

Atome & Kerne

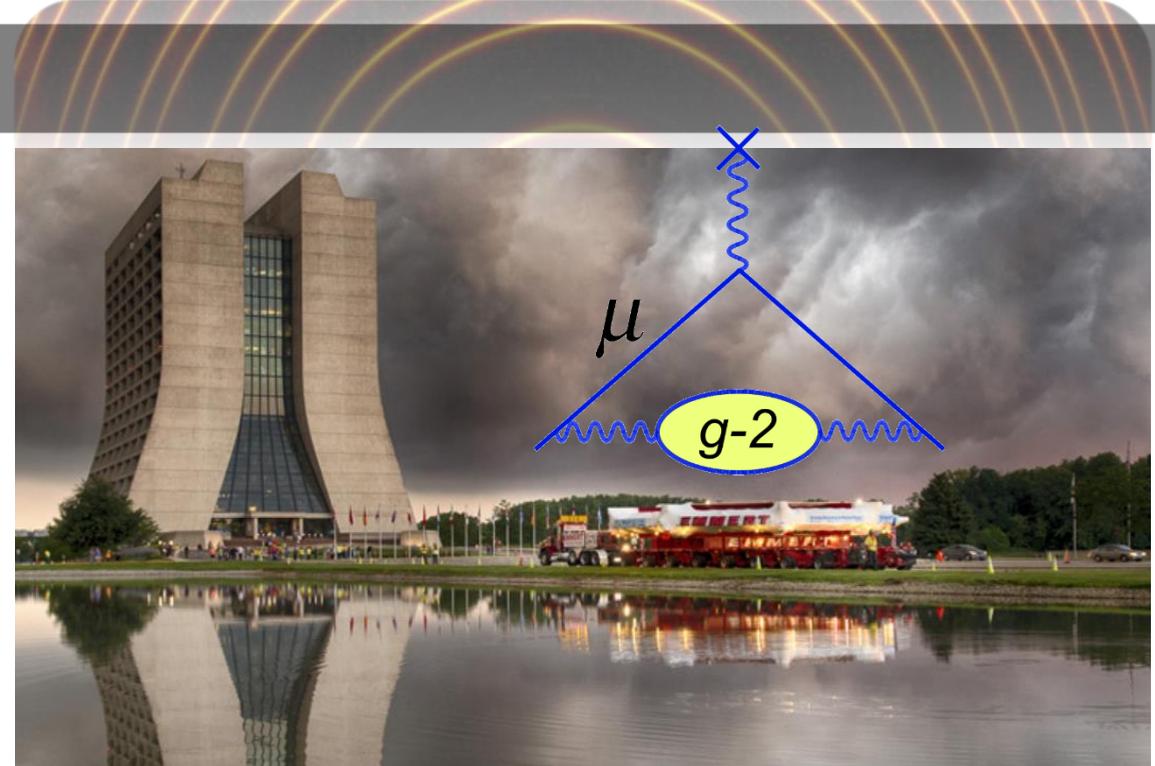
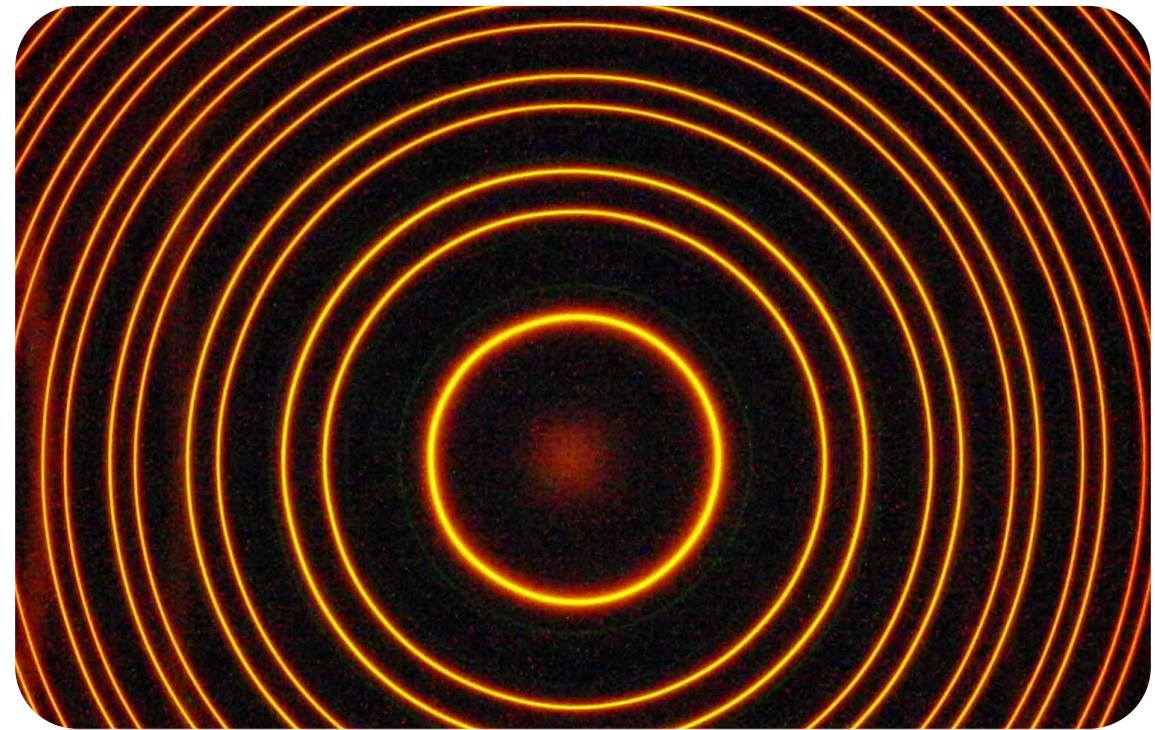
Sommersemester 2019

Vorlesung # 10, 23.05.19

Guido Drexlin, Institut für Experimentelle Teilchenphysik, Fakultät für Physik

Das Wasserstoff-Atom

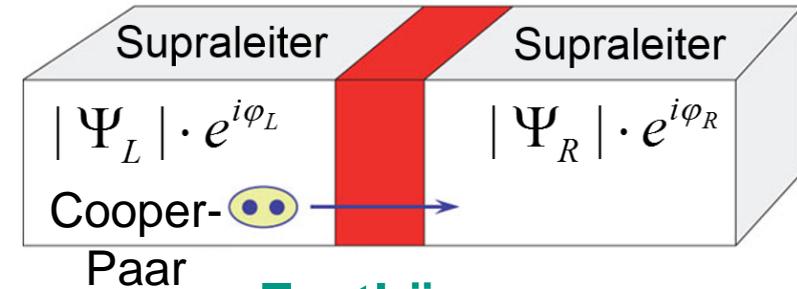
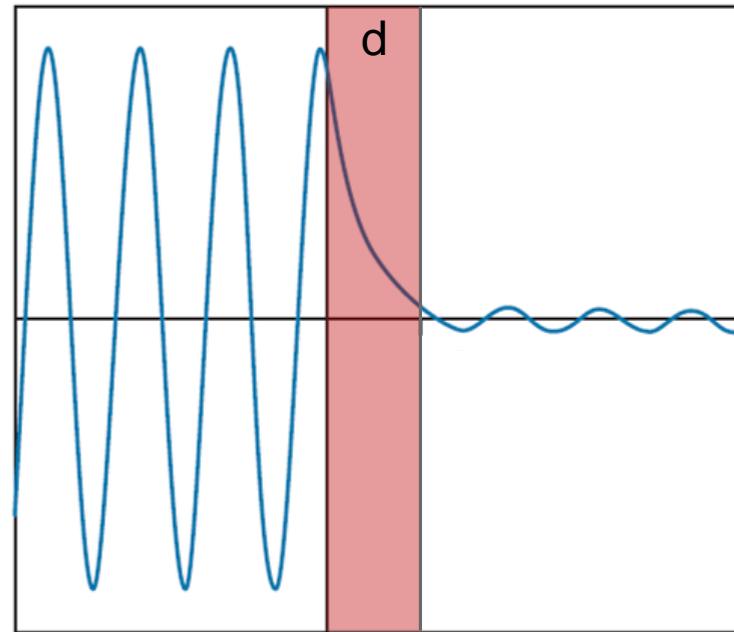
- Schalenstruktur –
Na: D-Linien & LS-Kopplung
- Termschema & Auswahlregeln
- Bahn- und Spinmagnetismus
- g-Faktor von Elektron & Myon
- Spin als Teilcheneigenschaft



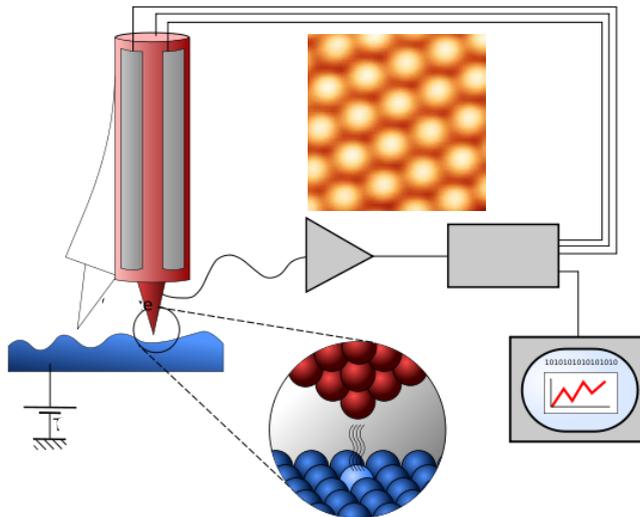
Tunneleffekt



- **Tunneleffekt:** Quantenobjekt durchdringt endliche Potenzialbarriere auch, wenn dies klassisch verboten ist, da $E < V(r)$

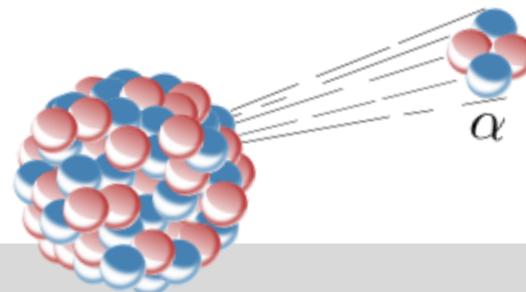


Festkörper-Josephson-Kontakt

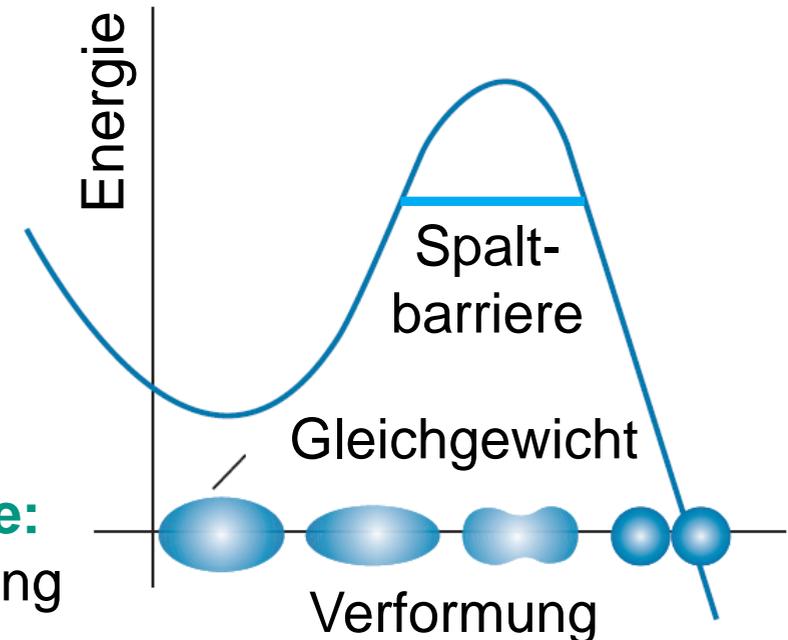


Rastertunnelmikroskop

$$T(E) = e^{-2 \cdot \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} \cdot (V_0 - E) \cdot d}}$$



Kerne: Spaltung



Wasserstoff-Atom & Drehimpulse



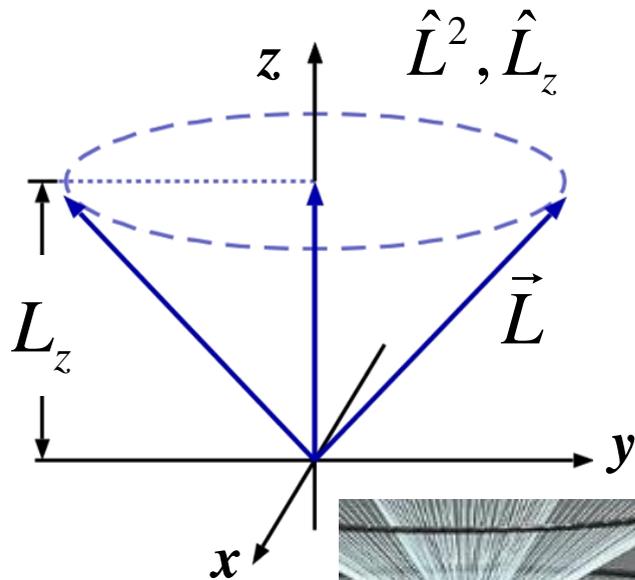
- Vollständige quantenmechanische Beschreibung des H-Atoms

■ Quantisierung Drehimpuls L

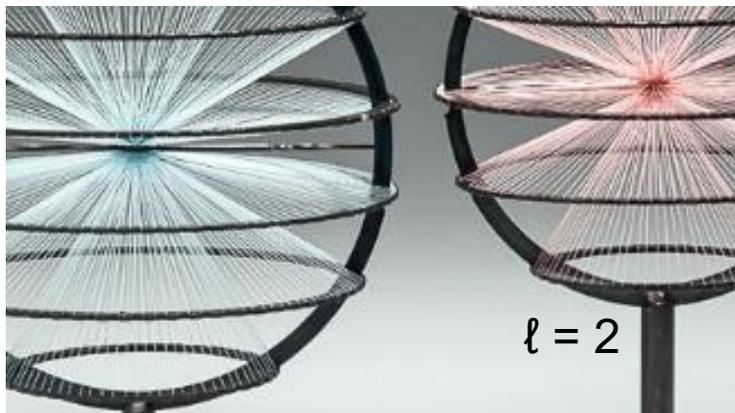
$$L = \sqrt{l \cdot (l + 1)} \hbar \quad l = 0, 1, 2, \dots$$

