

VL11. Das Wasserstoffatom in der QM II

11.1. Energiezustände des Wasserstoffatoms

11.2. Radiale Abhängigkeit (Laguerre-Polynome)

VL12. Spin-Bahn-Kopplung (I)

12.1 Bahnmagnetismus (Zeeman-Effekt)

12.2 Spinmagnetismus (Stern-Gerlach-Versuch)

VL13. Spin-Bahn-Kopplung (II)

13.1 Landé-Faktor (Einstein-deHaas Effekt)

13.2 Anomaler Zeeman-Effekt

13.3. Berechnung des Landé-Faktors

VL14. Spin-Bahn-Kopplung (III)

14.1. Vektormodell der Spin-Bahn-Kopplung

14.2. Das Experiment von Lamb und Retherford

14.3. Energieniveaus des Wasserstoffatoms

Vorlesung 13:

Roter Faden:

Landé-Faktor (Einstein-deHaas Effekt)
Berechnung des Landé-Faktors

Folien auf dem Web:

<http://www-ekp.physik.uni-karlsruhe.de/~deboer/>

Siehe auch: Demtröder, Experimentalphysik 3, Springer-Verlag

Und http://www.ipf.uni-stuttgart.de/lehre/online-skript/f30_11.html

Zusammenfassung Elektronspin

Eigenschaften des Elektrons:

- ▶ Spinquantenzahl $s=1/2$
- ▶ innerer Drehimpuls (Spin) $S = (s(s+1))^{1/2}$
- ▶ magnetische Spinquantenzahl $m_s = \pm 1/2$

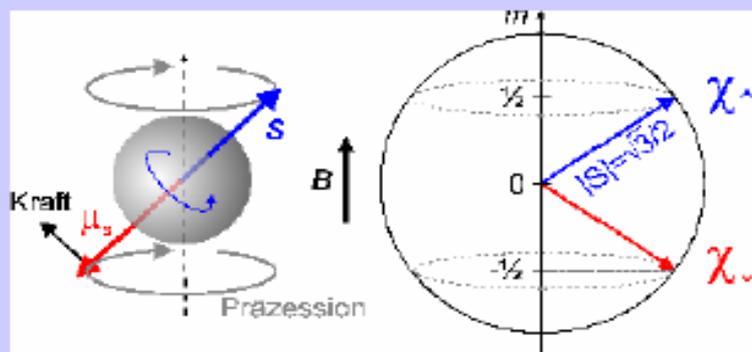
Magnetisches Moment des Elektrons

$$\vec{\mu}_s = -g_s \frac{e}{2m_e} \vec{S} = -g_s \mu_B \vec{S} / \hbar$$

mit dem G-Faktor $g_s = 2.0024$

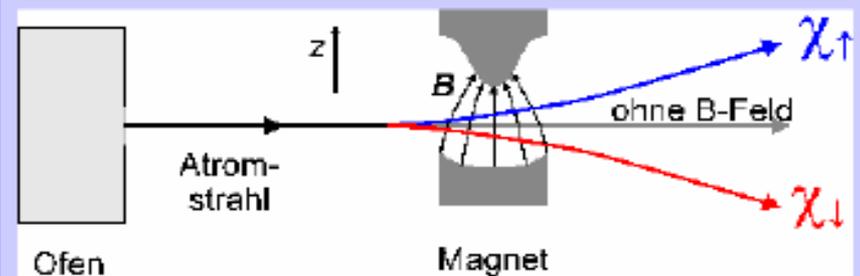
Die Wellenfunktion des Elektrons im H-Atom wird um den Spinanteil χ ergänzt, die nur 2 Werte annimmt

$$\Psi_{nlm m_s} = R_{nl} Y_l^m \chi_{m_s}$$



Der Spin kann als Rotation des Elektrons um die eigene Achse aufgefasst werden (links), wobei das Elektron allerdings punktförmig ist! Im Magnetfeld kann sich der Spin in zwei Positionen ausrichten (rechts). Dann bewirkt das Drehmoment eine Präzessionsbewegung.

Stern-Gerlach-Experiment



Ein Strahl aus wasserstoffähnlichen Atomen spaltet in einem Magnetfeldgradienten in zwei nach der magnetischen Spinquantenzahl getrennte Strahlen auf.

Erklärung

auf magnetisches Moment wirkt die Kraft

$$F_z = -\mu_z \frac{dB}{dz} = g_s \frac{em_s \hbar}{m_e} \frac{dB}{dz}$$

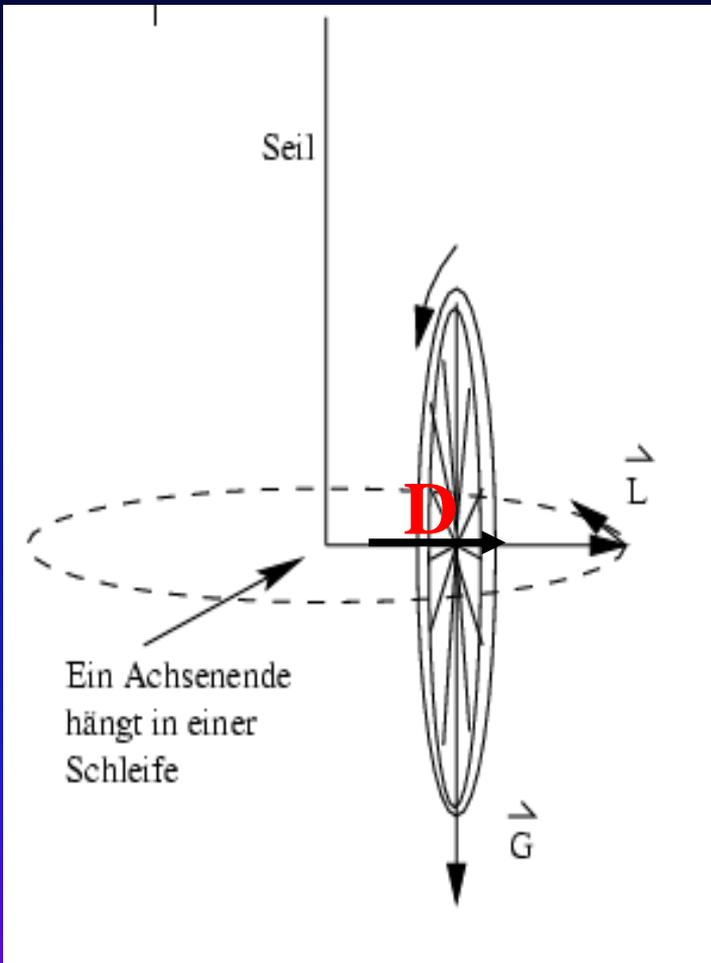
dies führt zur Ablenkung des Strahls in Abhängigkeit von der magnetischen Spinquantenzahl.

