

# Vorlesung 5:

---

## **Roter Faden:**

**5.1. Beugung und Interferenz von Elektronen**

**5.2. Materiewellen und Wellenpakete**

**5.3. Heisenbergsche Unschärferelation**

(Elektron: griechisch für Bernstein, der durch Reibung elektrostatisch aufgeladen wurde)

# Einteilung der Vorlesung

---

## **VL1. Einleitung**

**Die fundamentalen Bausteine und Kräfte der Natur**

## **VL2. Experimentelle Grundlagen der Atomphysik**

**2.1. Masse, Größe der Atome**

**2.2. Elementarladung, spezifische Ladung des Elektrons**

**2.3 Massenspektroskopie**

**2.4. Struktur der Atome, Rutherford-Streuversuch**

## **VL3. Photonen (Quanteneigenschaften des Lichts I)**

**3.1. Photoeffekt**

**3.2. Comptoneffekt**

## **VL4. Photonen (Quanteneigenschaften des Lichts II)**

**4.1. Gravitationseffekte des Photons**

**4.2. Temperaturstrahlung**

## **VL5. Materiewellen (Welleneigenschaften von Teilchen)**

**5.1. Beugung und Interferenz von Elektronen**

**5.2. Materiewellen und Wellenpakete**

**5.3. Heisenbergsche Unschärferelation**

# Einteilung der Vorlesung

---

---

## **VL6. Elemente der Quantenmechanik I**

- 6.1. Schrödingergleichung als Wellengleichung der Materie**
- 6.2. Messungen in der Quantenmechanik**

## **VL7. Elemente der Quantenmechanik II**

- 7.1 Kurzfassung der Eigenschaften der Eigenfunktionen**
- 7.2 Zusammenfassung der Operatoren der QM**
- 7.3 Vertauschungsrelationen**
- 7.4 Postulate der QM**
- 7.5 Lösungen der Schrödingergleichung in einer Dimension**

## **VL8. Elemente der Quantenmechanik III**

- 8.1. Wellenpakete als Lösungen der Schrödingergleichung**
- 8.2. Lösungen der Schrödingergleichung in einem Potentialfeld**

# Einteilung der Vorlesung

---

- VL9. Das Wasserstoffatom in der Klass. Mechanik**
  - 9.1. Emissions- und Absorptionsspektren der Atome**
  - 9.2. Quantelung der Energie (Frank-Hertz Versuch)**
  - 9.3. Spektren des Wasserstoffatoms**
  - 9.4. Bohrsches Atommodell**
  
- VL10. Elemente der Quantenmechanik IV**
  - 10.1. Schrödingergleichung mit beliebigem Potential**
  - 10.2. Harmonischer Oszillator**
  - 10.3. Drehimpulsoperator**
  
- VL11. Das Wasserstoffatom in der QM (I)**
  - 11.1. SG in einem kugelsymmetrischen Potential**
  - 11.2. Quantenzahlen des Wasserstoffatoms**
  - 11.3. Winkelabhängigkeit (Kugelflächenfunktionen)**

# Erzeugung von Elektronen

---

## a) Thermische Emission aus Festkörperoberflächen

Metall - auf hohe T aufheizen - frei bewegliche Elektronen erhalten hohe kinetische Energie - überwinden Austrittsarbeit  $W_a$  - Glühemission.

Elektrisches Feld - Elektronen gehen zu positiver Anode.

*Richardson Gesetz:*  $j_S = A \cdot T^2 \cdot e^{-e \cdot U_A / kT}$

Konstante A materialabhängig.

Für hohe Stromdichten Materialien mit niedriger  $W_a$  aber sollen hohe Temperaturen aushalten; z.B.: W, Ba, Cs-Verbindungen.

Anwendung: Elektronenröhren, Fernsehröhren, Senderöhren

# Erzeugung von Elektronen

---

## b) Feldemission

Kathode - feine Spitze. Hohe Spannung zwischen Anode und Kathode ( $E \sim 10^{11}$  V/m) - Elektronen treten aus ("Tunneleffekt").

## c) Photoeffekt an Metalloberflächen

Oberfläche eines Metalls wird mit UV-Licht bestrahlt → Elektronen treten aus ("äußerer Photoeffekt").

$$W_{kin} = h \cdot \nu - W_a \quad (\text{Einstein})$$

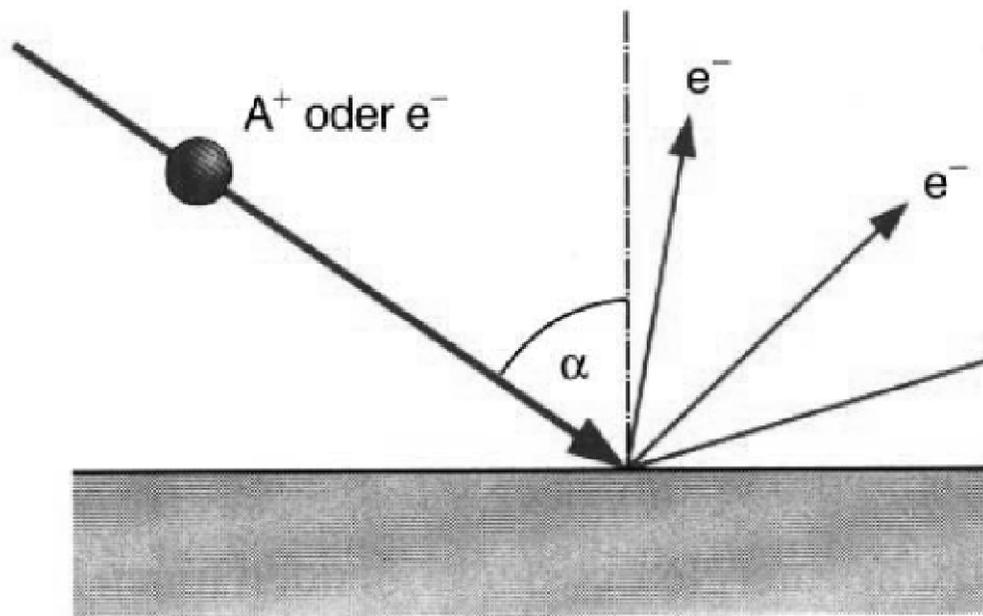
## d) Sekundäremission aus Festkörperoberflächen

Beschuß von Festkörper mit schnellen Elektronen oder Ionen - Sekundärelektronen

*Sekundärelektronenkoeffizient  $\eta$*

Hängt ab vom Material, Einfallswinkel  $\alpha$  Art, Energie der einfallenden Teilchen - siehe Tabelle

# Sekundäremission

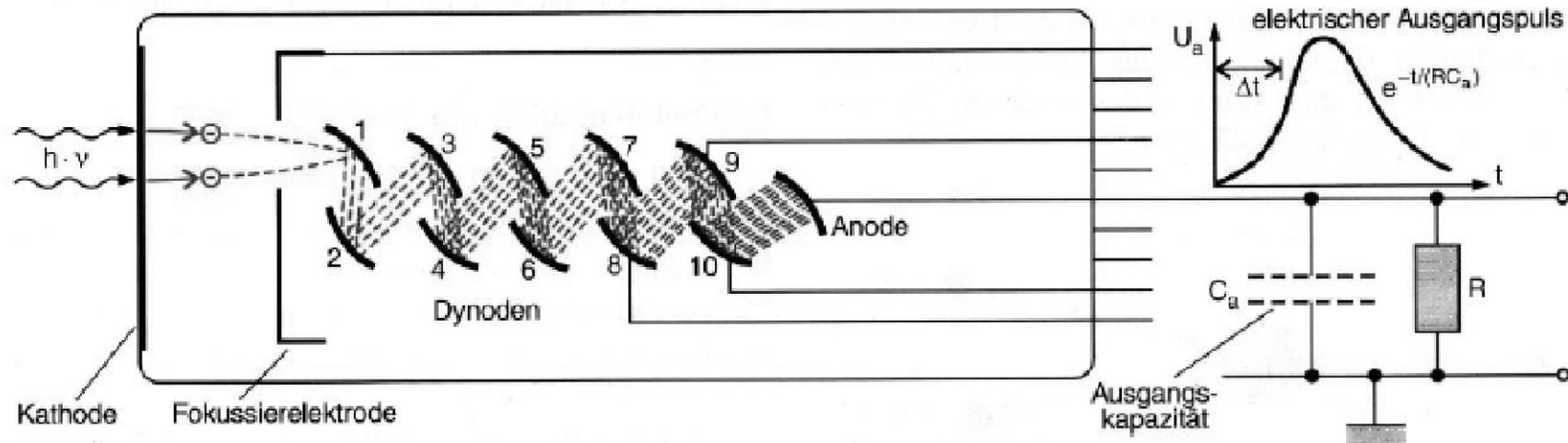


Erzeugung von Sekundärelektronen durch Beschuss Festkörperoberfläche mit Elektronen oder Ionen

Sekundäremissionskoeffizienten  $\eta$  bei der Energie  $W_{\max}$  der auftreffenden Primärelektronen, bei der  $\eta$  den maximalen Wert  $\eta_{\max}$  annimmt

Material	$\eta_{\max}$	$W_{\max}/\text{eV}$
Ag	1,5	800
Al	1,0	300
C (Diamant)	2,8	750
Na	0,8	300
W	1,4	650
KBr	14	1800
LiF	8,5	700
NaI	19	1300
MgO-Kristall	20–25	1500
MsO-Schicht	5–15	500–1500
GaP + Cs	120	2500

# Photomultiplier: Photoeffekt plus Sekundäremission

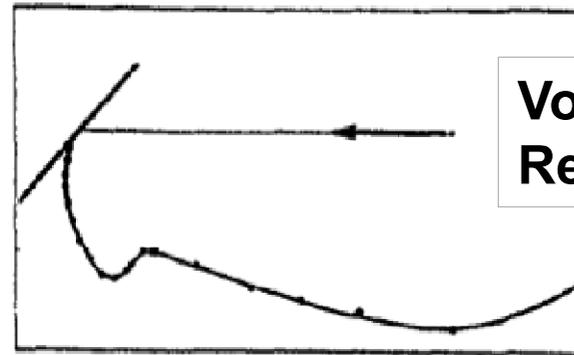
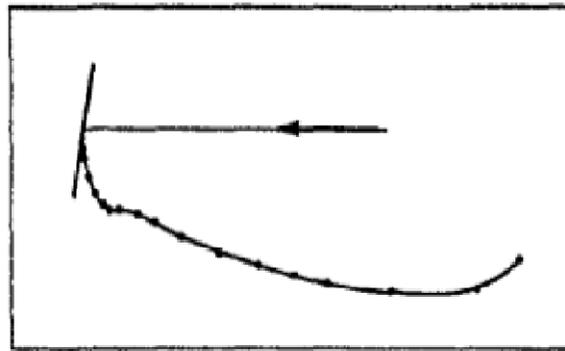


Prinzip des Sekundärelektronenvervielfachers (Photomultiplier). Die Anstiegszeit  $\Delta t$  des Ausgangspulses pro Photon gibt  Laufzeitverschmierung der Elektronen im Multiplier an. Die Abfallflanke hängt nur von  $C_a$  und  $R$  ab.