Präzession

von
 L_x, L_y um
 z-Achse
 \Rightarrow Raum-
 quantelung

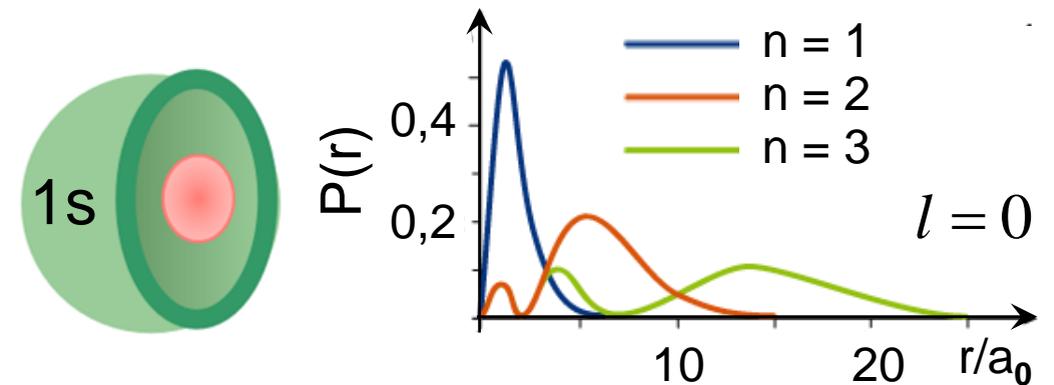


$$-l \leq m \leq +l$$



■ H-Atom – Elektronen-Orbitale

- $R_{nl}(r)$ abhängig von n und l

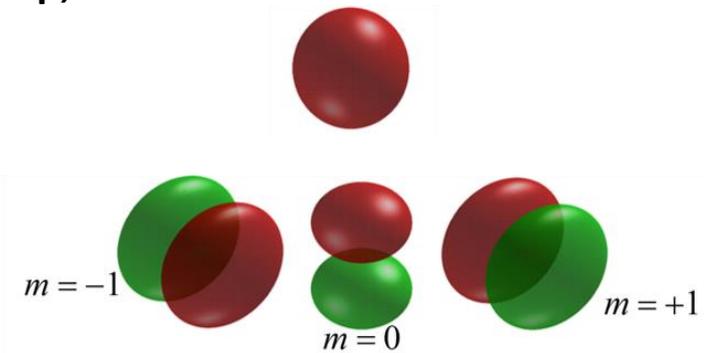


- $Y_{lm}(\theta, \phi)$

„Monopol“

s

p



„Dipol“

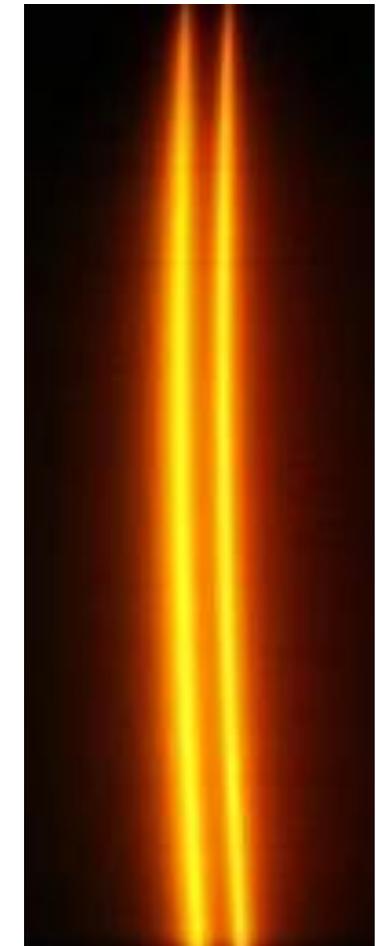
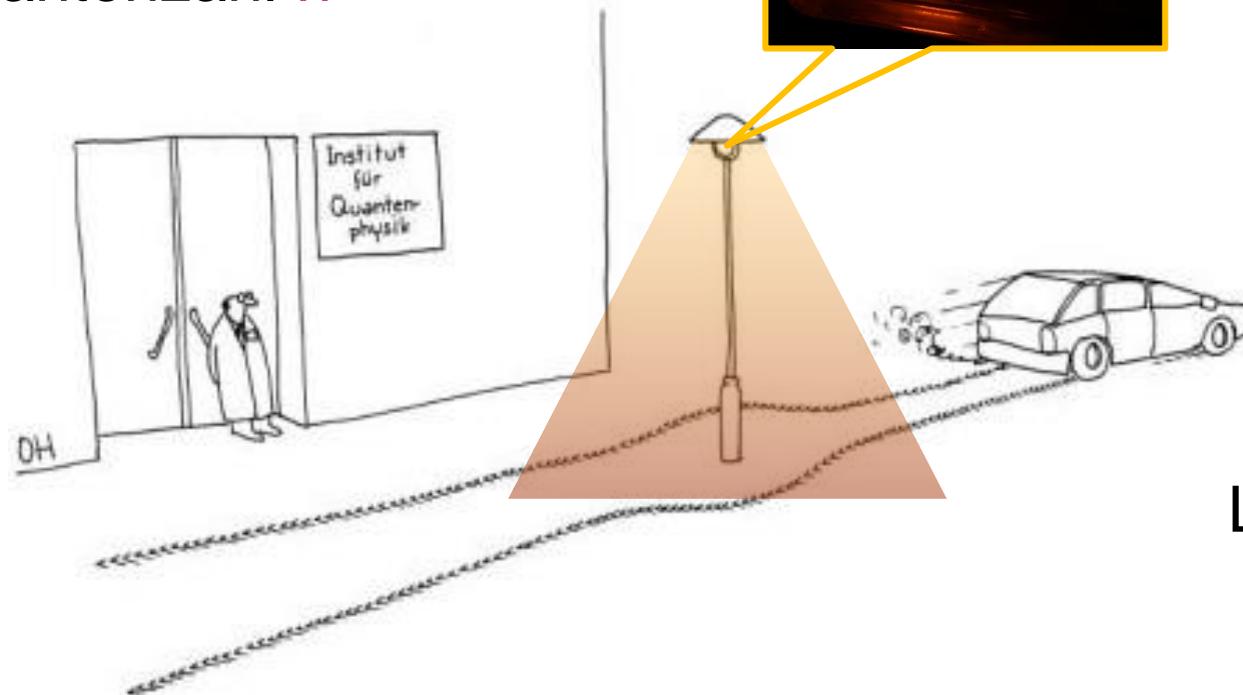
6.2 Schalenstruktur & Termschema

■ Energiezustände im H-Atom

$$\lambda = 589 \text{ nm} \quad \lambda = 589,6 \text{ nm}$$

- energetisch entartet, da Bindungsenergien E_B bisher nur abhängig von der

- Hauptquantenzahl n



Linienaufspaltung der D-Linie
⇒ Feinstruktur

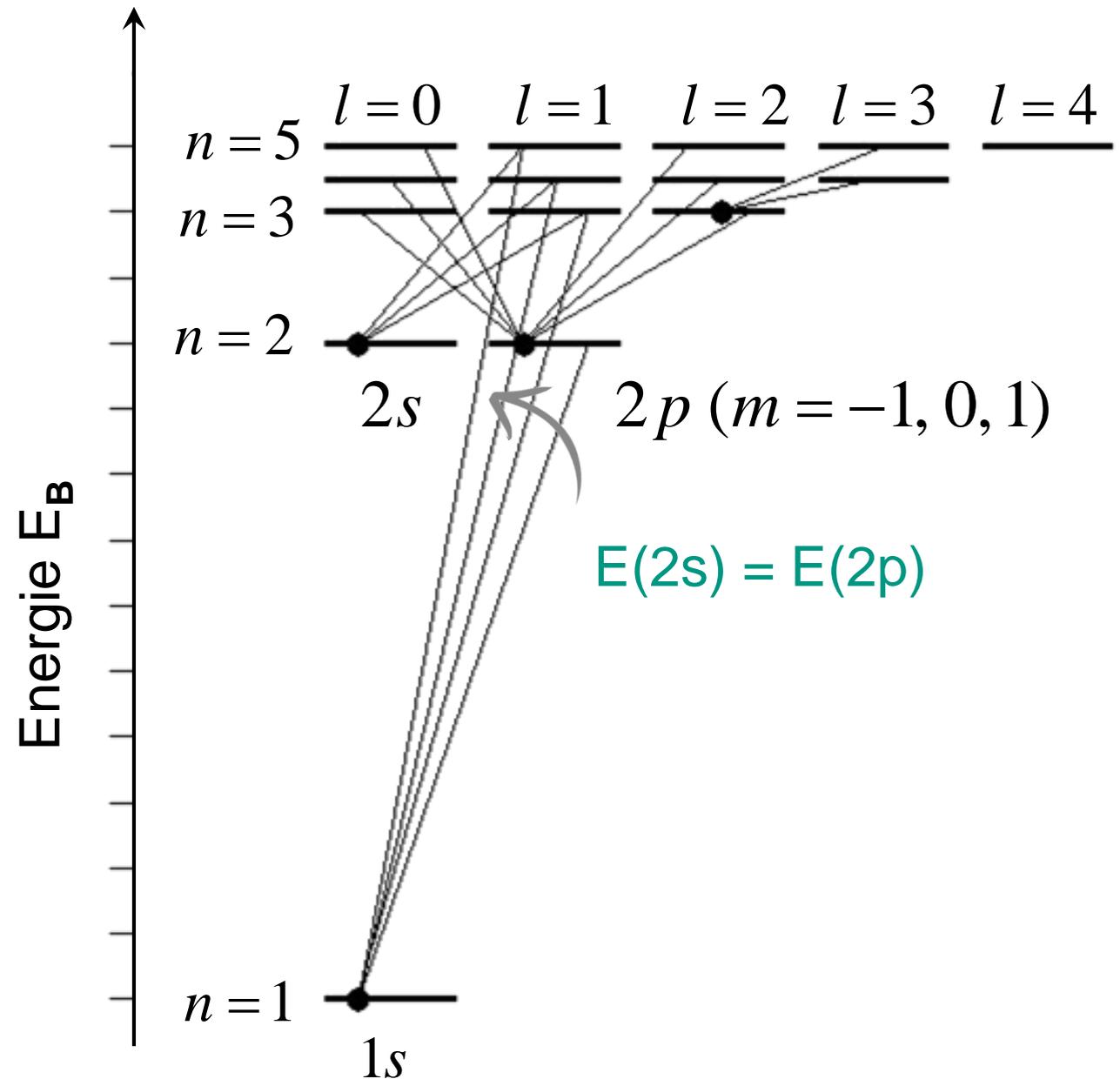
bisheriges Termschema

■ Energiezustände im H-Atom

- energetisch entartet, da Bindungsenergien E_B bisher nur abhängig von der

- Hauptquantenzahl n

- nicht von der Bahndrehimpuls-Quantenzahl l



bisheriges Termschema

■ Energiezustände im H-Atom

- Charakteristikum des H-Atoms:
zu jeder Hauptquantenzahl n
gibt es

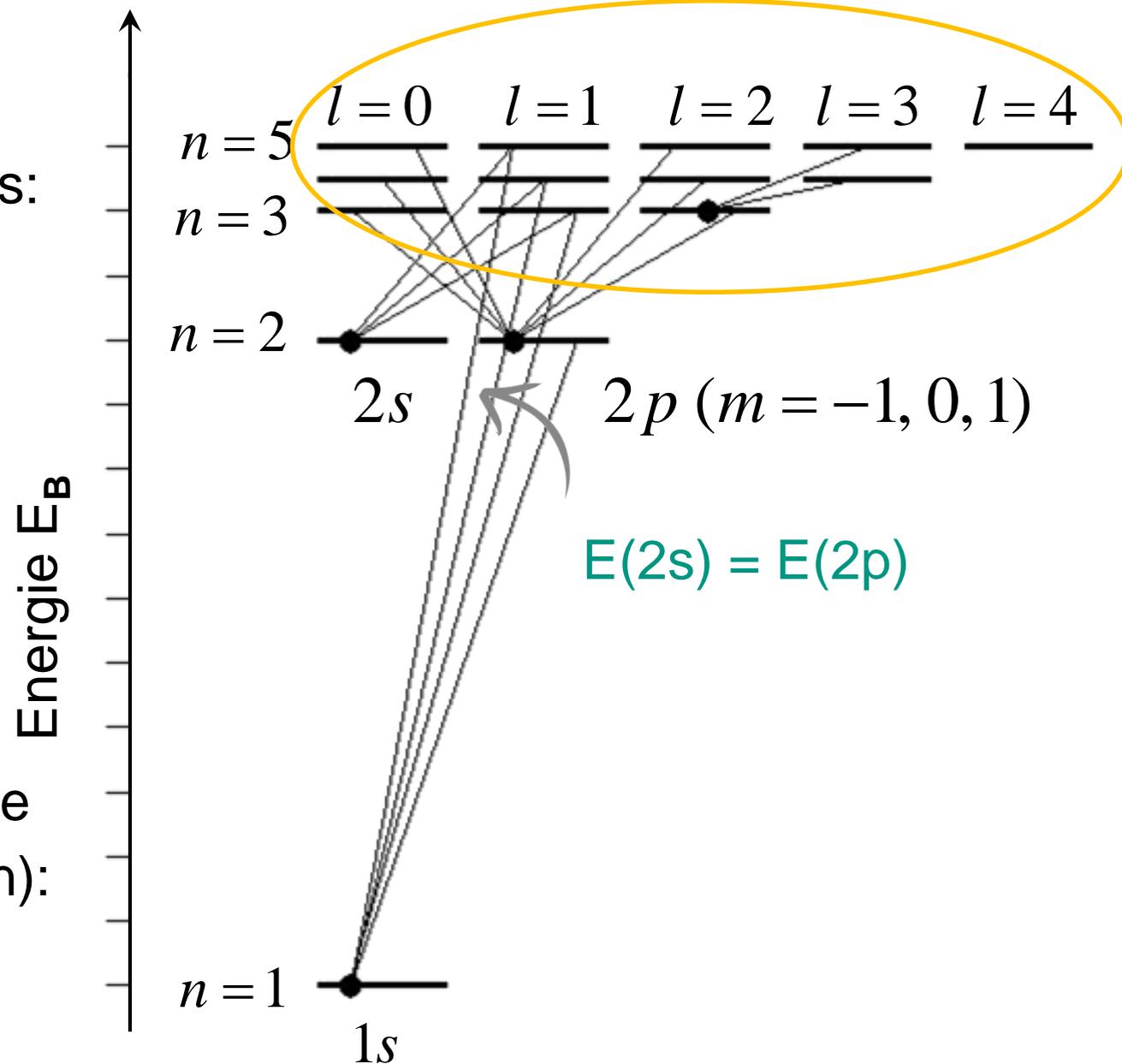
$$\sum_{l=0}^{n-1} (2l+1) = n^2$$

Wellenfunktionen mit der
gleichen Energie

- **Auswahlregeln** für Übergänge
(Photon- Emission / Absorption):

$$\Delta l = \pm 1$$

$$\Delta m = 0, \pm 1$$



Aufhebung der Energieentartung

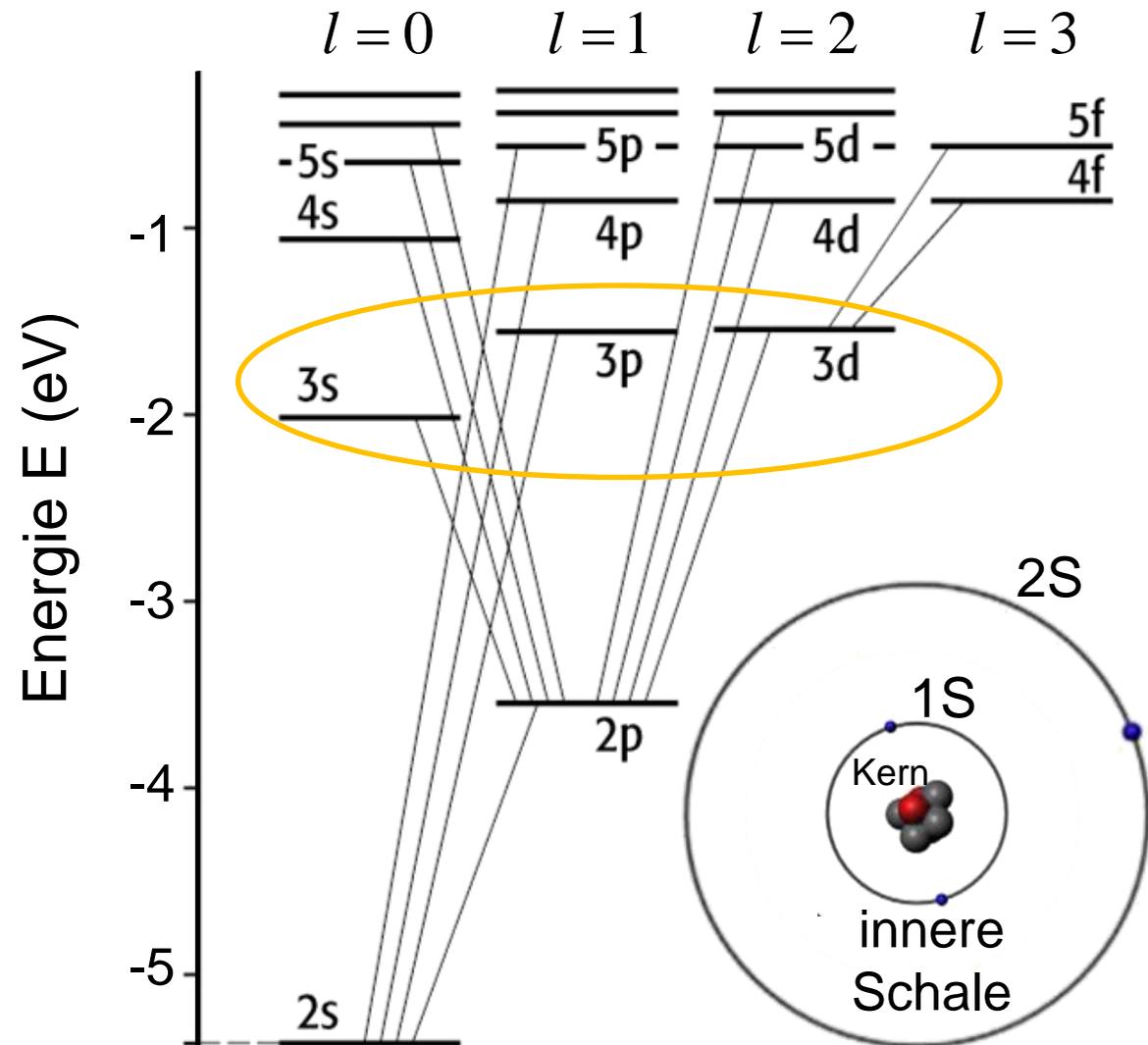
■ Energiezustands-Entartung im H-Atom wird aufgehoben durch

