

VL11. Das Wasserstoffatom in der QM II

11.1. Energiezustände des Wasserstoffatoms

11.2. Radiale Abhängigkeit (Laguerre-Polynome)

VL12. Spin-Bahn-Kopplung (I)

12.1 Bahnmagnetismus (Zeeman-Effekt)

12.2 Spinmagnetismus (Stern-Gerlach-Versuch)

VL13. Spin-Bahn-Kopplung (II)

13.1 Landé-Faktor (Einstein-deHaas Effekt)

13.2 Anomaler Zeeman-Effekt

13.3. Berechnung des Landé-Faktors

VL14. Atome in einem starken Magnetfeld

14.1. Paschen-Back Effekt

14.2. Das Experiment von Lamb und Retherford

14.3. Elektronspin-Resonanz

14.4. Kernspin-Resonanz

Vorlesung 12

Roter Faden:

Bahnmagnetismus (Zeeman-Effekt)
(Zeeman + Lorentz: Nobelpreis 1902)

Spinmagnetismus (Stern-Gerlach-Exp.)
(Stern: Nobelpreis 1943)

Folien auf dem Web:

<http://www-ekp.physik.uni-karlsruhe.de/~deboer/>

Siehe auch: Demtröder, Experimentalphysik 3, Springer-Verlag

Und http://www.ipf.uni-stuttgart.de/lehre/online-skript/f30_11.html

Räumliche Einstellung eines Drehimpulses

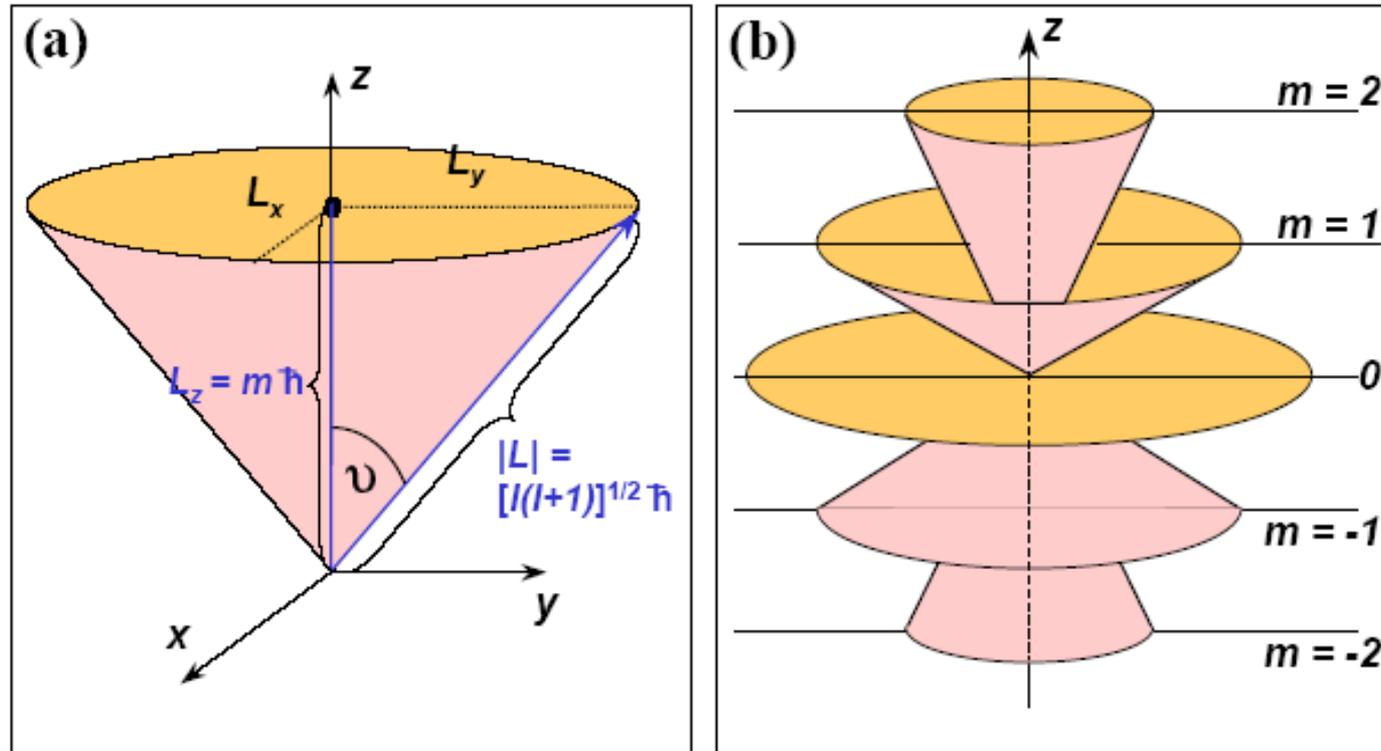


Abbildung 3.11: (a) Räumliche Einstellung eines Drehimpulses. (b) Einstellmöglichkeiten des Drehimpulses \mathbf{L} mit der Quantenzahl $l = 2$. L_x und L_y sind unbestimmbar, nachdem $|L|$ und L_z festgelegt wurden und liegen auf Kegelmänteln.

Eigenfunktionen des Drehimpulsoperators sind die Kugelflächenfunktionen. Für jedes Paar Quantenzahlen l, m gibt es eine eigene Funktion $Y_{l,m}(\theta, \varphi)$ (später mehr)

Idee

Ein Elektron mit Drehimpuls entspricht einem Strom, der ein Magnetfeld erzeugt, d.h. Elektron sollte sich wie ein Kompassnadel im Magnetfeld benehmen.

Wenn der Drehimpuls richtungsquantisiert ist, dann müsste dies zu diskrete Orientierungen der Atome in einem Magnetfeld führen und dementsprechend diskrete Energieniveaus, da ein Kompassnadel parallel zu einem Magnetfeld eine geringere Energie hat als ein Kompassnadel antiparallel zu dem Magnetfeld.

Zeeman hat diese diskrete Energieaufspaltung in einem Magnetfeld zuerst beobachtet und dafür den Nobelpreis bekommen (1902).