$m$ ...Dynoden  $\Rightarrow \eta^m$  Elektronen

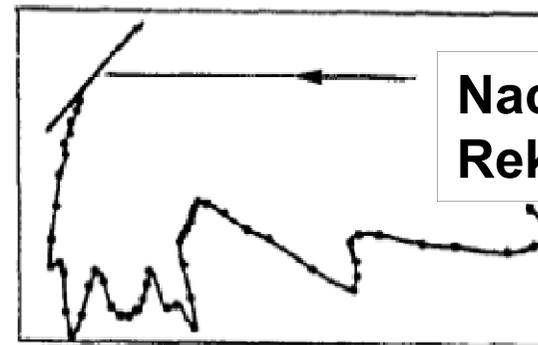
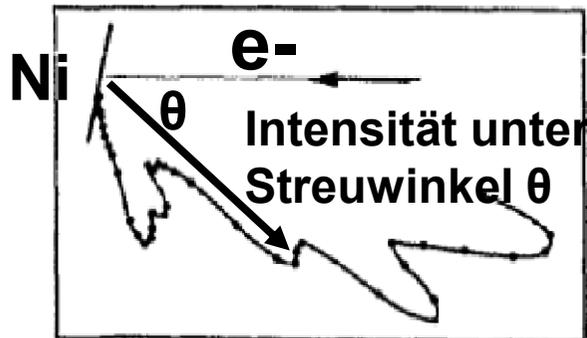
$$U_a = \eta^m \cdot e / C_a$$

# Davisson und Germer: Elektron Streuung an Nickel Kristallen (Davisson Nobelpreis 1937)



Vor  
Rekristallisierung

SCATTERING OF 75 VOLT ELECTRONS FROM  
A BLOCK OF NICKEL (MANY SMALL CRYSTALS)



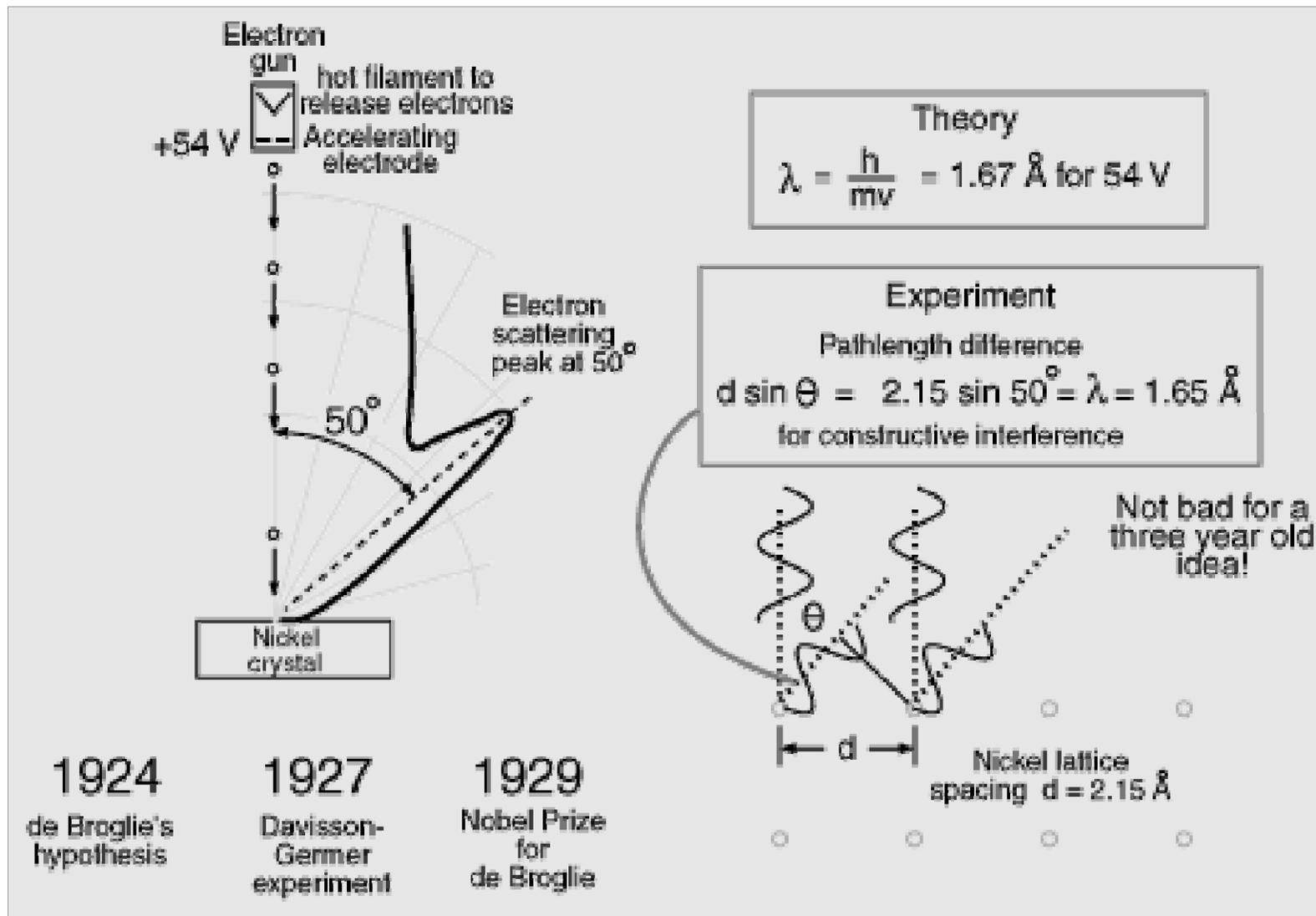
Nach  
Rekristallisierung

SCATTERING OF 75 VOLT ELECTRONS FROM  
SEVERAL LARGE NICKEL CRYSTALS

g. 1. Scattering curves from nickel before and after crystal growth had occurred.

**Zufällige Entdeckung der Bragg-peaks bei  
Streuung von Elektronen an Ni-Kristalle**

# Davisson und Germer: Elektron Streuung an Nickel Kristallen (Davisson Nobelpreis 1937)



# Davisson und Germer: Elektron Streuung an Nickel Kristallen

Versuch von  
C. Davisson und L.H. Germer  
Phys. Rev. 30, p705 (1927)

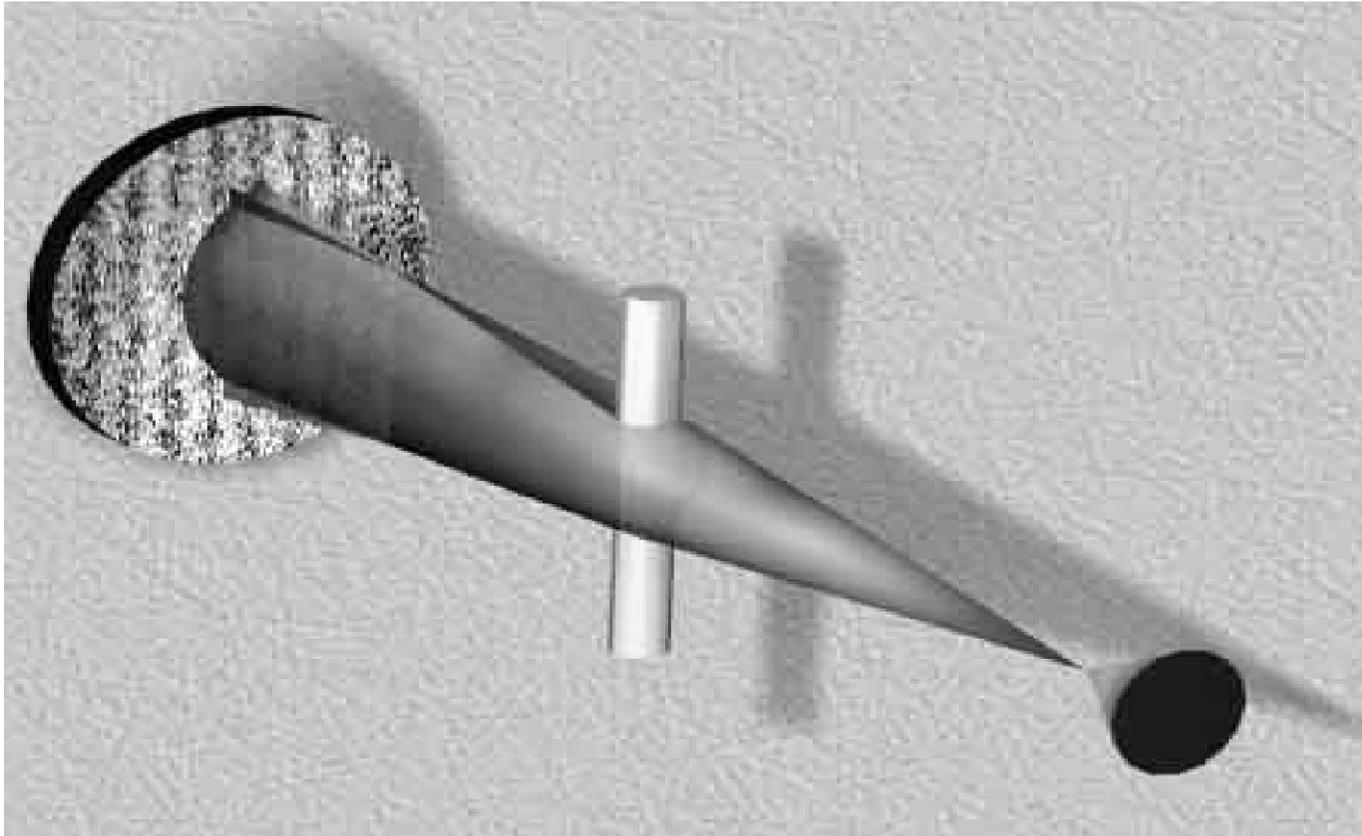
THE investigation reported in this paper was begun as the result of an accident which occurred in this laboratory in April 1925. At that time we were continuing an investigation, first reported in 1921,<sup>1</sup> of the distribution-in-angle of electrons scattered by a target of ordinary (polycrystalline) nickel. During the course of this work a liquid-air bottle exploded at a time when the target was at a high temperature; the experimental tube was broken, and the target heavily oxidized by the intruding air. The oxide was eventually reduced and a layer of the target removed by vaporization, but only after prolonged heating at various high temperatures in hydrogen and in vacuum.

When the experiments were continued it was found that the distribution-in-angle of the scattered electrons had been completely changed. Specimen curves exhibiting this alteration are shown in Fig. 1. These curves are all for a bombarding potential of 75 volts. The electron beam is incident on the target from the right, and the intensities of scattering in different directions are proportional to the vectors from the point of bombardment to the curves. The upper curves (for different angles of incidence) are characteristic of the target prior to the accident. They are of the type described in the note in "Science" in 1921, and are similar to curves that have been obtained for nickel in four or five other experiments. The lower curves—obtained after the accident—were the first of their sort to be observed. This marked alteration in the scattering pattern was traced to a re-crystallization of the target that occurred during the prolonged heating. Before the accident and in previous experiments we had been bombarding many small crystals, but in the tests subsequent to the accident we were bombarding only a few large ones. The actual number was of the order of ten.

It seemed probable from these results that the intensity of scattering from a single crystal would exhibit a marked dependence on crystal direction, and we set about at once preparing experiments for an investigation of this dependence.