- Einfluss von weiteren Elektronen in der Atomhülle

Beispiel: Lithium-Atom ($Z=3$)
innere Elektronen schirmen
Kernfeld teilweise ab
(„Quantendefekt“)

$$V(r) \rightarrow V_{\text{eff}}(r)$$

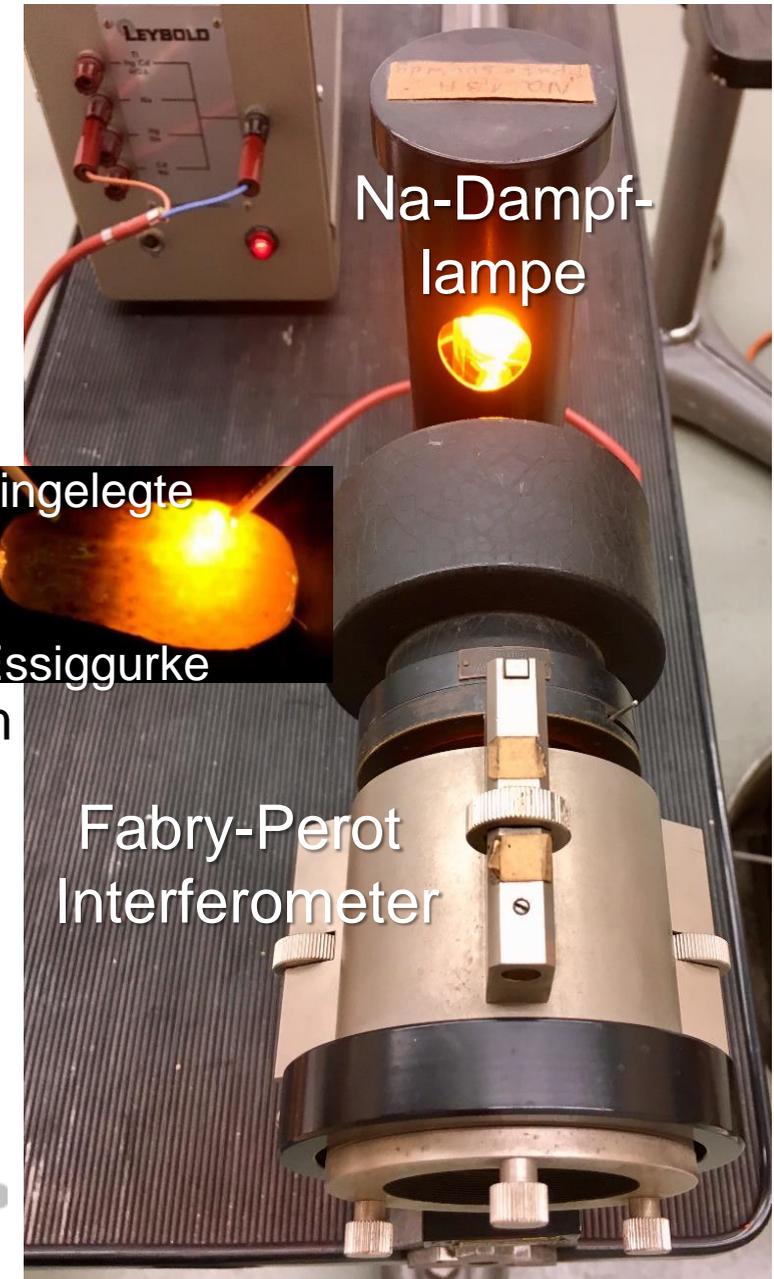
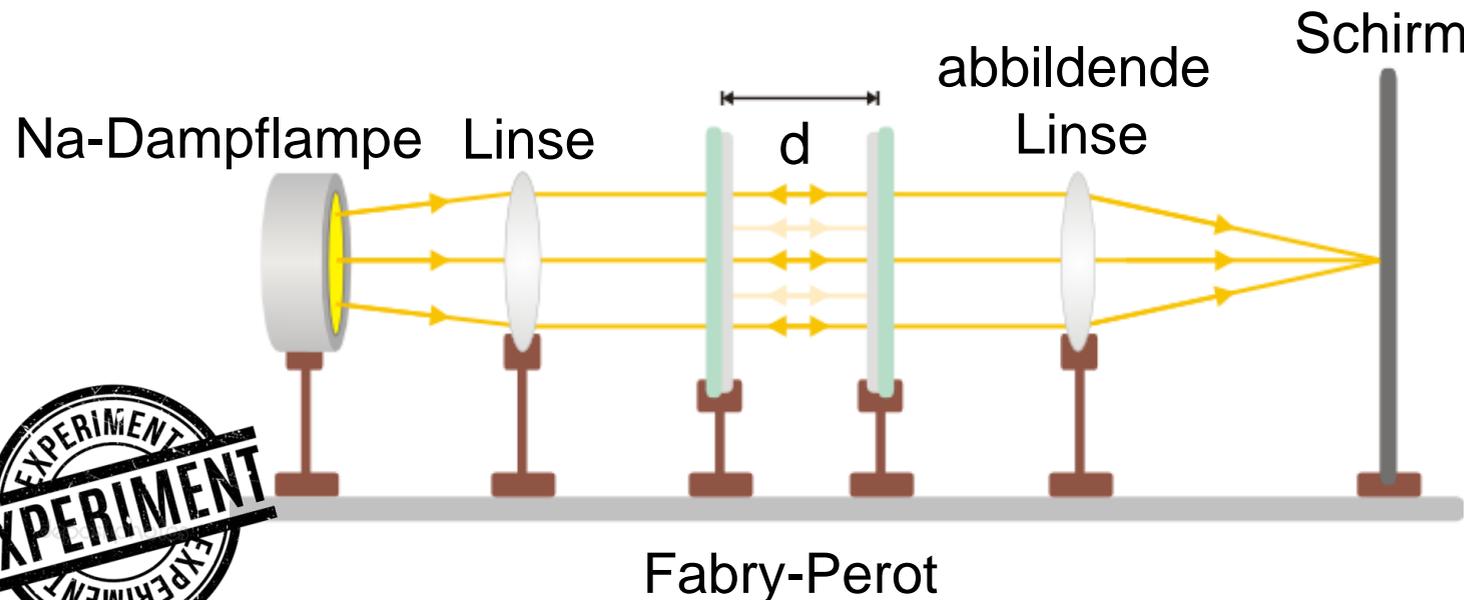
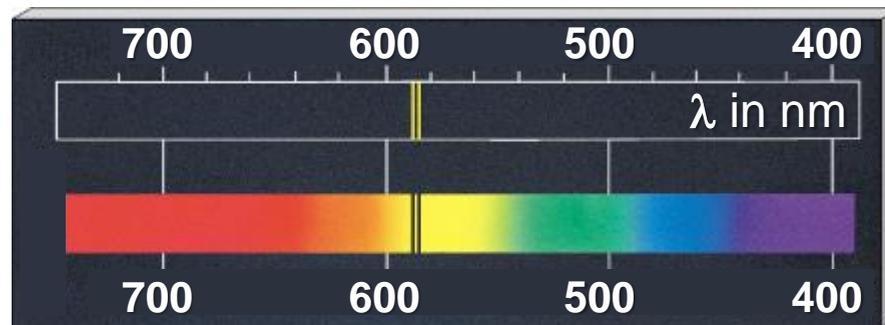
- relativistische Effekte
- externe Felder
- weitere Effekte: Vakuumfluktuationen, ...



Experimente: D-Linien von Natrium

■ Dublettstruktur der D-Linie von Na

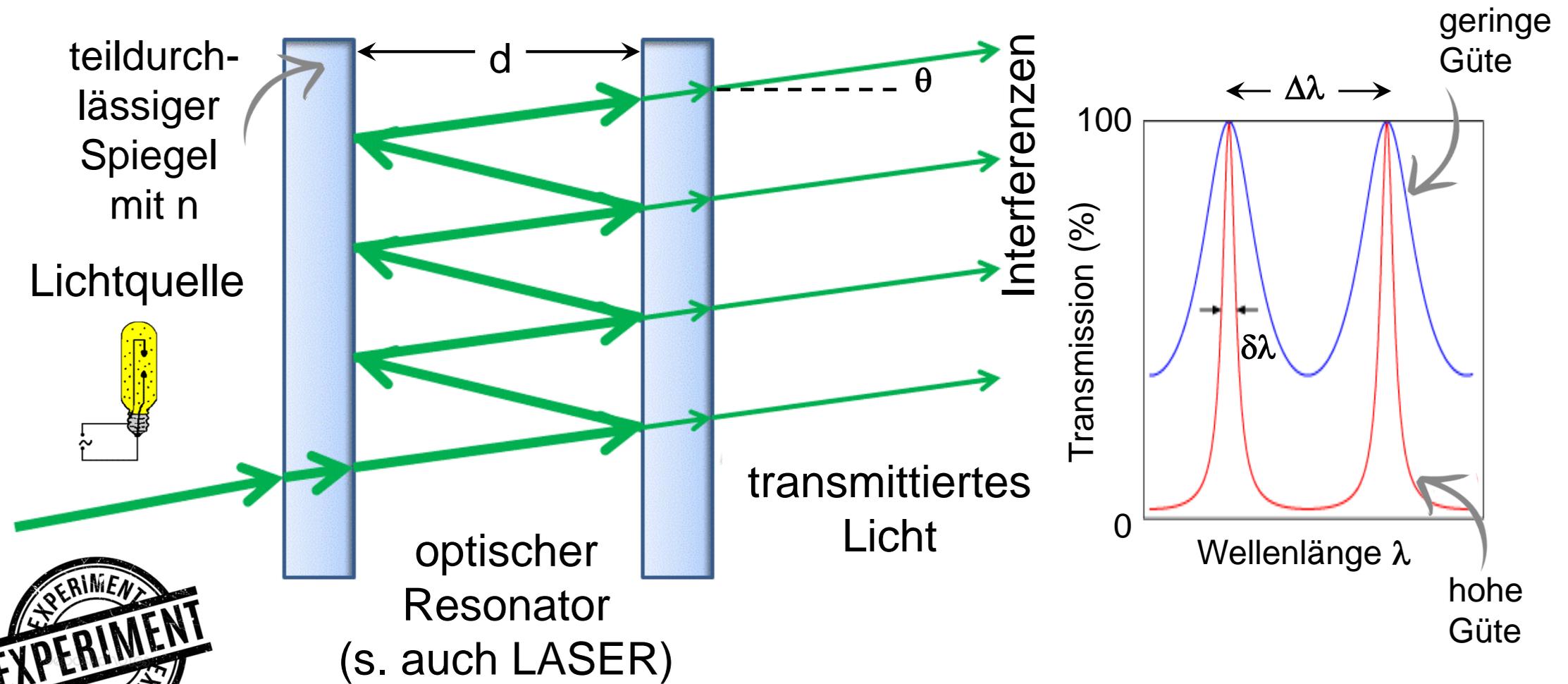
- Lichtquelle: Na-Dampflampe
- Spektrum: Fabry-Perot-Interferometer



Experimente: D-Linien von Natrium

■ Dublettstruktur der D-Linie von Na

- Lichtquelle: Na-Dampfampe
- **Spektrum: Fabry-Perot-Interferometer**

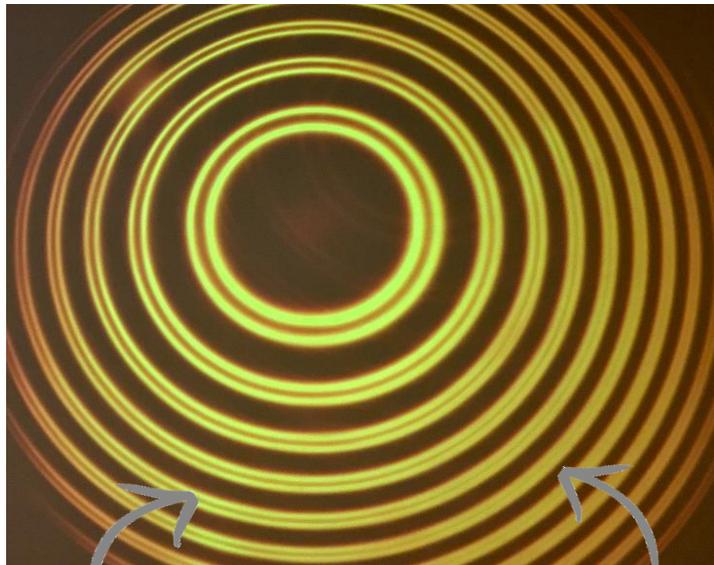


Experimente: D-Linien von Natrium

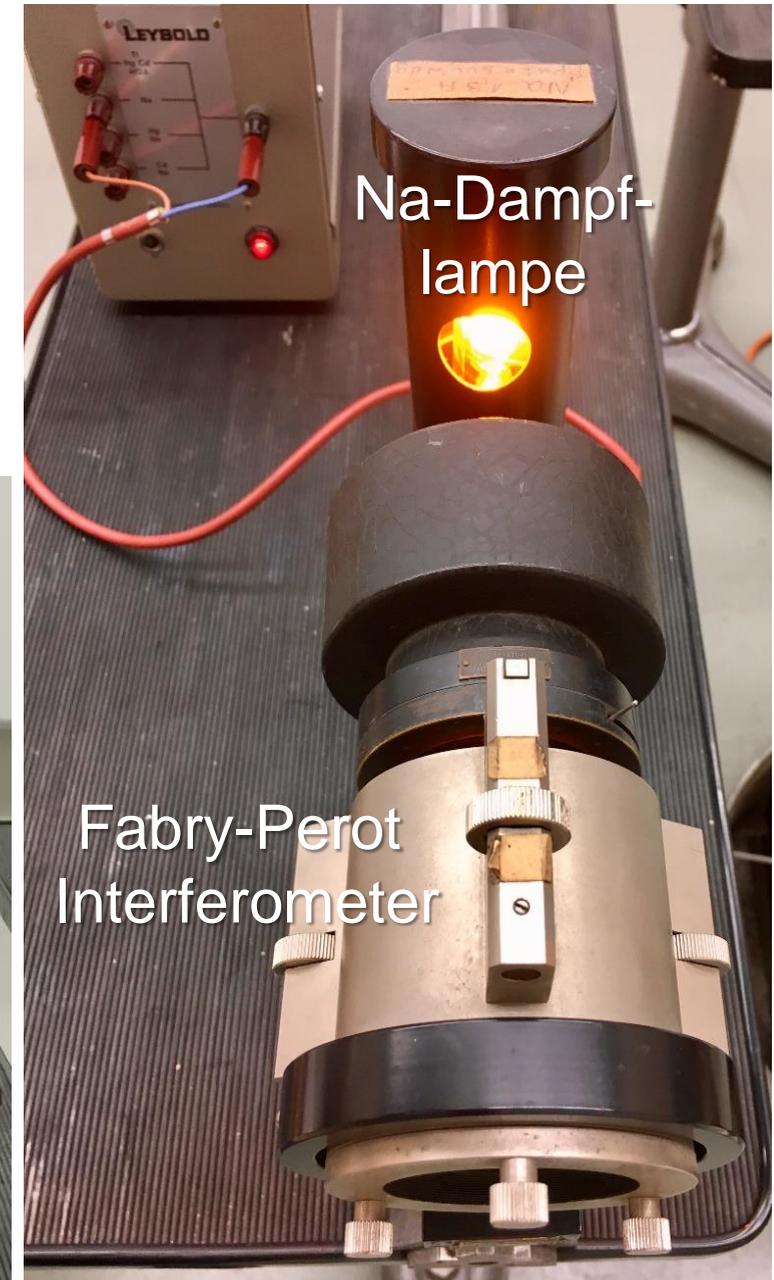
■ Dublettstruktur der D-Linie von Na

- Lichtquelle: Na-Dampf-lampe
- Interferenzmuster der beiden D-Linien
- daraus: $\Delta\lambda = 0,6 \text{ nm}$ („Feinstruktur“)

