

# Atome & Kerne

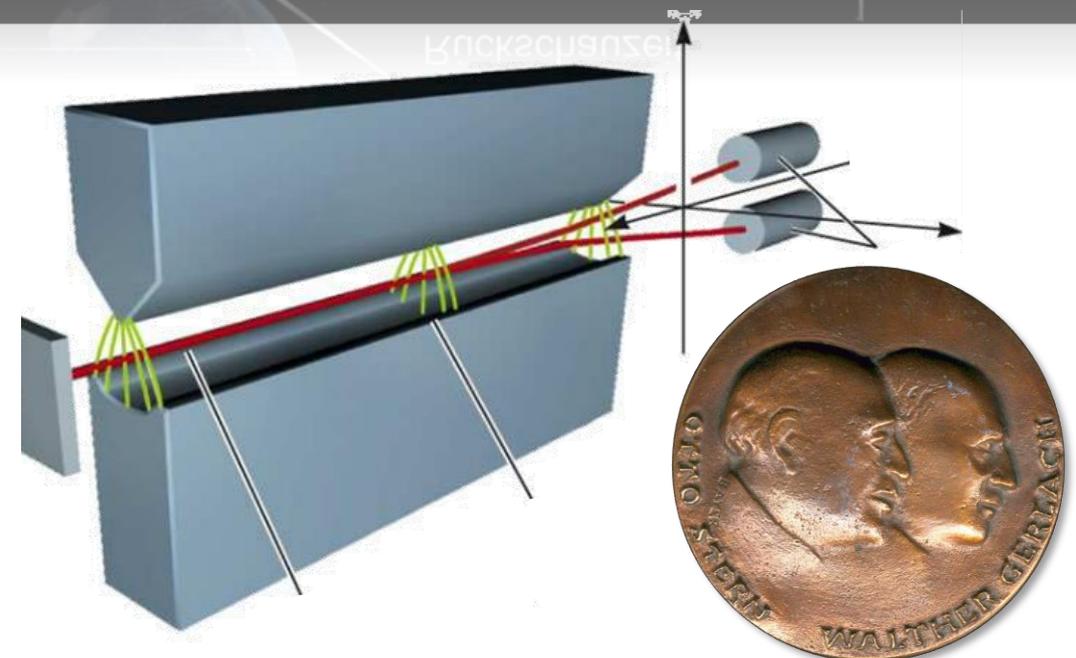
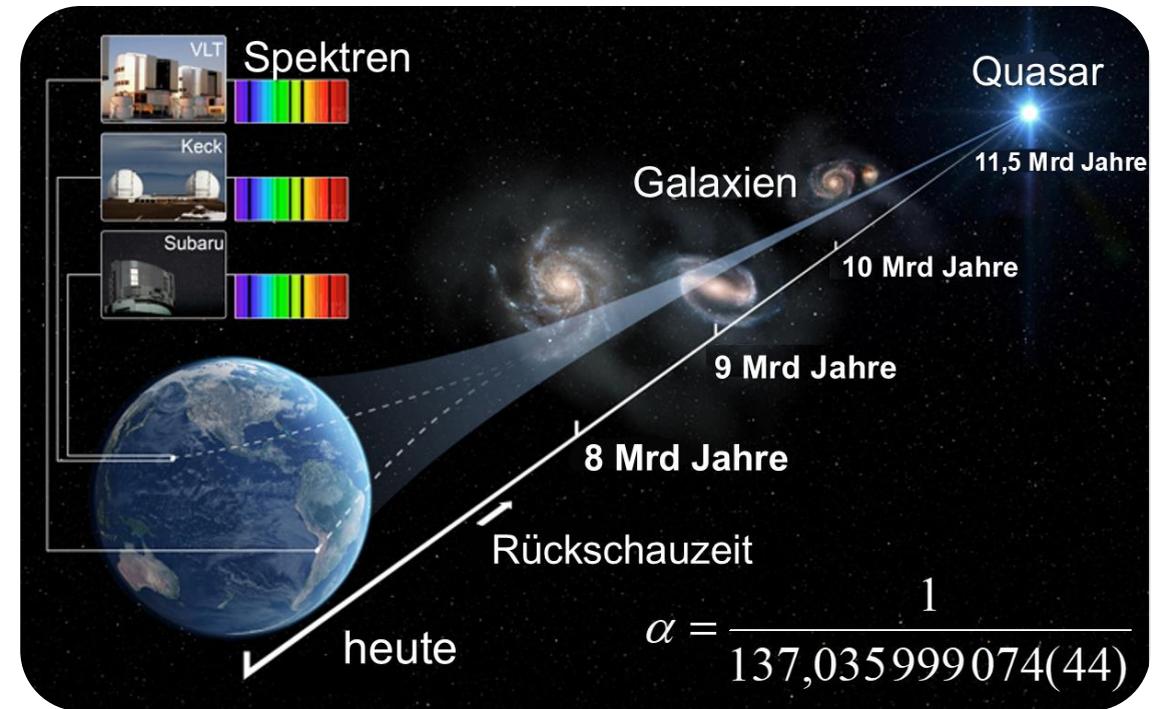
Sommersemester 2019

