frac{\Delta x}{2} \geq \frac{\pi}{\Delta k} \text{ oder mit } p \equiv \hbar \cdot k = \frac{\hbar k}{2\pi}$$

$$\Delta x \Delta p \geq \hbar$$

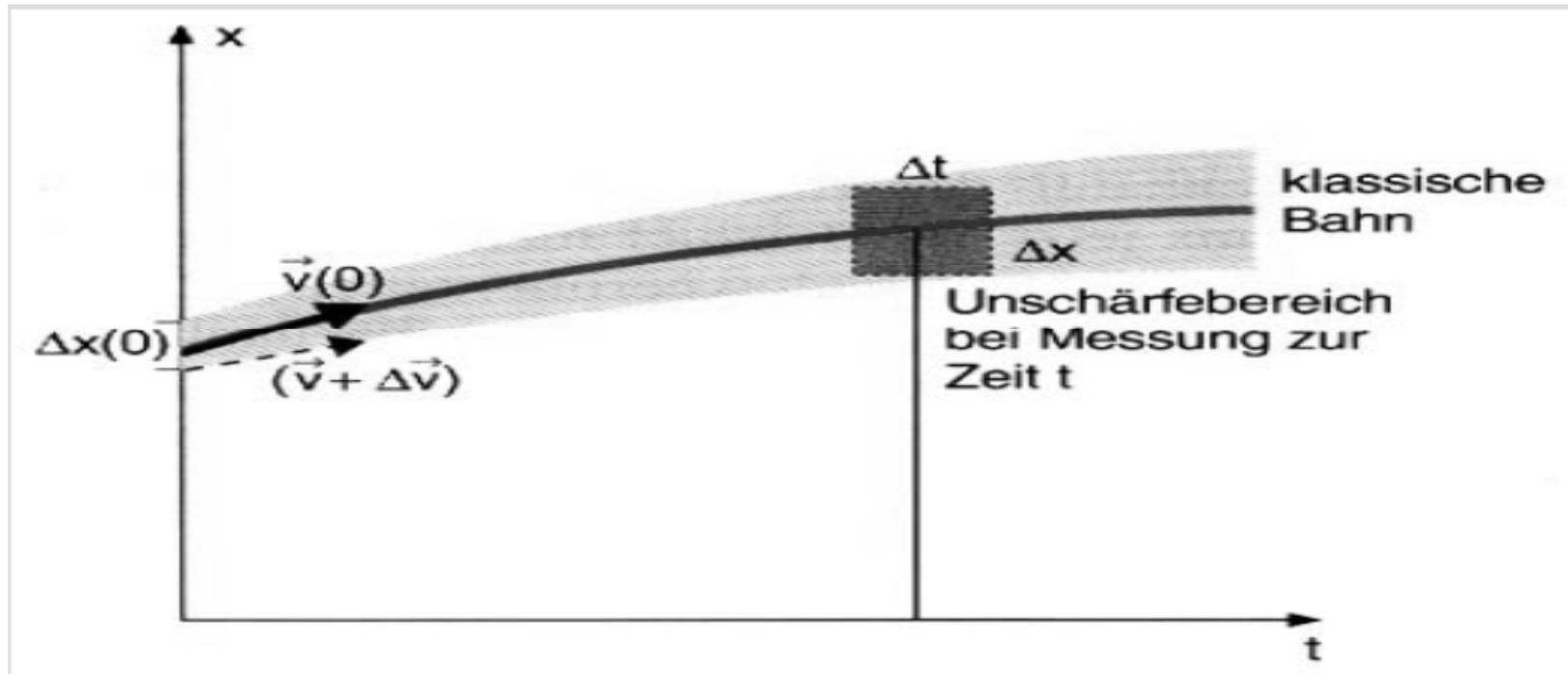
Äquivalent: $\Psi(t) \sim \sin \omega' t \Delta k$ für einen festen Ort, z.B. $x = 0$,
d.h. $\omega' t \Delta k = t \Delta \omega$ ergibt mit $E = \hbar \omega$ wie oben :

$$\Delta E \Delta t \geq \hbar$$

Die Physik dahinter: Um den Ort zu bestimmen , muss man das Objekt “sehen” , d.h. mit Photonen bestrahlen. Dies führt jedoch zu einer merklichen Impulsänderung durch den “Photonendruck”, wodurch sich das Objekt wegbewegt, wenn es sehr klein ist. Eine Ortsunschärfe ist bei gegebenem Impuls die Folge. Um die Energie zu bestimmen, braucht man eine gewisse Zeit, d.h., dass sich zum Beispiel bei einer sehr kurzen Lebensdauer τ die Energie und damit die Masse eines Teilchens nur mit eine Präzision der Ordnung von $\Delta E = \frac{\hbar}{\tau}$ bestimmen lässt.