D-Linie ist aufgespalten!



schwache & starke
D-Linie:
 $\lambda = 589.6 \text{ nm}$ $\lambda = 589.0 \text{ nm}$



Na-Dampf-
lampe

Fabry-Perot
Interferometer

Aufspaltung der D-Linien von Natrium

Erklärung der Feinstruktur-Aufspaltung

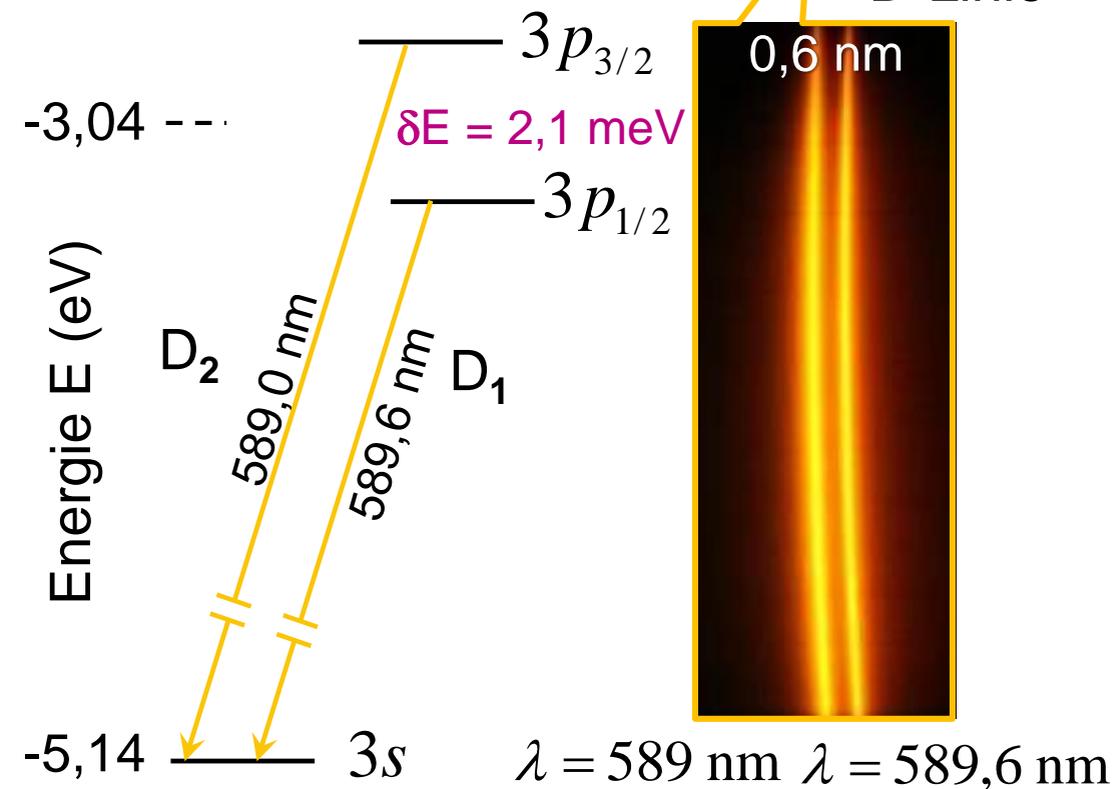
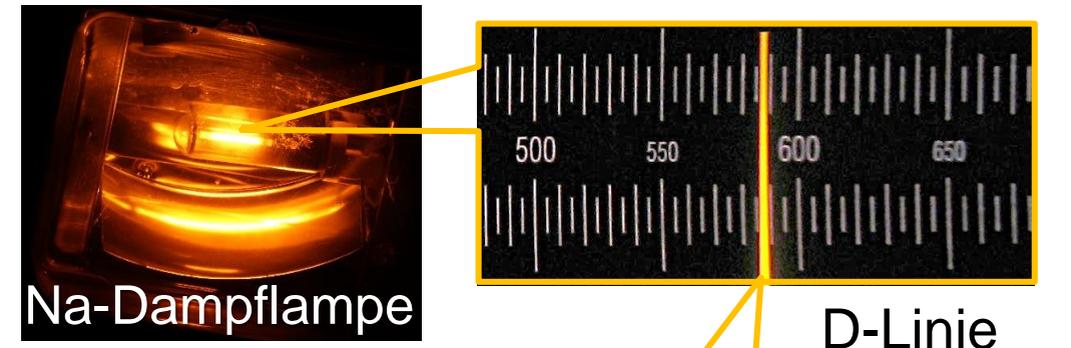
- D-Linien aus Übergängen von $3p$ ($-3,04$ eV) \rightarrow $3s$ ($-5,14$ eV)
 \Rightarrow große Übergangsenergie

$$\Delta E = 2,1 \text{ eV (= gelb)}$$

- die Aufspaltung von $\Delta\lambda = 0,6$ nm ist mit $\delta E = 2,1$ meV sehr klein!
- das $3p$ -Orbital ($l = 1$) von Na ist aufgespalten in ein **Dublett**:



Spin und Bahndrehimpuls koppeln



Bahndrehimpuls und Spin

■ Orbital: Elektron mit Geschwindigkeit $v = 2\pi \cdot r / T$ besitzt **Bahndrehimpuls**

■ Uhlenbeck und Goudsmit (1925) führen den **Eigendrehimpuls**

(**Spin S**) des Elektrons ein

- Spinquantenzahl Elektron

$s = \frac{1}{2}$ (halbzahlig)

allgemein: $s = i/2$ mit

$i = 0, 1, 2, 3, \dots$

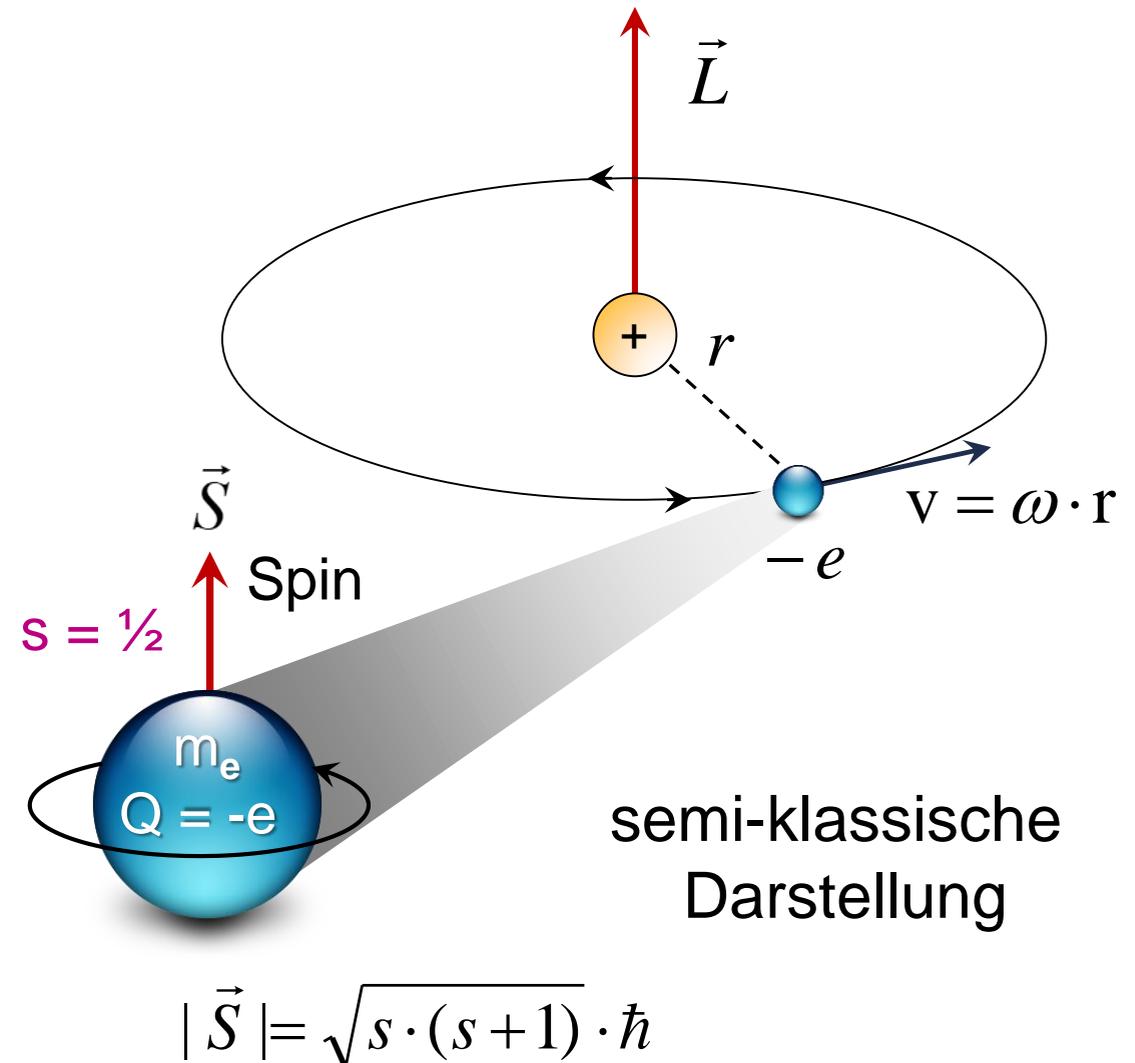
- mit $|\vec{S}| = \sqrt{s \cdot (s + 1)} \cdot \hbar$



