

# VL 15

---

## VL13. Spin-Bahn-Kopplung (II)

- 13.1. Landé-Faktor (Einstein-deHaas Effekt)
- 13.2. Berechnung des Landé-Faktors
- 13.3. Anomaler Zeeman-Effekt

## VL14. Spin-Bahn-Kopplung (III)

- 14.1. Spin-Bahn-Kopplung
- 14.2. Paschen-Back Effekt

## VL15. Wasserstoffspektrum

- 15.1. Lamb Shift
- 15.2. Hyperfeinstruktur

# Vorlesung 14:

---

## **Roter Faden:**

Lamb-Retherford Verschiebung  
Hyperfeinstruktur

**Folien auf dem Web:**

**<http://www-ekp.physik.uni-karlsruhe.de/~deboer/>**

**Siehe auch: Demtröder, Experimentalphysik 3, Springer-Verlag**

**Und [http://www.ipf.uni-stuttgart.de/lehre/online-skript/f30\\_11.html](http://www.ipf.uni-stuttgart.de/lehre/online-skript/f30_11.html)**



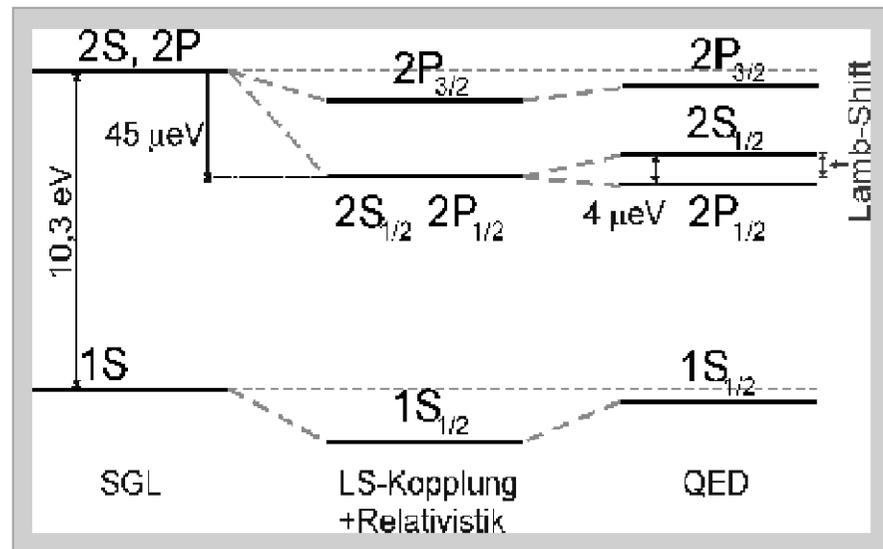
# Relativ. Korrekturen und Lamb-Shift

Weitere Korrekturen sind Folge der relativistischen Massezunahme. Aus der relativistischen quantenmechanischen Dirac-Gleichung folgt für die Feinstrukturaufspaltung

$$E_{nj} = E_n \left( 1 + \frac{\alpha^2}{n} \left( \frac{3}{4n} - \frac{1}{j+1/2} \right) \right)$$

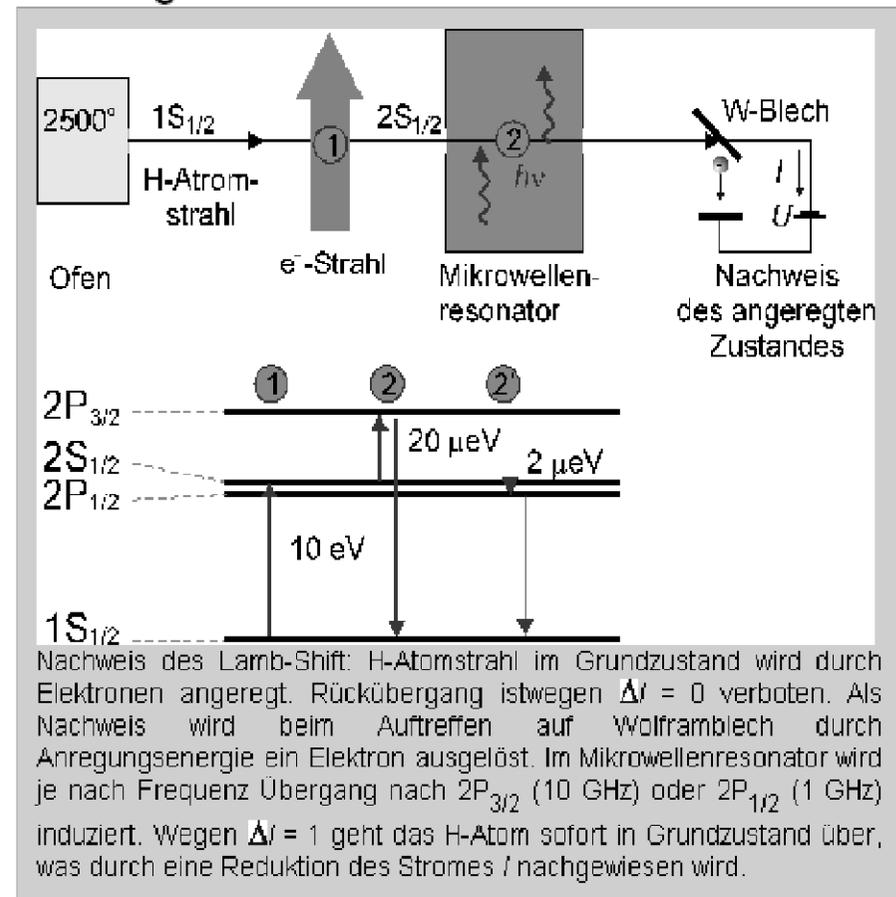
mit der Sommerfeld-Feinstrukturkonstanten

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \approx \frac{1}{137}$$



Weitere Korrekturen aus der Quantenelektrodynamik (QED): Elektron emittiert und absorbiert im Vakuum ständig Photonen und hat so für kurze Zeit eine veränderte kinetische Energie ( $\Delta E \Delta t \geq \hbar$ ).