# Einzel und Doppelspalt Beugung von Elektronen

---



**Max. und Min. in der Intensitätsverteilung nach Streuung an einem Draht zeigen Interferenz, d.h. Wellencharakter der Elektronen**

# De-Broglie Beziehung

---

Photon:  $E=hf=hc/\lambda$  und  $E^2=p^2c^2+m^2c^4$

Daher: für  $m=0$  gilt:  $E=pc=hc/\lambda$  oder

$$p=h/\lambda \text{ (de Broglie)}$$

Um Interferenzen der Elektronen zu erklären  
postulierte de Broglie das diese Beziehung  
auch für Teilchen gilt!

# Elektronenmikroskop

---

Benutzt zur Abbildung Elektronen:  $e \cdot U = h \cdot \nu = h \left( \frac{c}{\lambda} \right)$

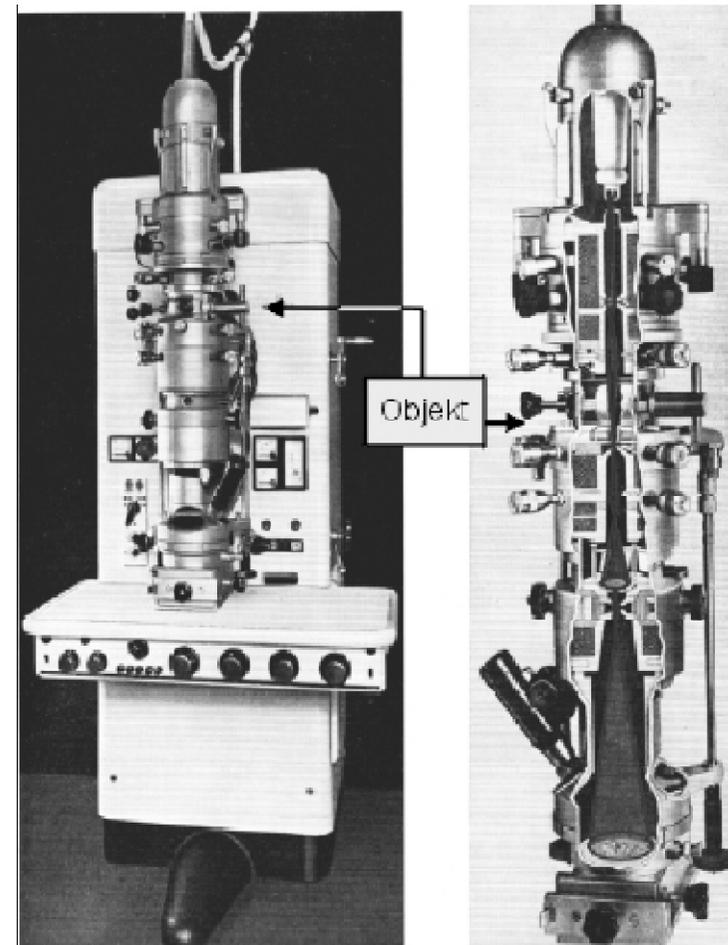
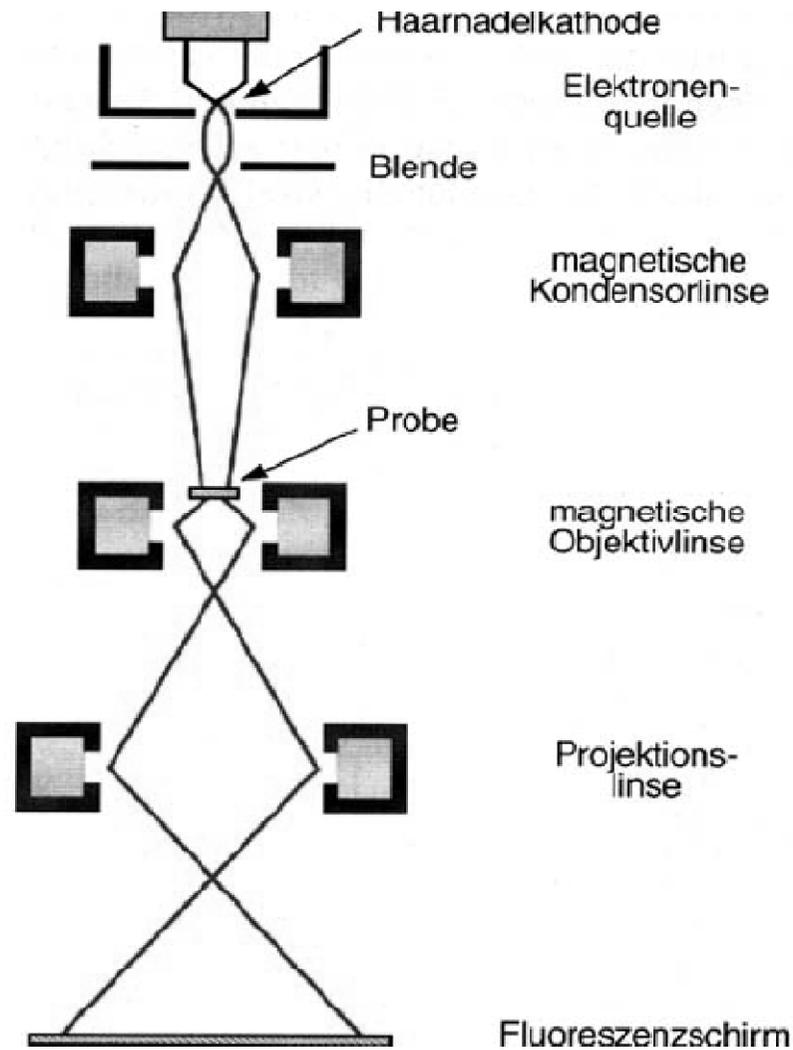
$\lambda = \frac{hc}{eU} \rightarrow$  je höher U umso kleiner  $\lambda$ .

Auflösung heute bis zu 0.1nm

Nachteile:

- In Transmission nur dünne Schichten
- Elektronenstrahl hat hohe Energie und hohe Intensität
- Heitzt Probe auf!