Im Magnetfeld erzeugt das magnetische Moment ein Drehmoment, das wie beim Kreisel zu einer Präzessionsbewegung mit der Larmor-Frequenz führt:

$$\omega_L = \frac{\vec{p}_m \times \vec{B}}{L_z} = \frac{p_m B}{L} = \frac{\mu_s B}{S} = \frac{2g_s}{\hbar} B \mu_B$$

Bahnfreq. in B-Feld: $mv^2/r = evB$
oder $\omega = v/r = eB/m = 2\mu_B B/\hbar$

Präzessionsversuch



Beobachtung: drehendes Rad fällt nicht, sondern dreht sich in horizontaler Ebene.

Erklärung:

Gewichtskraft übt Drehmoment in horizontaler Richtung aus und $M=mgD=dL/dt$ schiebt

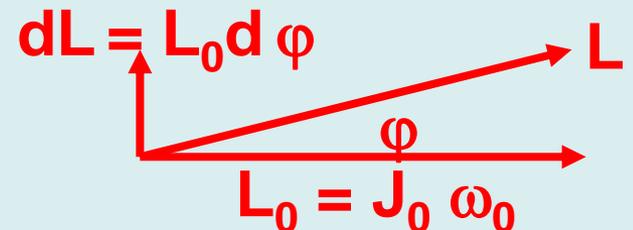
$\underline{L}_0=J_0 \underline{\omega}_0$ in die horizontale Richtung!

Diese Bewegung nennt man Präzession.

Präzessionsfrequenz aus

$M=dL/dt=L_0 d\varphi/dt=L_0 \omega_p$ oder

$$\omega_p = M/L_0 = M/J_0 \omega_0$$



Zusammenfassung aus Stern-Gerlach-Exp. an vielen Atomen

1. Es gibt eine Richtungsquantelung; die Atome haben nur diskrete Möglichkeiten, den Drehimpuls relativ zu einem Magnetfeld B einzustellen und behalten diese Einstellung im freien Raum bei (wie bei einem Kreisel).

2. Die Messwerte für atomare magnetische Momente sind wie folgt :

$$|\mu_Z| = m\mu_B, \quad -s \leq m_S \leq s \quad \text{für} \quad \text{Spinmagnetismus}$$
$$-l \leq m_L \leq l \quad \text{für} \quad \text{Bahnmagnetismus}$$

3. Für alle Atome, die als äußerstes Elektron ein s-Elektron haben, findet man die gleiche Aufspaltung in NUR 2 Strahlen.

⇒ mechanische und magnetische Momente aller inneren Elektronen heben sich gegenseitig auf.