Die Welt war jedoch komplizierter als anfänglich gedacht: es gibt nicht nur ein Magnetfeld durch die Bewegung der Elektronen (Bahndrehimpuls), sondern auch noch einen Eigendrehimpuls (Spin) des Elektrons. Beweis durch den Stern-Gerlach Versuch in 1923, Nobelpreis für Stern in 1943 (Stern flüchtete vor dem Krieg in die USA, Gerlach blieb im Nazi-Deutschland, daher wurde der Stern-Gerlach Versuch in der Nobelpreisrede nicht erwähnt)

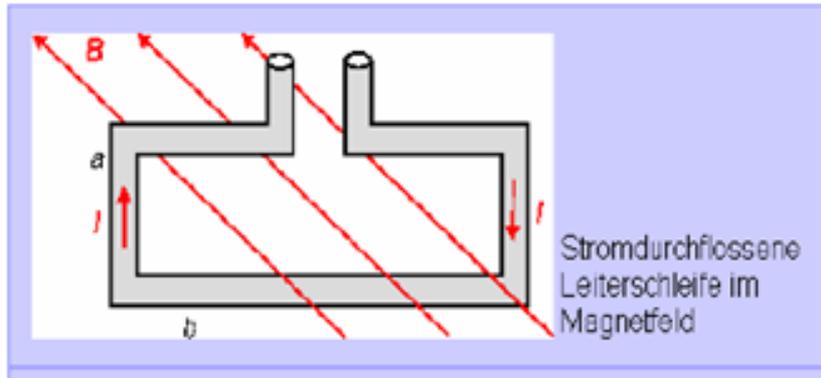
Potentielle Energie im Magnetfeld

Das Drehmoment auf eine Leiterschleife durch die Lorentz-Kraft ist:

$$T = 2a \frac{b}{2} \sin \alpha I ab B$$

Mit dem Flächenvektor \vec{A} :

$$\vec{T} = I \vec{A} \times \vec{B}$$



$$V_{\text{pot}} = - \int \vec{T} d\alpha = - \int I \vec{A} \times \vec{B} d\alpha = - \int \vec{p} \times \vec{B} d\alpha =$$

$$\int -|\vec{p}||\vec{B}| \sin \alpha d\alpha = - |\vec{p}||\vec{B}| \cos \alpha = -\vec{p} \cdot \vec{B}$$

mit $\vec{p} = I \vec{A} =$ magnetisches Moment (auch oft Symbol μ)

Kraft im Magnetfeld $\equiv dV/dz = \nabla V = \nabla \vec{p} \cdot \vec{B} = \vec{p} \cdot \nabla \vec{B}$
(brauche also inhomogenes B-Feld um Kraft auszuüben)

Bahnmagnetismus (klassisches Modell)

Elektron auf Kreisbahn mit Frequenz $\nu = v/2\pi r \rightarrow$ elektr. Strom

$I = -e \cdot \nu = -e \cdot v/2\pi r \rightarrow$ magnetisches Moment

$$v = \frac{2\pi r}{t}$$

$\vec{p}_m = I \cdot \vec{A} = I \cdot \pi r^2 \hat{n} = -e \cdot v(r/2) \cdot \hat{n}$ mit

$$f=1/t$$

$\vec{A} = \pi r^2 \hat{n}$ Flächennormale senkrecht zu πr^2

Bahndrehimpuls des Elektrons: $\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p} = m_e \cdot r \cdot v \cdot \hat{n}$

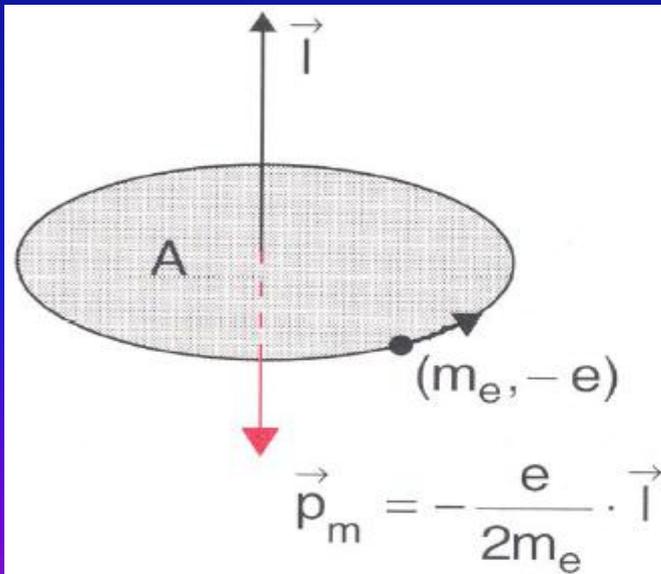
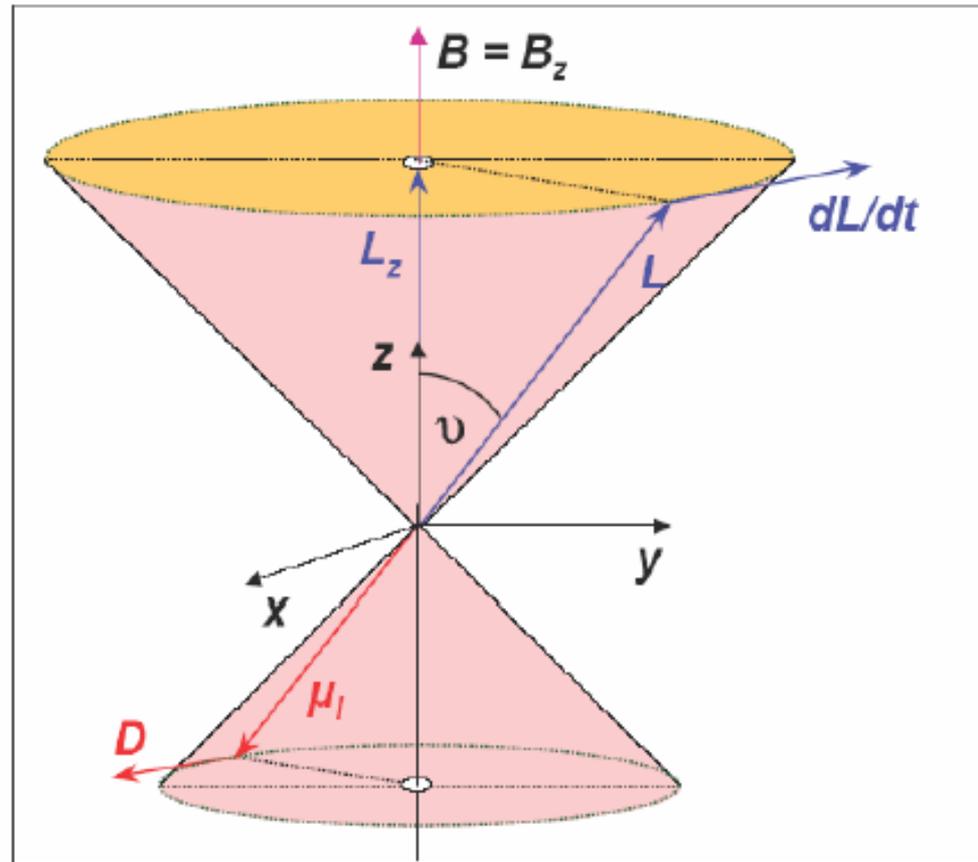