G. Uhlenbeck



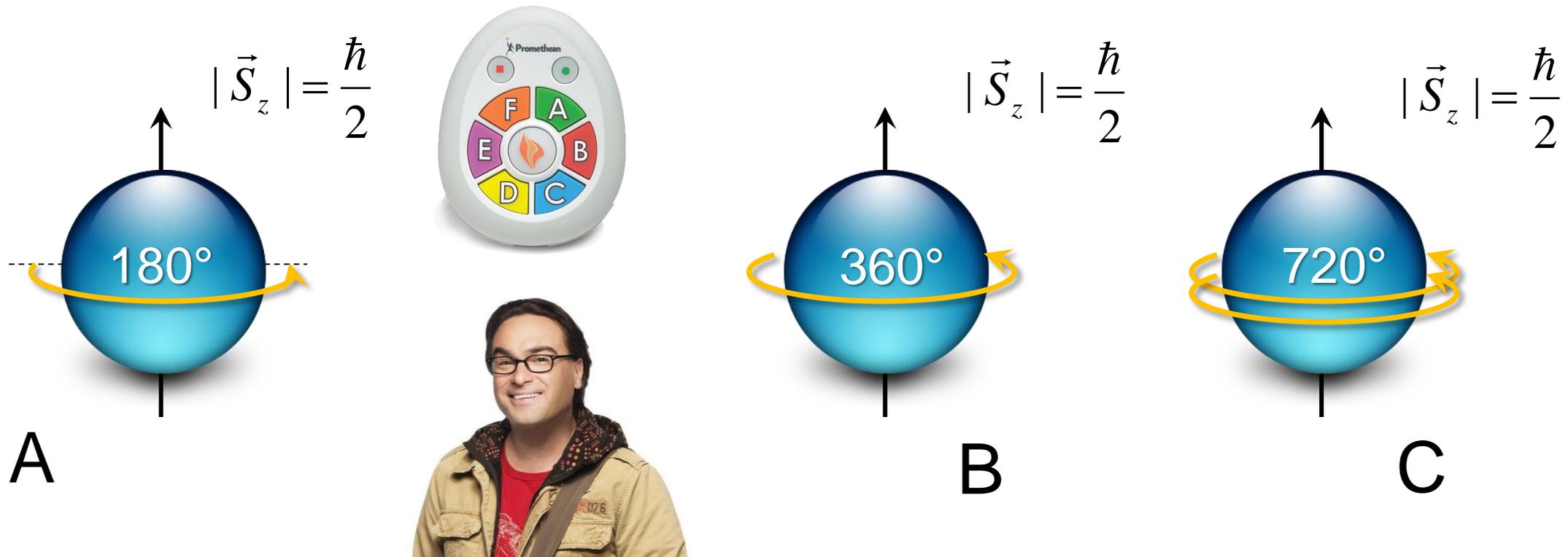
S. Goudsmit



Fun with Facts – Spin

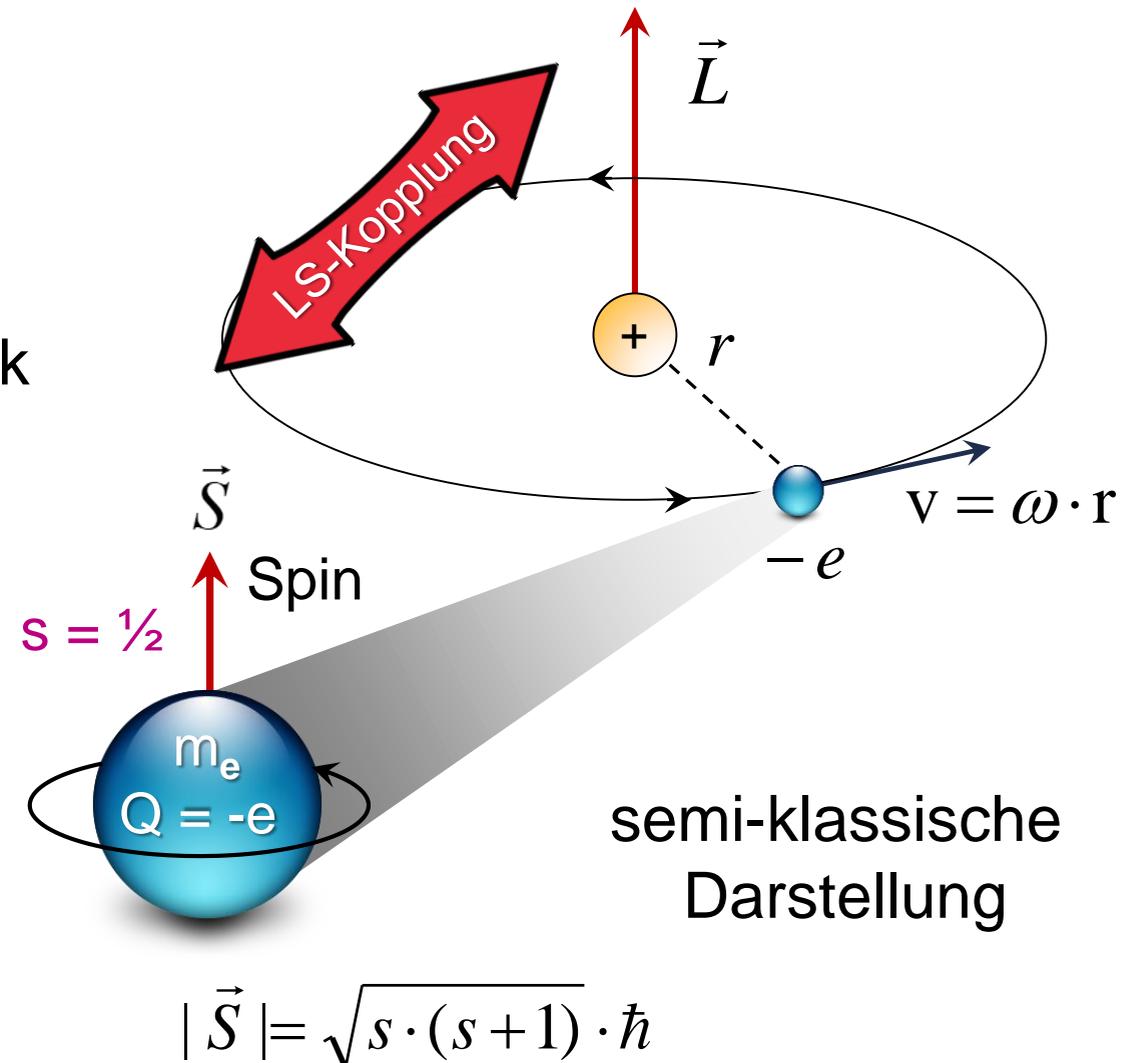
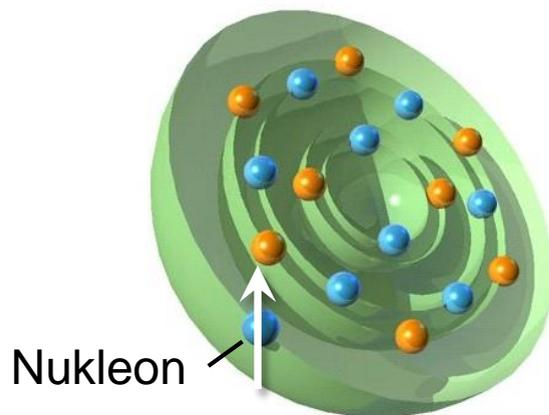
■ Was bedeutet der halbzahlige Spin eines Elektrons? Es muss sich...

- A) ...um 180° drehen für gleiche Phase
- B) ...um 360° drehen für gleiche Phase
- C) ...um 720° drehen für gleiche Phase

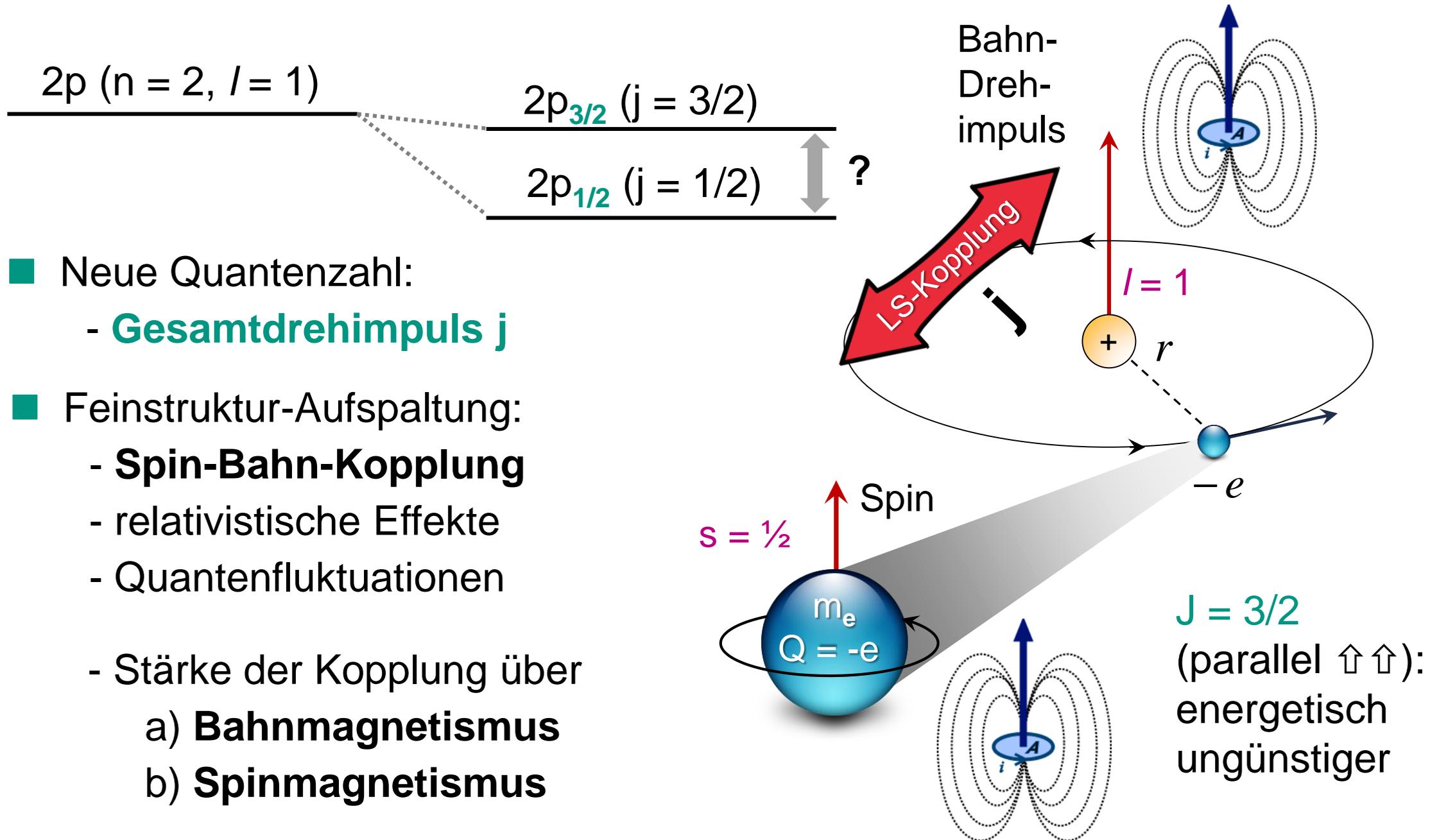


Bahndrehimpuls und Spin koppeln

- Spin-Bahn-Wechselwirkung (**L-S-Kopplung**): verantwortlich für die Feinstruktur-Aufspaltung (neben anderen Termen)
- L-S Kopplung ist ein **universeller Prozess in Vielteilchensystemen**
 - beobachtet auch in der Kernphysik (für die Nukleonen p und n), dort aber viel stärker (Kap. 10.4)



Energie-Aufspaltung von Orbitalen

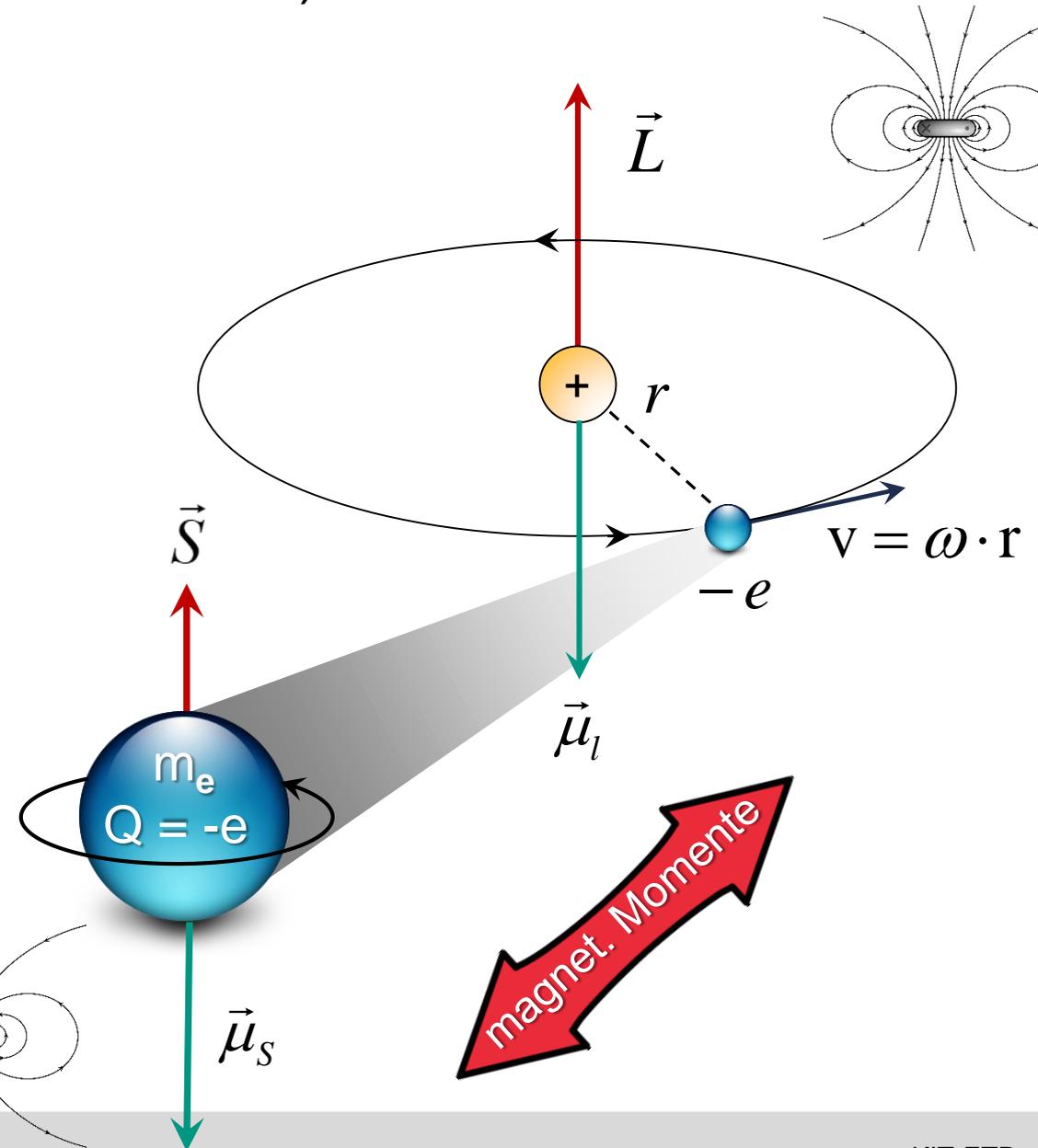
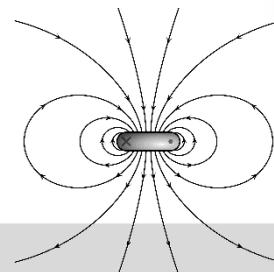
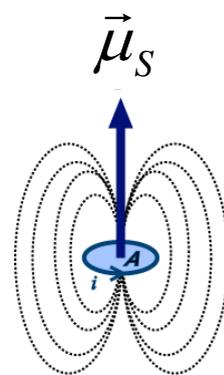
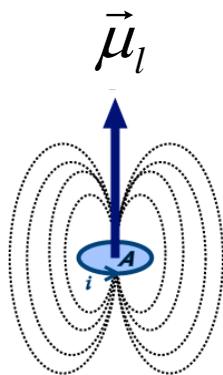


- Neue Quantenzahl:
 - **Gesamtdrehimpuls j**
- Feinstruktur-Aufspaltung:
 - **Spin-Bahn-Kopplung**
 - relativistische Effekte
 - Quantenfluktuationen
 - Stärke der Kopplung über
 - a) **Bahnmagnetismus**
 - b) **Spinmagnetismus**

6.3 Bahn- und Spinmagnetismus

■ Erklärung der Linienaufspaltung (Feinstruktur) erfordert 3 Effekte

1. zum Bahndrehimpuls \vec{L} gehört ein magnetisches Moment $\vec{\mu}_l$
2. zum Eigendrehimpuls (Spin) \vec{S} gehört magnet. Moment $\vec{\mu}_s$
3. Wechselwirkung von $\vec{\mu}_l$ und $\vec{\mu}_s$ erzeugt Dublett (**Feinstruktur**)



Bahnmagnetismus

- um Proton kreisendes (Geschwindigkeit $v = 2\pi \cdot r / T$) Elektron mit $Q = -e$ und Bahndrehimpuls L (z.B. p-Orbital) erzeugt einen Kreisstrom I

$$I = \frac{Q}{T} = -\frac{e \cdot \omega}{2\pi}$$

- magnetisches Moment μ

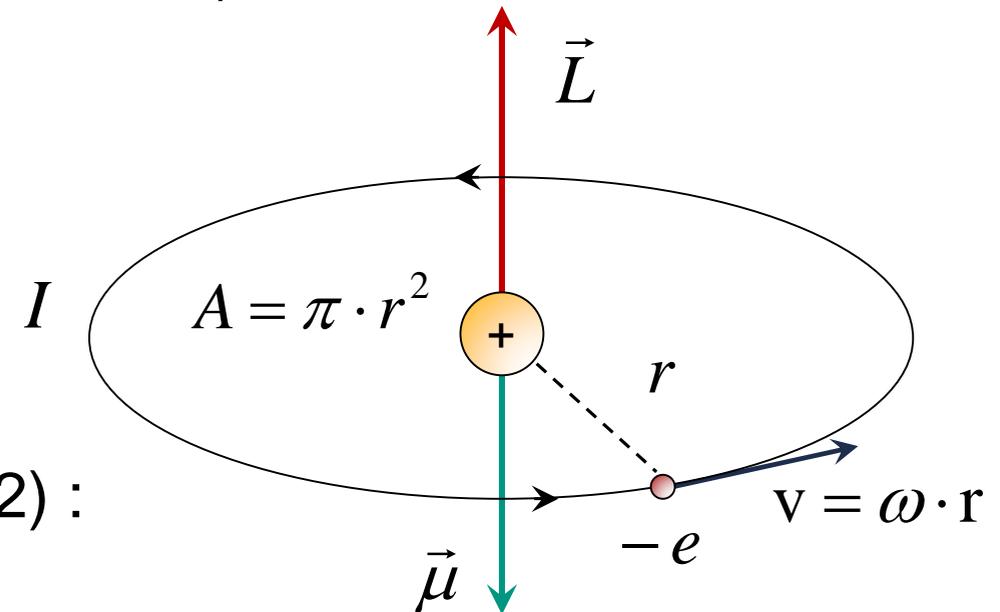
(vgl. Leiterschleife in klass. ExPhys. 2) :

$$\mu = I \cdot A = -\frac{1}{2} \cdot e \cdot \omega \cdot r^2$$

- mit $|\vec{L}| = m_e \cdot v \cdot r = m_e \cdot \omega \cdot r^2$

$$\vec{\mu} = -\frac{e}{2m_e} \cdot \vec{L}$$

antiparallele Vektoren für Elektronen mit $q = -e$



semi-klassische
Darstellung

Bohrsches Magneton

- Quantenmechanisches Analogon:

$$\vec{\mu} = \mu \cdot \frac{\vec{L}}{\hbar}$$

Magneton des Teilchens

- **Bohrsches Magneton**

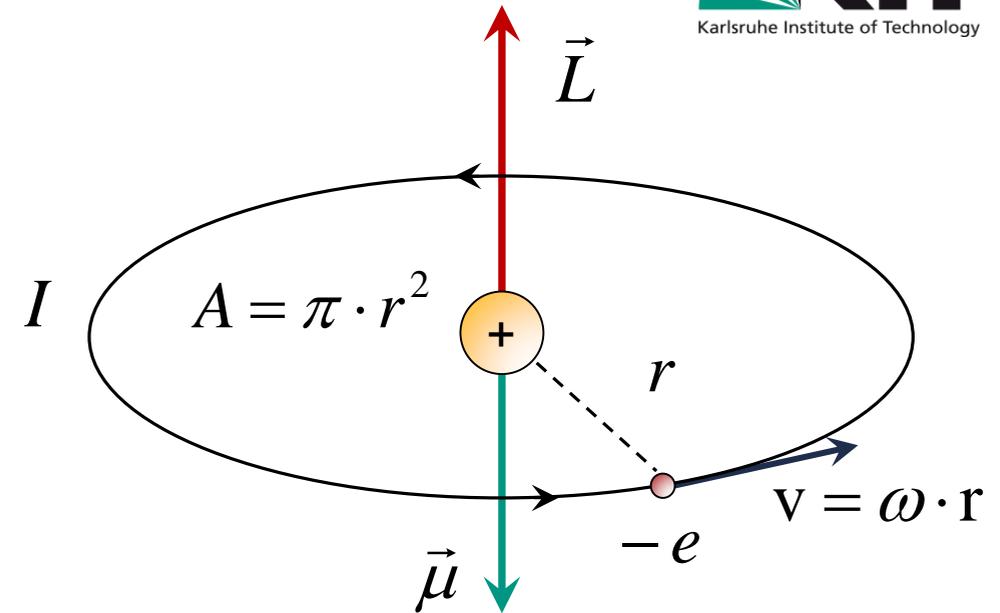
- für Elektron mit Masse m_e :

$$\vec{\mu} \sim -\mu_B \cdot \frac{\vec{L}}{\hbar}$$

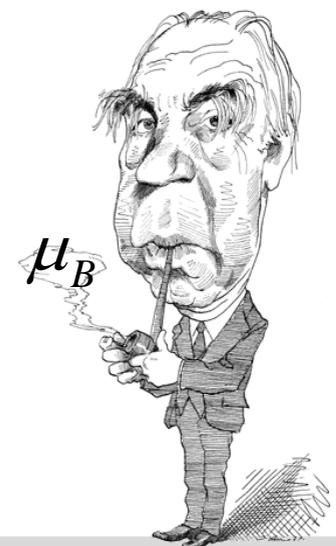
$$\mu_B = \frac{e}{2m_e} \cdot \hbar$$

$$\mu_B = 5,7883818012(26) \cdot 10^{-5} \text{ eV/T}$$

- magnetisches Moment μ ist invers proportional zur Masse!
damit gilt: **$\mu(\text{Elektron}) \gg \mu(\text{Proton})$**



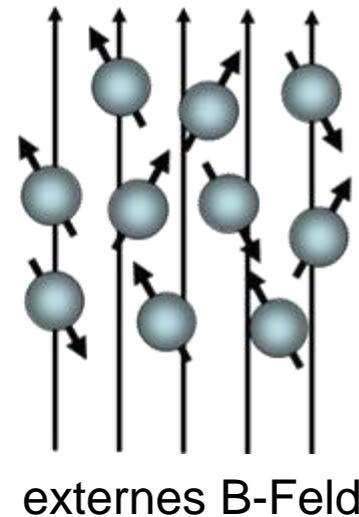
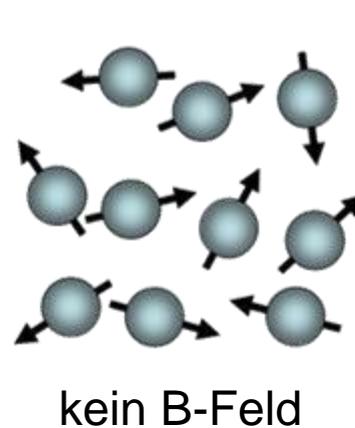
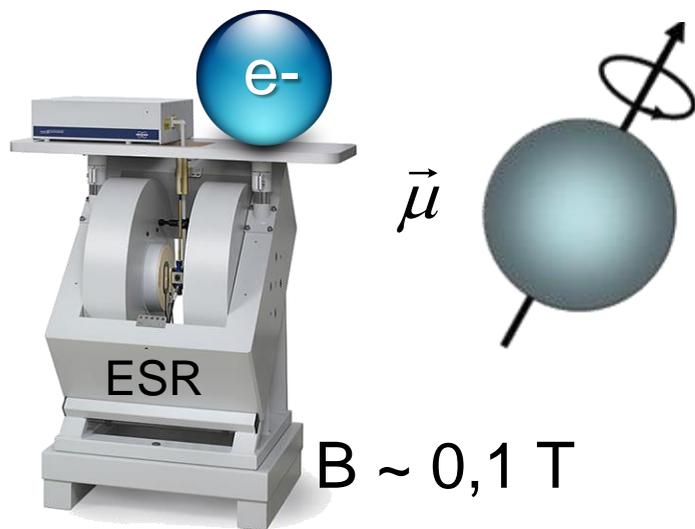
semi-klassische
Darstellung



VERY IMPORTANT

Magnet. Moment von Elektron & Proton

- Teilchen mit magnetischem Moment μ in externem B-Feld:
 - **Präzessionsbewegung** um Achse des B-Feld (\Rightarrow **Polarisation**)
 - Elektronen mit großem μ lassen sich leicht polarisieren (ESR)
 - Protonen (Kerne) mit kleinem μ lassen sich schwer polarisieren (NMR)



- magnetisches Moment μ ist invers proportional zur Masse!
damit gilt: $\mu(\text{Elektron}) \gg \mu(\text{Proton})$

VERY IMPORTANT

Bohrsches Magneton & g-Faktor

- Elektronen mit Bahndrehimpulsquantenzahl l

$$\vec{\mu}_l = \mu_l \cdot \frac{\vec{L}}{\hbar}$$

$$\mu_l = \mu_B \cdot \sqrt{l \cdot (l + 1)} = \frac{e}{2m_e} \cdot \hbar \cdot \sqrt{l \cdot (l + 1)}$$

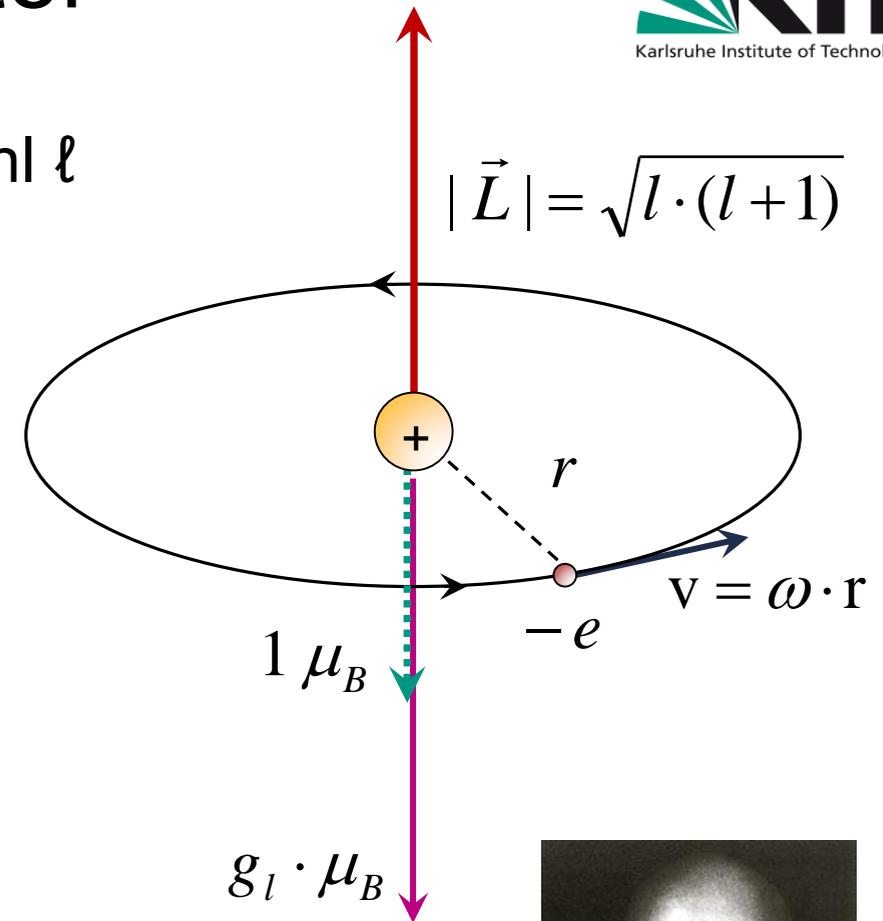
- mit Landéschem g-Faktor (Elektron):

$$\vec{\mu}_l = -g_l \cdot \mu_B \cdot \frac{\vec{L}}{\hbar} \quad g_l = 1$$

- Dimensionsloser **g-Faktor**:

Verhältnis von magnetischem Moment μ relativ zu Drehimpuls L in Einheiten von \hbar

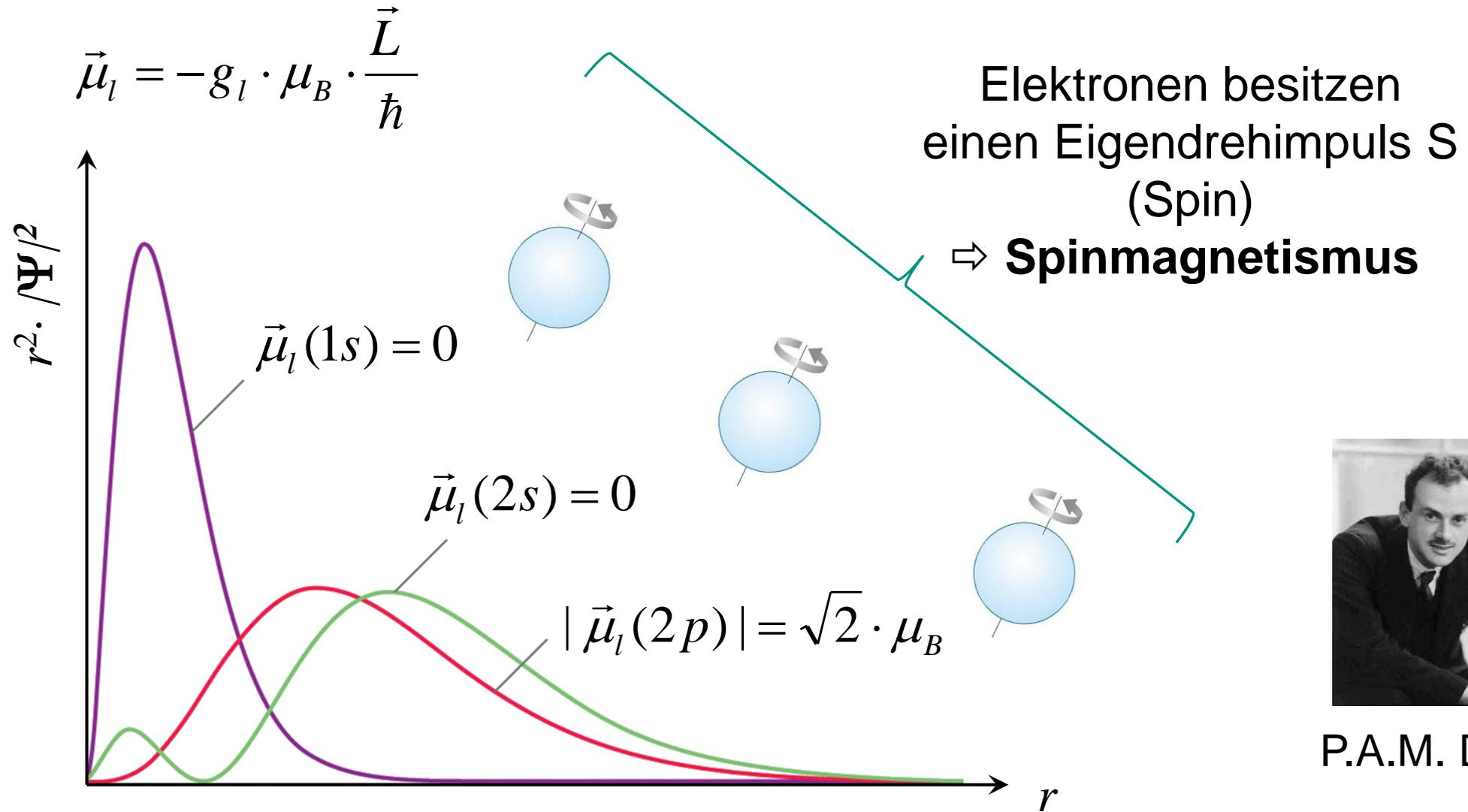
(wichtig bei Spin, später auch Nukleonen p und n)



Alfred Landé

Magnetische Bahnmomente - Orbitale

- H-Atomorbitale mit Bahndrehimpulsquantenzahl l



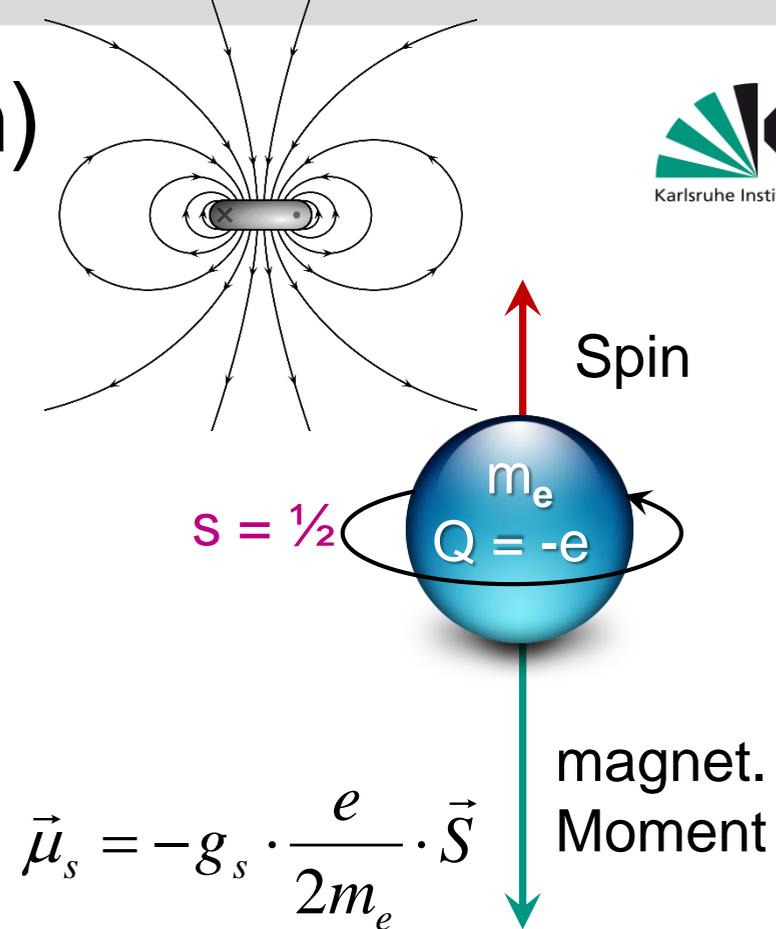
P.A.M. Dirac

Spinmagnetismus (Elektronen)