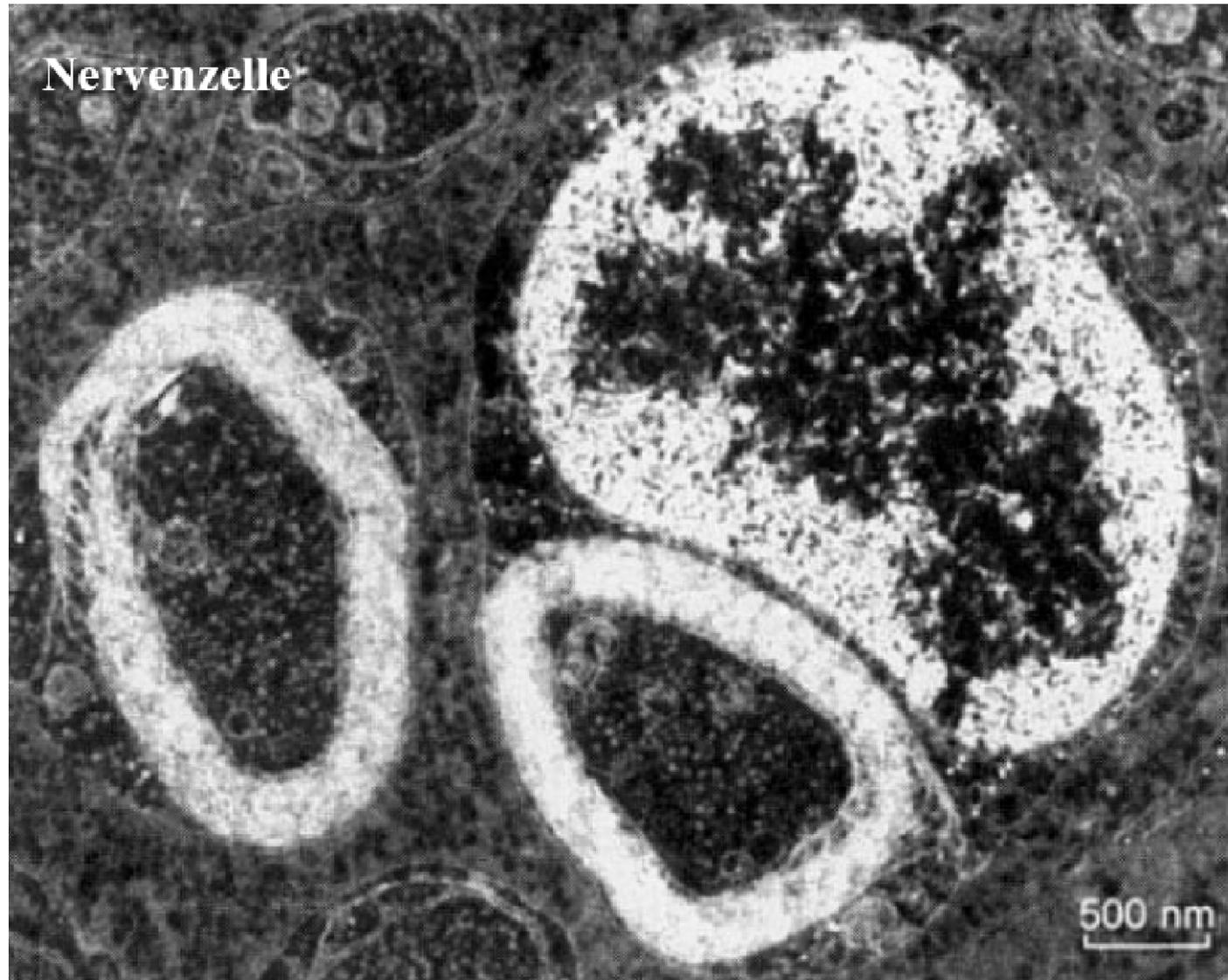
# Elektronenmikroskop



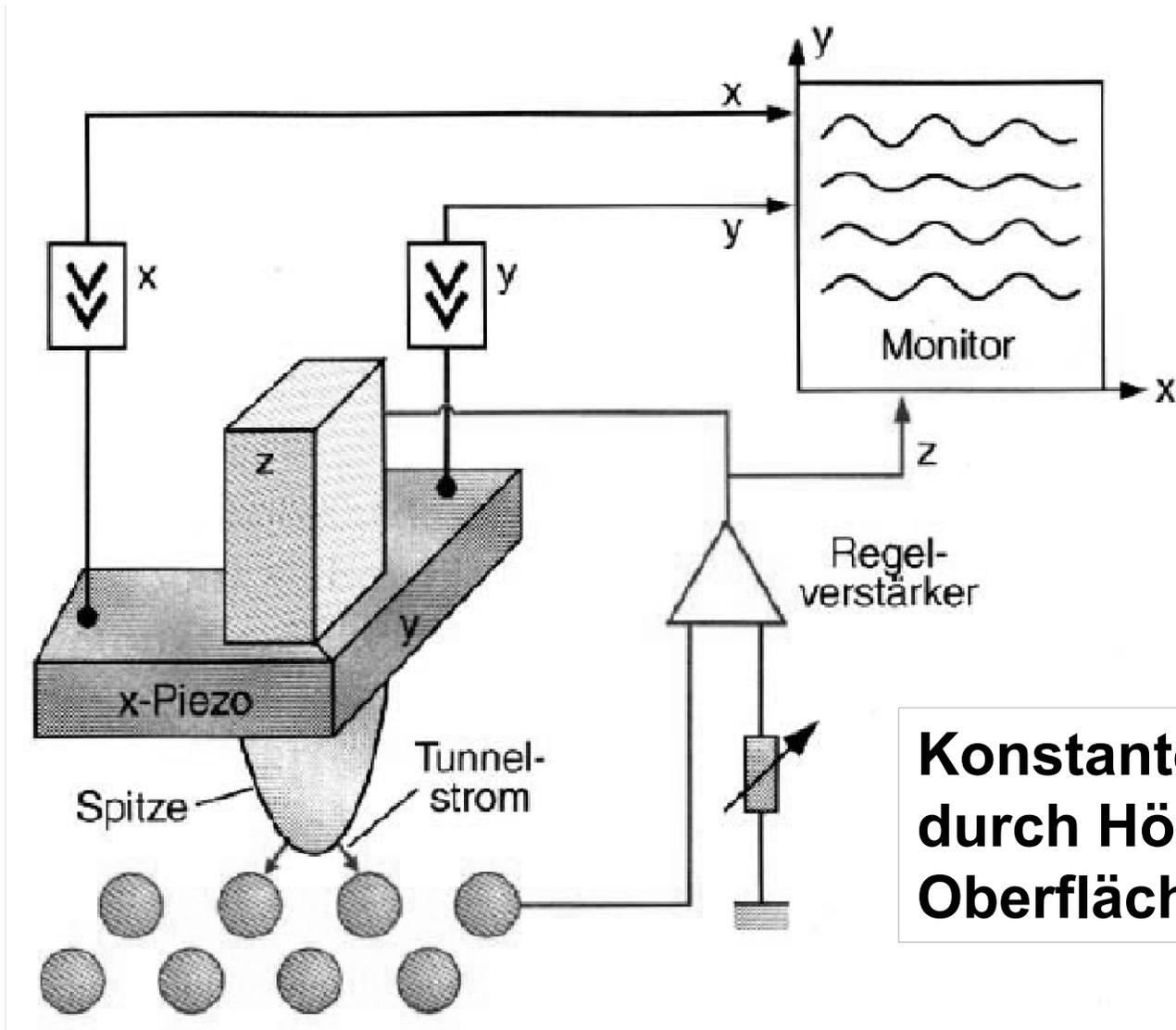
**Wohldefinierte Energie=  
Wohldefinierte Wellenlänge ->  
hohe Auflösung**

# Elektronenmikroskop

---



# Rastertunnelmikroskop



**Konstanter Tunnelstrom  
durch Höhenanpassung ->  
Oberflächentopographie**

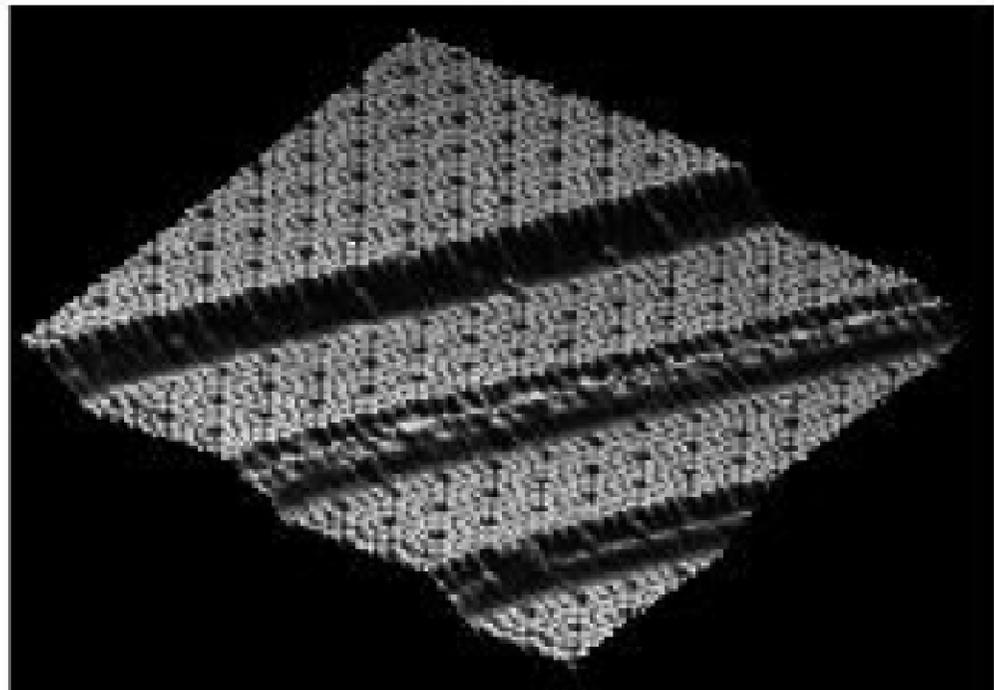
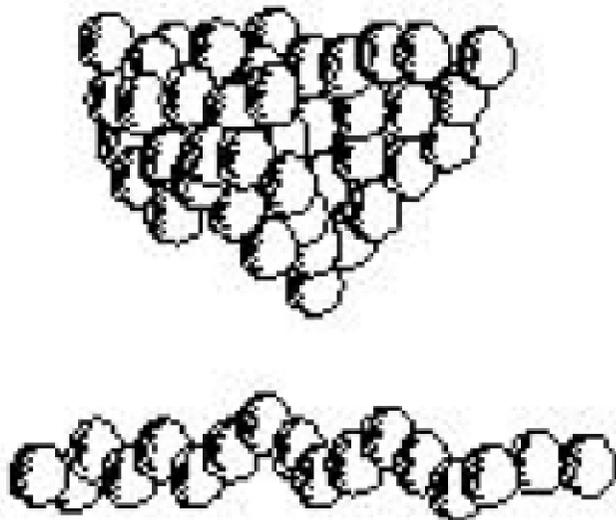
# Rastertunnelmikroskop

---

## Wechselwirkung: (Tunnel-) Strom (bis pA)

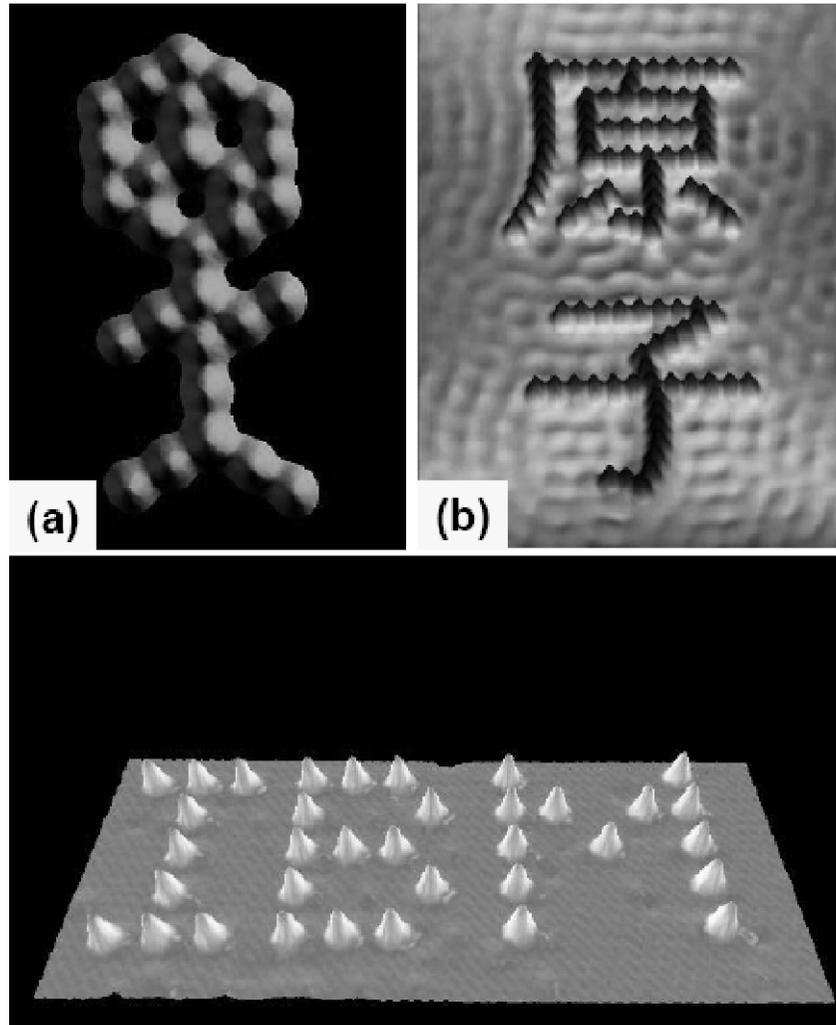
- atomare Oberflächentopographie von elektrischen Leitern
- elektron. Eigenschaften der Oberfläche (“Leitfähigkeit”)

## Sonde:



# Rastertunnelmikroskop

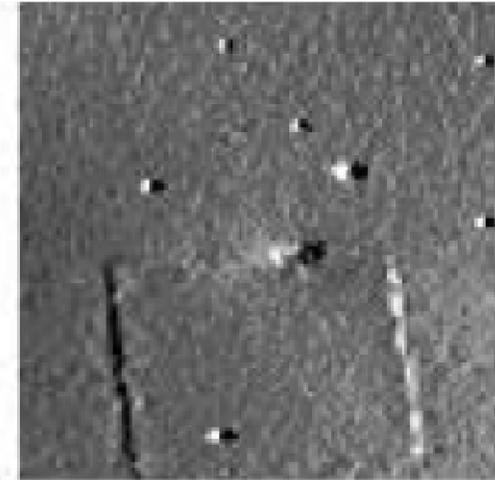
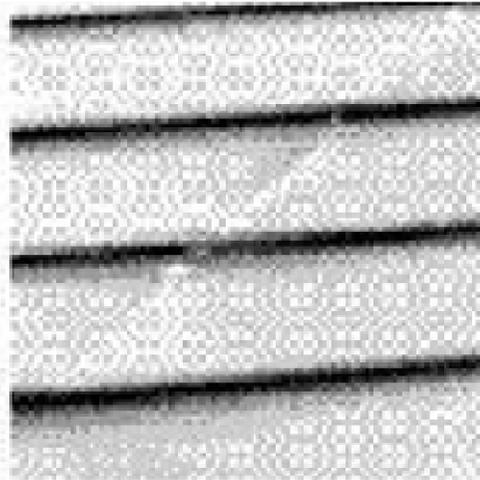
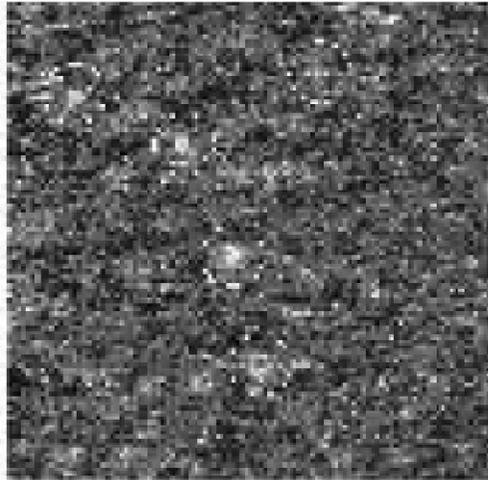
---



