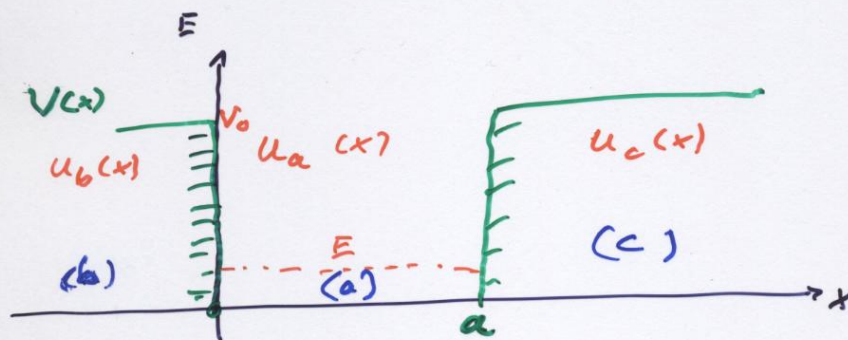


(11)

6.2.2 Teilchen im Kastenpotential mit endlichen hohen Wänden



Erwartete klassisch: $u_b, u_c = 0$
sofern $E < V_0$

a) $V(x) = 0$ für $x = [0, a]$ Freies Teilchen

Schwingungen: $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi = E \psi$

$\hookrightarrow t=0: \frac{d^2}{dx^2} u_a(x) = -\frac{2mE}{\hbar^2} u_a(x)$

Ansatz $u_a(x) = C_1 \sin \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} x + C_2 \cos \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} x$

b, c) $V(x) = V_0$ für $x < 0$
 $x > a$

$\frac{d^2}{dx^2} u_b(x) = -\frac{2m}{\hbar^2} (E - V_0) u_b(x)$ ↗ $E < 0$

Ausatz $u_b(x) = D_2 \cdot e^{\frac{\sqrt{2m(V_0-E)}x}{\hbar}}$ *

$u_c(x) = D_3 \cdot e^{-\frac{\sqrt{2m(V_0-E)}x}{\hbar}}$ *

Randbedingungen: $u_a(0) = u_b(0) \rightarrow C_2 = D_2$

$u_a(a) = u_c(a) \rightarrow C_1 = D_3$

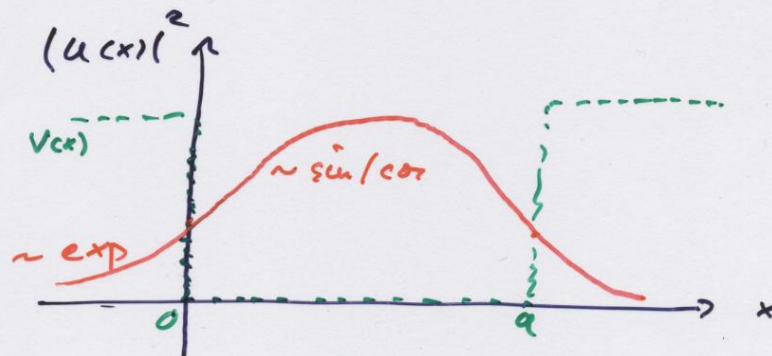
$\frac{du_a}{dx}(0) = \frac{du_b}{dx}(0)$

$\frac{du_a}{dx}(a) = \frac{du_c}{dx}(a)$

stetigkeit
stet. Diff-
barkeit

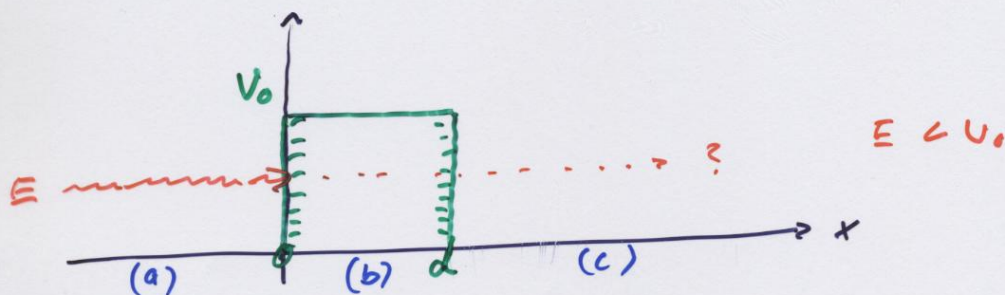
↪ Wellenfunktion

↪ Energiezustände



⇒ Endliche Aufenthaltswahrscheinlichkeit außerhalb der Potentialwände. (QM)

