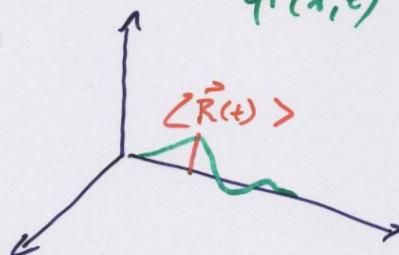


(9)

5.3.2] Ort und Geschwindigkeit von Wellenpaketen.

$$\psi(\vec{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k A(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega(\vec{k})t)}$$



$$\langle \vec{R}(t) \rangle = \frac{\int |\psi(\vec{r}, t)|^2 \cdot \vec{r} d^3r}{\underbrace{\int |\psi(\vec{r}, t)|^2 d^3r}_{=1}}$$

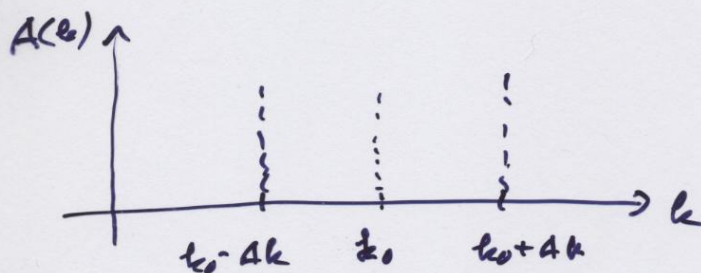
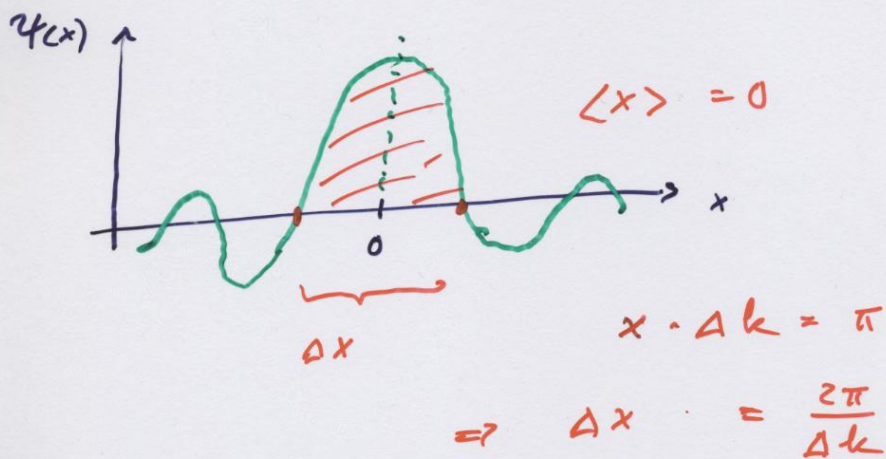
Gewichtetes Mittel.

$$\begin{aligned} \underline{\vec{v}_g} &= \frac{d \langle \vec{R}(t) \rangle}{dt} = \frac{d}{dt} \int |\psi(\vec{r}, t)|^2 \cdot \vec{r} d^3r \\ &= \frac{d \omega(\vec{k})}{d \vec{k}} = \nabla_{\vec{k}} \omega(\vec{k}) \end{aligned}$$

Ausdehnung von Wellenpaketen, Unschärfrelation

Paket 1: Einhüllende = $\varphi(x, t) = \frac{\sin(v_g t - x) \cdot \Delta k}{v_g t - x}$

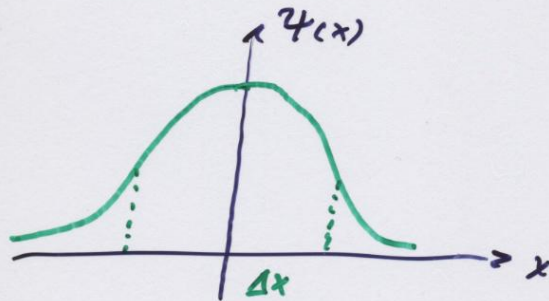
für $t=0$: $\varphi(x) = \frac{\sin x \cdot \Delta k}{x}$