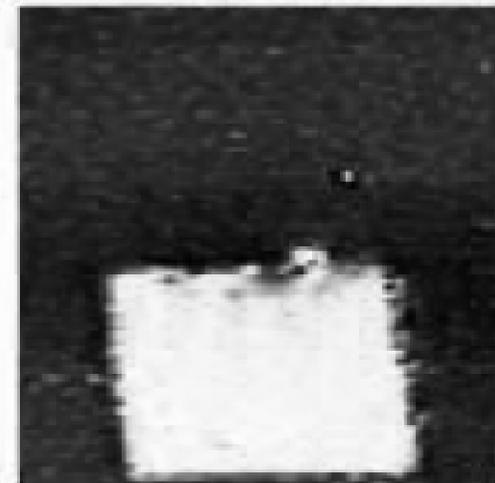
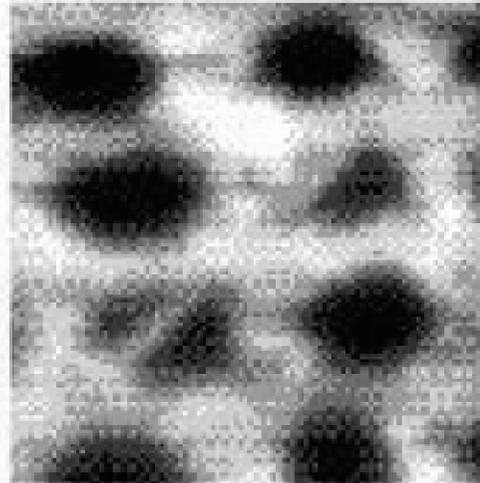
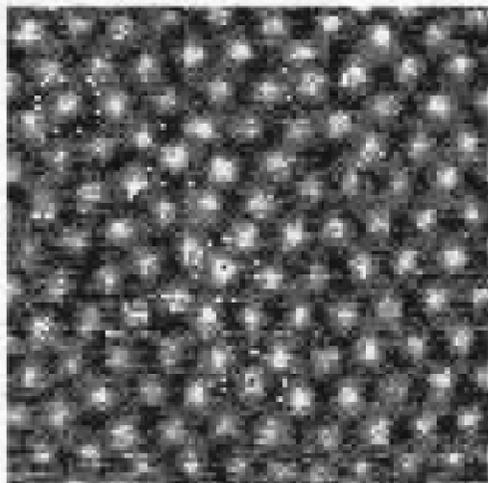
## Manipulation einzelner Atomen mit Tunnelspitze

# Rastertunnelmikroskop

Topo



WWW



**STM:** Flusslinien in  
Supraleiter NbSe<sub>2</sub>

**SFM:** Bits auf einer  
magneto-opt. Platte

**SNOM:** Domänen in  
Flüssigkristallfilm

# Zusammenfassung

Beugung und Interferenz am Spalt, Draht (Fresnel, Möllenstedt) und an Kristallen (Davisson und Germer ,1927) → Bilder.

De Broglie förderte das “Photonbeziehung”  $p = \frac{h}{\lambda}$  auch für Teilchen gilt

$$\rightarrow \lambda = \frac{h}{p}$$

$$\text{Numerisch: } \lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m_0 E_{kin}}} = \frac{12,3}{\sqrt{u}}$$

$$(U = \text{Beschleunigungsspannung} \rightarrow E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2 = eU)$$

3

$E_{kin}$	[eV]	10	$10^2$	$10^3$	$10^6$	$10^9 (=1\text{GeV} = m_p)$
$\lambda$	[Å]	3,9	1,2	0,4	$9 \times 10^{-3}$	$10^{-5}$

**Wenn Energien, Orte oder Impulse im Bereich  $E=h\nu$  und  $\lambda=p/h$  kommen, werden Quanteneffekte wichtig!**

# Wellenlängen schwererer Teilchen

---

$$E_{kin} = \frac{3}{2}kT \text{ (Edelgas, 2 Freiheitsgrade)}$$

$$\lambda_{He} = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} = \left\{ E = \frac{1}{2}mv^2 \right\} = \frac{h}{\sqrt{2mE}} = \frac{h}{\sqrt{3mkT}} \text{ wurde bestätigt}$$

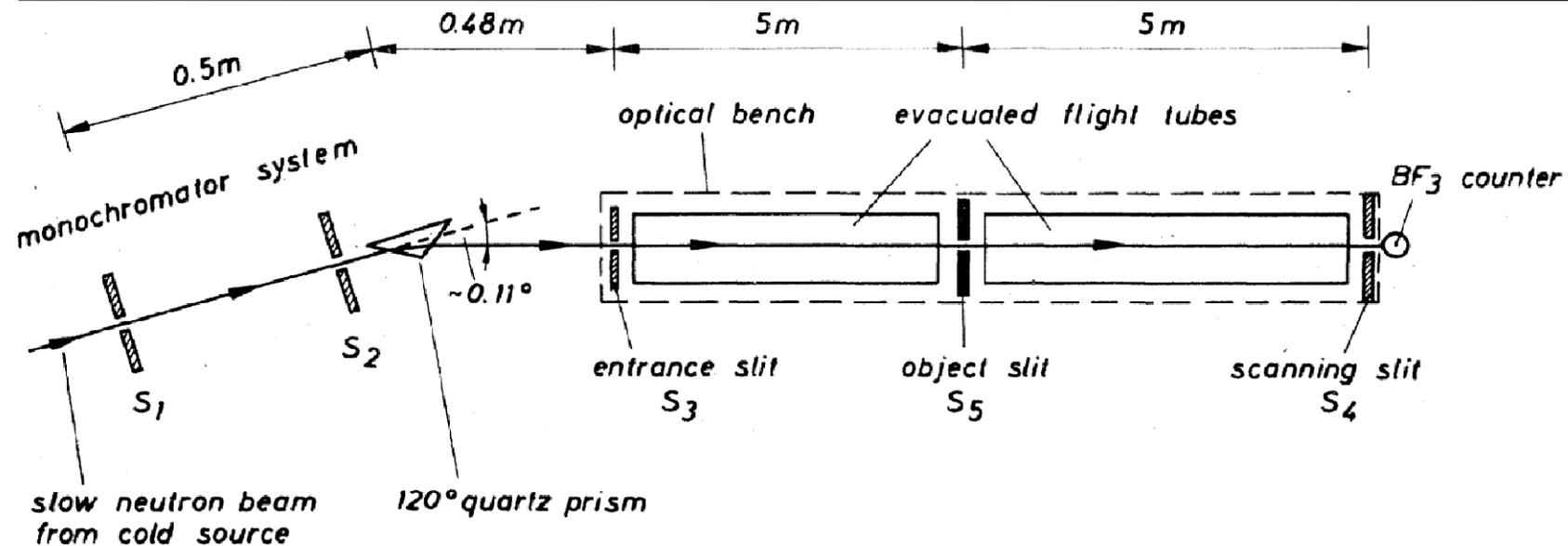
Neutronenbeugung: Interferenz wie bei Röntgenstrahlung (6.13)

Schlussfolgerung:  $\lambda = \frac{h}{p}$  gilt für Strahlung UND Materie,

d.h. jede Energieform hat sowohl Teilchen als auch Wellencharakter.

Welcher Charakter überwiegt, hängt vom Frequenzspektrum ab!

# Einzel und Doppelspalt Beugung von Neutronen

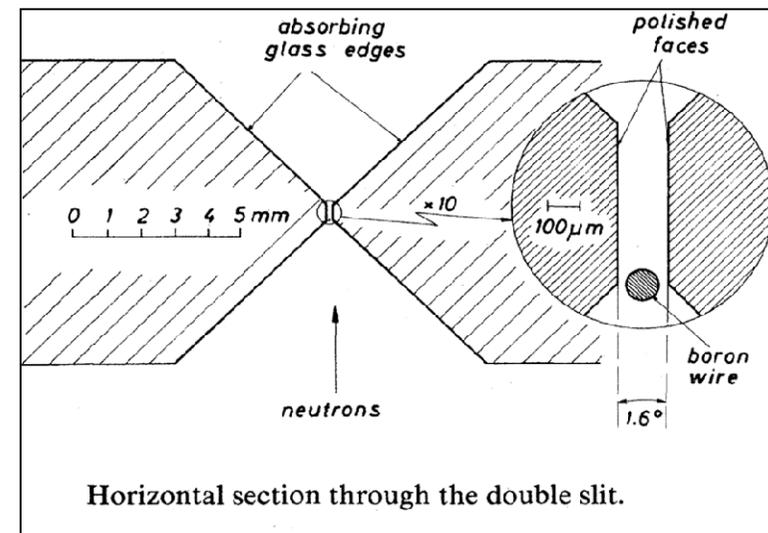


**Experiment mit langsamen Neutronen**  
 ( $v=200\text{m/s}$ ,  $\lambda_{dB}\sim 2\text{ nm}$ )

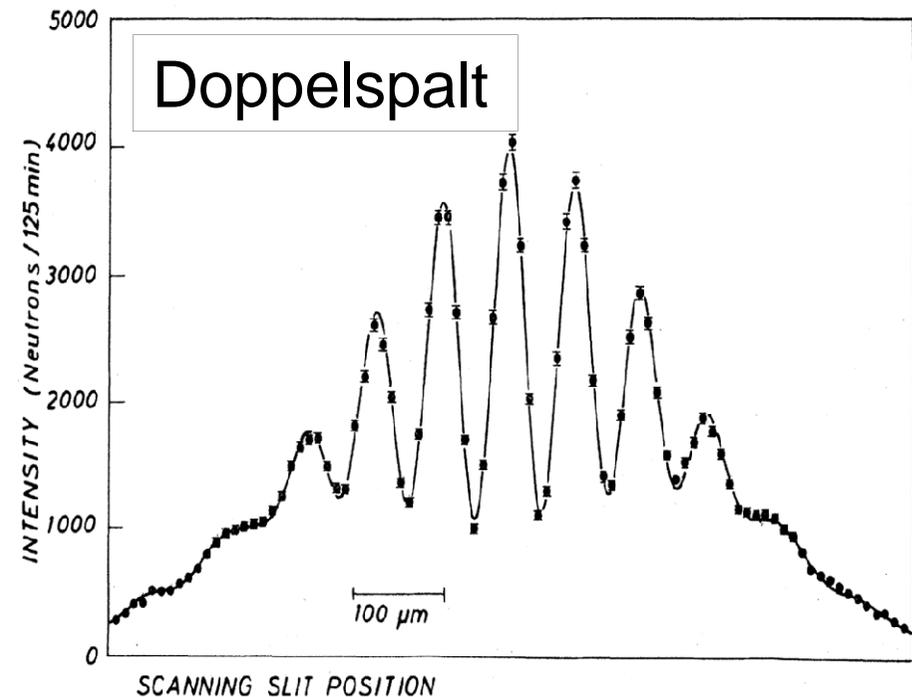
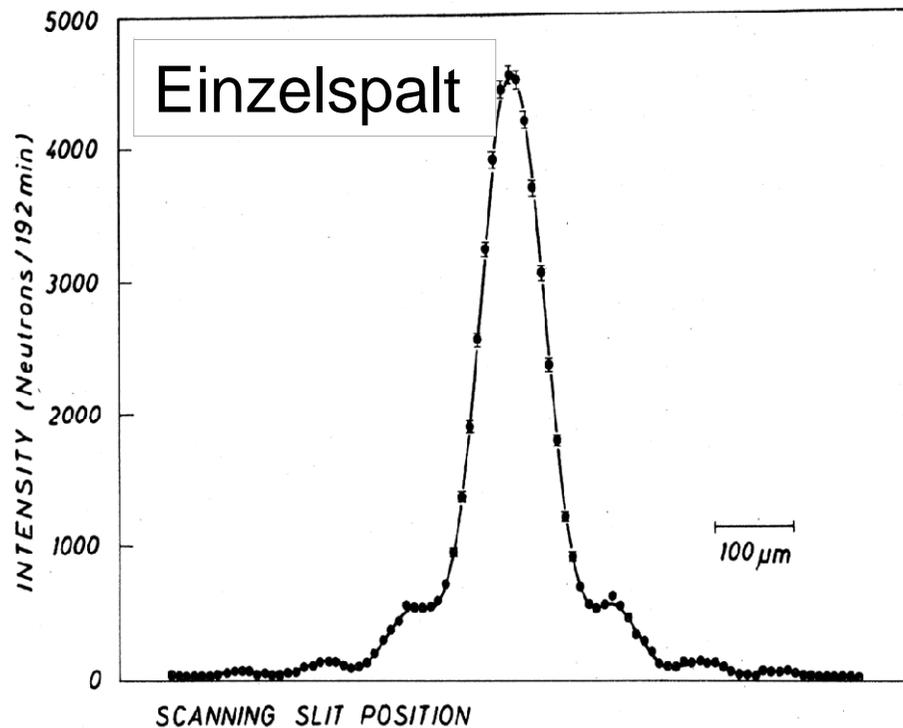
**Doppelspalt:** 23 mm bzw. 22 mm breit  
 104 mm Abstand