Abb. 5.8. Klassisches Modell für Drehimpuls \vec{l} und magnetisches Moment \vec{p}_m eines auf einer Kreisbahn umlaufenden Atoms

Normaler Zeeman-Effekt



Klassisch: drehendes Elektron \rightarrow magnetisches Moment $p \propto L$
QM: Quantisierung von $L \rightarrow$ Quantisierung von $p \rightarrow$
'Kompassnadel' hat nur bestimmte Einstellungen und Energien!

“Normaler” Zeeman-Effekt (Atome ohne Elektronenspin)

Bahnmagnetismus \propto Drehimpuls + Quantisierung des Drehimpulses
 \Rightarrow Aufspaltung in diskrete Energieniveaus in äußerem Magnetfeld
 \Rightarrow Zeeman-Effekt

Es ergibt sich. $\vec{p}_m = -\frac{e}{2m_e} \cdot \vec{l}$

Magnetische Moment \vec{p}_m proportional zu Bahndrehimpuls \vec{l}

In äußeren Magnetfeld \vec{B} ist die potentielle Energie:

$$E_{pot} = -\vec{p}_m \cdot \vec{B} = +\frac{e}{2m_e} \cdot \vec{l} \cdot \vec{B}$$

B in z-Richtung $\vec{B}(0, 0, B_z = B)$ wegen $l_z = m \cdot \hbar$

$$E_{pot} = \frac{e\hbar}{2m_e} \cdot m \cdot B \quad \text{Bohr Magneton: } \mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 9,2732 \cdot 10^{-24} \frac{\text{J}}{\text{T}}$$

m.... *magnetische Quantenzahl*; $-l \leq m \leq +l$

Nobelpreis Zeeman

Pieter Zeeman (1865 - 1943), Nobelpreis für Physik 1902:

Pieter Zeeman wurde am 25. Mai 1865 in Zonnemaire geboren.

Er war seit 1900 Professor in Amsterdam. Auf Anregung von Lorentz entdeckte er 1896 den magnetooptischen Effekt der Aufspaltung von Spektrallinien (bei Natrium, und später bei Zink und Cadmium) in mehrere eng benachbarte Linien, welche Michael Faraday vergeblich gesucht hatte. Mit einem Spektralapparat großer Auflösung entdeckte er, dass die Größe des Linienabstandes proportional der magnetischen Feldstärke ist. Dieser später nach ihm benannte Zeeman-Effekt wurde zur Erforschung der Feinstruktur der Atome herangezogen. Hendrik Lorentz fand eine klassische Erklärung dieses Effektes, nach der jede Spektrallinie eines Atoms in drei Komponenten aufspalten sollte. Dieses Lorentz-Triplett bezeichnete man als normalen Zeeman Effekt. Das Aufspalten von Atomen in kompliziertere Strukturen wurde aus historischen Gründen als anomaler Zeeman-Effekt bezeichnet. 1902 erhielten Lorentz und Zeemann für ihre Entdeckung den Nobelpreis für Physik.

Pieter Zeeman verstarb am 9. Oktober 1943 in Amsterdam.



<http://phys.educ.ksu.edu/vqm/html/zeemanspec.html>

“Normaler” Zeeman-Effekt

Proportionalitätsfaktor

$$\mu_B = \frac{e \cdot \hbar}{2m_e} = 9,274015 \cdot 10^{-24} \text{ J/T } \textit{Bohrsches Magneton} \quad (\text{J/T}=\text{Am}^2)$$

Äußeres Magnetfeld B bewirkt zusätzliche Energie eines Zustandes (n, l, m) : $\Delta E_m = \mu_B \cdot m \cdot B$

Terme des Wasserstoffatoms im Magnetfeld

$$E_{n,l,m} = E_{\text{Coul}}(n, l) + \mu_B \cdot m \cdot B$$

Entartung der $(2l+1)$ m -Zustände spalten durch Magnetfeld in $(2l+1)$ äquidistante Zeeman-Komponenten auf $\rightarrow \Delta E = \mu_B \cdot B$

Aufspaltung nennt man "normaler Zeeman Effekt"

Experimentelle Beobachtung: Emission oder Absorption von Licht durch Atome in Magnetfeld: Es treten nun Übergänge zwischen atomaren Zuständen mit $\Delta m = m_2 - m_1 = +1$ auf - zusätzliche Linien!