4. Ein s-Elektron hat den Bahndrehimpuls $\vec{l} = 0 \rightarrow \vec{\mu}_l = 0 \rightarrow$ nur Spinmagnetismus.

Einstein-de Haas-Effekt

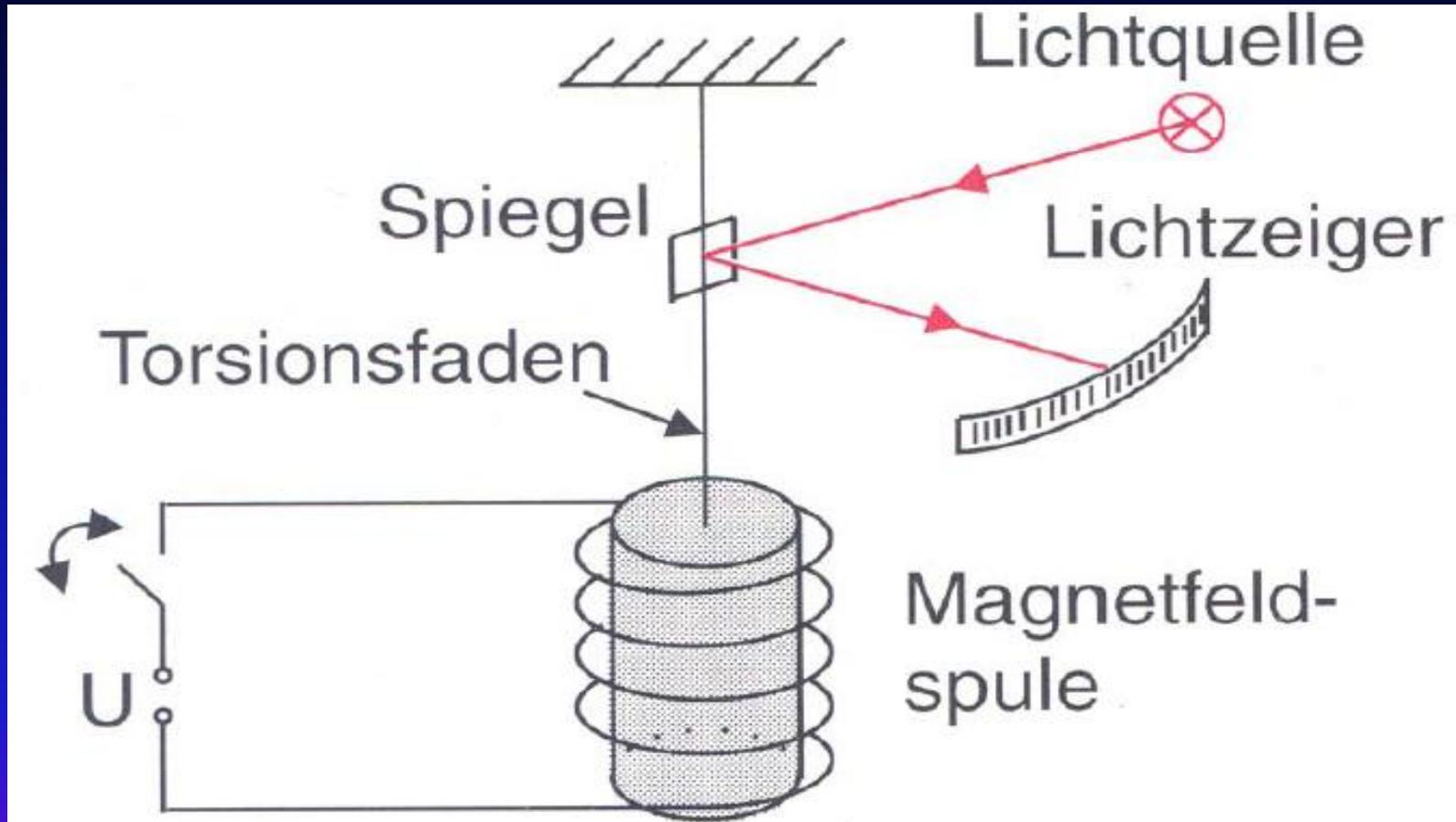


Abb. 5.17. Einstein-de Haas-Effekt

Magnetisierung

In Materie induzierte Wirbelströme erzeugen ein magnetisches Moment:

$$P_m = IA = jldA$$

Daraus definieren wir die **Magnetisierung**

$$J = \frac{P_m}{V} = jd \quad [\text{A/m}]$$

Wie in einer Spule  entsteht daraus das Feld

$$\vec{B}_m = \mu_0 \frac{jdl}{l} = \mu_0 \vec{J}$$

Das Gesamtfeld innerhalb Materie ist also

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_m = \vec{B}_0 + \mu_0 \vec{J}$$

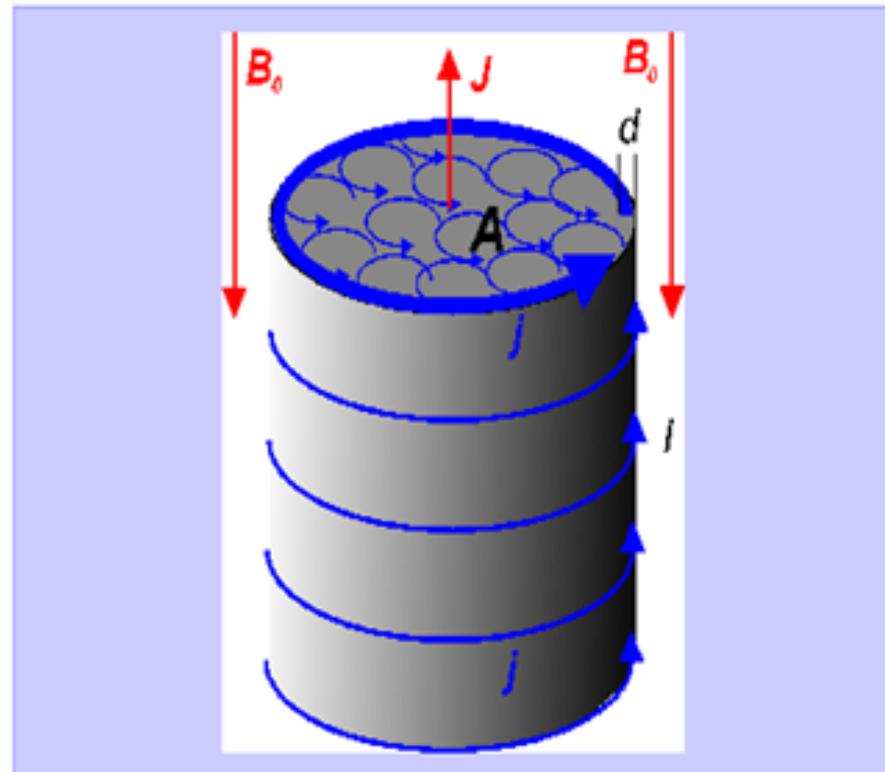
Für Stoffe mit der Eigenschaft

$$\vec{J} = \frac{\chi}{\mu_0} \vec{B}_0$$

Gilt:

$$\vec{B} = (1 + \chi) \vec{B}_0 = \mu \vec{B}_0$$

Wirbelströme heben sich im Innern auf. Effektiv fließt ein Oberflächenstrom in einer Schichtdicke d .



Materialeigenschaften:

- Suszeptibilität: χ [-]
- Permeabilität: $\mu_r = 1 + \chi$ [-]

Diamagnetismus und Paramagnetismus

Diamagnetismus liegt vor wenn:

- ▶ $\chi < 0$
- ▶ $\mu_r < 1$
- ▶ $|\chi| \ll 1$

Das äußere Feld wird geschwächt: $B < B_0$

Wegen $\vec{F} = (\vec{p}_m \nabla) \vec{B}$

$$\vec{F} = (\vec{p}_m \nabla) \vec{B} = V \frac{\chi}{\mu_0} (\vec{B}_0 \nabla) \vec{B}_0 < 0$$

werden diamagnetische Stoffe von einem Feldgradienten **abgestoßen**.