**Beugungswinkel  $\sim 50\text{ mrad}$  ( $\sim 10''$ )**

A. Zeilinger et al. Rev. Mod. Phys. 60, p.1067 (1988)



# Einzel und Doppelspalt Beugung von Neutronen



**Durchgezogene Linie: Vorhersage der (linearen) Quantenmechanik (unter Berücksichtigung aller Parameter wie Geometrie, Geschwindigkeitsverteilung etc ...)** A. Zeilinger et al. Rev. Mod. Phys. 60, p.1067 (1988)

# Welle-Teilchen Dualismus

---

---

De Broglies Erklärung für die Quantisierung der Atomniveaus und die Interferenzpatrone der Teilchen (Davisson, Germer, Doppelspalt) beweisen eindeutig den Wellencharakter. Jedoch ist das Elektron auch ein Teilchen mit wohl definierter Masse und Ladung, das eindeutige Spuren e.g. in einem Nebelkammer hinterlässt. Wie kann man diese Eigenschaften vereinen?

**Wie ist Bahn des Teilchens mit Fortpflanzung der Welle verknüpft?**

Teilchen:  $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2 = E = hf$ ,  $mv = p = h/\lambda$ .

Die Geschwindigkeit der Welle wäre  $v = \lambda \cdot f = (h/mv) \cdot (\frac{1}{2}mv^2/h) = \frac{1}{2}v$ ,  
d.h. die Welle pflanzt sich nur mit halber Teilchengeschwindigkeit fort!  
**WAS IST FALSCH?**

# Lokalisierung eines Teilchens

---

Wenn ein Elektron ein wohldefinierter Impuls hat, dann hat es auch eine wohldefinierte Wellenlänge. Die einzige Wellengleichung für eine wohldefinierte Wellenlänge ist  $\psi(x,t) = A \sin(kx - \omega t)$

mit  $k = 2\pi/\lambda$ , and  $\omega = 2\pi f$ .

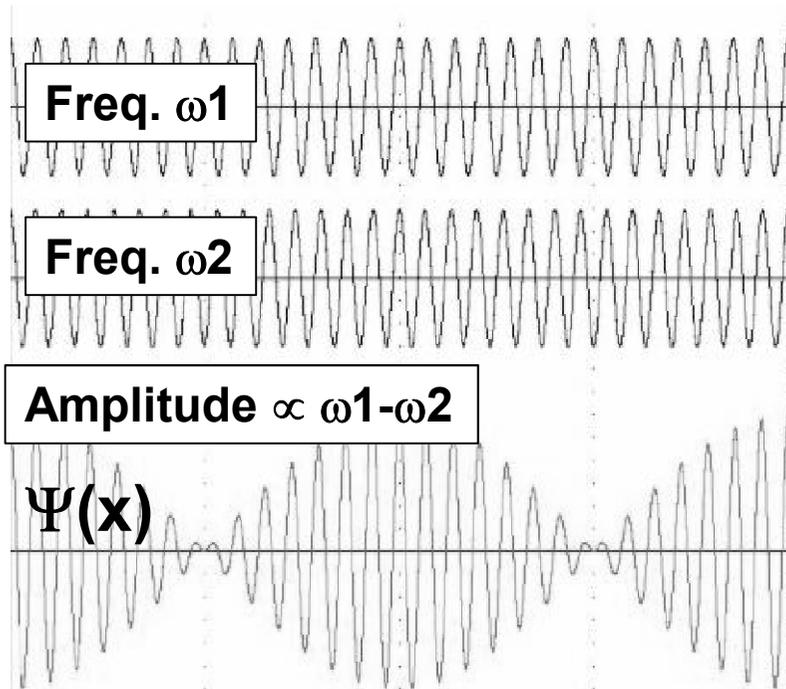
**Das Problem: die Amplitude geht nicht gegen Null im Unendlichen, d.h. das Teilchen ist nicht lokalisiert!**

**Lösung des Problems:**

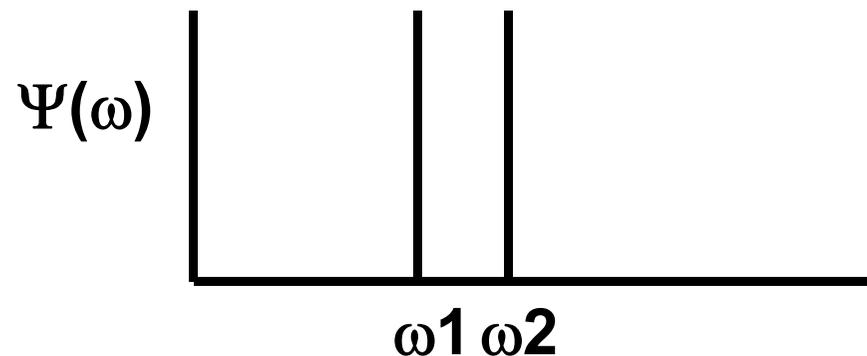
**Wellen können interferieren wenn die Impulse -und damit die Wellenlängen – NICHT scharf definiert sind.**

**Dann Teilchen lokalisiert in einem Wellenpaket. Wenn Teilchen sehr scharf lokalisiert, muss Unsicherheit im Impuls groß sein. Dies ist Prinzip der Heisenbergschen Unsicherheitsrelation.**

# Superposition von zwei Wellen



Man kann Resultat der Interferenz entweder im Ortsraum oder im Frequenzraum (oder k-Raum oder Impulsraum) darstellen, wobei  $k=2\pi/\lambda=p/\hbar$



X-Raum:  $\Psi(x,t)$

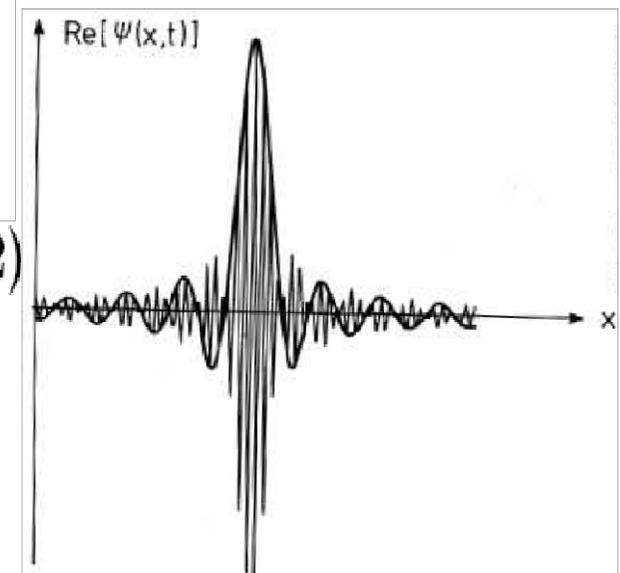
Frequenz-Raum  $\Psi(\omega,t)$  oder  $\Psi(k,t)$

Es reicht wenn ich Amplituden und Frequenzspektrum angebe, also  $\Psi(k,t)$ .  
um  $\Psi(x,t)$  auszurechnen. Beide Darstellungen völlig equivalent. Transformation vom Ortsraum zum Impulsraum oder umgekehrt, nennt man Fouriertransformation

# Superposition unendlich vieler Wellen

$$\Psi(x,t) = \int_{k_0-\Delta k}^{k_0+\Delta k} a \exp[i(kx - \omega t)] dk \quad (1)$$

Fouriertrafo  
vom Orts- zum  
Impulsraum  
für  $t=0$ !



Reihenentwicklung von  $\omega$  um  $k_0$  mit  $k = k_0 + k - k_0$  (2)

$$\text{ergibt : } \omega = \omega_0 + \frac{d\omega}{dk}(k - k_0) \equiv \omega_0 + \omega' \xi \quad (3)$$

(3) + (2) in (1) ergibt:

$$\begin{aligned} \Psi(x,t) &= a \exp[-i(\omega_0 t - k_0 x)] \int_{-\Delta k}^{\Delta k} \exp[-i(\omega' t - x)\xi] d\xi \\ &= a \exp[i(\omega_0 t - k_0 x)] \cdot 2 \frac{\sin(\omega' t - x)\Delta k}{(\omega' t - x)} \end{aligned}$$

$$\left( \text{Benutze : } \int_{-\Delta x}^{\Delta x} \exp(-i\alpha x) dx = -\frac{1}{i\alpha} [\exp(-i\alpha\Delta x) - \exp(i\alpha\Delta x)] = 2 \frac{\sin \alpha \Delta x}{\alpha} \right)$$

# Gruppengeschwindigkeit = Teilchengeschwindigkeit

---

Wellenpakete stark lokalisiert im Bereich  $x = \omega' t$ : Maximum bewegt sich mit der Geschwindigkeit

$$\omega' = \frac{d\omega}{dk} = \frac{\partial E}{\partial p} = \frac{\partial \frac{p^2}{2m}}{\partial p} = \frac{p}{m} = v_{\text{Teilchen}}$$

D.h. die Gruppengeschwindigkeit des Wellenpaketes entspricht der Teilchengeschwindigkeit  $v_T = \frac{p}{m}$ ;

die Welle selbst pflanzt sich mit Phasengeschwindigkeit  $v_p = \frac{\omega}{k}$  fort.

d.h. Gruppengeschwindigkeit =  
2x Phasengeschwindigkeit  
für ein Elektron wegen  
Dispersionsrelation:  $\omega = \omega(k)$

$$\begin{aligned} \text{(Gilt auch relativistisch: } \omega' &= \frac{d\omega}{dk} = \frac{dE}{dp} = \frac{d\sqrt{p^2 + m^2}}{dp} = \\ &= \frac{1}{2} (p^2 + m^2)^{-\frac{1}{2}} 2p = \frac{p}{E} = \beta = \frac{v}{c}). \end{aligned}$$

[http://galileoand einstein.physics.virginia.edu/more\\_stuff/Applets/sines/GroupVelocity.html](http://galileoand einstein.physics.virginia.edu/more_stuff/Applets/sines/GroupVelocity.html)

# De Broglie Wellen

---

Wiederholung: Ebene, monochromatische Welle in x-Richtung:

$$\psi(x, t) = Ae^{i\varphi}, \quad \varphi = kx - \omega t = \text{Phase}$$

Die vorkommenden Größen

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= h\nu = \hbar\omega \\ \mathbf{p} &= h/\lambda = \hbar k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Kreisfrequenz: } \omega &= 2\pi\nu \\ \text{Wellenzahl } k &= |\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda} \end{aligned}$$

sind grundsätzlich unabhängig voneinander definiert.