## Messung der Lamb-Shift 1950



# Lamb-Retherford-Experiment

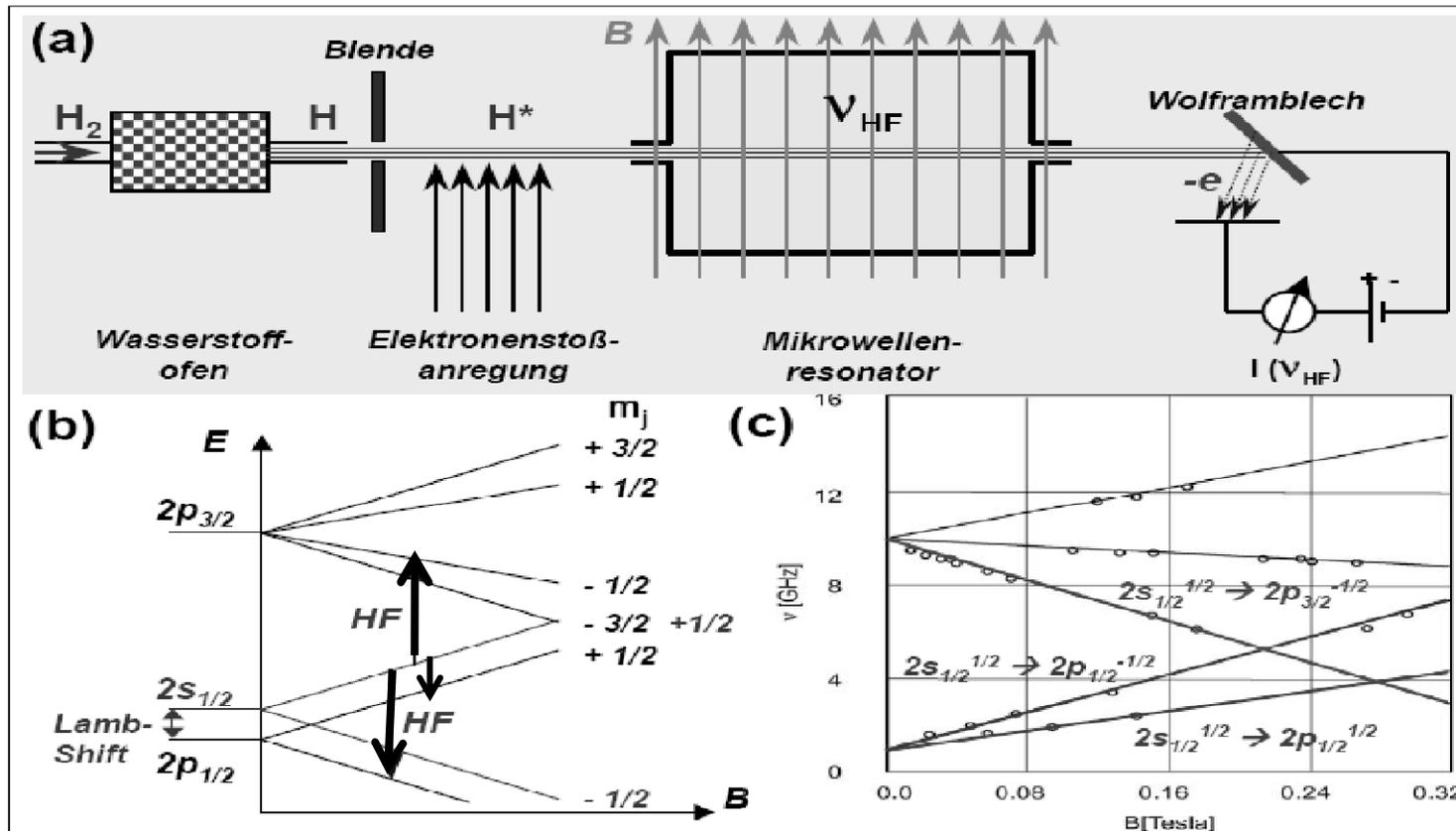


Abbildung 4.7: (a) Lamb-Retherford-Experiment. (b) Zeeman-Aufspaltung der  $2s_{1/2}$ -,  $2p_{1/2}$ - und  $2p_{3/2}$ -Niveaus und ihre Ausnutzung zur Messung der Lamb-Shift. (c) Originaldaten von Lamb und Retherford (Phys. Rev. 79, 549 (1950)) zur Bestimmung der Niveaueverschiebung als Funktion des Magnetfelds im  $2s/2p$ -System des Wasserstoffs. Die Punkte stellen die Messdaten dar, durchgezogene Linien entsprechen theoretischen Vorhersagen der Dirac-Theorie, wobei die Lamb-Verschiebung zusätzlich berücksichtigt wird. Man stellt fest, dass sich die Linien schon bei relativ schwachen Magnetfeldern kreuzen. Eine klare Trennung von Spin-Bahn-Kopplung und Zeeman-Effekt (siehe Abschnitt 4.6 und 4.7) ist nicht mehr möglich.