Vorlesung # 11, 28.05.19

Guido Drexlin, Institut für Experimentelle Teilchenphysik, Fakultät für Physik

## Das Wasserstoff-Atom

- Stern-Gerlach Experiment:  
Grundlagen & Implikationen
- Feinstruktur-Aufspaltung &  
Spin-Bahn-Kopplung:  
Gesamtdrehimpuls  $J$   
Präzession & Größe

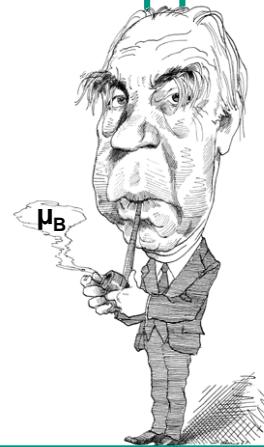
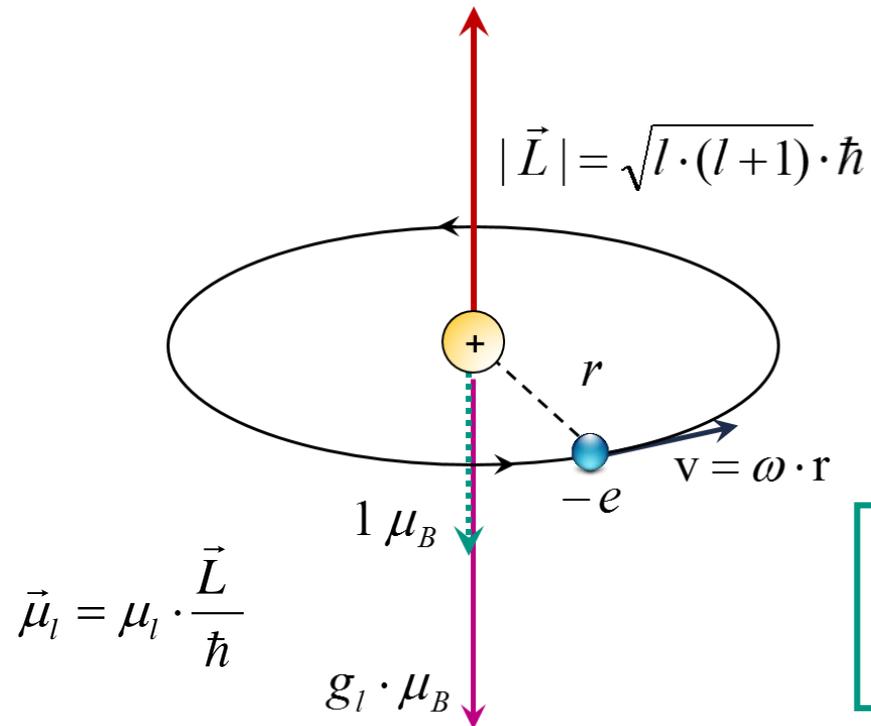