Entsteht durch:

- Induktion von Wirbelströmen (klingt wegen elektrischem Widerstand ab).
- Induktion von Strömen in gebundenen Elektronen

$$\chi = -\frac{1}{2} \mu_0 n Z \frac{e^2}{m} \langle r^2 \rangle$$

Atom mit Radius r , Ladungszahl Z , Elektronenmasse m und Dichte n .

Paramagnetismus liegt vor wenn:

- ▶ $\chi > 0$
- ▶ $\mu_r > 1$
- ▶ $|\chi| \ll 1$

Das äußere Feld wird gestärkt: $B > B_0$

Hier ist

$$\vec{F} = V \frac{\chi}{\mu_0} (\vec{B}_0 \nabla) \vec{B}_0 > 0$$

Paramagnetische Stoffe werden von Feldgradienten **angezogen**.

Entsteht durch:

- Ausrichtung von atomaren permanenten Dipolen

Einstein-de Haas-Effekt (Wiki)

The Einstein–de Haas effect is a physical phenomenon delineated by Albert Einstein and Wander Johannes de Haas in the mid 1910's, that exposes a relationship between magnetism, angular momentum, and the spin of elementary particles.

The effect corresponds to the mechanical rotation that is induced in a ferromagnetic material (of cylindrical shape and originally at rest), suspended with the aid of a thin string inside a coil, on driving an impulse of electric current through the coil.^[1] To this mechanical rotation of the ferromagnetic material (say, iron) is associated a mechanical angular momentum, which, by the law of conservation of angular momentum, must be compensated by an equally large and oppositely directed angular momentum inside the ferromagnetic material. Given the fact that an external magnetic field, here generated by driving electric current through the coil, leads to magnetization of electron spins in the material (or to reversal of electron spins in an already magnetised ferromagnet — provided that the direction of the applied electric current is appropriately chosen), the Einstein–de Haas effect demonstrates that spin angular momentum is indeed of the same nature as the angular momentum of rotating bodies as conceived in classical mechanics. This is remarkable, since electron spin, being quantized, cannot be described within the framework of classical mechanics.

Einstein-de Haas-Effekt

Bestimmung des Verhältnis magnetisches Momet des Elektrons zu Elektronenspin

Experiment: Eisenzylinder (Masse m , Radius R) hängt in longitudinalen B-Feld,

B hoch genug - Eisenzylinder in Sättigung $M = N \cdot \mu_s$; d.h. alle Spins der N freien Elektronen stehen antiparallel zur Feldrichtung

Feld wird umgepolt \rightarrow magnetischen Spinmomente klappen ebenfalls um - Änderung der Magnetisierung: $\Delta M = 2M = 2N \cdot \mu_{sz}$

M-messen $\rightarrow N \cdot \mu_{sz}$ bestimmen

$$\Delta S = 2N \cdot \mu_{sz} = N \cdot \hbar = -\vec{L} = -I \cdot \omega$$

Änderung des mechanischen Drehimpulses aller Elektronen muß durch entgegengesetzten Drehimpuls $-\vec{L}$ des Zylinders kompensiert werden.

Gesamtdrehimpuls des Systems muß erhalten bleiben.

Einstein-de Haas-Effekt

Drehimpuls (Zylinder): $I \cdot \omega = -N\hbar$

$I = \frac{1}{2}mR^2$...mechanisches Trägheitsmoment

Vorgang führt zu Torsion - Winkel φ wird gemessen

Bestimmung des gyromagnetischen Verhältnisses.

$$\frac{\Delta M}{\Delta s} = \frac{\mu_{sz}}{s_z} = \gamma_s$$

Für Bahndrehimpuls des Elektrons gilt: $\gamma_l = \frac{|\vec{\mu}_e|}{|\vec{l}|} = \frac{e}{2m_e} = \mu_B/\hbar$

Einstein-de-Haas Versuch: $\gamma_s \approx \frac{e}{m_e} = 2\gamma_l$

Verhältnis magnetisches Moment zu mechanischen Drehimpuls ist für Spin doppelt so groß als für Bahndrehimpuls!

Man schreibt analog zu $\vec{\mu}_l = (\mu_B/\hbar) \cdot \vec{l}$

$$\vec{\mu}_s = -g_s(\mu_B/\hbar) \cdot \vec{s}$$

$g_s \approx 2$ "Lande-Faktor"

Was passiert in einem Magnetfeld, wenn das magnetische Moment des Spins ZWEI mal so groß ist wie für Bahndrehimpulses?

Antwort: hängt vom Stärke des Magnetfeldes ab.

Wenn interne Magnetfeld überwiegt: $J=L+S$, d.h. Bahndrehimpuls und Spin koppeln zu Gesamtdrehimpuls

Magnetische Moment ist „Zwischending“, dass mit effektive G -Faktor beschrieben wird -> anomaler Zeemaneffekt

Wenn externe Magnetfeld überwiegt: Bahndrehimpuls Und Spin entkoppeln und jedes magnetische Moment richtet sich aus im Magnetfeld -> Paschen-Back Effekt