# Lamb-Shift

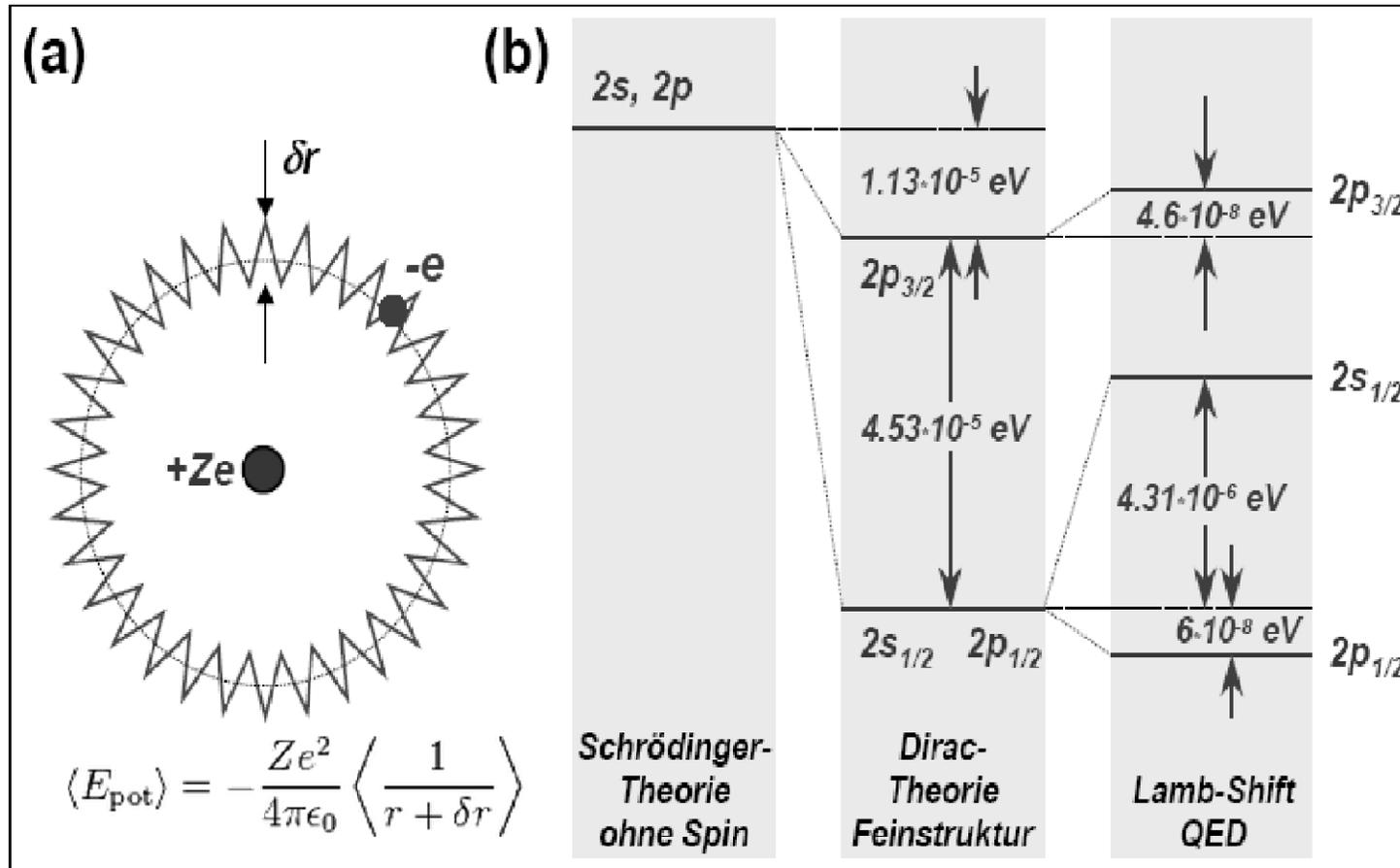


Abbildung 4.6: (a) Zur Veranschaulichung der Zitterbewegung eines Elektrons aufgrund der Emission und Absorption von virtuellen Photonen. (b) Feinstruktur und Lamb-Verschiebung beim Wasserstoffniveau mit  $n = 2$ .

# QED Formel für Lamb-Shift

---

$$\langle E_{\text{pot}} \rangle = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \left\langle \frac{1}{r + \delta r} \right\rangle.$$

The Lamb shift itself is given by

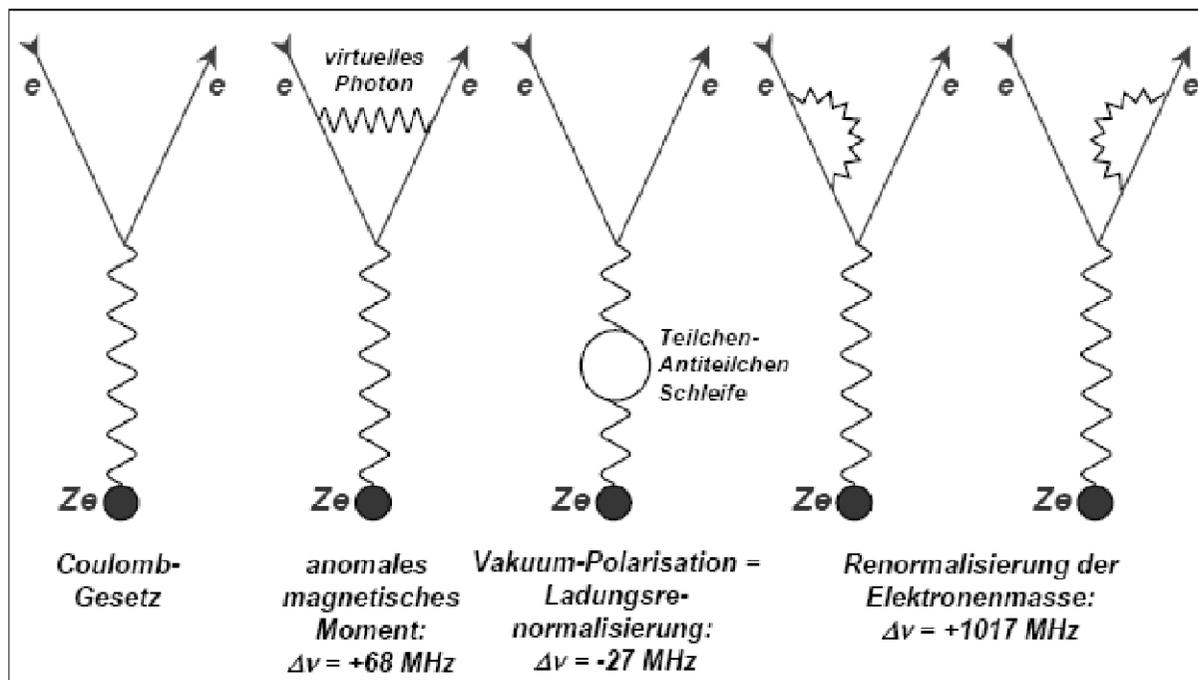
$$\Delta E_{\text{Lamb}} = \alpha^5 m_e c^2 \frac{k(n, 0)}{4n^3} \text{ for } \ell = 0$$