# Bahn- & Spin- Magnetismus



## ■ Magnetische Momente von Bahndrehimpuls L & Spin S

### ■ Bahnmagnetismus $\mu_l$

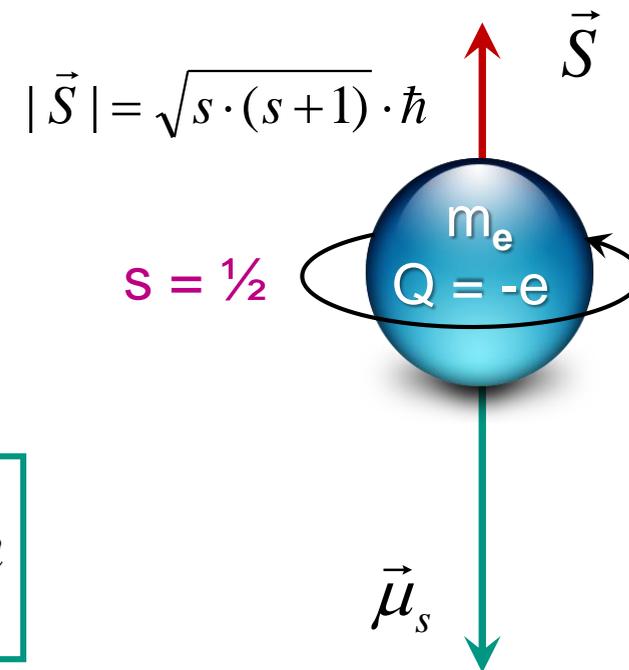


$$\mu_B = \frac{e}{2m_e} \cdot \hbar$$

**magnetisches Moment durch L:**

$$\vec{\mu}_l = -g_l \cdot \mu_B \cdot \frac{\vec{L}}{\hbar} \quad g_l = 1$$

### ■ Spinmagnetismus $\mu_s$



**magnetisches Moment durch S:**

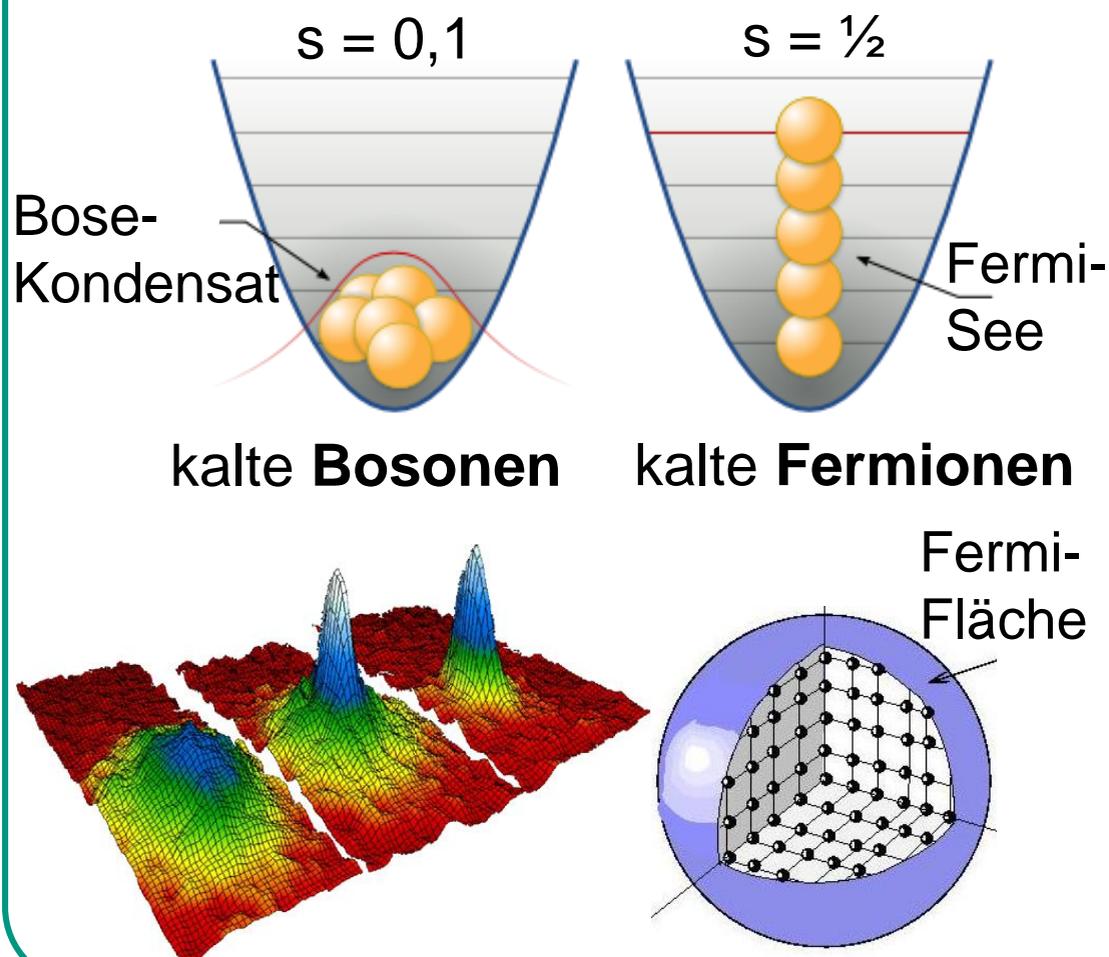
$$\vec{\mu}_s = -g_s \cdot \mu_B \cdot \frac{\vec{S}}{\hbar} \quad g_s = 2$$