Ebene Flächen mit konstanter Phase propagieren mit:

$$v_{\text{ph}} = \frac{\omega}{k} \quad \text{„Phasengeschwindigkeit“}$$

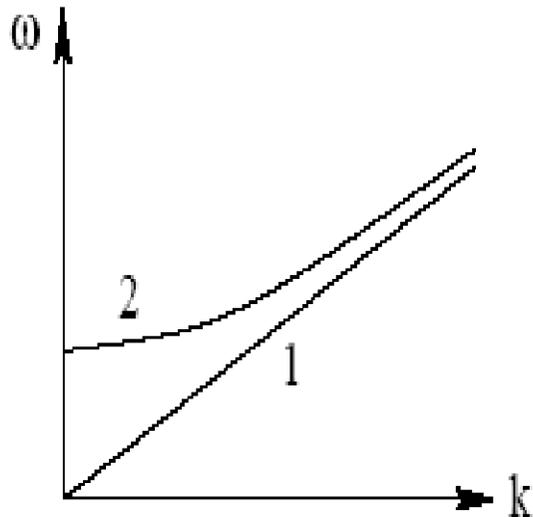
Zusätzlich wird später benötigt werden:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \quad \text{„Gruppengeschwindigkeit“}$$

Der Zusammenhang

$$\omega = \omega(k) \quad \text{heißt } \textit{Dispersionsrelation}.$$

# De Broglie Wellen



- Wenn  $v_{\text{ph}} = \text{const.}$ , unabhängig von  $\omega$ , ist die Welle *dispersionsfrei*; die Dispersionsrelation ist linear (Beispiel 1).
- Wenn  $v_{\text{ph}} = v_{\text{ph}}(\omega)$ , zeigt die Welle *Dispersion*; die Dispersionsrelation ist nichtlinear (Beispiel 2). Dies ist der Normalfall in der Natur.

Dispersionsfreie Wellen sind z.B. EM-Wellen in Vakuum. Wellen mit Dispersion sind z.B. Wasserwellen, EM-Wellen in Materie, schwingende Pianosaiten und de Broglie-Wellen

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 \quad \text{oder} \quad (\hbar \omega)^2 = (\hbar k)^2 c^2 + m^2 c^4$$

Für  $m=0$  dispersionsfrei, sonst  $\hbar \omega = mc^2$  für  $k=0$

# Heisenbergsche Unschärferelation (i)

---

$\Psi(x) \sim \frac{\sin(x\Delta k)}{x}$  für feste zeit, z.B.  $t = 0$  :

Ortsunsicherheit  $\geq$  Abstand zwischen Minima, d.h.  $\boxed{x_1\Delta k - x_2\Delta k = 2\pi}$

$\frac{\Delta x}{2} \geq \frac{\pi}{\Delta k}$  oder mit  $p \equiv \hbar \cdot k = \frac{hk}{2\pi}$

$$\boxed{\Delta x \Delta p \geq \hbar}$$

Äquivalent:  $\Psi(t) \sim \sin \omega' t \Delta k$  für einen festen Ort, z.B.  $x = 0$ ,  
d.h.  $\omega' t \Delta k = t \Delta \omega$  ergibt mit  $E = \hbar \omega$  wie oben :

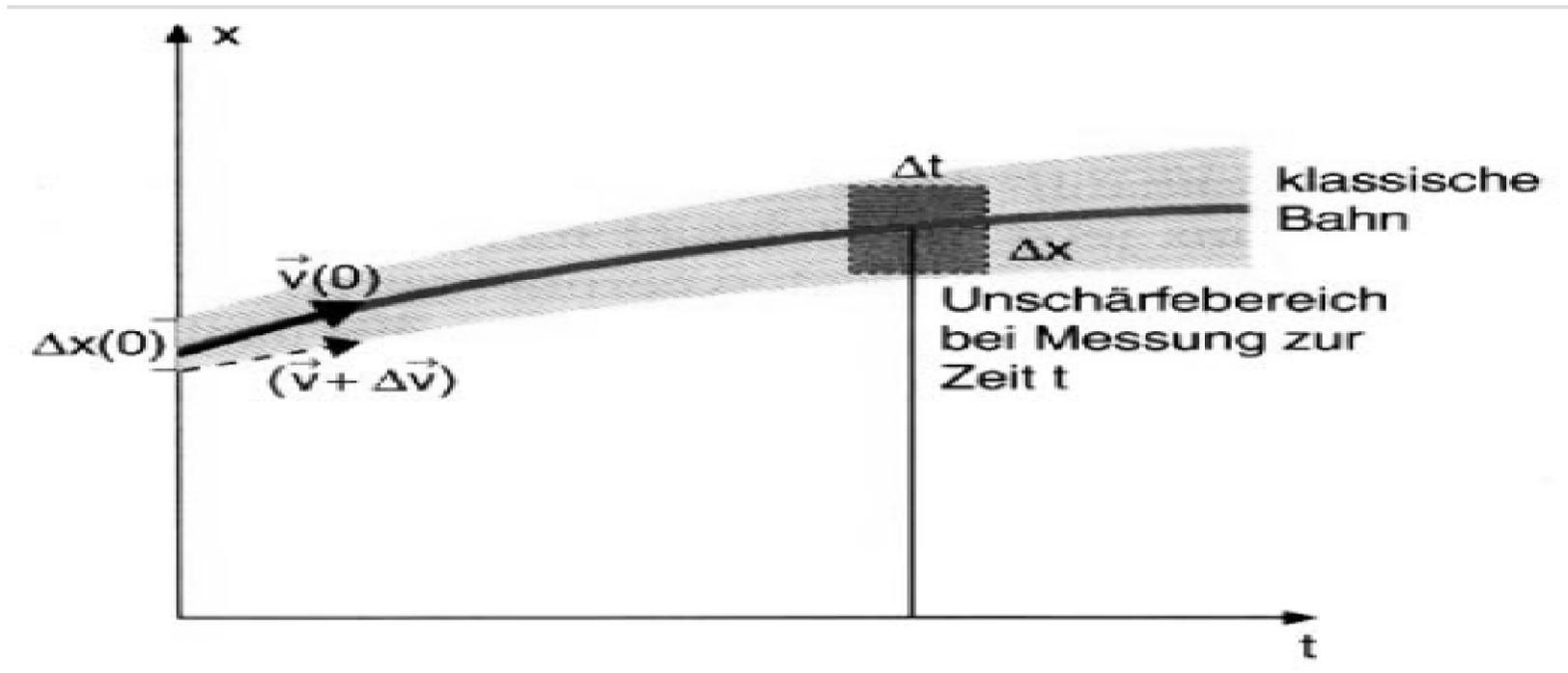
$$\boxed{\Delta E \Delta t \geq \hbar}$$

## Heisenbergsche Unschärferelation (II)

---

Die Physik dahinter: Um den Ort zu bestimmen, muss man das Objekt "sehen", d.h. mit Photonen bestrahlen. Dies führt jedoch zu einer merklichen Impulsänderung durch den "Photonendruck", wodurch sich das Objekt wegbewegt, wenn es sehr klein ist. Eine Ortsunschärfe ist bei gegebenem Impuls die Folge. Um die Energie zu bestimmen, braucht man eine gewisse Zeit, d.h., dass sich zum Beispiel bei einer sehr kurzen Lebensdauer  $\tau$  die Energie und damit die Masse eines Teilchens nur mit einer Präzision der Ordnung von  $\Delta E = \frac{h}{\tau}$  bestimmen lässt.

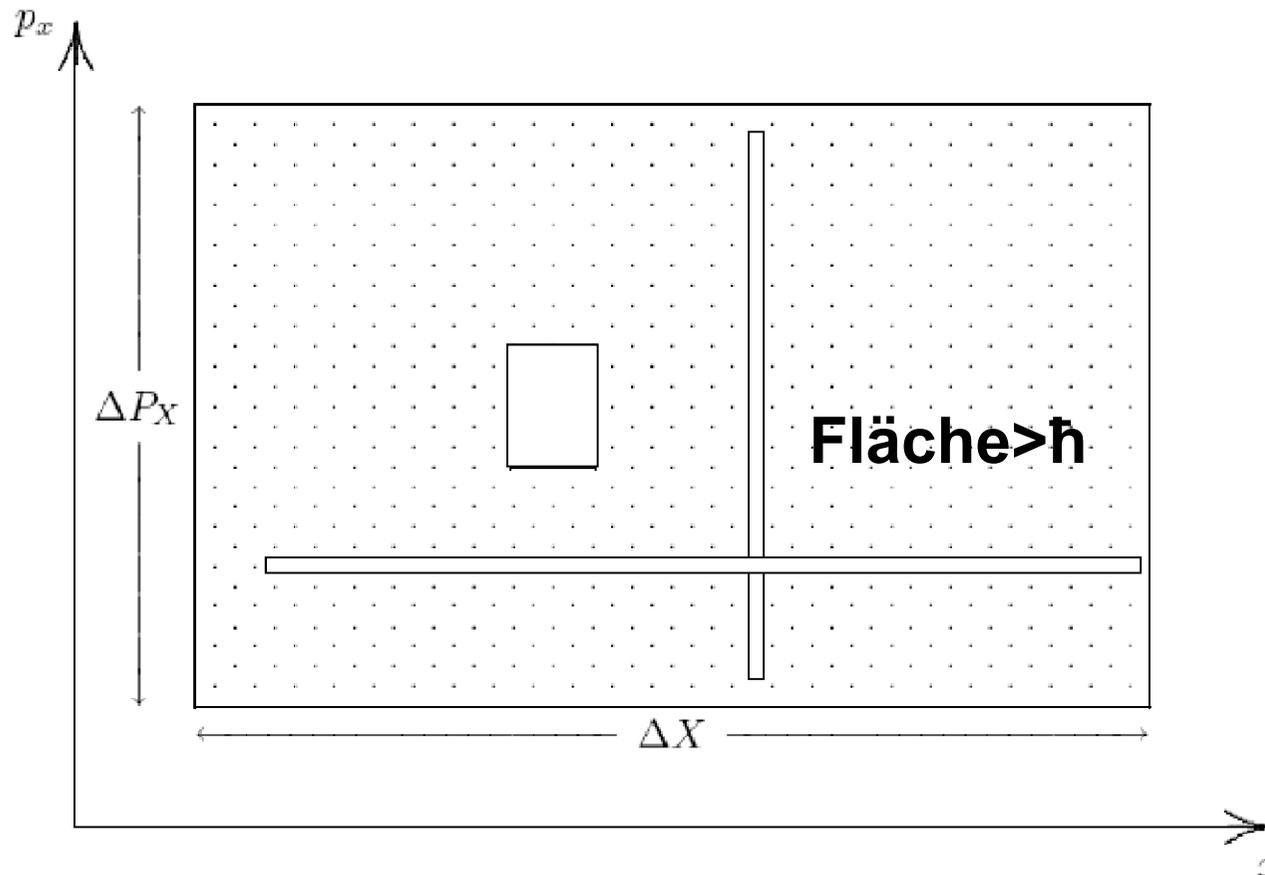
# Heisenbergsche Unschärferelation (III)



Unbestimmtheitsgrenze der Teilchenbahn durch die Unschärfe  $\Delta x$ ,  $\Delta p$  der Anfangsbedingungen und durch die Unschärfe bei der Messung des jeweiligen Teilchenortes und des Zeitpunktes der Messung.