■ Magnetisches Moment des Spins:

$$\vec{\mu}_s = -g_s \cdot \frac{e}{2m_e} \cdot \vec{S}$$

Spin-g-Faktor $g_s = 2,002$



- Dirac-Theorie fordert Existenz des Spins & sagt g-Faktor Elektron voraus: $g_s = 2,000$
- g-Faktor des Spins \neq g-Faktor des Bahndrehimpulses

$$g_s \neq g_l$$

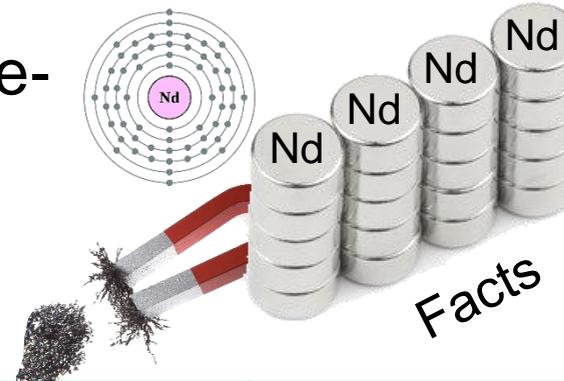


P.A.M. Dirac

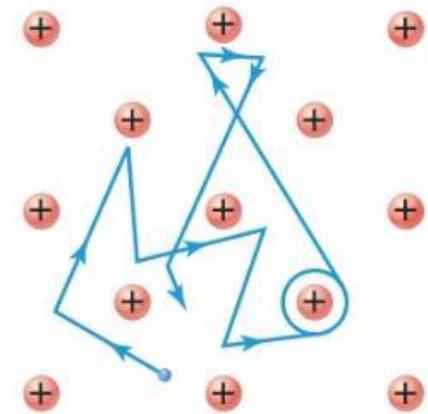
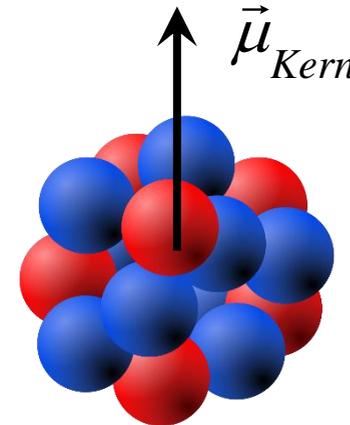
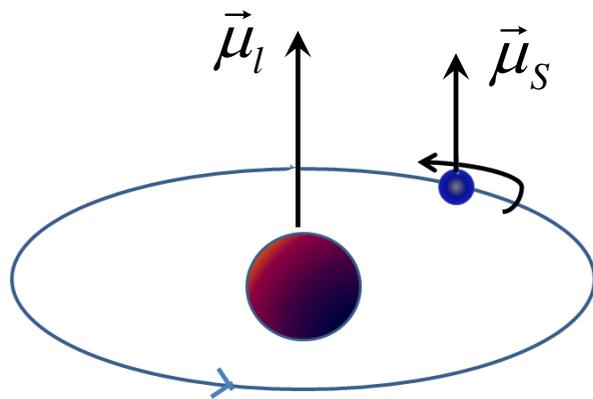
Fun with Facts – Magnetische Materialien

■ Was erzeugt den Magnetismus in Materialien? Es ist ...

- A) ...Spin- und Bahnmagnetismus der e-
- B) ...magnetische Moment der Kerne
- C) ...thermische Strom der Elektronen



SHELDON COOPER
presents
FUN WITH FLAHS



A

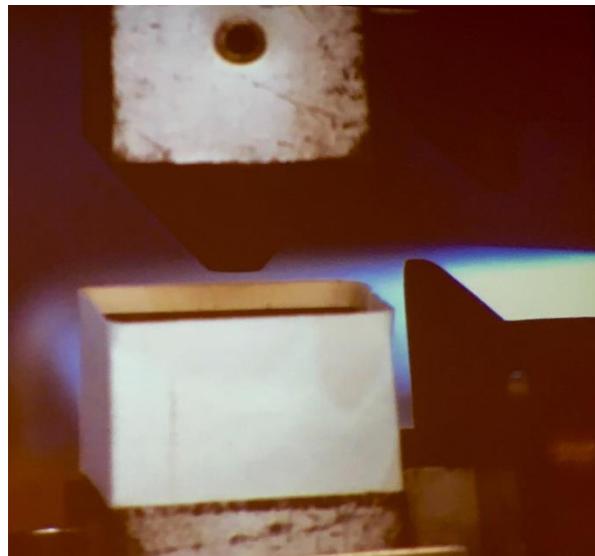
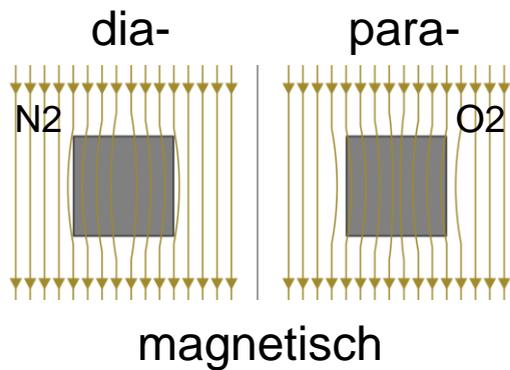


B

C

Experiment – LOX und LN2

- **Flüssiger Sauerstoff (LOX)** – O_2 ist **paramagnetisch**
verbleibt zwischen den Polen eines starken Magneten
2 ungepaarte Elektronen im MOLEKÜL (Spins: $\uparrow\uparrow$), daher paramagnetisch
- **Flüssiger Stickstoff (LN2)** – N_2 ist **diamagnetisch**
strömt zwischen den Polen eines starken Magneten hindurch
keine ungepaarten Elektronen im MOLEKÜL (alle: $\uparrow\downarrow$), daher diamagnetisch



magnetischer Gradient



Bahn- und Spinmagnetismus – ideale Tools

Ohne Bahn- und Spin-Magnetismus:

- keine Möglichkeit die Bahndrehimpulse oder Spins von sub-atomaren Quanten-Objekten direkt zu messen



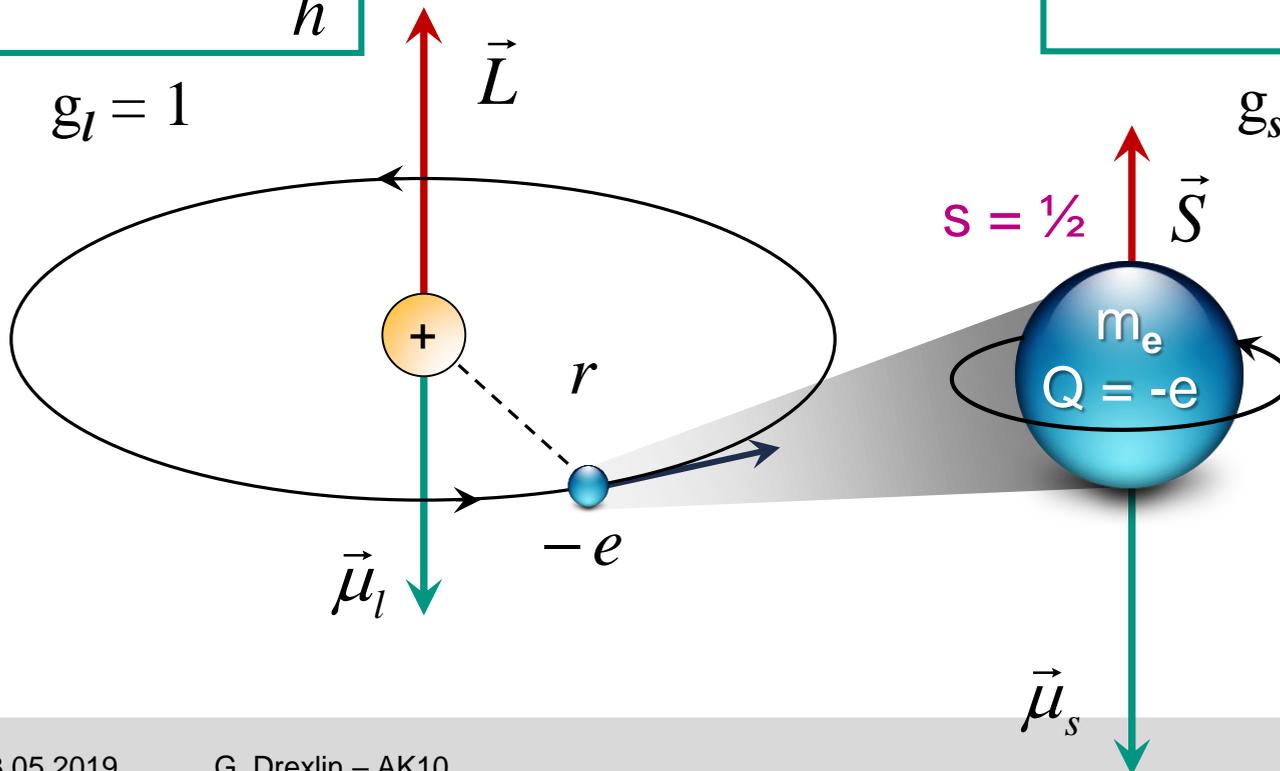
$$\vec{\mu}_l = -g_l \cdot \mu_B \cdot \frac{\vec{L}}{\hbar}$$

$$g_l = 1$$

semi-klassische Darstellungen

$$\vec{\mu}_s = -g_s \cdot \frac{e}{2m_e} \cdot \vec{S}$$

$$g_s = 2$$



Präzisions-Tools für die Ex-Physik

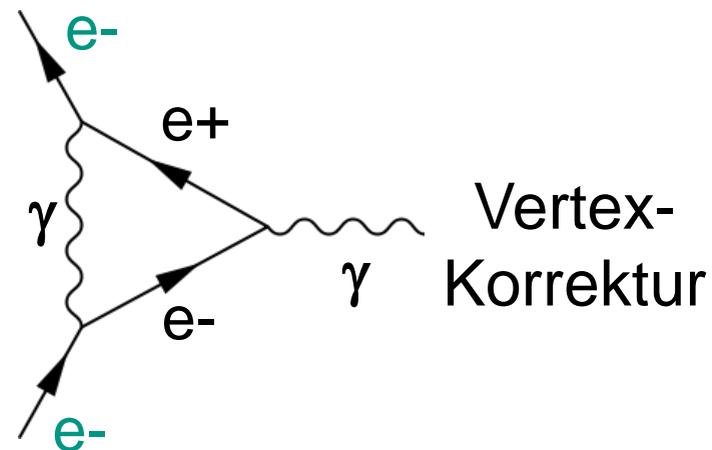
g-Faktor: anomales magnetisches Moment

- **anomales magnetisches Moment** des Elektrons:
Abweichung des g-Faktors vom Wert der Dirac-Theorie

$$a = \frac{g - 2}{2}$$

- wichtigste Korrektur entsteht durch Prozesse der **Quantenelektrodynamik (QED)**:

$$a_e = \frac{\alpha}{2\pi} \approx 0,001\,161\,4$$



Nobelpreis
1965



Julian
Schwinger

g-Faktor: anomales magnetisches Moment

- extrem genaue Messungen und Berechnungen für Elektron & Myon

Theorie (Standardmodell)

- theoretische Berechnungen des g-Faktors des Elektrons

$$g_{s,theo} = 2,002\,319\,304\,8(15)$$



THEO VS. EXP

Experiment

- experimentelle Bestimmungen des g-Faktors (NIST-CODATA 2014)

$$g_{s,theo} = 2,002\,319\,304\,361\,82(52)$$

- relative Genauigkeit: $2,6 \times 10^{-13}$



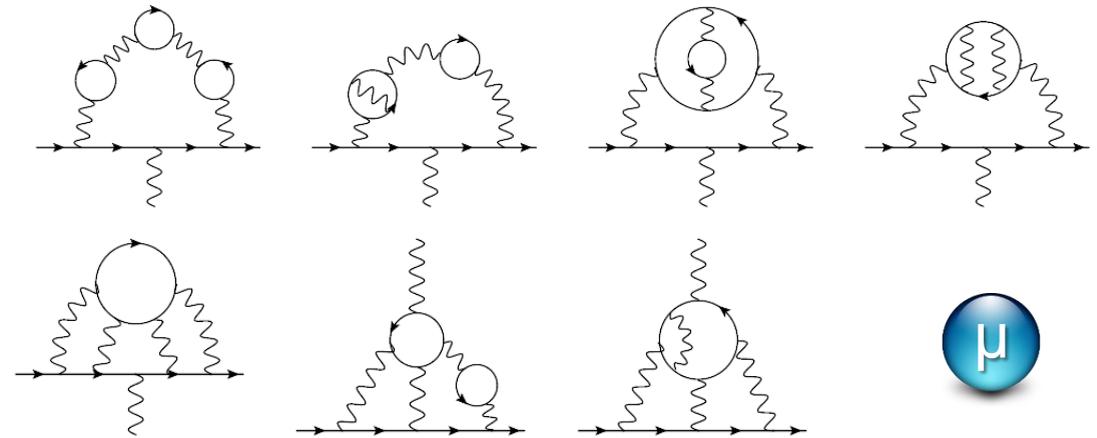
g-Faktor des Myons: die g-2 Diskrepanz

- seit langem bestehende 3,4 σ Diskrepanz für den g-Faktor des Myons

Theorie (Standardmodell)

- umfangreiche Berechnungen (TTP) QED + Einfluss weiterer Wechselwirkungen & neuer Teilchen:

$$a_{\mu,\text{theo}} = 0,001\,165\,918\,04(51)$$

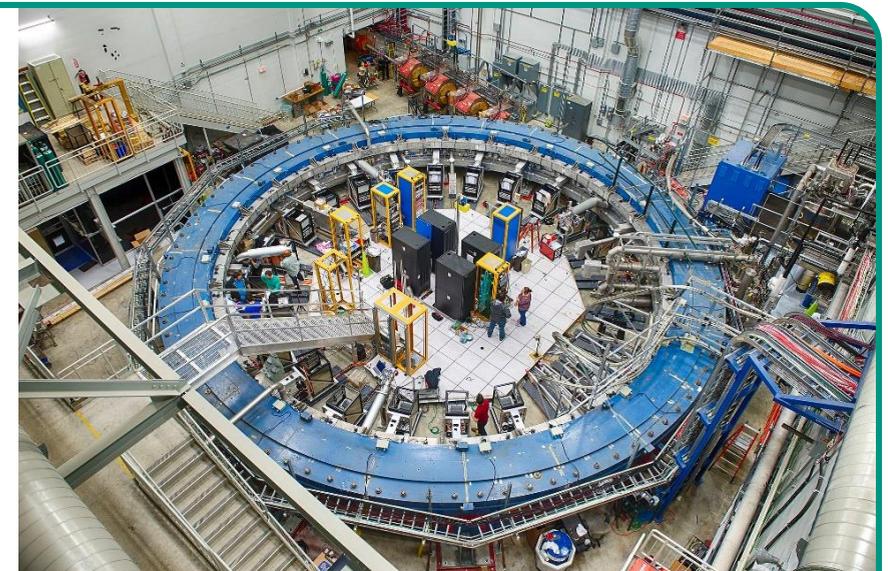


Experiment

- detaillierte Messungen (E821):

$$a_{\mu,\text{exp}} = 0,001\,165\,920\,91(54)(33)$$

- **g-2 Experiment** am Fermilab (Batavia, USA): Bestimmung der Anomalie des magnetischen Moments des Myons mit 0,14 ppm Präzision