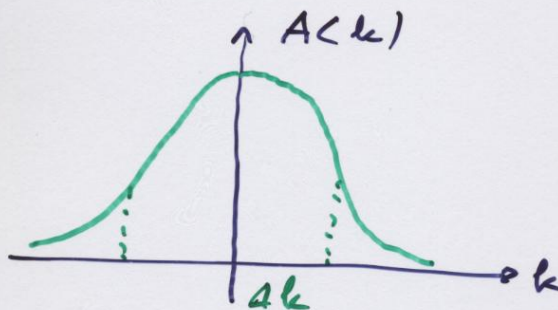
$\Rightarrow \Delta x \cdot \Delta k = 2\pi$, mit $p = \hbar k$
 $= \frac{h}{2\pi} k$

$\Delta x \cdot \Delta p = h$

Gaußscher Paket:



$$\Delta x = \frac{a}{\sqrt{2}}$$



$$\Delta k = \frac{1}{a\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \Delta x \cdot \Delta k = \frac{1}{2}$$

$$\hat{=} \boxed{\Delta x \cdot \Delta p = \frac{h}{2}}$$

Grenzwert gilt für Wellenpakete:

$$\Delta p \cdot \Delta x \gtrsim h$$

Heisenbergs Unschärferelation 1927

6. Elemente der Quantenmechanik

6.1. Zusammenfassung

- Dualismus Korpuskel - Welle beim

Licht : $mc = \frac{h}{\lambda} = \frac{h \cdot \nu}{c}$
Impuls

Materie : $m \cdot v = \frac{h}{\lambda}$ (de Broglie)

- Konsequenzen:
- Interferenzeffekte
 - Orts-Impuls unschärfe

6.1.1 EM Wellen im Vakuum

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi(\vec{r}, t) = c^2 \Delta \varphi(\vec{r}, t)$$

Lösung: $\varphi(\vec{r}, t) = \int d^3k \, a(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$

$$\Rightarrow \omega^2 = c^2 k^2$$

$\omega(k) = c \cdot k$ Dispersionsgleichung für EM Wellen

6.1.2 Nicht-relativistische Materiewellen

$$\lambda = \frac{h}{m \cdot v_g}$$

$$\Rightarrow v_g = \frac{h}{m} \frac{1}{\lambda} = \frac{h}{m} \cdot k = \frac{d\omega}{dk}$$

$$\Rightarrow \omega(k) = \omega_0 + \frac{h}{2m} k^2$$

Dispersionsrelation für nicht-rel. Materiewellen

Allgemeinster Ansatz:

$$\psi(\vec{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k A(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$$

„Zuständige“ Gleichung:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(\vec{r}, t)$$

Schrodingergleichung

Lösung - wahllos - $\omega(k) = \frac{\hbar}{2m} k^2$!

6.1.3 Relativistische Materiewellen

$$(E_{\text{tot}} = \hbar \cdot \omega)$$

$$\omega(\vec{k}) = \sqrt{\left(\frac{m_0 c^2}{\hbar}\right)^2 + \vec{k}^2 c^2}$$

$$\frac{\omega^2}{c^2} = \left(\frac{m_0 c}{\hbar}\right)^2 + k^2$$

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta + \left(\frac{m_0 c}{\hbar}\right)^2\right) \psi(\vec{r}, t) = 0$$

$$\hat{=} \left(\square + \left(\frac{m_0 c}{\hbar}\right)^2\right) \psi(\vec{r}, t) = 0$$