6.2.3 Tunneleffekt



Ausatz:

$$u_a(x) = a_1 e^{i k_1 x} + b_1 e^{-i k_1 x}$$

$$k_1 = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mE}$$

$$u_b(x) = a_2 e^{k_2 x} + b_2 e^{-k_2 x}$$

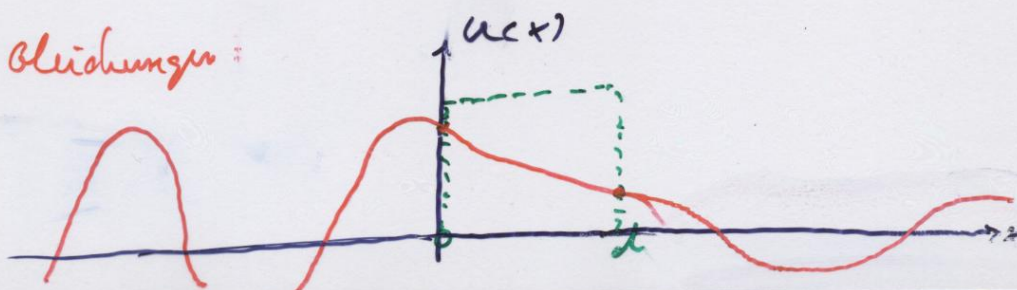
$$k_2 = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(V_0 - E)}$$

$$u_c(x) = a_3 \cdot e^{i k_1 x}$$

Randbedingungen:

$$\begin{aligned} u_a &= u_b ; u_a' = u_b' & \text{für } x=0 \\ u_b &= u_c ; u_b' = u_c' & x=d \end{aligned}$$

4 Gleichungen:



Physikalisch interessant:

Tunnelwahrscheinlichkeit:

$$T = \frac{|u_e(x=d)|^2}{|u_{a_1}(x=0)|^2} \quad \frac{\text{Auslaufen}}{\text{Einlaufen}}$$

$$= \frac{|a_3 e^{ik_2 d}|^2}{|a_1 e^{ik_1 \cdot 0}|^2} = \frac{|a_3|^2}{|a_1|^2}$$

... nach einigen Rechenschritten:

$$\frac{1}{T} = 1 + \frac{1}{4} \left(2 + \left(\frac{k_2}{k_1} \right)^2 + \left(\frac{k_1}{k_2} \right)^2 \right) \cdot \sinh^2(k_2 d)$$

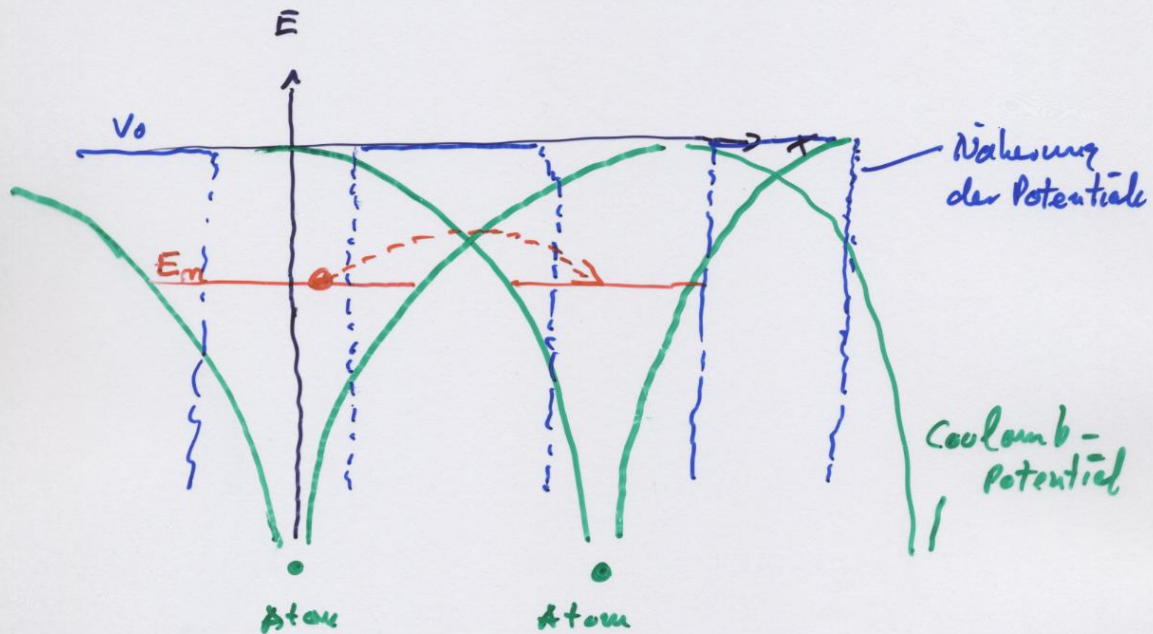
$$\text{mit } \left(\frac{k_2}{k_1} \right)^2 = \frac{V_0 - E}{E} :$$

$$\text{"Dicke" Wand } d \gg \lambda = \frac{1}{k_2}$$

$$T \approx e^{-\frac{2}{\hbar} \sqrt{2m(V_0 - E)} d}$$

Beispiel

a. Elektron im Kristallgitter



Tunnelwahrscheinlichkeit

$$d \approx 0,5 \text{ \AA} \quad (\text{Bohr-Radius})$$

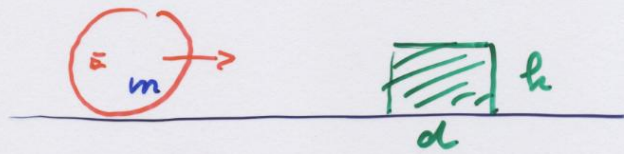
$$V_0 - E_n = \frac{1}{2} \frac{z^2 m e^4}{\hbar^2 n^2} \cdot \frac{1}{(4\pi\epsilon_0)^2}$$