Gesamtdrehimpuls hat Bahn- und Spinanteil: $J=L+S$

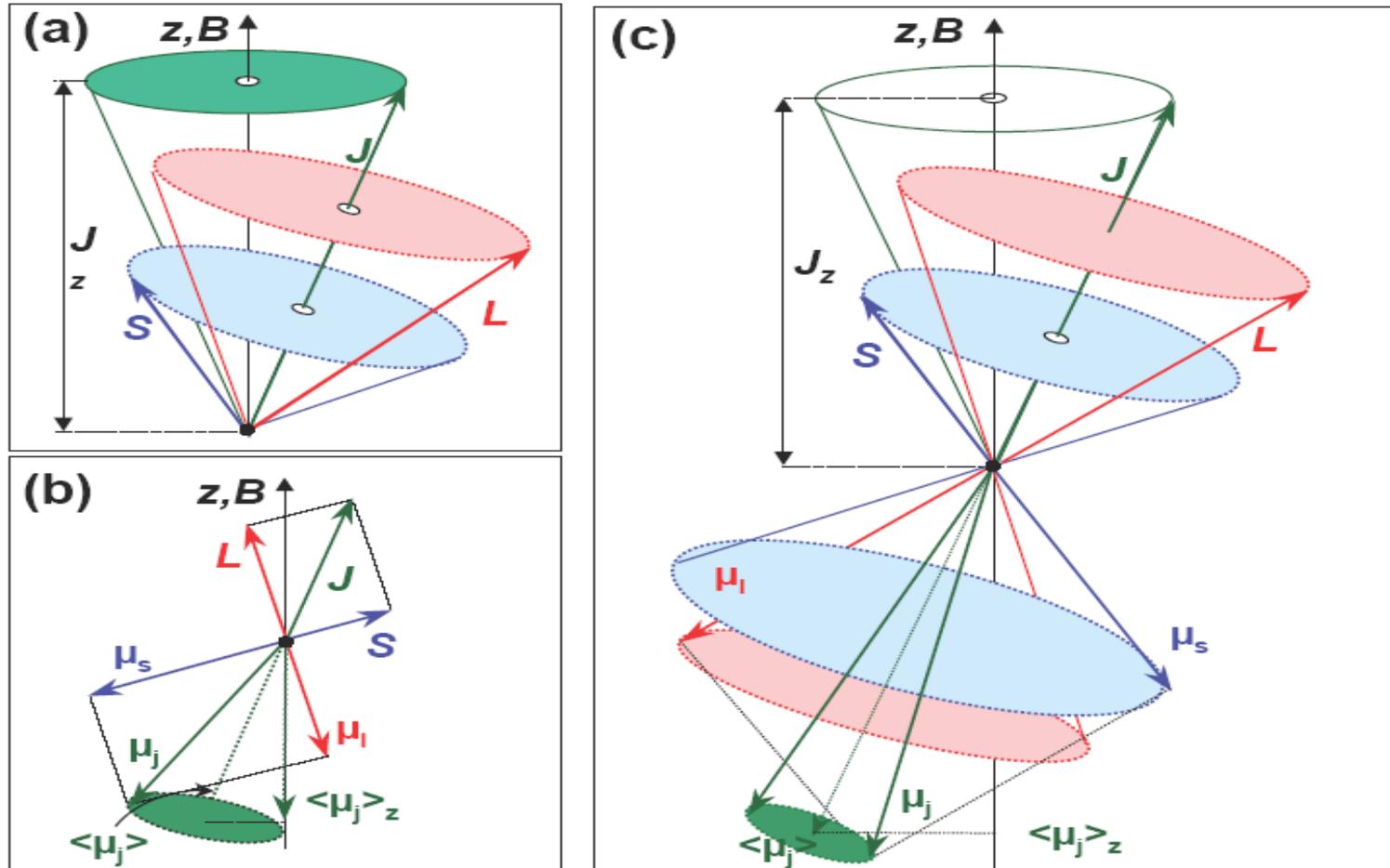


Abbildung 4.15: (a) Präzession von J um die z -Achse in einem äußeren Magnetfeld. (b) Vektorielle Zusammensetzung des Drehimpulses und des von ihm erzeugten magnetischen Moments. (c) Präzession aller magnetischen Momente und Drehimpulse um die Magnetfeldrichtung.

Normaler Zeeman-Effekt (nur J=L, S=0)

Beobachtung von Zeeman 1896

Spektrallinien von Atomen im **Magnetfeld**:

- ▶ Spalten in 3 Linien auf (Triplets)
- ▶ Linienabstand wächst mit B
- ▶ Linienabstand ist für alle Atome gleich

Elektron auf Kreisbahn: **magnetisches Moment** ⇄

$$\vec{p}_m = -\frac{e}{2m_e} \vec{L}$$

Dadurch ändert sich potentielle Energie im Hamilton-Operator um ⇄

$$E_B = -\vec{p}_m \vec{B} = \frac{e}{2m_e} BL_z$$

Die Energieentartung der Zustände ist aufgehoben:

$$E_{nm} = E_n + \frac{eB}{2m_e} \hbar m = E_n + \mu_B B m$$

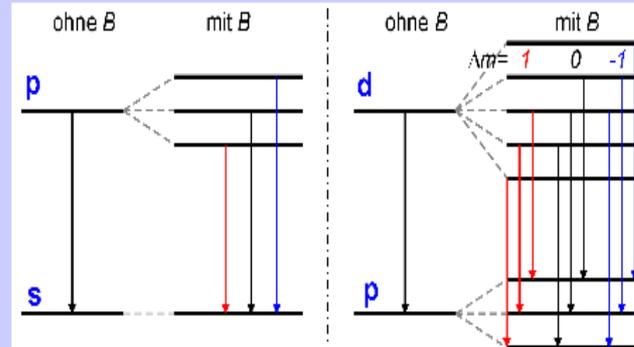
Mit dem **Bohr-Magneton**

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 9,2732 \cdot 10^{-24} \frac{\text{J}}{\text{T}}$$

Die **Zeeman-Aufspaltung** ist

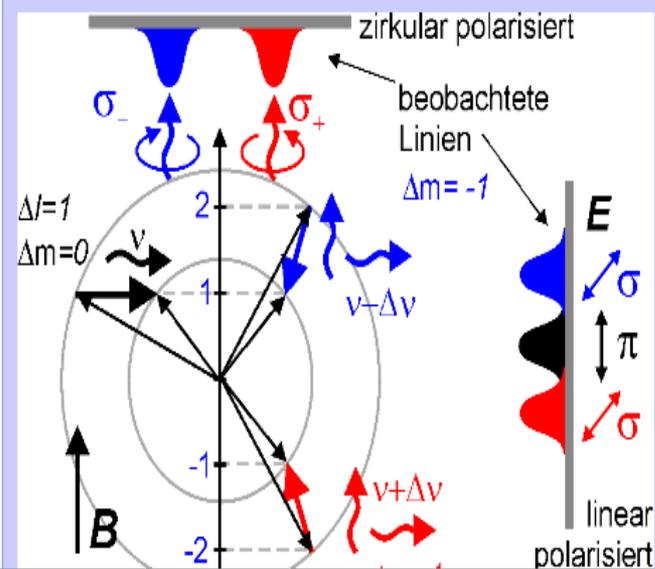
$$\Delta E = E_{n,m+1} - E_{n,m} = \mu_B B$$

Aufspaltung von Linien in Triplets



In beiden Fällen mit Magnetfeld werden Photonen mit drei unterschiedlichen Energien emittiert.