# Eigenschaften des Spins



- Quantenobjekte: Spin  $S$  ist eine fundamentale Eigenschaft

## Unterschiedliche Vertauschungssymmetrien (Pauli)

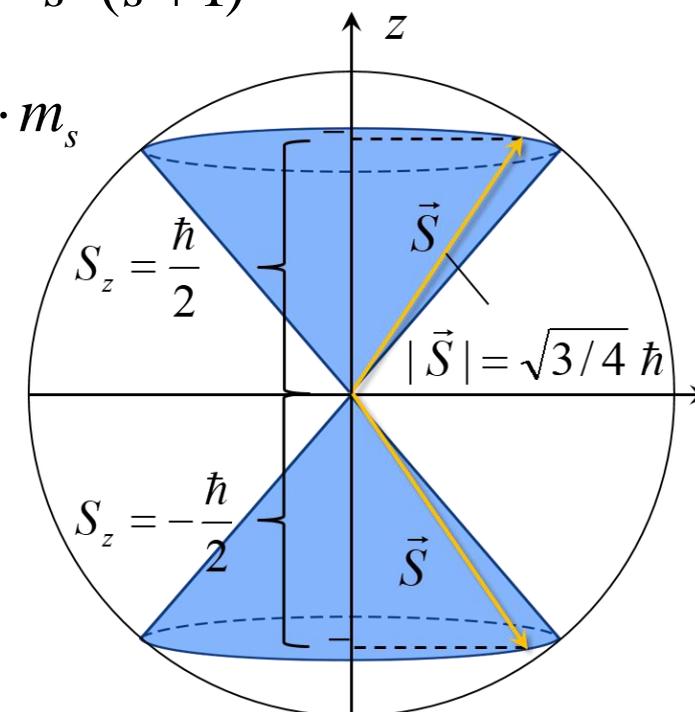


## Spin - Einstellmöglichkeiten

$$\hat{S}^2 |s, m_s\rangle = \hbar^2 \cdot s \cdot (s + 1)$$

$$\hat{S}_z |s, m_s\rangle = \hbar \cdot m_s$$

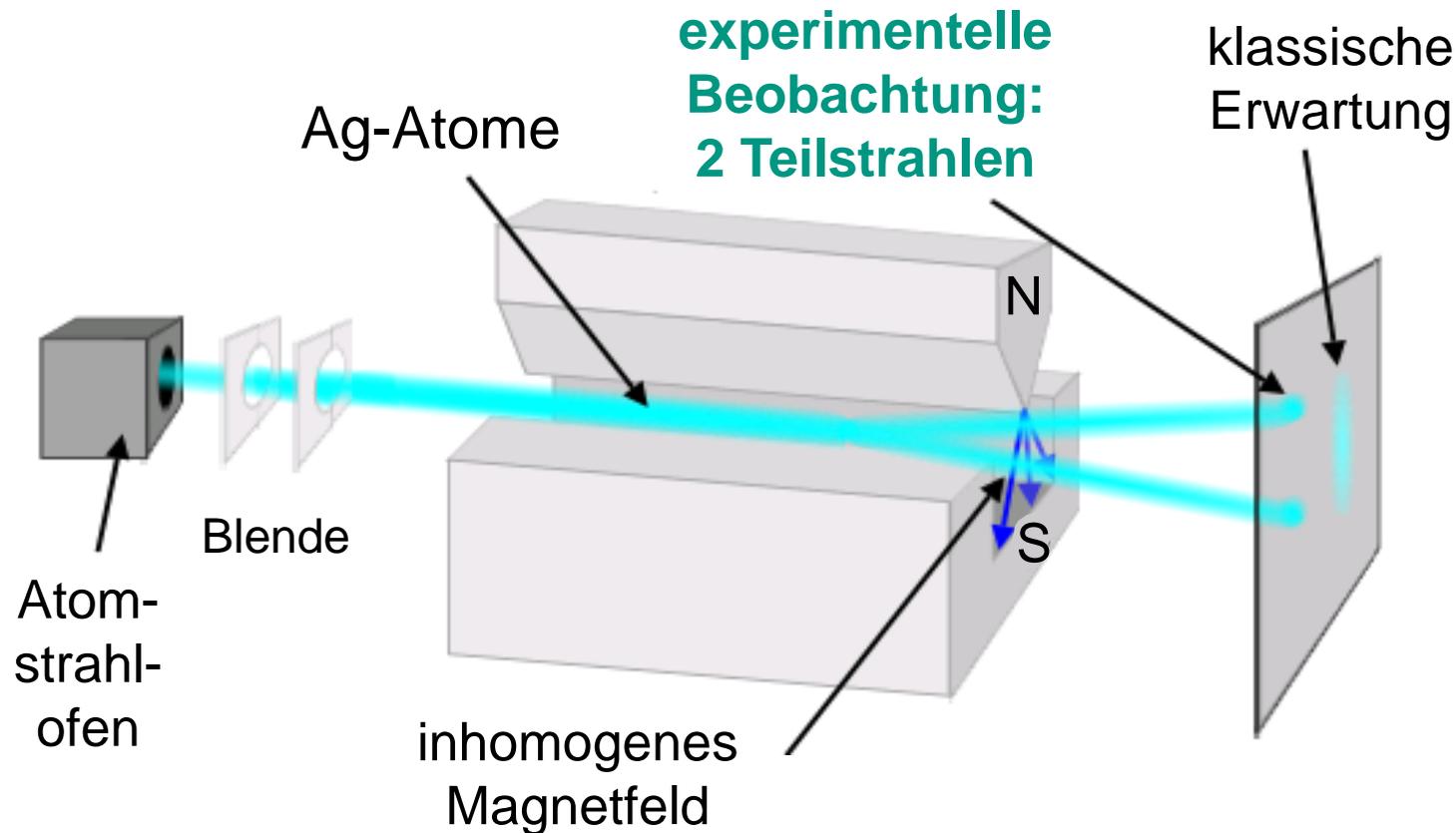
Zustand mit Spinquantenzahlen  $s, m_s$



Einstellmöglichkeiten des Spins  $s = 1/2$  in externem Magnetfeld in Richtung  $z$  (**2 Spin-Freiheitsgrade**)

# 6.4 Richtungsquantelung

- 1922: Otto Stern & Walther Gerlach demonstrieren