with  $k(n, 0)$  around 13 varying slightly with  $n$ , and

$$\Delta E_{\text{Lamb}} = \alpha^5 m_e c^2 \frac{1}{4n^3} \left[ k(n, \ell) \pm \frac{1}{\pi(j + \frac{1}{2})(\ell + \frac{1}{2})} \right] \text{ for } \ell \neq 0$$

with  $k(n, \ell)$  a small number ( $< 0.05$ ).

# Lamb-Shift durch QED Korrekturen höherer Ordnung



Lamb-Shift kann genau berechnet werden in der QED und ist daher ein wichtiger Test für die QED

Abbildung 4.5: Feynman-Diagramme, die zur Streuung eines Elektrons an einer statischen Ladung beitragen. Das linke Diagramm entspricht dem uns vertrauten Coulomb-Gesetz. Die weiteren Diagramme sind von der Ordnung  $\alpha^2$  und ziehen eine Renormalisierung des magnetischen Moments, der Ladung und der Masse nach sich. Die Frequenzangaben zu den Diagrammen beziehen sich auf den jeweiligen Beitrag zur Verschiebung des  $2s_{1/2}$ - gegenüber dem  $2p_{1/2}$ -Niveau. Die Lamb-Verschiebung kann experimentell auf 0.1 MHz genau vermessen werden. Dies erlaubt es, die Beiträge der einzelnen Diagramme getrennt zu verifizieren. Dabei werden Diagramme höherer als der gezeigten Ordnung (2-Schleifen-Beiträge) von Bedeutung. Die eigentliche Grenze bei der theoretischen Vorhersage des Termschemas stellt der nicht exakt behandelbare Einfluss der Protonenstruktur auf die Elektronenfrequenzen dar.

# Nobelpreis Lamb

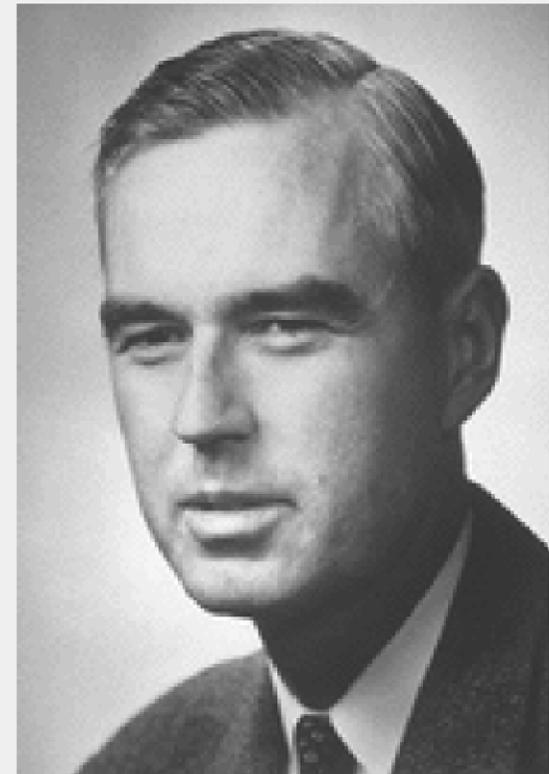
---

## Willis Eugene Lamb (geb. 1913), Nobelpreis für Physik 1955:

**Willis Eugene Lamb** wurde am 12. Juli 1913 in Los Angeles geboren. Er begann 1930 sein Studium an der University of California at Berkeley und erhielt dort 1934 den Bachelor of Science in Chemie. Im Jahr 1938 erhielt er an der gleichen Universität seinen Dokortitel. Seine Doktorarbeit über die Analyse der elektromagnetischen Eigenschaften von Kernsystemen wurde von J.R. Oppenheimer betreut.

Nach seiner Doktorarbeit ging er an die Columbia University und wurde dort 1945 Assistant Professor, 1947 Associate Professor und 1948 schließlich Full Professor. Von 1943 bis 1951 war er auch mit dem Columbia Radiation Laboratory assoziiert, wo er seine mit dem Nobelpreis ausgezeichneten Arbeiten machte. 1951 ging er an die Stanford University als Professor für Physik. Von 1953-1954 war er Morris Loeb Lecturer an der Harvard University. Von 1956 bis 1962 war er Fellow of New College and Wykeham Professor of Physics an der University of Oxford, England. 1962 wurde er Henry Ford II Professor of Physics an der Yale University, New Haven, Conn.

Im Jahr 1953 erhielt er den Rumford Premium der American Academy of Arts and Sciences. Die University of Pennsylvania verlieh ihm einen Ehrendoktor im Jahr 1954. Er erhielt ferner 1955 den Research Corporation Award. Er ist Mitglied in einer Zahl von National Academy of Sciences und Fellow der American Physical Society.