Beobachtete Linien



Anomaler Zeeman-Effekt: $J=L+S$ (Normalfall!)

Gesamt magnetisches Moment aus Spin und Bahnanteil:

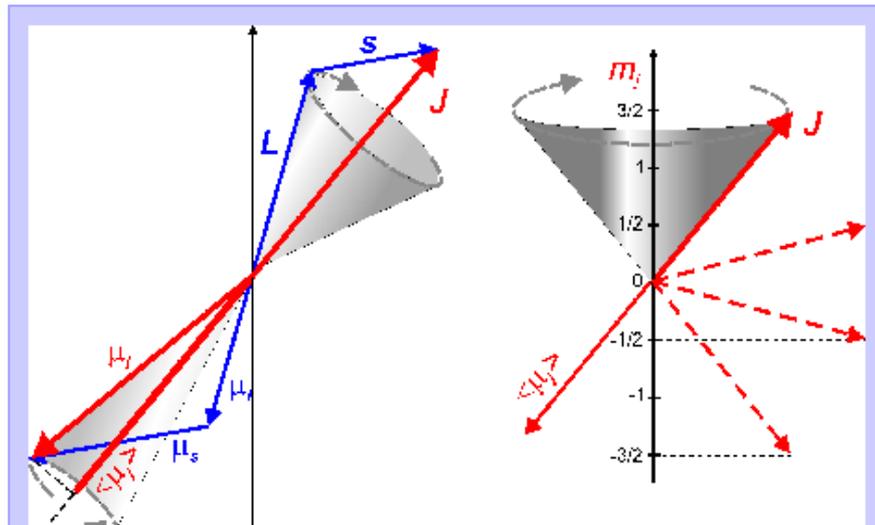
$$\vec{\mu}_j = -\frac{e}{2m_e} (\vec{L} + g_s \vec{S})$$

Wegen Präzession um \mathbf{J} ist nur die Projektion relevant

$$\langle \vec{\mu}_j \rangle = \frac{\vec{\mu}_j \cdot \vec{J}}{J} = g_j \mu_B J / \hbar$$

mit dem Landé-Faktor

$$g_j = 1 + \frac{j(j+1) - l(l+1) + s(s+1)}{2j(j+1)}$$



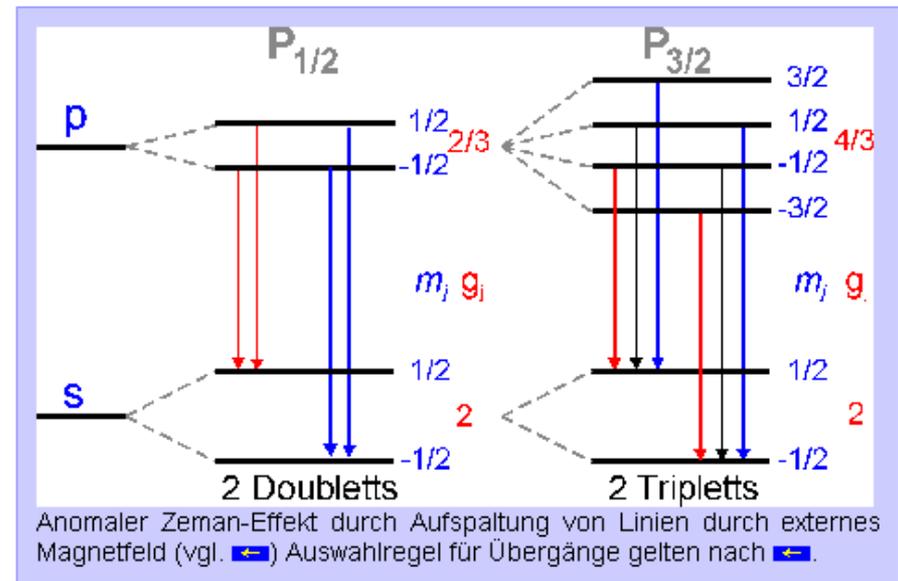
Linienaufspaltung im Magnetfeld analog zu μ_B

$$E_{m_j} = -\langle \vec{\mu}_j \rangle \cdot \vec{B} = \mu_B g_j m_j B$$

wegen g_j hängt die Aufspaltung von j ab.

Beispiele:

- ▶ $s=0, j=l \Rightarrow g_j=1$
- ▶ $l=0, j=s \Rightarrow g_j=2$
- ▶ $l=1, j=1/2 \Rightarrow g_j=2/3$
- ▶ $l=1, j=3/2 \Rightarrow g_j=4/3$



Berechnung des Landé-Faktors

$$\begin{aligned}\langle \mu_j \rangle &= \frac{\mu_j \cdot \mathbf{J}}{|\mathbf{J}|} \\ &= -\frac{\mu_B}{\hbar} \left(g_l \frac{\mathbf{L} \cdot \mathbf{J}}{|\mathbf{J}|} + g_s \frac{\mathbf{S} \cdot \mathbf{J}}{|\mathbf{J}|} \right).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{L} \cdot \mathbf{J} &= \frac{1}{2} [\mathbf{J}^2 + \mathbf{L}^2 - \mathbf{S}^2] \\ &= \frac{1}{2} \hbar^2 [j(j+1) + l(l+1) - s(s+1)]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle \mu_j \rangle &= -\mu_B \frac{3j(j+1) - l(l+1) + s(s+1)}{2\sqrt{j(j+1)}} \\ &= g_j \mu_B \sqrt{j(j+1)} \\ &= g_j \mu_B \frac{|\mathbf{J}|}{\hbar}\end{aligned}$$