  - die **Richtungsquantelung**: nur diskrete Einstellung von magnetischen Momenten relativ zu externem Magnet-Feld (parallel / anti-parallel)
  - ⇒ direkte **Messung des magnetischen Moments von Atomen**



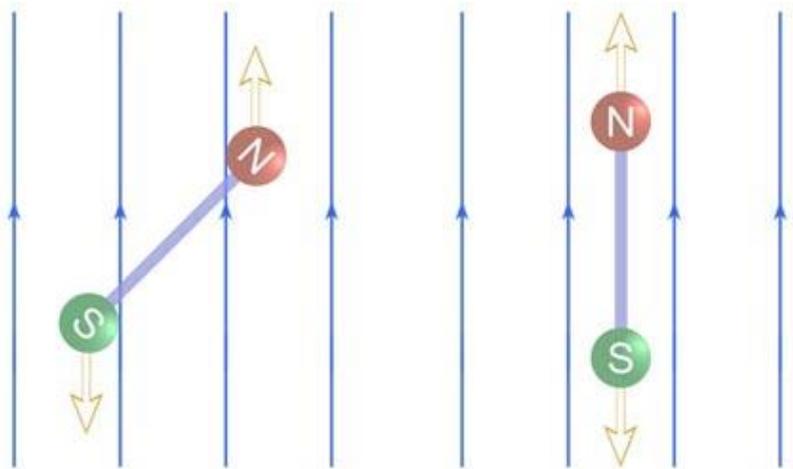
Otto Stern  
(1888-1969)



Walther Gerlach  
(1889-1979)

# Stern-Gerlach Experiment - Einführung

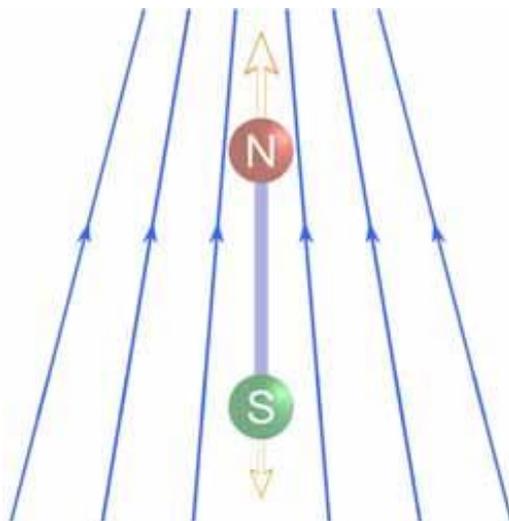
- **Idee:** ein magnetischer Dipol (Atom) durchlaufe ein B-Feld mit großer Inhomogenität ( $\partial B/\partial z$ ) senkrecht zur Flugrichtung



## Dipol in homogenem B-Feld:

$$\Rightarrow \text{Drehmoment } \vec{M} = \vec{\mu} \times \vec{B}$$

$$\text{mit } E_{\text{pot}} = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$$