Anomaler Zeeman-Effekt berücksichtigt Spin (später mehr)

Zusammenfassung Zeeman-Effekt

Beobachtung von Zeeman 1896

Spektrallinien von Atomen im **Magnetfeld**:

- ▶ Spalten in 3 Linien auf (Triplets)
- ▶ Linienabstand wächst mit B
- ▶ Linienabstand ist für alle Atome gleich

Elektron auf Kreisbahn: **magnetisches Moment** ⇄

$$\vec{p}_m = -\frac{e}{2m_e} \vec{L}$$

Dadurch ändert sich potentielle Energie im Hamilton-Operator um ⇄

$$E_B = -\vec{p}_m \vec{B} = \frac{e}{2m_e} BL_z$$

Die Energieentartung der Zustände ist aufgehoben:

$$E_{nm} = E_n + \frac{eB}{2m_e} \hbar m = E_n + \mu_B B m$$

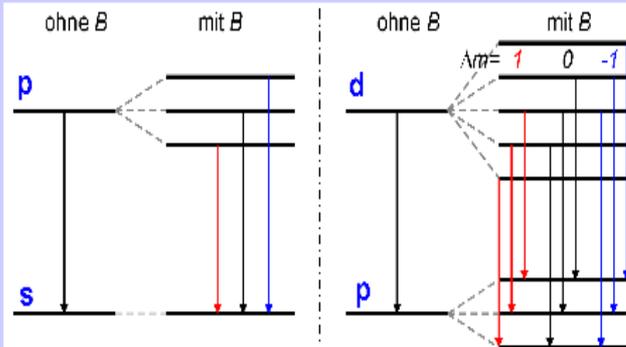
Mit dem **Bohr-Magneton**

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 9,2732 \cdot 10^{-24} \frac{\text{J}}{\text{T}}$$

Die **Zeeman-Aufspaltung** ist

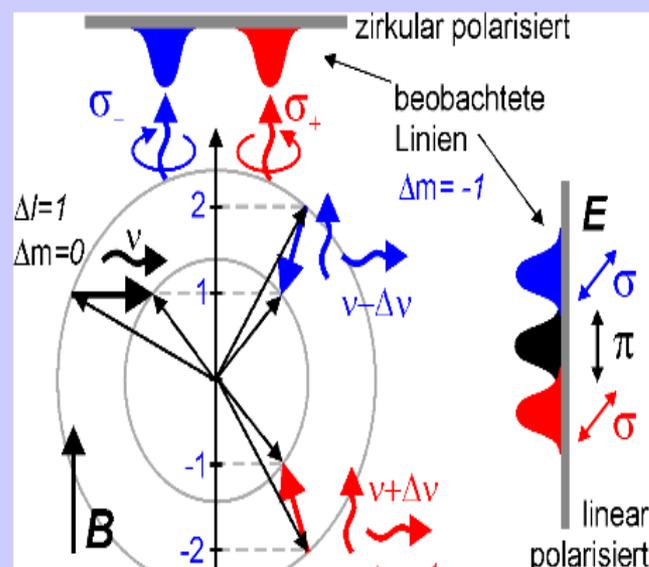
$$\Delta E = E_{n,m+1} - E_{n,m} = \mu_B B$$

Aufspaltung von Linien in Triplets



In beiden Fällen mit Magnetfeld werden Photonen mit drei unterschiedlichen Energien emittiert.

Beobachtete Linien



Der Elektronenspin (Eigendrehimpuls)

Experimentelle Befunde (Feinstruktur der Spektren, anormaler Zeeman Effekt, Stern Gerlach Versuch) Zeigen, dass Elektronen:

Masse m_0 Ladung $-e$ weitere charakteristische Eigenschaft besitzen
→ **Elektronenspin** → magnetisches Moment μ_s

Otto Stern²⁴ und **Walter Gerlach**²⁵ führten 1921 das nach ihnen benannte *Stern-Gerlach-Experiment* durch (vergleiche Physik III). Dieses Experiment zeigte klar, dass Elektronen außer ihrer Ladung $-e$ und ihrer Ruhemasse m_0 noch eine weitere Eigenschaft besitzen müssen, die wir Elektronenspin nennen. **Samuel A. Goudsmit** (1902-1978) und **George E. Uhlenbeck** (1900-??) stellten 1925 die Hypothese auf, dass freie Elektronen einen Eigendrehimpuls besitzen, den sie *Elektronenspin* S nannten. Im Stern-Gerlach Experiment wurden nur zwei mögliche Einstellungen der z -Komponente des Spins gefunden. Wir können den Spin freier Elektronen also mit der Spinquantenzahl $s = 1/2$ beschreiben. Etwas lax sagt man meist, dass Elektronen den Spin $1/2$ besitzen.

Es ist nun naheliegend, für den Betrag $|S|$ des Spins und seine Komponente S_z analoge Beziehungen wie für L und L_z anzunehmen (vergleiche (3.3.57) und (3.3.59)):