# Aufhebung der Entartung bei der Wasserstoff Balmer-Linie $H_\alpha$

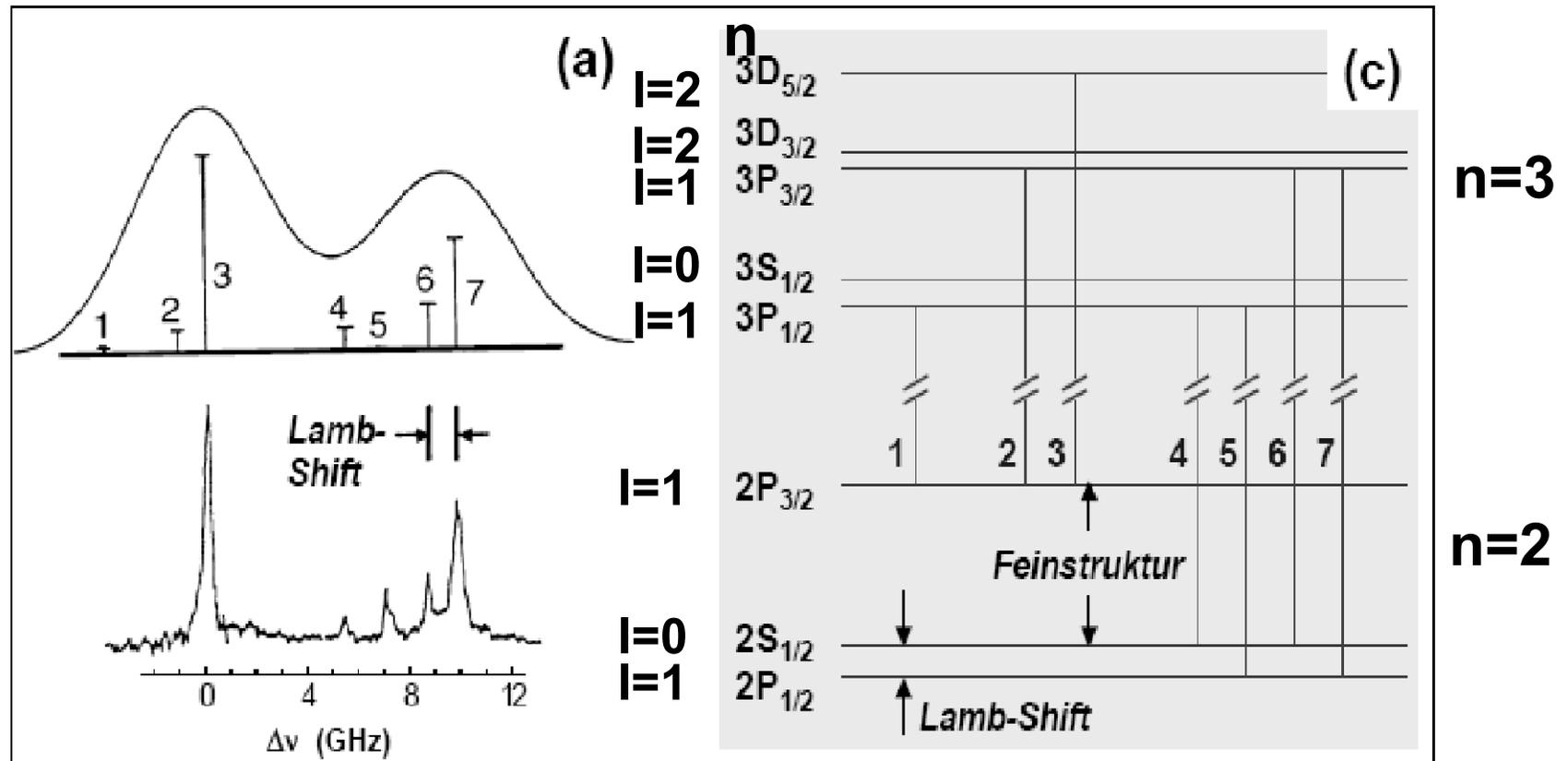


Abbildung 4.1: Feinstruktur der Balmer-Linie  $H_\alpha$  gemessen mit (a) hochauflösender Spektroskopie und (b) mit höchstauflösender Laser-Spektroskopie. (c) Verfeinertes Termschema des Wasserstoffs. Die erlaubten Übergänge werden durch die Auswahlregeln bestimmt, die wir erst später diskutieren werden.

# 15.2 Hyperfeinstruktur

Wir müssen jetzt die Wechselwirkung des Gesamtdrehimpulses  $J$  des Hüllenelektrons mit dem Kernspin  $I$  betrachten. Diese Wechselwirkung besteht aus zwei Beiträgen, die zur Aufspaltung und Verschiebung der Energieniveaus der Elektronenhülle führt:

- Die Wechselwirkung des magnetischen Kernmoments mit dem durch das Elektron am Kernort erzeugten Magnetfeld (Zeeman-Effekt des Kernmomentes im atomaren Magnetfeld).
- Die Wechselwirkung des elektronischen magnetischen Moments mit dem vom Kernmoment erzeugten Magnetfeld.