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{J} = \frac{1}{2} \hbar^2 [j(j+1) - l(l+1) + s(s+1)]$$

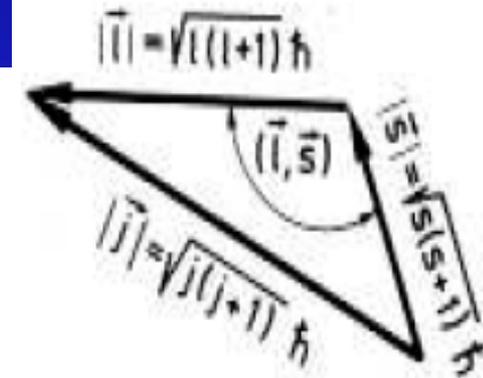
aus

VEKTORMODELL : $\vec{j} = \vec{l} + \vec{s}$ (zuerst für ein Elektron)

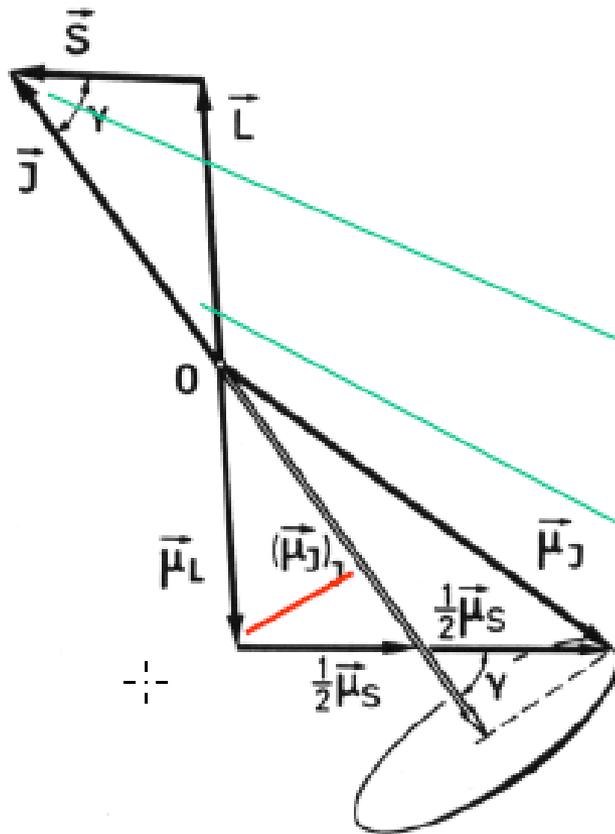
Mathe : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$ ergibt mit $\left\{ \begin{array}{l} a^2 = l(l+1)\hbar^2 \\ b^2 = s(s+1)\hbar^2 \\ c^2 = j(j+1)\hbar^2 \end{array} \right\}$

$\Rightarrow \frac{|l||s|}{\hbar^2} \cos \alpha = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{2} \rightarrow \text{aus (3)} :$

$$V_{l,s} = \frac{a}{2} [j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)]$$



Berechnung des Landé-Faktors



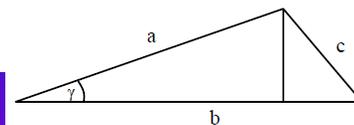
$$\left(\vec{\mu}_J \right)_J$$

setzt sich zusammen aus Beiträgen von $\vec{\mu}_L$ und $\vec{\mu}_S$

$$\vec{\mu}_J = -\frac{e}{2m_e} (\vec{L} + g_s \vec{S}) \quad \langle \vec{\mu}_J \rangle = \frac{\vec{\mu}_J \cdot \vec{J}}{J}$$

$$\cos(\angle \vec{S}, \vec{J}) = -\frac{L(L+1) - J(J+1) - S(S+1)}{2\sqrt{J(J+1)}\sqrt{S(S+1)}}$$

$$\cos(\angle \vec{L}, \vec{J}) = -\frac{S(S+1) - J(J+1) - L(L+1)}{2\sqrt{J(J+1)}\sqrt{L(L+1)}}$$



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

Berechnung des Landé-Faktors

$$\begin{aligned}
 (\bar{\mu}_J)_J &= \bar{\mu}_L \cos(\angle \bar{L}, \bar{J}) + \bar{\mu}_S \cos(\angle \bar{S}, \bar{J}) & \langle \bar{\mu}_j \rangle &= \frac{\bar{\mu}_j \bar{J}}{J} \\
 &= -\mu_B [\sqrt{L(L+1)} \cos(\angle \bar{L}, \bar{J}) + 2\sqrt{S(S+1)} \cos(\angle \bar{S}, \bar{J})] \frac{\bar{J}}{|\bar{J}|} \\
 &= \mu_B \frac{S(S+1) - J(J+1) - L(L+1) + 2L(L+1) - 2J(J+1) - 2S(S+1)}{2\sqrt{J(J+1)}} \frac{\bar{J}}{|\bar{J}|} \\
 &= -\mu_B \frac{3J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2\sqrt{J(J+1)}} \frac{\bar{J}}{|\bar{J}|} = -g_J \sqrt{J(J+1)} \mu_B \frac{\bar{J}}{|\bar{J}|}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (\bar{\mu}_J)_J = -g_J \mu_B \frac{\bar{J}}{\hbar}$$

mit:

$$g_J = 1 + \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)} \quad (\text{Landé-Faktor})$$