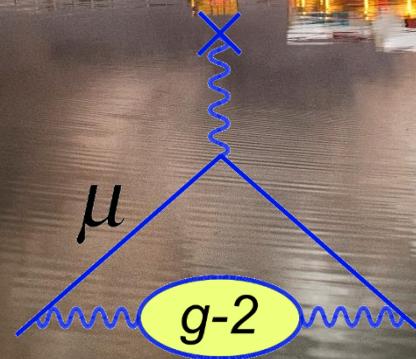
g-Faktor: anomales magnetisches Moment

Fermilab, Batavia, USA



Fermilab

Ankunft neuer Magnet für g-2

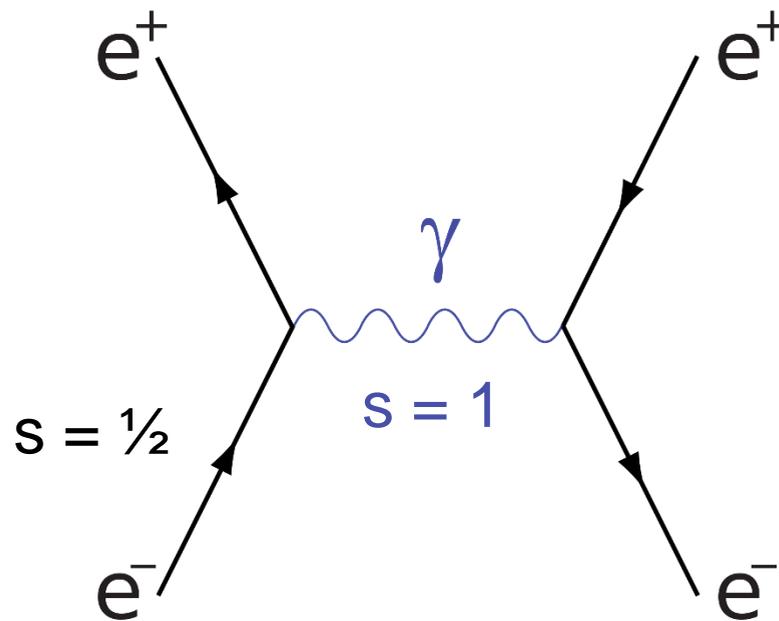


April 2019 –
Myon g-2 Experiment beginnt seinen 2. Run

Einschub: Spin bei Elementarteilchen

■ **Spin** = wichtige Teilchen-Eigenschaft von Teilchen des Standardmodells

- **Fermionen** ($s = \frac{1}{2}$) bauen die Materie auf (Quarks, Leptonen)
- (Vektor-) **Bosonen** ($s = 1$) sind Quanten, die Wechselwirkungen vermitteln (z.B. das Photon)

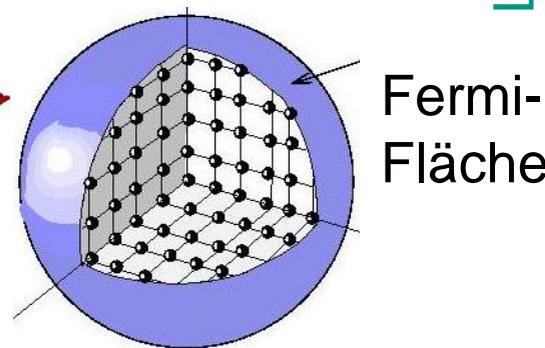
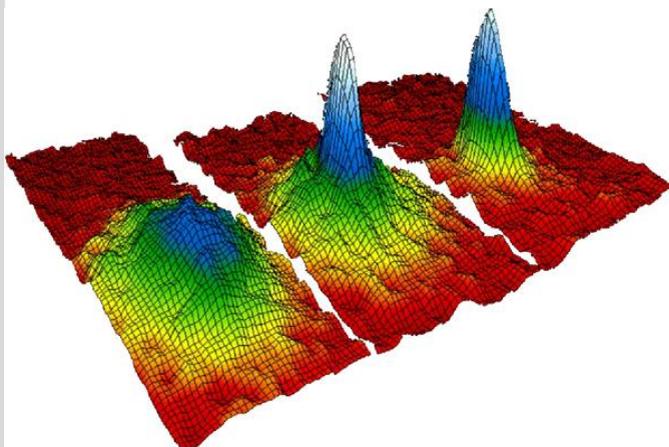
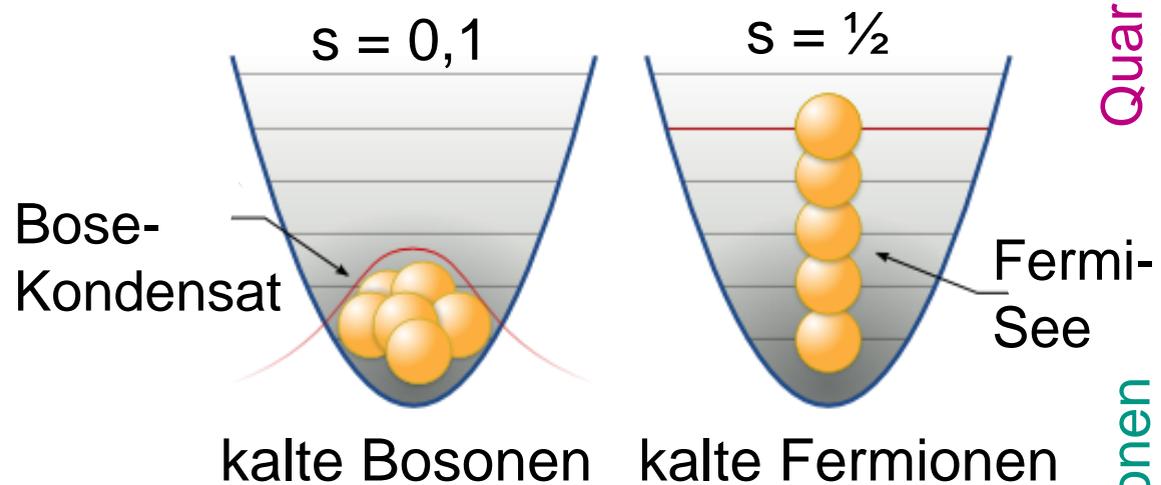


Quarks	2,3 MeV $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{2}$ u up	1,275 GeV $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{2}$ c charm	173,07 GeV $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{2}$ t top	0 0 1 Y Photon	Eichbosonen $s = 1$
	4,8 MeV $-\frac{1}{3}$ $\frac{1}{2}$ d down	95 MeV $-\frac{1}{3}$ $\frac{1}{2}$ s strange	4,18 GeV $-\frac{1}{3}$ $\frac{1}{2}$ b bottom	0 0 1 g Gluon	
	<2 eV 0 $\frac{1}{2}$ ν_e Elektron-Neutrino	<0,19 MeV 0 $\frac{1}{2}$ ν_μ Myon-Neutrino	<18,2 MeV 0 $\frac{1}{2}$ ν_τ Tau-Neutrino	91,2 GeV 0 1 Z^0 Z Boson	
	0,511 MeV -1 $\frac{1}{2}$ e Elektron	105,7 MeV -1 $\frac{1}{2}$ μ Myon	1,777 GeV -1 $\frac{1}{2}$ τ Tau	80,4 GeV ± 1 1 W^\pm W Boson	
	Fermionen mit $s = \frac{1}{2}$			Bosonen mit $s = 1, 0$	
	Leptonen				
			125,9 GeV 0 0 H Higgs Boson		

Einschub: Spin bei Elementarteilchen

■ **Spin** = wichtige Teilchen-Eigenschaft von Teilchen des Standardmodells

- unterschiedliche
Vertauschungssymmetrien



Quarks		2,3 MeV $\frac{2}{3}$ u up	1,275 GeV $\frac{2}{3}$ c charm	173,07 GeV $\frac{2}{3}$ t top	0 0 1 γ Photon	125,9 GeV 0 0 H Higgs Boson
		4,8 MeV $-\frac{1}{3}$ $\frac{1}{2}$ d down	95 MeV $-\frac{1}{3}$ $\frac{1}{2}$ s strange	4,18 GeV $-\frac{1}{3}$ $\frac{1}{2}$ b bottom	0 0 1 g Gluon	Eichbosonen s = 1
Leptonen		<2 eV 0 $\frac{1}{2}$ ν_e Elektron-Neutrino	<0,19 MeV 0 $\frac{1}{2}$ ν_μ Myon-Neutrino	<18,2 MeV 0 $\frac{1}{2}$ ν_τ Tau-Neutrino	91,2 GeV 0 1 Z^0 Z Boson	
		0,511 MeV -1 $\frac{1}{2}$ e Elektron	105,7 MeV -1 $\frac{1}{2}$ μ Myon	1,777 GeV -1 $\frac{1}{2}$ τ Tau	80,4 GeV ± 1 1 W^\pm W Boson	
Fermionen mit s = 1/2				Bosonen mit s = 1, 0		

Spin bei Elementarteilchen

- **Neutrinos:** ungeladene ($Q = 0$) Partner von Elektronen (Bezeichnung: ν)

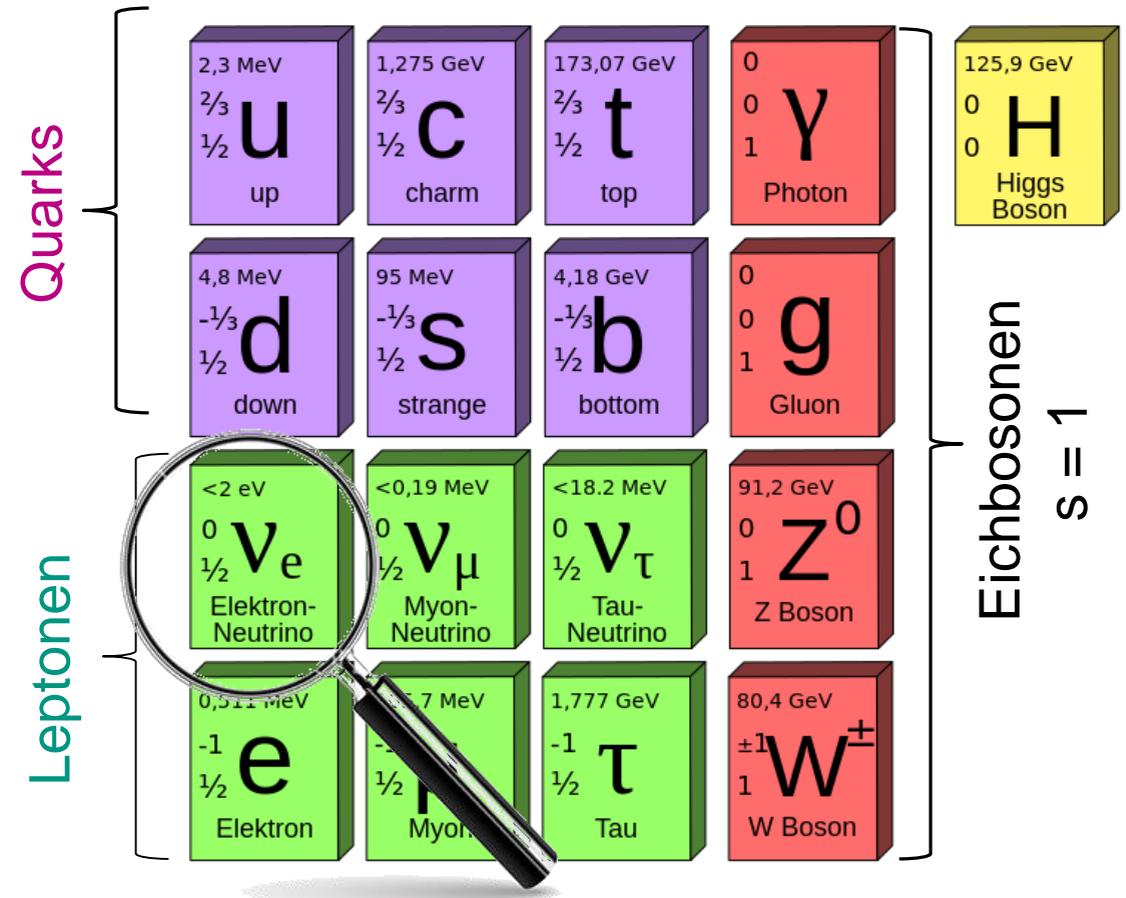
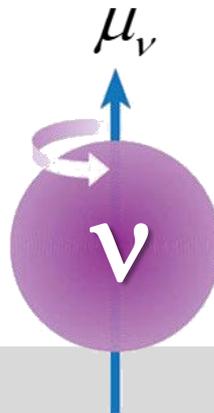
- auch **elektrisch neutrale Teilchen** (ν) können bei innerer Struktur ein endliches magnetisches Moment $\mu \neq 0$ zeigen

theoretische Erwartung:

$$\mu_\nu \approx 3 \times 10^{-19} \mu_B \cdot \frac{m_\nu}{1 \text{ eV}}$$

experiment. Obergrenze:

$$\mu_\nu \approx 3 < 10^{-11} \mu_B$$



Spin-Operatoren: up-down

- Einführung des **Spin-Operators** \hat{S}

$$|\hat{S}| = (\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z)$$

- gleiche Relationen wie beim Bahndrehimpuls

$$\hat{S}^2 |s, m_s\rangle = \hbar^2 \cdot s \cdot (s + 1)$$

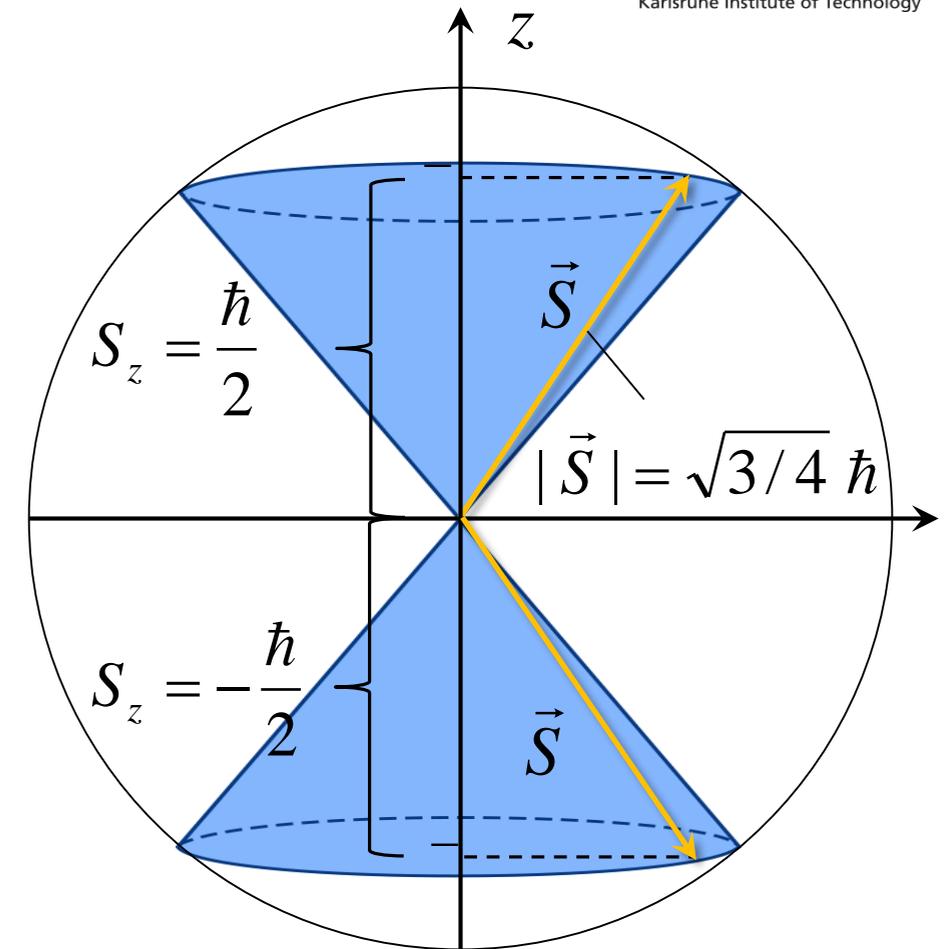
$$\hat{S}_z |s, m_s\rangle = \hbar \cdot m_s$$

Zustand mit Spinquantenzahlen s , m_s

- z -Komponente des Spinmagnetismus:

$$\mu_{s,z} = \underbrace{-g_s \cdot m_s}_{\pm 1,00116} \cdot \mu_B$$

Otto fragen...



Einstellmöglichkeiten des Spins $s = 1/2$ in einem externen Magnetfeld in Richtung z
(**2 Spin-Freiheitsgrade**)