## Dipol in inhomogenem B-Feld (z-Achse):

$\Rightarrow$  resultierende **Gradientenkraft** auf Dipol

$$\vec{F}_{\text{grad}} = -\nabla(-\vec{\mu} \cdot \vec{B}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu_z \cdot \frac{\partial B}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu \cdot \frac{\partial B}{\partial z} \cdot \cos \alpha \end{pmatrix}$$

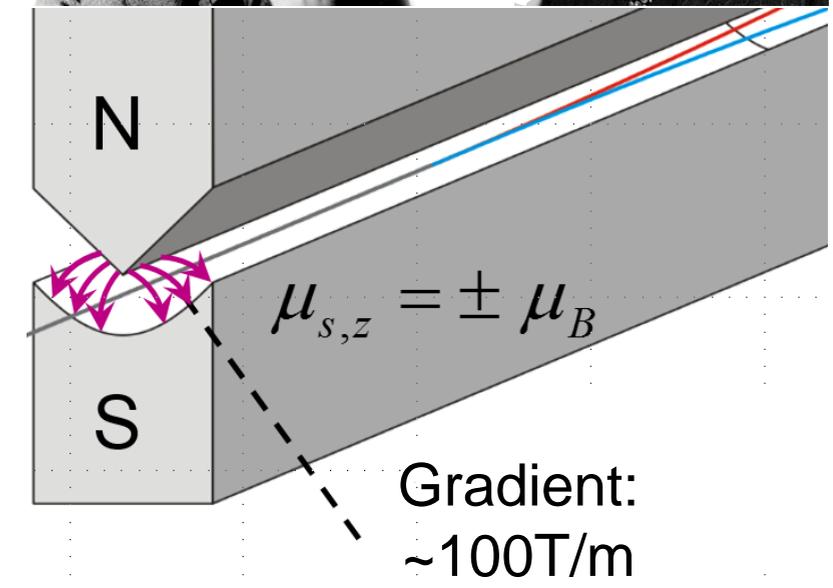
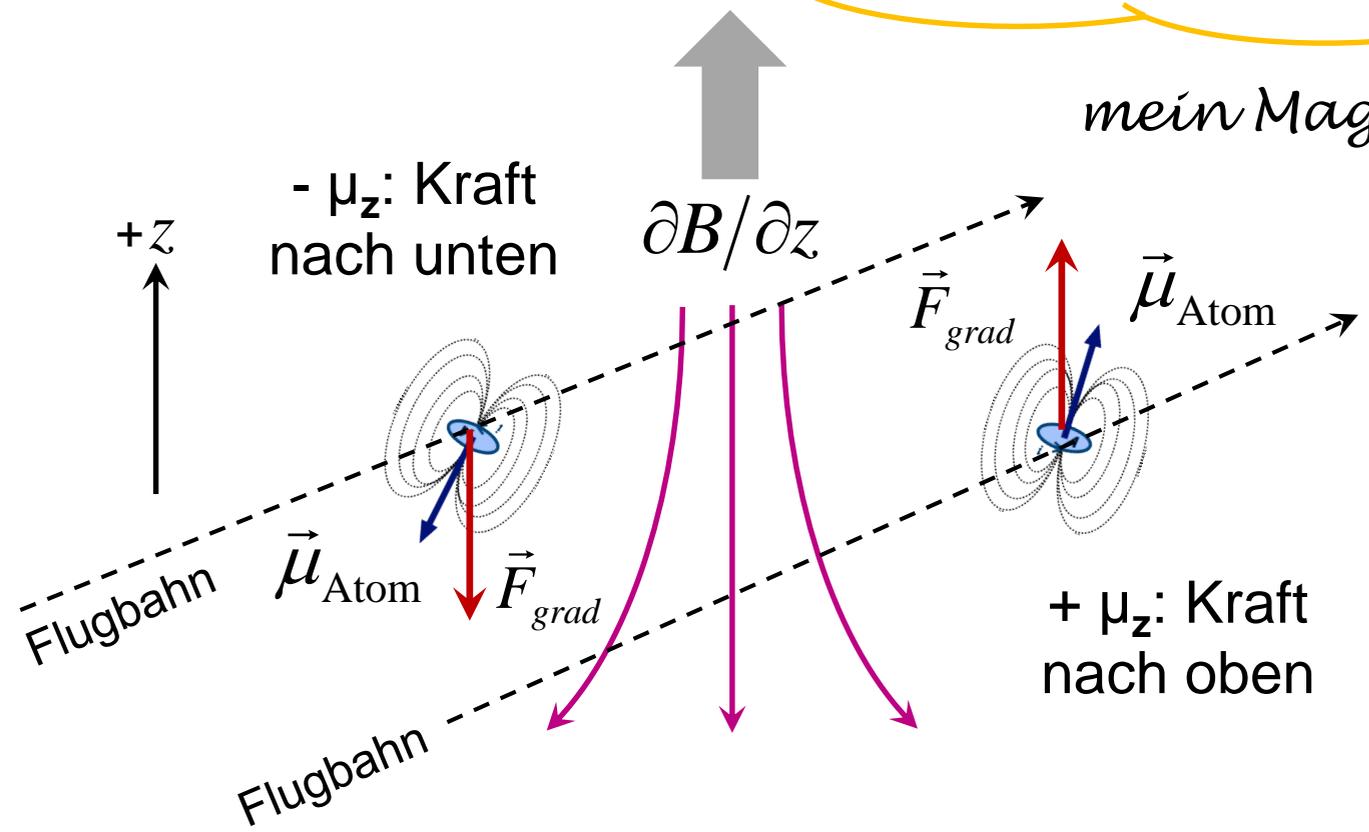
# Stern-Gerlach Experiment - Einführung