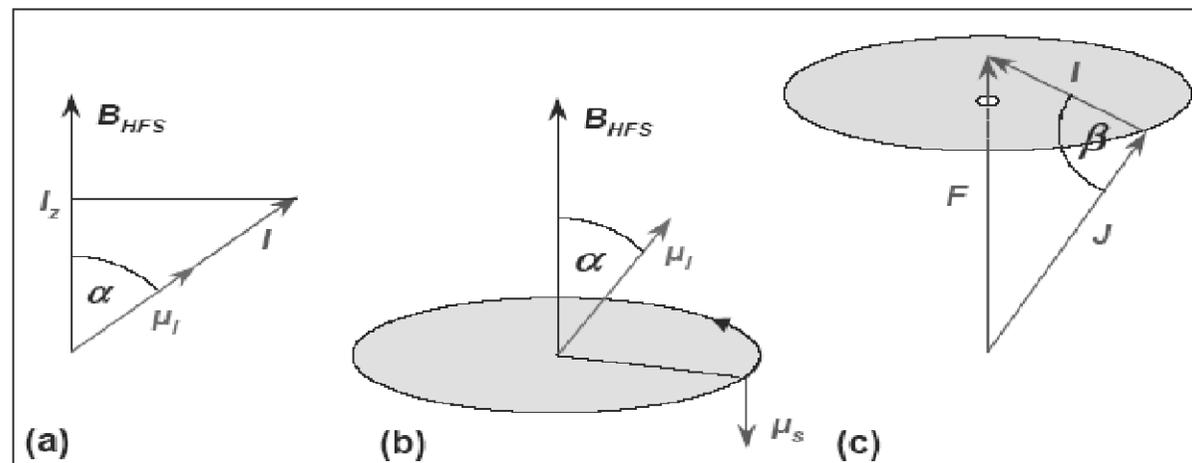


Abbildung 4.9: Zur Wechselwirkung zwischen dem magnetischen Kernmoment  $\mu_I$  und dem Magnetfeld  $B_{HFS}$ , das (a) durch die Bahnbewegung des Elektrons und (b) durch das magnetische Spinnmoment  $\mu_s$  des Elektrons am Kernort erzeugt wird. (c) Kopplung des Gesamtdrehimpulses  $J$  des Elektrons und des Kernspins  $I$  zum raumfesten Gesamtdrehimpuls des Atoms  $F = J + S$ .

# Kernmoment im Magnetfeld der Elektrons

Das Kernmoment  $\mu_i$  hat in dem vom Elektron mit Gesamtdrehimpuls  $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$  am Kernort erzeugten *Hyperfeinfeld*  $\mathbf{B}_{\text{HFS}}$  (siehe Abb. 4.9) die Zusatzenergie

$$\Delta E_{\text{HFS}} = -\mu_i \cdot \mathbf{B}_{\text{HFS}} = -|\mu_i| |\mathbf{B}_{\text{HFS}}| \cos(\angle(\mathbf{J}, \mathbf{I})) . \quad (4.5.5)$$

Man führt nun, wie bei der Kopplung von  $\mathbf{L}$  und  $\mathbf{S}$  zu  $\mathbf{J}$ , den Gesamtdrehimpuls von Kern und Elektronenhülle als Vektorsumme

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{J} + \mathbf{I} & |\mathbf{F}| &= \sqrt{f(f+1)} \hbar & f &= j \pm i \\ & & F_z &= m_f \hbar & m_f &= -f, -(f-1), \dots, (f-1), f \end{aligned} \quad (4.5.6)$$

$$\begin{aligned} \cos(\angle(\mathbf{J}, \mathbf{I})) &= \frac{\mathbf{J} \cdot \mathbf{I}}{|\mathbf{J}| |\mathbf{I}|} \\ &= \frac{1}{2} \frac{f(f+1) - j(j+1) - i(i+1)}{\sqrt{j(j+1)} \sqrt{i(i+1)}} \end{aligned}$$

**Cosinussatz:**  
 $\mathbf{F}^2 = \mathbf{J}^2 + \mathbf{I}^2 - 2\mathbf{J} \cdot \mathbf{I}$

Mit  $|\mu_i| = g_i \mu_K \sqrt{i(i+1)}$  beträgt die Hyperfeinenergie des Wasserstoffatoms dann

$$\begin{aligned} \Delta E_{\text{HFS}} &= \frac{A}{2} [f(f+1) - j(j+1) - i(i+1)] \\ A &= \frac{g_i \mu_K B_{\text{HFS}}}{\sqrt{j(j+1)}} \end{aligned}$$

# Hyperfeinstruktur

Für das Wasserstoffatom im Grundzustand ist  $i = 1/2$  und  $j = 1/2$  und damit  $f = 0$  oder  $f = 1$ . Damit erhält man die Hyperfeinaufspaltung (siehe Abb. 4.10)

$$E_{\text{HFS}}(f = 0) = E_{1,0,1/2} - \frac{3A}{4}$$
$$E_{\text{HFS}}(f = 1) = E_{1,0,1/2} + \frac{A}{4}$$

$$E_{\text{HFS}} = E_{n,l,j} + \frac{A}{2} [f(f+1) - j(j+1) - i(i+1)]$$

(4.5.15)

**F=J+I=1/2+1/2=1 (Ortho-Wasserstoff)**

**F=J+I=1/2-1/2=0 (Para-Wasserstoff)**

Das Hyperfeinfeld  $\mathbf{B}_{\text{HFS}}$  am Ort  $\mathbf{r} = 0$  des Kerns hängt außer vom Drehimpuls  $\mathbf{J}$  des Elektrons von seiner räumlichen Aufenthaltswahrscheinlichkeit ab. Diese wird durch das Absolutquadrat der Wellenfunktion  $|\Psi_{n,l}|^2$  bestimmt. Für  $s$ -Zustände erhält man

$$A = \frac{2}{3} \mu_0 g_l \mu_B g_I \mu_K |\Psi_n(r=0)|^2.$$

Der Grundzustand  $1s_{1/2}$  des Wasserstoffatoms spaltet in die Terme  $f = 0$  und  $f = 1$  auf. In einem kleinen Magnetfeld (das Magnetfeld muss so klein sein, dass die Kopplung von  $\mathbf{J}$  und  $\mathbf{I}$  zu  $\mathbf{F}$  erhalten bleibt: anomaler Zeeman-Effekt, siehe Abschnitt 4.6) bleibt der  $f = 0$  Zustand ungestört, da nur  $m_f = 0$  erlaubt ist, während der  $f = 1$  Zustand eine Zeeman-Aufspaltung in drei Terme zeigt ( $m_f = 0, \pm 1$ ). Man spricht daher vom *Singulett-* ( $f = 0$ ) oder *Parawasserstoff* und *Triplet-* ( $f = 1$ ) oder *Orthowasser-*