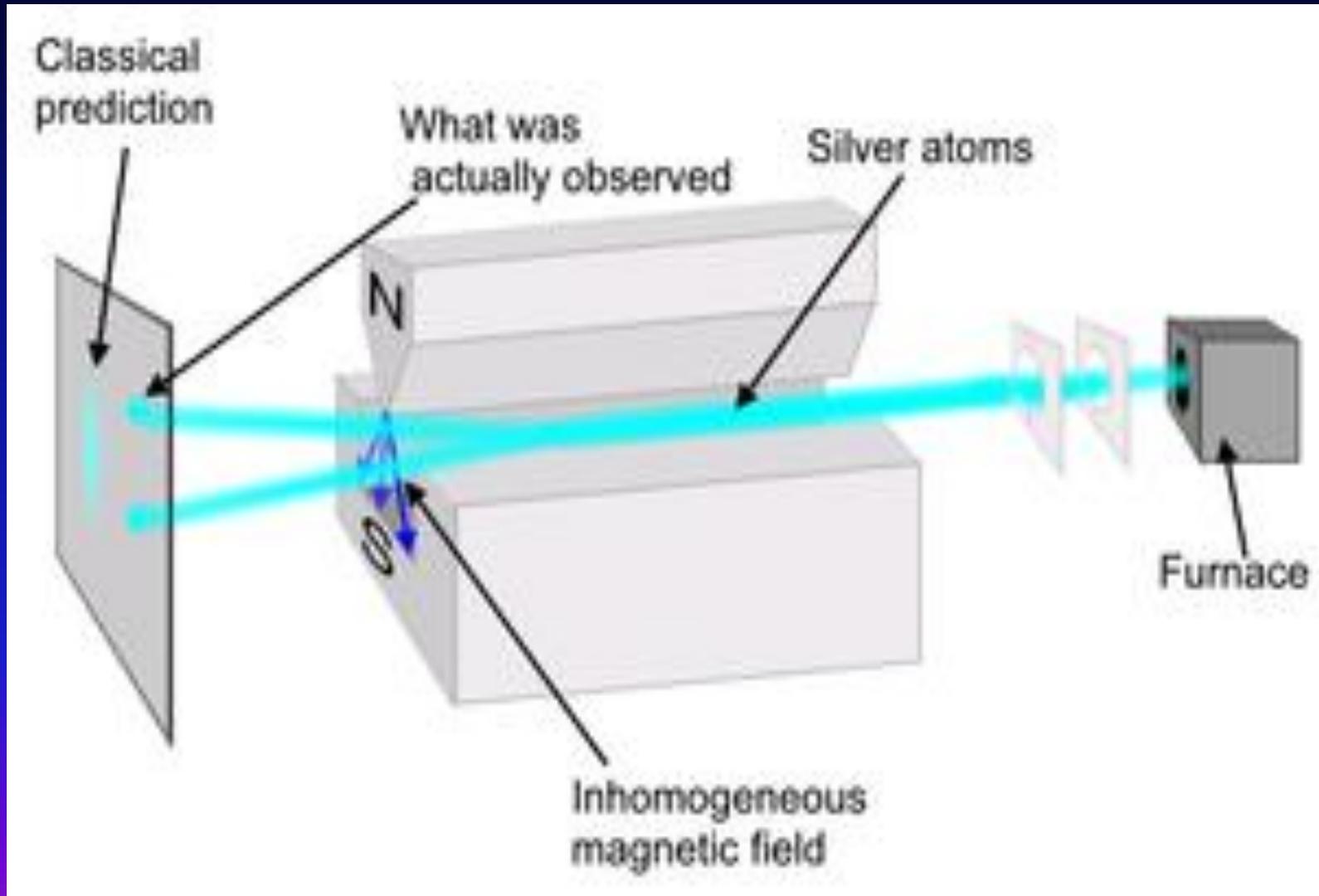
$$|S| = \sqrt{s(s+1)} \hbar = \sqrt{3/4} \hbar$$

$$S_z = m_s \hbar = \pm \frac{\hbar}{2} .$$

$$\hat{S} \times \hat{S} = i\hbar \hat{S} \quad (3.4.1)$$

$$(3.4.2)$$

Stern-Gerlach Effekt



Stern-Gerlach Effekt

Ablenkung von Ag-Atome in inhomogenen Magnetfeld

mit Magnetfeld gab es Aufspaltung der Verteilung der Ag-Atome →
ablenkende Kraft auf Ag-Atome → magnetisches Moment p_m

Kraft auf magnetischen Dipol im inhomogene Magnetfeld

$$\vec{F} = -p_m \cdot \text{grad} \vec{B}$$

Grundzustand Ag-Atom s-Zustand mit $l = 0$ kein magnetisches
Bahnmoment möglich!

Goudsmit + Uhlenbeck (1925): Hypothese "**Elektronen besitzen
Eigendrehimpuls**" - **Elektronenspin s** - ist mit magnetische
Moment μ_s

verknüpft. Nach Drehimpulsregeln gilt:

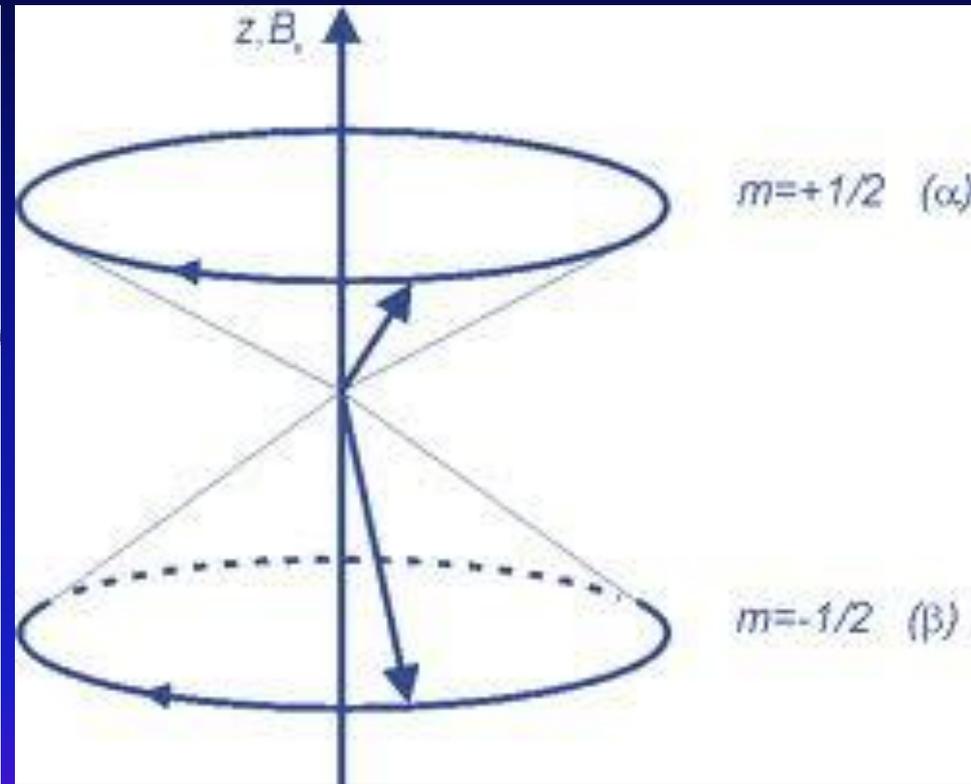
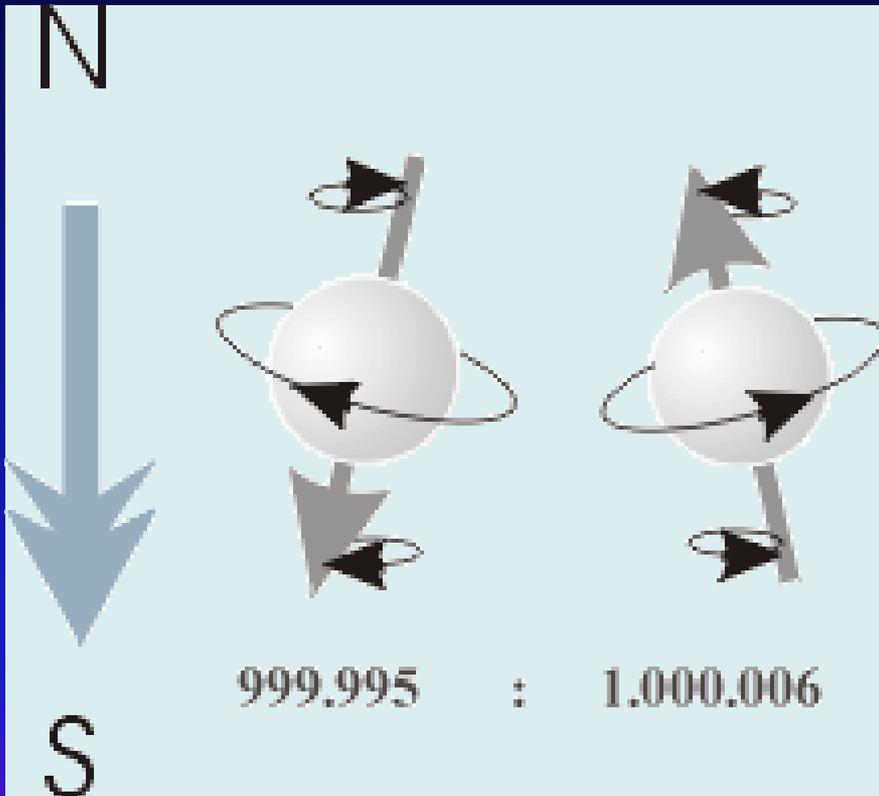
$$|\vec{s}| = \sqrt{s(s+1)} \hbar$$