Jede Messung von  $x$  und  $p$  ändern den Zustand des Mikroteilchens

# Unschärferelation im Phasenraum



Phasenraumpunkt  $[dx, dy, dz, dp_x, dp_y, dp_z]$  nicht beliebig genau zu bestimmen:  $\Delta x \Delta p_x > h$     $\Delta y \Delta p_y > h$     $\Delta z \Delta p_z > h$

# Unschärfe der Unschärferelation

---

---

Viele Bücher ergeben:  $\Delta x \Delta p \geq \hbar$  statt  $h$ .  
Was ist der Unterschied?

Bei einem Gauss-förmigen Wellenpaket wird die Unschärfe MINIMAL (mathematisch zu beweisen) aber wie groß ist die Unschärfe?

Eine Standardabweichung oder ein Abstand bei dem die Wahrscheinlichkeit auf  $1/\sqrt{e}$  gefallen ist oder ...?  
Unschärfe ist unscharf definiert!

$\Delta x$ =Abstand zwischen Beugungsminima->  
 $\Delta x \Delta p \geq h$   
(Heisenberg)

Gauss-förmige Wellenpakete:  
 $\sigma_x \sigma_p \geq \hbar$

# Überlagerung Gausscher Wellenpakete

Überlagerung unendlich vieler Wellen entspricht das Integral über  $\infty$  vielen Wellenlängen oder Impulse ( $p=\hbar k=h/\lambda$ ). Dies ist eine Fourier transformation:

$$u(x, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k) \exp\{ikx\} dk \quad \text{mit} \quad A(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, 0) \exp\{-ikx\} dx.$$

Liegt als Anfangsbedingung eine Gauss-Kurve vor

$$u(x, 0) = u_0 \exp\left\{-\frac{x^2}{2b^2}\right\}, \quad \text{so ist} \quad A(k) = \frac{u_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{x^2}{2b^2} - ikx\right\} dx = u_0 \frac{b}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{b^2}{2} k^2\right\}$$

ebenfalls eine Gauss-Kurve, denn es ist  $\int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-px^2 + qx\} dx = \sqrt{\frac{\pi}{p}} \exp\left\{\frac{q^2}{4p}\right\}$ . **Wichtig!**

**Die Fouriertransformierte einer Gauss-förmigen Amplitudenverteilung mit Standardabweichung  $\sigma$  ergibt im Impulsraum wieder eine Gauss-Form, jedoch mit Standardabweichung  $1/\sigma$  !**

**So  $\sigma_x \sigma_k \geq 1$  oder  $\sigma_x \sigma_p \geq \hbar$**

<http://www.itkp.uni-bonn.de/~metsch/pdm/pdmquant.html>

# Beispiel für Anwendung der Unschärferelation

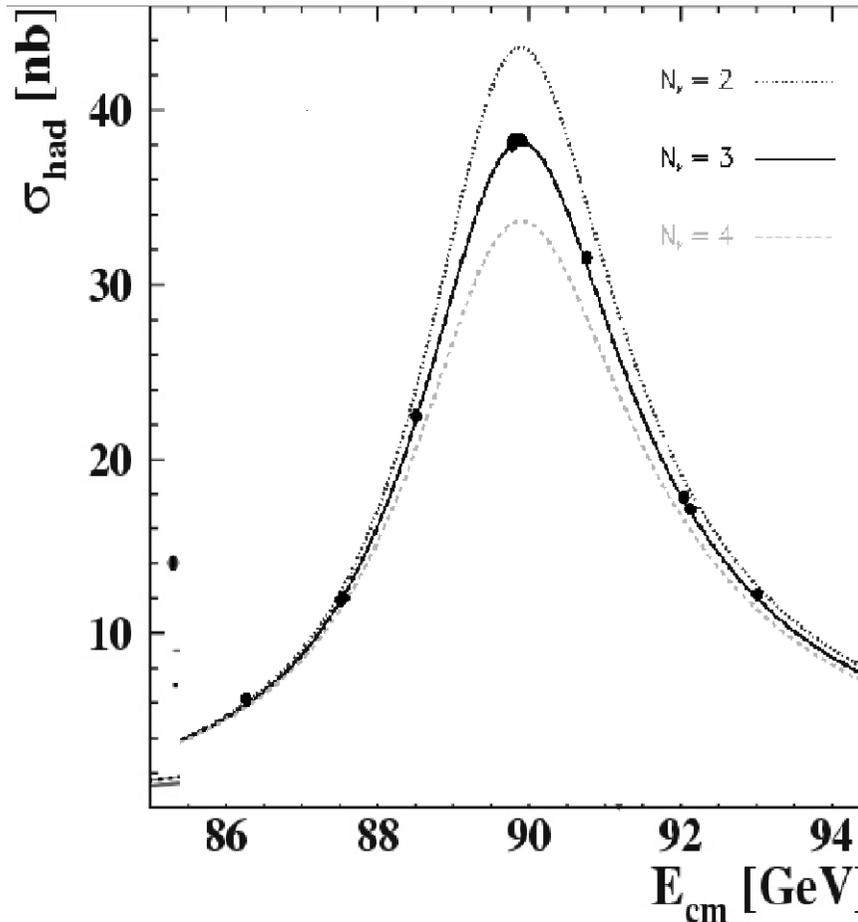
$Z^0$ - Bosonen (neutrale Austauscheteilchen der schwachen Wechselwirkung) werden in der  $e^+e^-$  - Annihilation erzeugt.  
 Der Wirkungsquerschnitt ist eine Funktion der Schwerpunktenergie  $\Gamma_s : \sigma \propto \frac{1}{(s-M_2^2)^2 + \Gamma^2 M_2^2}$  (Breit-Wigner-Formel).  
 Die Breite der Resonanzkurve  $\Gamma$  entspricht der Unschärfe der Energie, d.h.

$$\boxed{\Gamma = \frac{\hbar}{\tau}}$$

Daher kann man aus der Breite die Lebensdauer  $\tau \approx 10^{-23}$ s bestimmen.  
 $\tau$  wird durch die Zerfallsmöglichkeiten des  $Z^0$ - Bosons bestimmt .  
 Das  $Z^0$ - Boson zerfällt u.a. in unsichtbare (= nicht messbaren) Neutrinos  
 $\rightarrow \tau = f(N_\nu)$ . Aus der Messung von  $\Gamma$  folgt :  $N_\nu \cong 2,99 \pm 0,01$ .  
 $\rightarrow$  Es gibt nur drei Familien von Elementarteilchen  
 (falls alle Neutrinos  $m_\nu < \frac{M_Z}{2}$  haben).

$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \cancel{\nu_x} \\ \cancel{\cancel{x}} \end{pmatrix}$
Quarks			Leptonen			<u>existiert nicht!</u>

# Wirkungsquerschnitt $e^+e^- \rightarrow \text{Quarks}$ $Z^0$ Resonanz versus Schwerpunktsenergie



**Es gibt nur  
DREI leichte  
Neutrinos!**

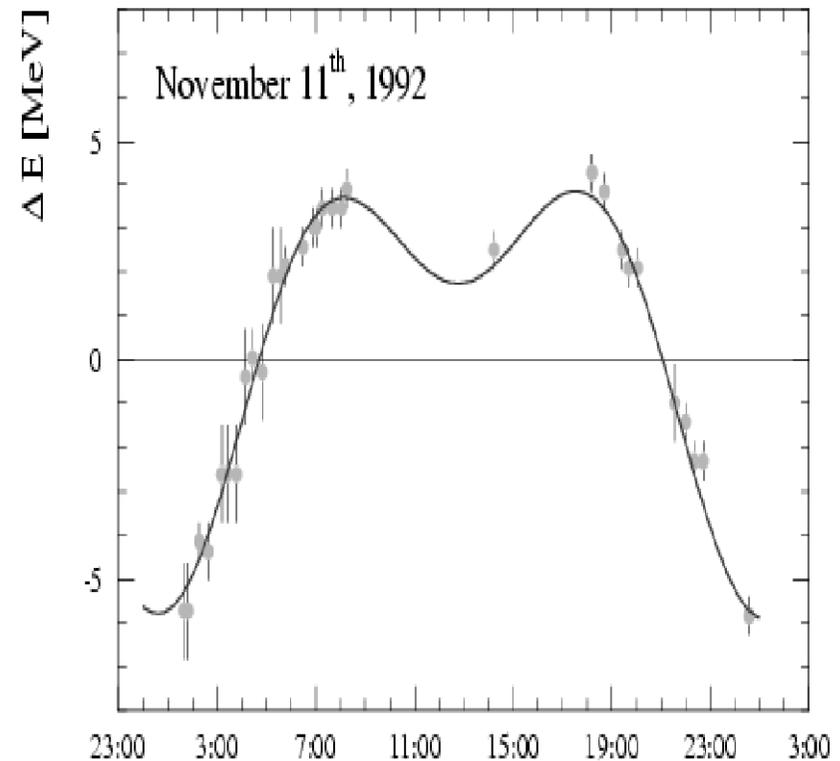
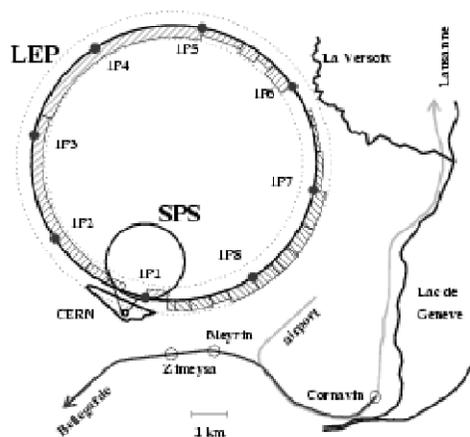
**Und daher  
nur DREI  
Generationen  
von Quarks  
und Leptonen!  
(falls alle  
Neutrinos fast  
masselos sind)**

**Peak hängt von der totalen Breite  $\Gamma_Z$  ab.  
 $\Gamma_Z = \hbar / \text{Lebensdauer} = F(\text{Anzahl der Neutrinos})$   
 (aus  $\Delta t = \text{Lebensdauer}$ ,  $\Gamma_Z = \Delta E$  und  $\Delta E \Delta t = \hbar$ )**

# Experimentelle Kuriositäten am LEP Beschleuniger: Einfluss des Mondes und Störungen durch TGV



Vacuum Chamber Current Correlation



# Zum Mitnehmen

---

---

**Teilchen mit Impuls  $p$  benehmen sich bei kleinen Abständen wie Wellen.**

**Wellen mit Wellenlänge  $\lambda$  benehmen sich bei kleinen Abständen wie Teilchen.**

**Zusammenhang zwischen Wellenlänge und Impuls:**

$$\lambda = h/p \text{ (de Broglie)}$$

**Teilchencharakter der Strahlung führt zu Störungen bei der Beobachtung. Dies führt zu:**

$$\Delta x \Delta p \geq \hbar \text{ (Heisenbergsche Unsicherheitsrelation)}$$

**d.h. man kann nicht beliebig genau ORT und IMPULS bestimmen Gleiche gilt für ENERGIE und ZEIT.**