# Hyperfeinstruktur, 21cm Linie des Wasserstoffs

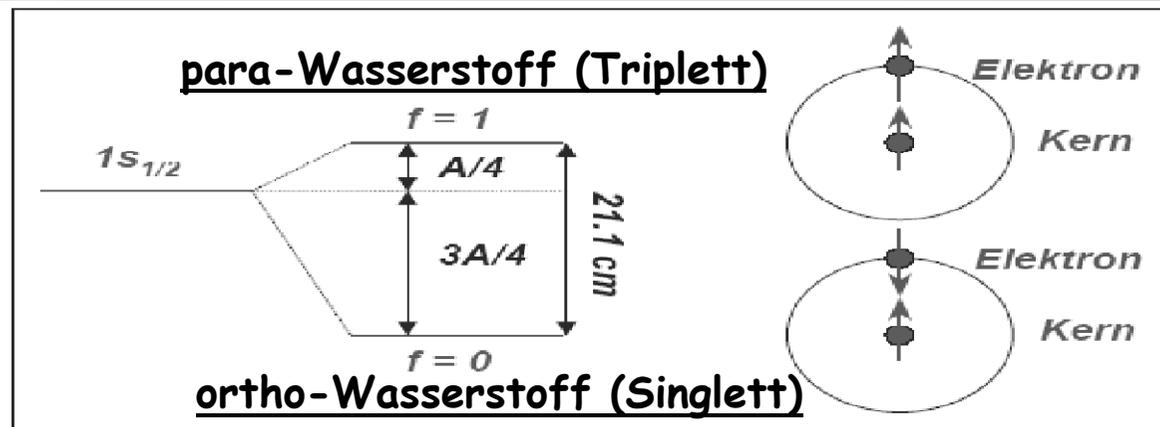


Abbildung 4.10: Hyperfeinstrukturaufspaltung des Grundzustandes im Wasserstoffatom.

Beim Übergang zwischen dem Tripletts- und dem Singulett-Zustand wird Strahlung der Frequenz  $\nu_H = 1.42 \text{ GHz}$  bzw. der Wellenlänge  $\lambda_H = 21.1 \text{ cm}$  ausgesandt, die im Mikrowellenbereich liegt. Beim Aussenden der Strahlung muss der Spin des Elektron gekippt werden, man spricht deshalb von einem Spin-Flip-Übergang. Gemäß den allgemeinen Auswahlregeln für Dipolstrahlung, auf die wir später noch zu sprechen kommen, sind Spin-Flip-Übergänge verboten. Das heißt, die Übergangswahrscheinlichkeit bei Strahlungsemission ist nur über höhere Momente möglich und daher sehr klein. Im Labor kann man deshalb diesen Übergang kaum beobachten, da die Abregung eher durch Stoß stattfindet. Da aber im Weltraum im interstellaren Gas große Mengen an atomarem Wasserstoff vorliegen, wird trotzdem die 21 cm Linie in genügender Intensität ausgesendet, um sie auf der Erde mit empfindlichen Antennen beobachten zu können.<sup>13</sup> Die Untersuchung der 21 cm Linie spielt in der *Radioastronomie* eine wichtige Rolle, weil ihre Untersuchung Auskunft über die Dichteverteilung, Geschwindigkeiten und Temperatur von Wasserstoffatomen im Universum gibt.

# Zusammenfassung Hyperfeinstruktur

**Hyperfeinstruktur:** Aufspaltung der Energieniveaus eines Atomes aufgrund der Kopplung des magnetischen Kernmomentes mit dem von den Elektronen der Atomhülle am Kernort erzeugten Magnetfeld .

Die Kopplung bewirkt, dass der Gesamtdrehimpuls des Atoms  $F$ , der die Summe des Hüllendrehimpulses  $J$  und des Kernspins  $I$  ist, gequantelt ist:

$$\vec{F} = \vec{J} + \vec{I} \quad \text{mit} \quad \vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$$

Die Quantenzahl  $F$  ist halb- (Fermi-Dirac-Statistik) oder ganzzahlig (Bose-Einstein-Statistik) und kann die Werte  $\{J + I, \dots, |J - I|\}$  annehmen.

$J$  und  $I$  sind die Quantenzahlen des Hüllendrehimpulses und des Kerndrehimpulses.

Die Wechselwirkung ist ähnlich wie bei der Spin-Bahn-Kopplung:

$$V_{\text{HFS}} = -\vec{\mu}_I \cdot \vec{B}_J = \frac{g_I \mu_K B_J [F(F+1) - I(I+1) - J(J+1)]}{2\sqrt{J(J+1)}} \quad \vec{\mu}_I = \frac{g_I \mu_K}{\hbar} \vec{I}$$

$$\Delta E_{\text{HFS}} = \frac{A}{2}(F(F+1) - I(I+1) - J(J+1)) \quad \text{mit} \quad \Delta E_{F+1} - \Delta E_F = A(F+1) \quad A = \frac{g_I \mu_K B_J}{\sqrt{J(J+1)}}$$

# Zusammenfassung Hyperfeinstruktur

Bei extremer Auflösung ist jede Feinstrukturkomponente aufgespalten.

Grund: Ausrichtung des Kernspins  $I$  im Magnetfeld der Elektronen.

$$|\vec{I}| = \sqrt{I(I+1)}\hbar$$

Gesamtdrehimpuls des Atoms

$$|\vec{F}| = |\vec{I} + \vec{J}| = \sqrt{F(F+1)}\hbar$$

mit  $F=j+l, j+l-1 \dots j-l$

Damit ist ein magnetisches Kernmoment verbunden:

$$\mu_I = g_I \mu_k I$$

mit dem Kernmagneton

$$\mu_k = \frac{e}{2m_p} \hbar = \frac{m_e}{m_p} \mu_B = 5,0510^{-27} \text{ J/T}$$