<http://www.itkp.uni-bonn.de/~metsch/pdm/pdmquant.html>

Heisenbergsche Unschärferelation



Unbestimmtheitsgrenze der Teilchenbahn durch die Unschärfe Δx , Δp der Anfangsbedingungen und durch die Unschärfe bei der Messung des jeweiligen Teilchenortes und des Zeitpunktes der Messung.

Jede Messung von x und p ändern den Zustand des Mikroteilchens

Unschärfe der Unschärferelation

Viele Bücher ergeben: $\Delta x \Delta p \geq \hbar$ statt h .
Wo liegt der Unterschied?

Bei einem gaussförmigen Wellenpaket wird die Unschärfe MINIMAL (mathematisch zu beweisen) aber wie groß ist die Unschärfe?

Ein Standardabweichung oder Ort wo Wahrscheinlichkeit auf $1/\sqrt{e}$ gefallen ist oder ...?
Unschärfe ist unscharf definiert!

Δx = Abstand zwischen Beugungsminima ->
 $\Delta x \Delta p \geq h$
(Heisenberg)

$$u(x, 0) = u_0 \exp \left\{ -\frac{x^2}{2b^2} \right\}$$

Gaussförmige Wellenpakete:
 $\sigma_x \sigma_p \geq \hbar$

Überlagerung Gausscher Wellenpakete

Überlagerung unendlich vieler Wellen entspricht das Integral über ∞ vielen Wellenlängen oder Impulse ($p = \hbar k = h/\lambda$). Dies ist eine Fourier transformation:

$$u(x, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k) \exp\{ikx\} dk \quad \text{mit} \quad A(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, 0) \exp\{-ikx\} dx.$$

Liegt als Anfangsbedingung eine Gauss-Kurve vor

$$u(x, 0) = u_0 \exp\left\{-\frac{x^2}{2b^2}\right\}, \quad \text{so ist} \quad A(k) = \frac{u_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{x^2}{2b^2} - ikx\right\} dx = u_0 \frac{b}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{b^2}{2} k^2\right\}$$

ebenfalls eine Gauss-Kurve, denn es ist $\int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-px^2 + qx\} dx = \sqrt{\frac{\pi}{p}} \exp\left\{\frac{q^2}{4p}\right\}$. **Wichtig!**

Die Fouriertransformierte eines gaussförmigen Wellenpaket mit Standardabweichung σ ergibt im Impulsraum wieder einen Gaussform, jedoch mit Standardabweichung $1/\sigma$!

So $\sigma_x \sigma_k \geq 1$ oder $\sigma_x \sigma_p \geq \hbar$

<http://www.itkp.uni-bonn.de/~metsch/pdm/pdmquant.html>

Beispiel für Anwendung der Unschärferelation

Z^0 - Bosonen (neutrale Austauscheteilchen der schwachen Wechselwirkung) werden in der e^+e^- - Annihilation erzeugt.

Der Wirkungsquerschnitt ist eine Funktion

der Schwerpunktenenergie $\Gamma_s : \sigma \propto \frac{1}{(s-M_2^2)^2 + \Gamma^2 M_2^2}$ (Breit-Wigner-Formel).

Die Breite der Resonanzkurve Γ entspricht der Unschärfe der Energie, d.h.

$$\Gamma = \frac{\hbar}{\tau}$$

Daher kann man aus der Breite die Lebensdauer $\tau \approx 10^{-23}$ s bestimmen. τ wird durch die Zerfallsmöglichkeiten des Z^0 - Bosons bestimmt .