Projektion auf z-Richtung $s_z = m_s \cdot \hbar \Rightarrow$ magnetische Spinmoment

$$\vec{\mu}_s = \gamma \cdot \vec{s}$$

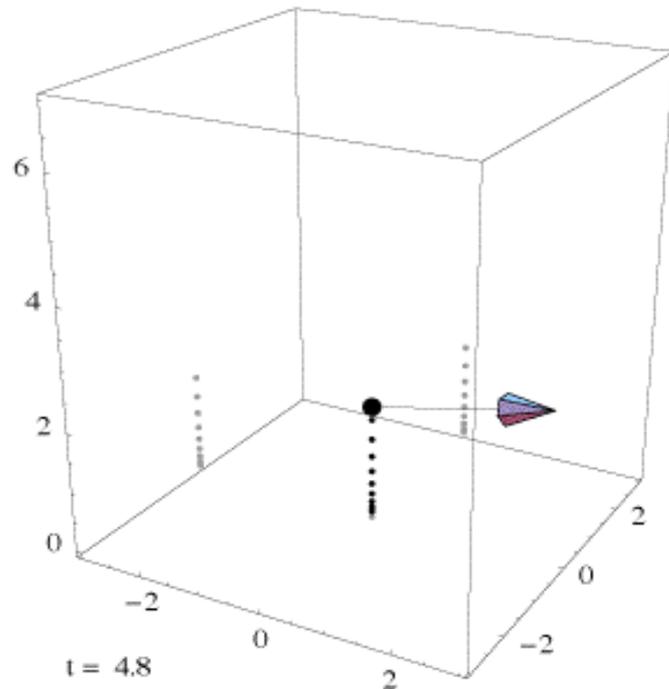
γ ...gyromagnetisches Verhältnis - experimentell bestimmt.

Spineinstellungen im Magnetfeld



3.1. Inhomogeneous B-field

1: Neutral particle with magnetic moment



Inhomogeneous magnetic field

2

(of 5)

Neutral particle with a magnetic moment.

The direction of the force is given by the direction in which the magnetic field increases. The axis of the precession is given by the direction of the magnetic field itself.

In this example, the particle gets uniformly accelerated in the z -direction. The trajectory of the particle is indicated by a series of points (stroboscopic images showing the particle's position after equal time steps). For better visibility, we also show the projections ("shadows") of the points on the bounding box. The magnetic field causes a constant acceleration in the vertical z -direction. The force is given by the gradient of the scalar product

$$\mu \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x})$$

at the position of the particle.

Here it is assumed that the vectorfield \mathbf{B} points in the vertical direction, $\mathbf{B} = (0, 0, B_z)$. The function B_z is positive, depends only on the z -coordinate, and increases in the vertical direction. Hence the force is

$$\mathbf{F} = \nabla \mu \cdot \mathbf{B} = \mu_z \nabla B_z.$$

The uniform acceleration results from the choice $B_z = z + 1$, that is, $\nabla B_z = (0, 0, 1)$.

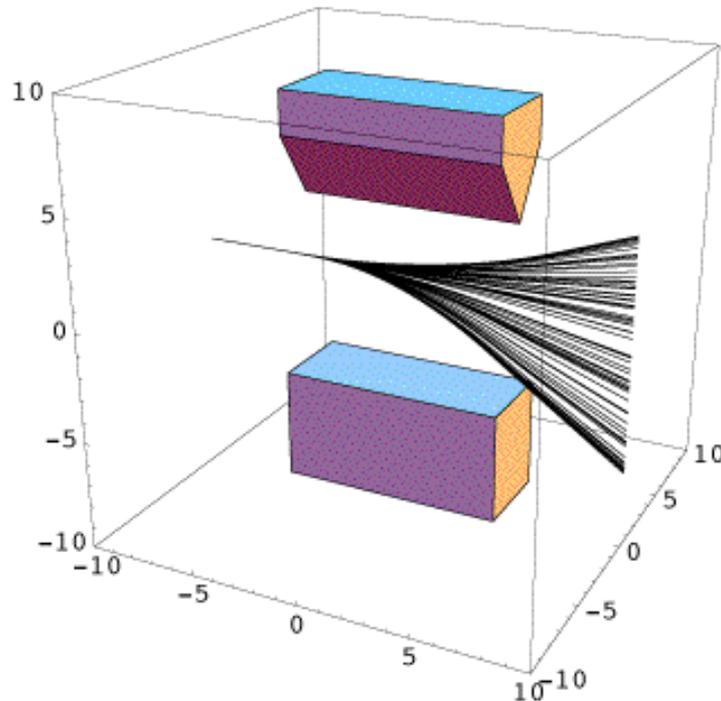
3.1.1.2

Topics

- 1: Neutral particle with magnetic moment
- 2: Acceleration in direction of field gradient
- 3: Realistic field: Force in two directions
- 4: Realistic field with a large z -component