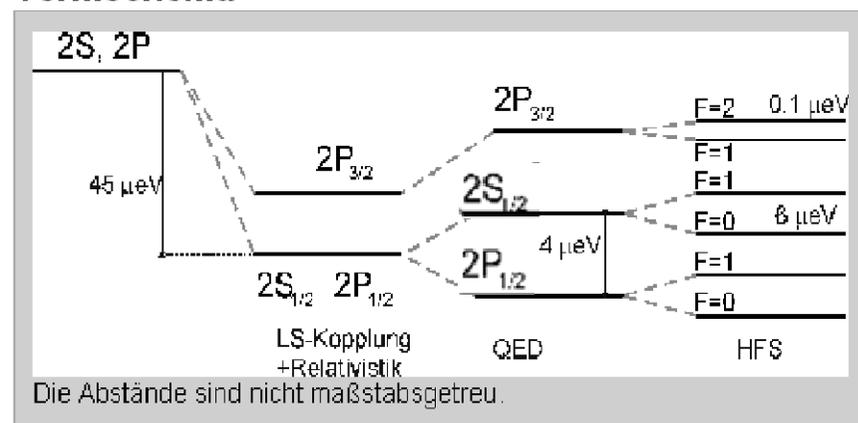
Die aus der Wechselwirkung mit dem inneren Magnetfeld resultierende Energieaufspaltung ist:

$$\Delta E \sim g_I \mu_k \frac{F(F+1) - j(j+1) - I(I+1)}{\sqrt{j(j+1)}}$$

Beispiele für das Kernmagneton:

Kern	$I$	$g_I$
Proton	1/2	5,58
Neutron	1/2	-3,82
Kern	1	0,86
$\alpha$ -Teilchen	0	-

Termschema

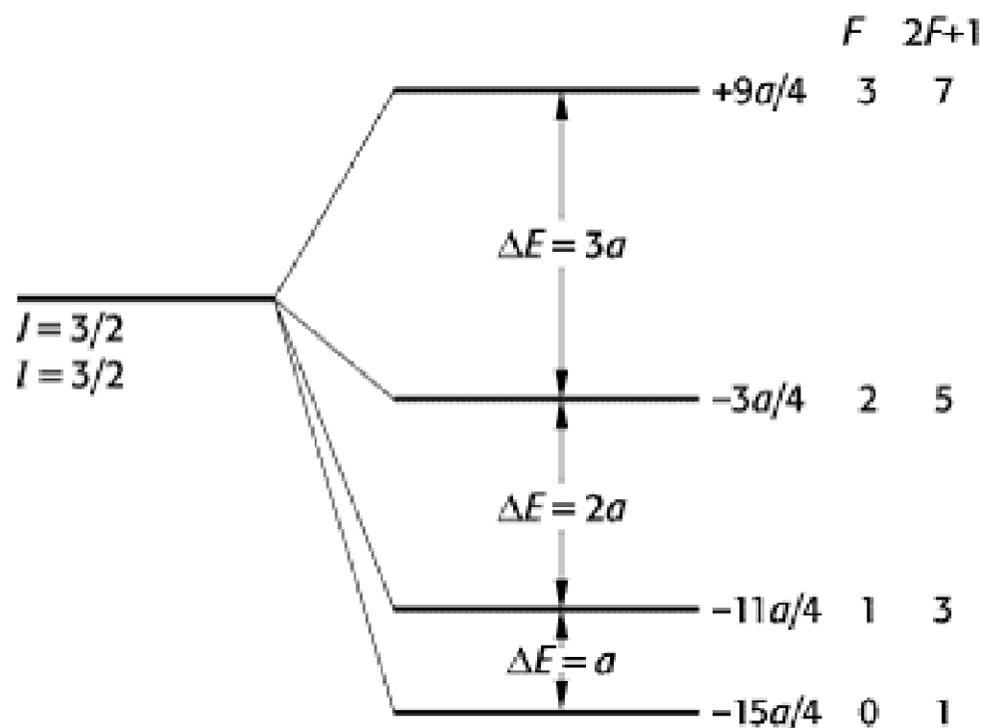


**Neutron ungeladen, Daher trägt es nicht bei zum Bahnmagnetismus, nur Spinmagnetismus**

# Beispiel Hyperfeinstruktur

$$\Delta E \sim g_I \mu_k \frac{F(F+1) - j(j+1) - I(I+1)}{\sqrt{j(j+1)}}$$

$$F = J+I, J+I-1, \dots, J-I$$



$$\frac{1}{2}a \cdot 3(3+1) - \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} = 12 - \frac{15}{4} - \frac{15}{4} = \frac{9}{4}$$

$$\frac{1}{2}a \cdot 2(2+1) - \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} = \frac{24}{4} - \frac{15}{4} - \frac{15}{4} = -\frac{3a}{4}$$

$$\frac{1}{2}a \cdot 1(1+1) - \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} = \frac{8}{4} - \frac{15}{4} - \frac{15}{4} = -\frac{11a}{4}$$

$$\frac{1}{2}a \cdot 0 - \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} = \frac{8}{4} - \frac{15}{4} - \frac{15}{4} = -\frac{15a}{4}$$

$$V_{I,S} = \frac{a}{2} [j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)]$$

# Zum Mitnehmen

---

---

**Energieniveaus nur abhängig von Gesamtdrehimpuls- $QZ j$ , wenn man sehr kleine höhere Ordnung Korrekturen (Lamb-Shift) weglässt. Lamb-Shift verschiebt auch Niveaus mit gleichen  $QZ j$ .**

**Ursache: Strahlungskorrekturen der Quantenelektrodynamik QED. wie z.B. Photonemission und Reabsorbtion des Elektrons. Hierdurch entsteht eine Art "Zitterbewegung", wodurch das Elektron nahe am Kern weniger stark am Kern gebunden ist. Dadurch wird die Energie erhöht, weil das Elektron weniger tief im Potentialtopf sitzt.**

**Hyperfineinstruktur: Aufspaltung der Energieniveaus eines Atoms aufgrund der Kopplung des magnetischen Kernmomentes mit dem von den Elektronen der Atomhülle am Kernort erzeugten Magnetfeld .**