Das Z^0 - Boson zerfällt u.a. in unsichtbare (= nicht messbaren) Neutrinos

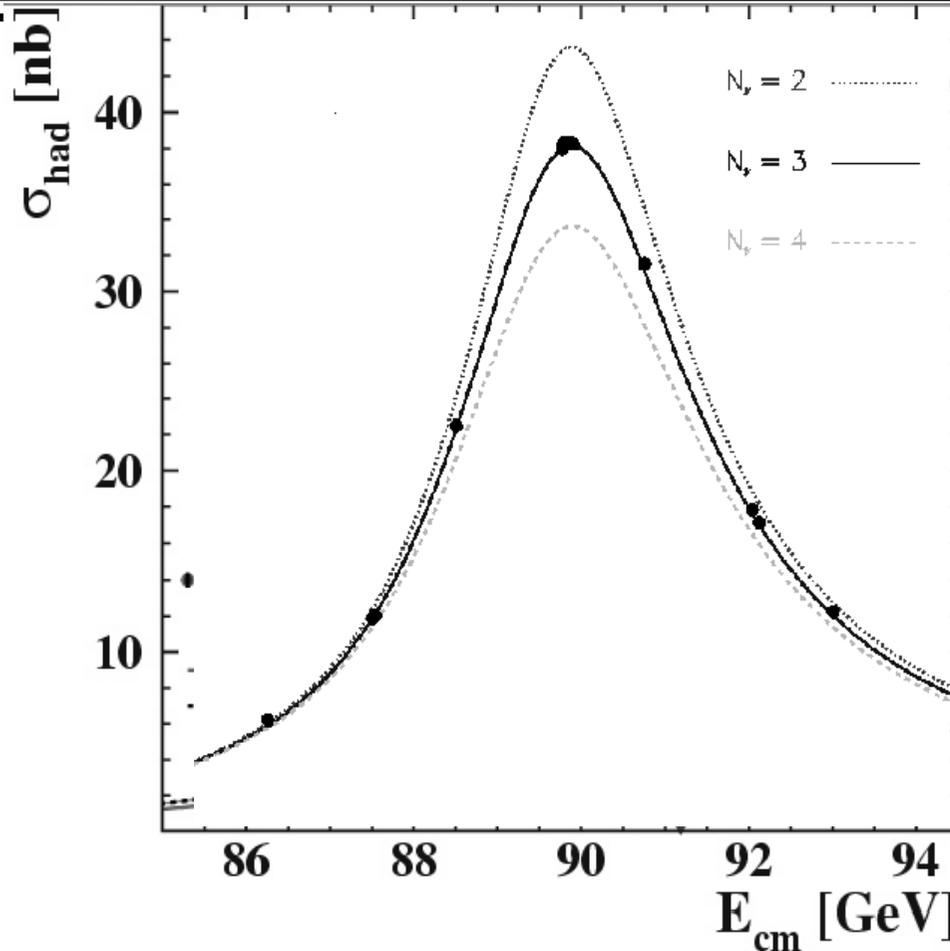
→ $\tau = f(N_\nu)$. Aus der Messung von Γ folgt : $N_\nu \cong 2,99 \pm 0,01$.

→ Es gibt nur drei Familien von Elementarteilchen

(falls alle Neutrinos $m_\nu < \frac{M_z}{2}$ haben).

$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \cancel{\nu_x} \\ \cancel{\cancel{x}} \end{pmatrix}$
Quarks			Leptonen			<i>existiert nicht!</i>

Wirkungsquerschnitt $e+e^- \rightarrow \text{Quarks}$ versus Schwerpunktsenergie Z^0 Resonanz

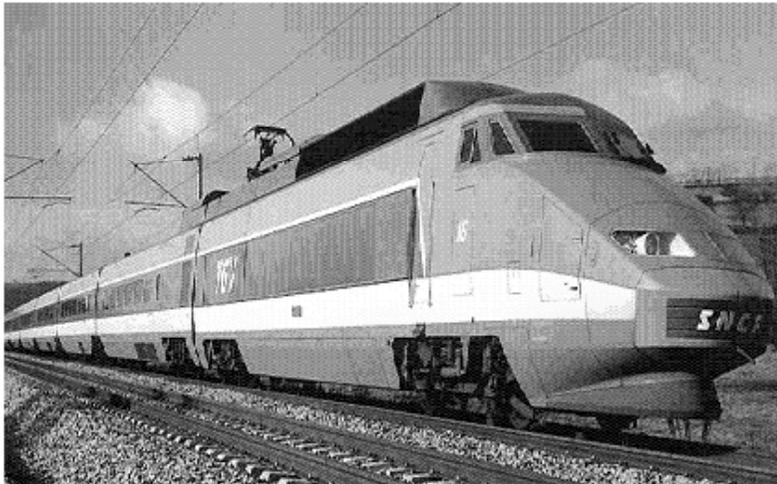


Es gibt nur
DREI leichte
Neutrinos!