3.4. Stern-Gerlach - classical

2: Trajectories for particles with random spin



Topics

- 1: Neutral particles with various spins
- 2: Trajectories for particles with random spin
- 3: Two- and four-wire fields

Classical Stern-Gerlach experiment – 2 1

(of 1)

Magnetic moments in various directions

The movie shows the paths through a Stern-Gerlach apparatus of an ensemble of classical particles with random directions of the magnetic moment.

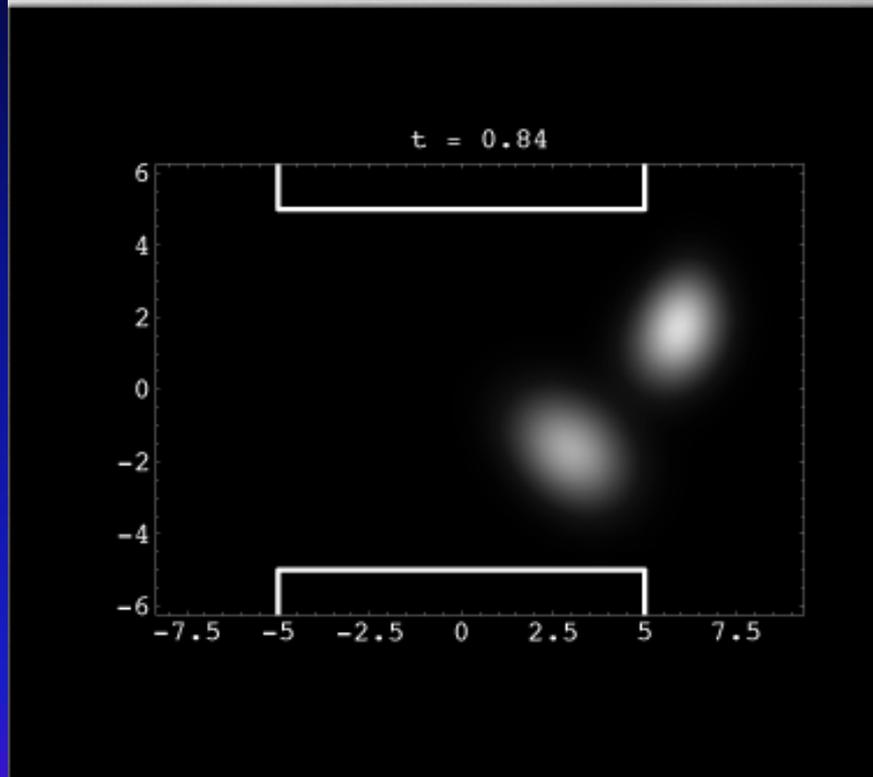
Theoretical background: A collection of classical particles with randomly chosen directions of the magnetic moment are sent through the Stern-Gerlach apparatus described in [CD 3.4.1](#). The inhomogeneity of the field applies a force depending on the direction of the magnetic moment. The magnetic field is designed in such a way that inside the apparatus the force only acts in the vertical direction. Thus the particles are deflected vertically from their initially straight path. With μ_z also the deflecting force is randomly distributed around 0.

The experiment was first carried out with a beam of silver atoms generated in a hot furnace. It can be expected that particles emerging from a furnace have randomly distributed magnetic moments. According to the classical model, this beam would become broader in the z -direction when sent through a Stern-Gerlach apparatus. Actually, the beam splits just into two components. This indicates that the component μ_z of the magnetic moment μ can actually assume only two values.

3.4.2.1

3.5. Stern-Gerlach experiment

3: Superposition of the two types



Topics

- 1: Type-1 particles in an inhomogeneous field
- 2: Particles of type 2
- 3: Superposition the two types
- 4: Another superposition

Wave packets in a Stern-Gerlach device 3

(of 4)

account, we write the state of a particle as a column vector,

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ (for type 1), and } \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \text{ (for type 2).}$$

Then a state of type 1, having only an upper component, is automatically orthogonal to a state of type 2, for which the upper component is zero.

According to the superposition principle, a superposition of two states is again a possible state of the system. Hence the states of type 1 and the states of type 2 can be superimposed. The result is a wave packet that splits into exactly two parts when it passes a Stern-Gerlach device. It can be described by the formula