Aufspaltung beim anomalen Zeeman-Effekt

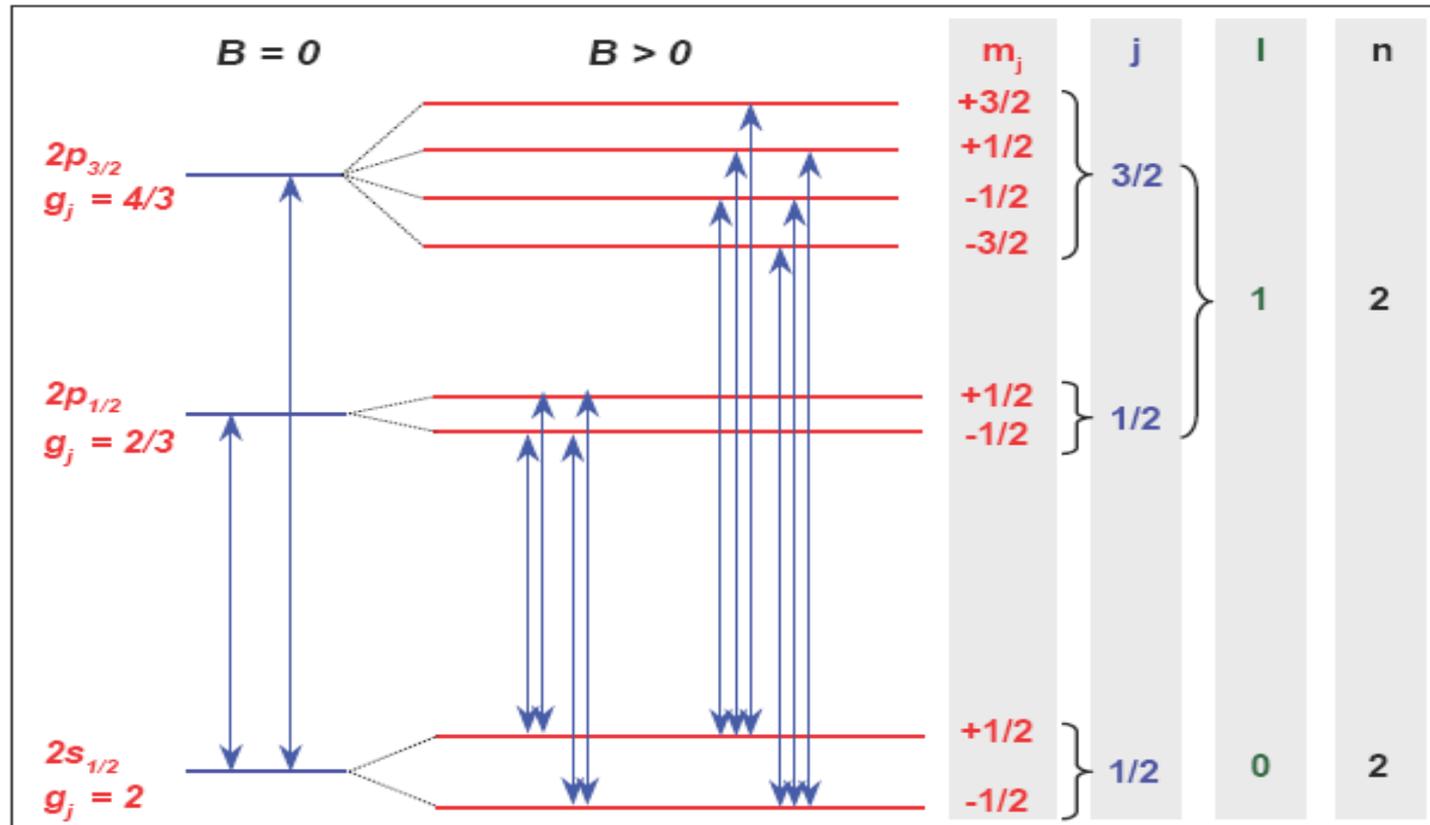


Abbildung 4.16: Zeeman-Aufspaltung für die Zustände $1s_{1/2}$, $2p_{1/2}$ und $2p_{3/2}$ des Wasserstoffs.

Da der Landé-Faktor g_j vom Zustand (j, l) abhängt, ist die Aufspaltung für Niveaus mit unterschiedlichen Quantenzahlen (j, l) im Gegensatz zum normalen Zeeman-Effekt verschieden. Das Aufspaltungsbild ist somit beim anomalen Zeeman-Effekt komplizierter.

Zum Mitnehmen

Bahnbewegung erzeugt magnetisches Moment $p_L \propto L$ zum Drehimpuls L . Da L quantisiert ist, ist p quantisiert. Dies führt zu diskreten Energieniveaus in einem externen Magnetfeld B mit Splitting $m\mu_B B$ wobei μ_B das Bohrmagneton ist. Splitting entdeckt von Zeeman.

Zusätzlich zu diesem magnetischen Moment durch die Bahnbewegung erzeugt das Elektron auch ein magnetisches Moment durch seinen Eigendrehimpuls oder Spin S mit $p_S \propto S$.

Bahndrehimpuls L und Spin bilden Gesamtdrehimpuls $J=L+S$, dessen z -Komponente wieder quantisiert ist \rightarrow magnetische QZ m_j . L und S präzessieren um J und daher tun die „Kompassnadel“ p_L und p_S dies auch

Spin hat g -Faktor = 2, d.h. Eigendrehimpuls ist zweimal so effektiv als Bahndrehimpuls um magnetisches Moment zu erzeugen (klassisch nicht erklärbar, folgt jedoch aus relativ. Wellen-Gleichung (DIRAC-Gleichung))

Energieniveaus nur abhängig von Gesamtdrehimpuls-QZ j , wenn man sehr kleine höhere Ordnung Korrekturen (Lamb-Shift) weglässt. Lamb-Shift sehr genau gemessen \rightarrow sehr guter Check für Quantenelektrodynamik QED.