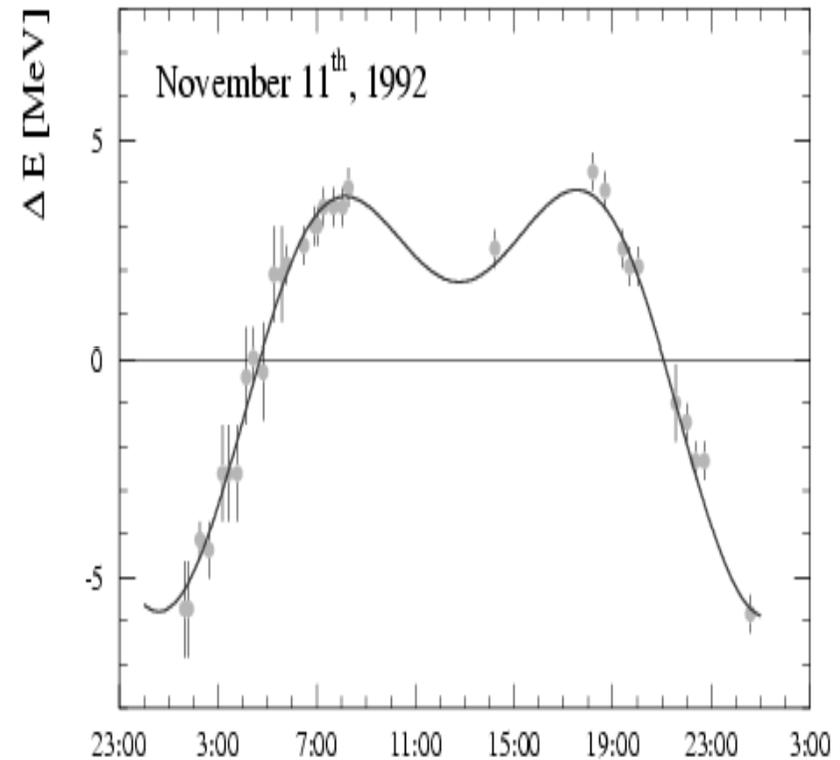
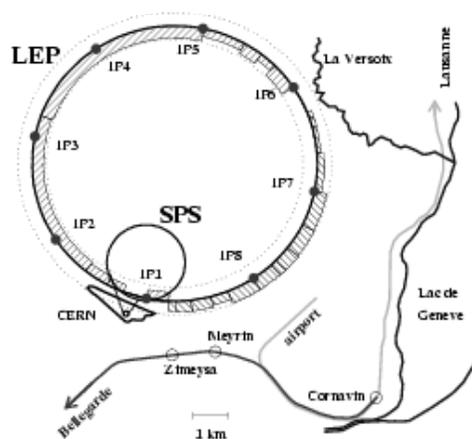
Und daher
nur DREI
Generationen
von Quarks
und Leptonen!
(falls alle
Neutrinos fast
masselos sind)

Peak hängt von der totalen Breite Γ_Z ab.
 $\Gamma_Z = h/\text{Lebensdauer} = F(\text{Anzahl der Neutrinos})$
 (aus $\Delta t = \text{Lebensdauer}$, $\Gamma_Z = \Delta E$ und $\Delta E \Delta t = h$)

Kleine experimentelle Probleme am LEP Beschleuniger: Einfluss des Mondes und Störungen durch TGV



Vacuum Chamber Current Correlation



Zum Mitnehmen

Teilchen mit Impuls p benehmen sich bei kleinen Abständen wie Wellen.

Wellen mit Wellenlänge λ benehmen sich bei kleinen Abständen wie Teilchen.

Zusammenhang zwischen Wellenlänge und Impuls:

$$\lambda = h/p \text{ (de Broglie)}$$

Man kann nicht beliebig genau ORT und IMPULS bestimmen:

$$\Delta x \Delta p \geq h. \text{ (Heisenberg)}$$

Gleiche gilt für ENERGIE und ZEIT.