Klein - Gordon - Gleichung

Spezialfälle

a) $k \ll \frac{m_0 c}{\hbar}$ (nicht-relat.)
($v_g \ll c$)

$$\Rightarrow \omega \approx c \cdot \frac{m_0 c}{\hbar} + \frac{c}{2 \frac{m_0 c}{\hbar}} k^2$$

$$= \omega_0 + \frac{\hbar}{2m} k^2$$

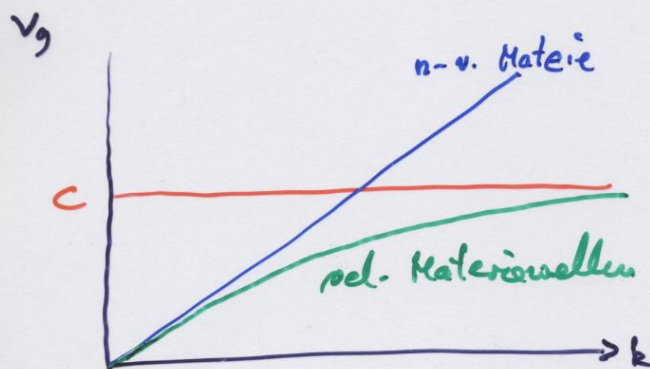
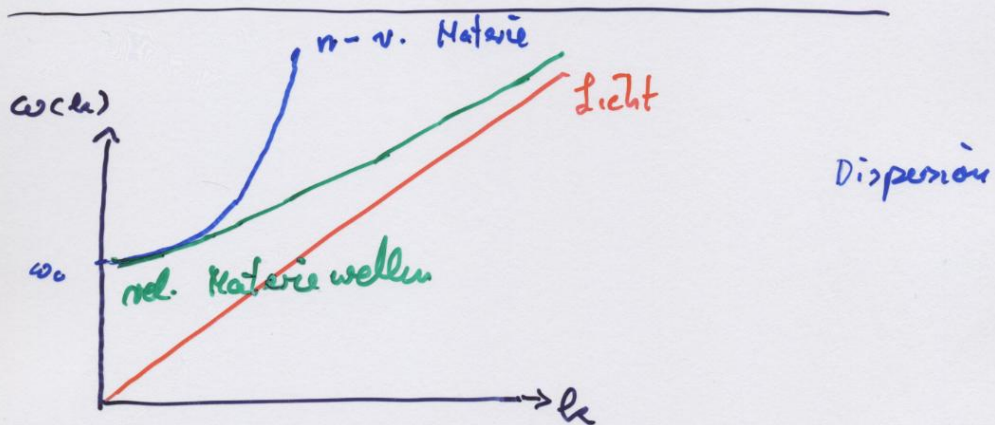
Schrödinger

$$b) \quad \hbar \gg \frac{m_0 c}{\alpha}$$

$$(v \approx c)$$

$$\rightarrow \omega = c \cdot k$$

(wie bei EM Wellen)



Gruppengeschw.

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

$$= c \cdot \frac{k}{\sqrt{\left(\frac{m_0 c}{\hbar}\right)^2 + k^2}}$$

6.1.4 Nicht-relativistische Materiewellen im Potential

Wie hatten

$$\omega(\vec{k}) = \frac{\hbar}{2m_0} \vec{k}^2$$
$$E = \hbar \omega(\vec{k})$$
$$= \frac{\hbar^2}{2m_0} \vec{k}^2$$
$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = -\frac{\hbar^2}{2m_0} \Delta \psi$$

} freie Materiewellen

Mit Potential:

$$E_{\text{ges}} = \frac{p^2}{2m} + V(\vec{r})$$
$$= \frac{\hbar^2}{2m} k^2 + V(\vec{r})$$

$$\Rightarrow E \cdot \psi(\vec{r}, t) = \frac{\hbar^2}{2m} k^2 \psi(\vec{r}, t) + V(\vec{r}) \cdot \psi(\vec{r}, t)$$
$$= -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + V \cdot \psi$$

einsetzen

$$= \hbar \omega(\vec{k}) \psi$$
$$= i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi \quad \text{andererseits}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\vec{r}) \right)}_H \psi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t)$$

Schrödinger gl. mit Potential

H Hamiltonoperator

$$\begin{array}{ccc} H & \psi(\vec{r}, t) = & E \psi(\vec{r}, t) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \text{Operator} & & \text{Eigenwert} \end{array}$$