$$\begin{pmatrix} a\psi_1 \\ b\psi_2 \end{pmatrix}.$$

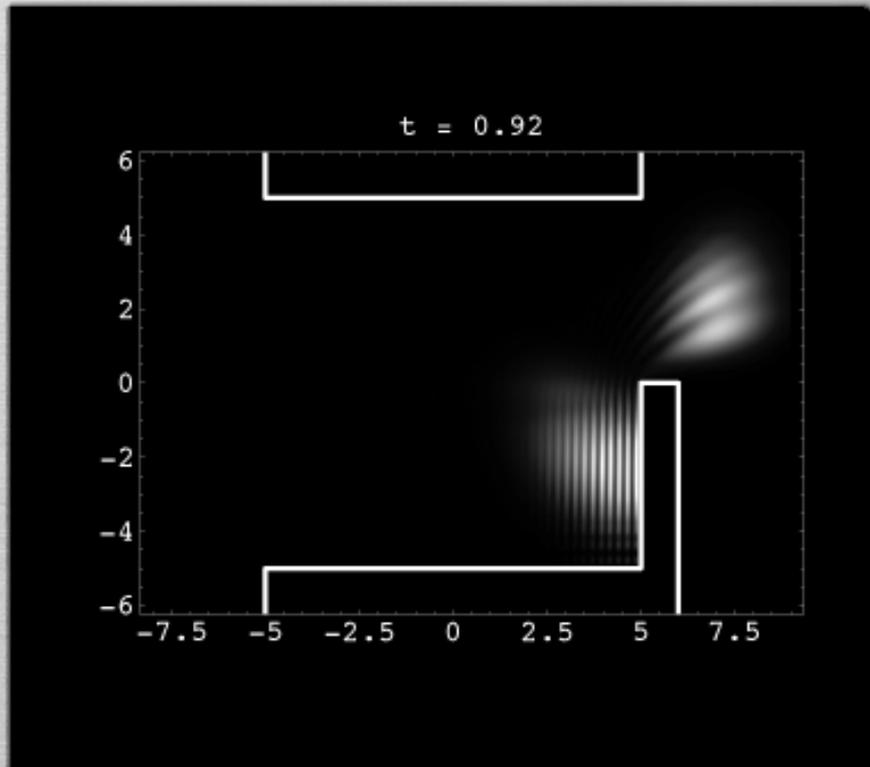
The first component describes the behavior of a particle with positive μ_z , the second component describes the behavior of a particle with negative μ_z . [CD 3.5.3](#) shows a superposition, where both parts have equal size. For [CD 3.5.4](#) the part of type 1 is larger. In any case, the two parts individually behave like the wave packets in the movies [CD 3.5.1](#) and [CD 3.5.2](#).

3.5.1-4.3



3.7. Stern-Gerlach filter

1: Preparing a spin-up wave packet



The Stern-Gerlach filtering device

1

(of 2)

Preparing a wave packet with spin-up/down.

A simple modification of the Stern-Gerlach experiment works as a state preparation procedure. By blocking the “wrong” path in the apparatus we can prepare a wave packet with spin-up or spin-down.

Description: Here the Stern-Gerlach experiment has been modified. One of the two possible “paths” of wave packets through the apparatus is blocked by an impenetrable obstacle. Only a wave packet with spin-up can pass the apparatus in [CD 3.7.1](#) in an essentially unperturbed way. A wave packet with spin-down is deflected downward and runs into the obstacle. (Similarly, a wave packet must have spin-down in order to fly through the apparatus in [CD 3.7.2](#).) If the initial state is a superposition of spin-up and -down, the wave packet will split into two parts. Only the part with the “right” spin emerges from the apparatus, the other part is reflected. No matter what the initial state is, we can be sure that whenever something emerges from the apparatus, it must have the corresponding spin direction.

3.7.1-2.1

Topics

- 1: Preparing a spin-up wave packet
- 2: Preparing a spin-down wave packet



Elektronen sind Fermionen

Manche Teilchen haben ganzzahliger Spin (Bosonen genannt).
Andere halbzahliger Spin (Fermionen genannt).

Spin 1: z.B. Photon, W,Z-Bosonen, Gluonen.

Spin 1/2: Quarks, Leptonen, wie Elektron

Spin 0: Higgs Boson

Supersymmetrie: Symmetrie zwischen Bosonen und Fermionen,
d.h. es muss für jedes Fermion ein Boson mit gleichen Quantenzahlen
geben \Rightarrow Vorhersage von Spin 0 Elektronen, Quarks, usw.

Aus experimenteller Beobachtung der Aufspaltung der Ag-Atome in
zwei Teilstrahlen folgt: es gibt nur zwei Spineinstellungen.

Es muß daher wegen $-s \leq m_s \leq +s$ und $\Delta m_s = \pm 1$ gelten

$$s = 1/2 \Rightarrow m_s = \pm 1/2$$

$$|\vec{s}| = \sqrt{s(s+1)} \hbar = \frac{1}{2} \sqrt{3} \cdot \hbar$$

Elektronen sind Teilchen mit Spin 1/2!!!

Gehorchen Fermistatistik!

Zusammenfassung aus Stern-Gerlach-Exp. an vielen Atomen

1. Es gibt eine Richtungsquantelung; die Atome haben nur diskrete Möglichkeiten, den Drehimpuls relativ zu einem Magnetfeld B einzustellen und behalten diese Einstellung im freien Raum bei (wie bei einem Kreisel).

2. Die Messwerte für atomare magnetische Momente sind wie folgt :

$$\begin{aligned} |\mu_Z| &= m\mu_B, & -s \leq m_S \leq s & \text{ fuer } \textit{Spinmagnetismus} \\ & & -l \leq m_L \leq l & \text{ fuer } \textit{Bahnmagnetismus} \end{aligned}$$

3. Für alle Atome, die als äußerstes Elektron ein s-Elektron haben, findet man die gleiche Aufspaltung in NUR 2 Strahlen.

⇒ mechanische und magnetische Momente aller inneren Elektronen heben sich gegenseitig auf.

4. Ein s-Elektron hat den Bahndrehimpuls $\vec{l} = 0 \rightarrow \vec{\mu}_l = 0 \rightarrow$ nur Spinmagnetismus.

Zum Mitnehmen

Bahnbewegung erzeugt magnetisches Moment $p_L \propto L$ zum Drehimpuls L . Da L quantisiert ist, ist p quantisiert. Dies führt zu diskrete Energieniveaus in einem externen Magnetfeld B mit Splitting $m\mu_B B$ wobei μ_B das Bohrmagneton ist. Splitting entdeckt von Zeeman.

Zusätzlich zu dieses magnetisches Moment durch die Bahnbewegung erzeugt das Elektron auch ein magnetisches Moment durch sein Eigendrehimpuls oder Spin S mit $p_S \propto S$.

Bahndrehimpuls L und Spin bilden Gesamtdrehimpuls $J=L+S$, dessen z-Komponente wieder quantisiert ist \rightarrow magnetische QZ m_j . L und S präzessieren um J und daher tun die „Kompassnadel“ p_L und p_S dies auch