$$T = e^{-\left\{ \frac{z}{\hbar} \sqrt{2m} \frac{1}{2} \frac{z^2 m e^4}{\hbar^2 n^2} \cdot \frac{\hbar^2}{e^2 m} \right\}}$$
$$= e^{-\frac{2 \cdot z}{n}}$$

$$\text{Bsp: } z=1, n=10 : T \approx 80\%$$

$$n=1 : T \approx 14\%$$

b) Tunnelwahrscheinlichkeit eines Glasmurmel

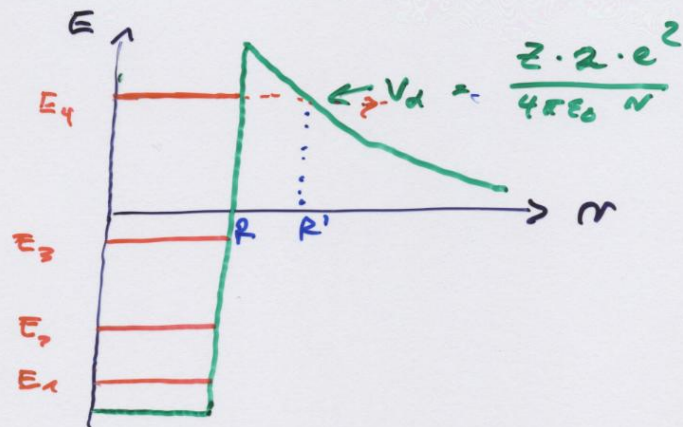


$$E < mgh$$

$$\begin{array}{l|l} m = 10g & T \approx e^{-\frac{2}{\hbar} \sqrt{2mV_0} d} \\ h = 1\text{mm} & \approx e^{-\frac{2}{\hbar} \sqrt{2m^2 g h^2} d} \\ d = 1\text{cm} & \end{array}$$

$$\begin{aligned} T &\approx e^{-\frac{2}{10^{-34} \text{ Js}} \sqrt{2 \cdot 10^{-4} \text{ kg}^2 \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot 10^{-2} \text{ m}}} \\ &\approx e^{-10^{29}} \ll 1 \end{aligned}$$

c) α -Zerfall

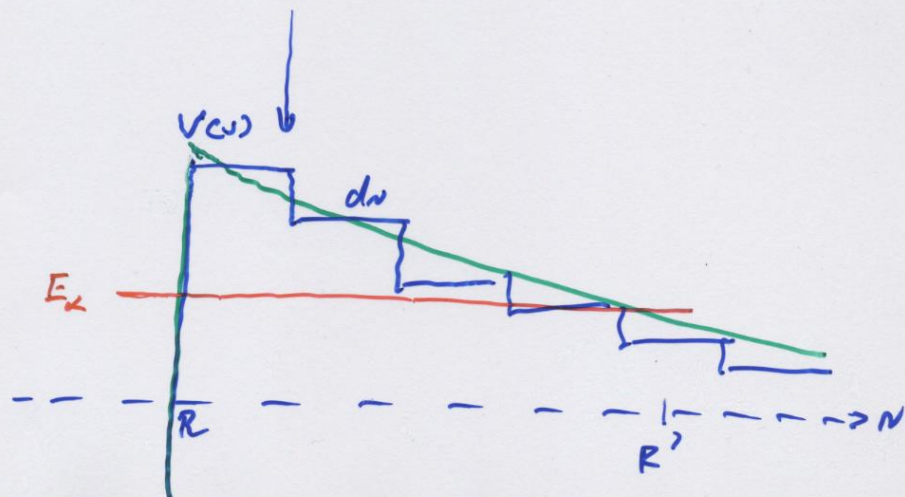


Abstoßendes
Potential
für α -
Teilchen

Anziehendes Kernpotential

E_4 : Energie eines im Kern gebildeten α
→ α kann tunneln!

$$T = e^{-\frac{2}{\pi} \int \sqrt{2m_\alpha (V(r) - E)} dr}$$



$$T = e^{-\frac{2\sqrt{2m\alpha}}{\hbar} \int_R^{R'} \sqrt{2 \cdot 2C^2/4\pi\epsilon_0 v - E_\alpha} dv}$$

Beispiel: $^{212}_{84}\text{Po}$: $T = 1,3 \cdot 10^{-13}$

$$E_\alpha = 8,8 \text{ MeV}$$

$$t_{1/2} = 0,3 \mu\text{s}$$

$^{224}_{88}\text{Ra}$: $T = 5,9 \cdot 10^{-26}$

$$E_\alpha = 5,7 \text{ MeV}$$

$$t_{1/2} = 3,6 \text{ d}$$

$^{144}_{66}\text{Nd}$: $T = 2,2 \cdot 10^{-42}$

$$E_\alpha = 1,8 \text{ MeV}$$

$$t_{1/2} = 2 \cdot 10^{15} \text{ Jahre}$$