- **Idee:** je nach z-Ausrichtung des magnetischen Dipols (+z/-z -Richtung) erfährt er eine Kraft senkrecht zu seiner Flugbahn (oben/unten)

$$F_z = \mu_z \cdot \frac{\partial B}{\partial z}$$

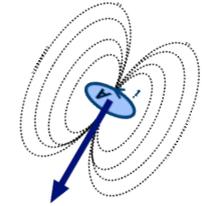
*hmm, jetzt benötige ich nur noch einen elektrisch neutralen Dipol!!*

*mein Magnet!!*



# Magnetisches Moment Ag-Atom

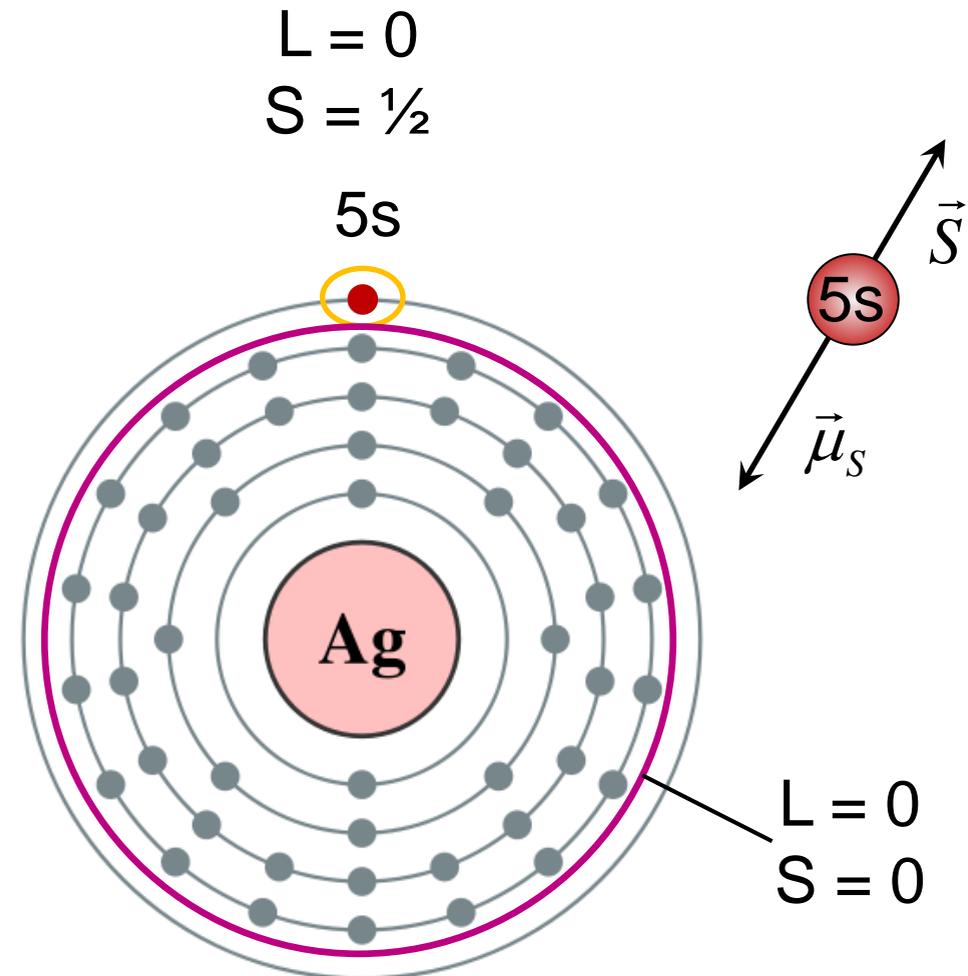
- Testobjekt ohne Ladung  $Q$ , nur mit magnetischem Moment  $\mu$ :  
⇒ unpolarisierter Atomstrahl mit neutralen Ag-Atomen:



- Atom ohne elektrische Ladung  $Q$   
⇒ keine Lorentzkraft

$$\vec{F}_L = -\left(e \cdot \vec{E} + e \cdot \vec{v} \times \vec{B}\right) = 0$$

- **innere 4 Schalen** abgeschlossen  
⇒ kein Bahndrehimpuls / Spin  
(s. Kap. 8.2 Kopplung zu  $J = 0$ )
- magnetisches Moment  $\mu$  nur durch Spin des **Leucht-Elektrons** im 5s Niveau (s-Orbital mit  $L = 0$ )

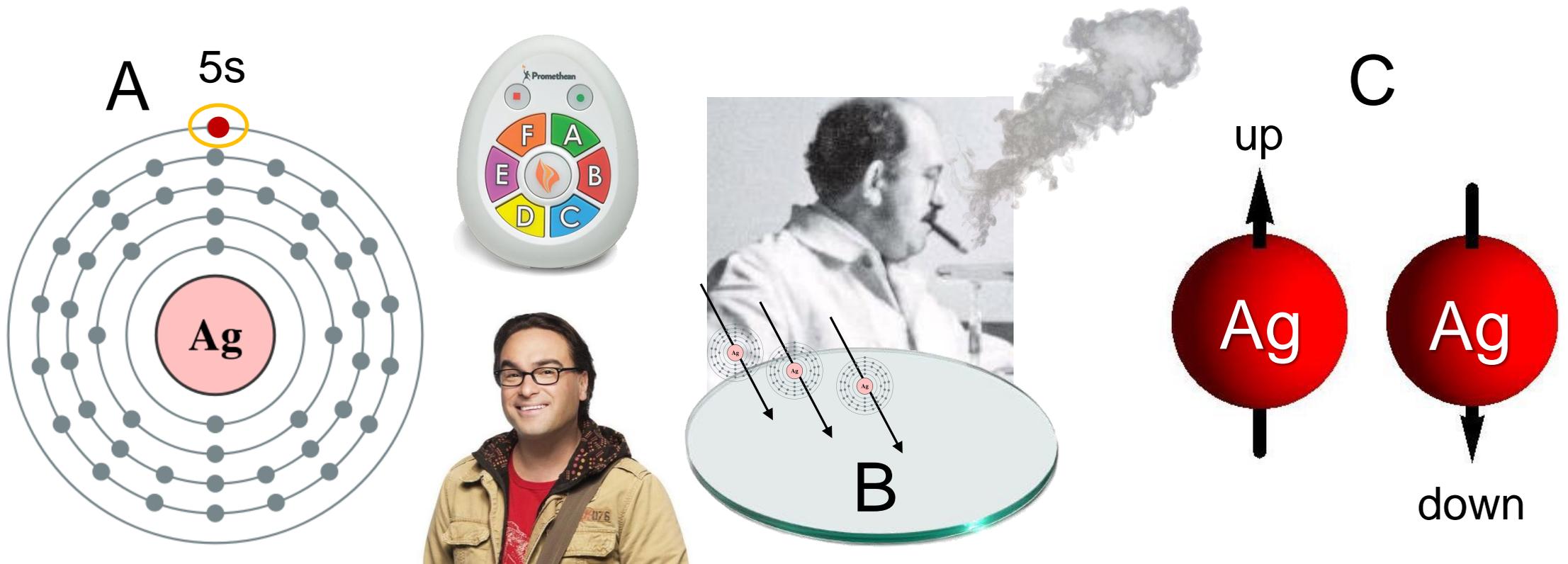


# Fun with Facts: Otto Sterns Motivation

■ Weshalb benutzte er Ag-Atome? Er wusste bereits 1922, dass diese

- A) ihr äußerstes Elektron in einem 5s Orbital haben
- B) sich gut auf Glas nachweisen lassen (Zigarrenrauch)
- C) nur 2 Spin-Einstellmöglichkeiten haben (up-down)

SHELDON COOPER  
presents  
FUN WITH ~~FACTS~~  
Facts



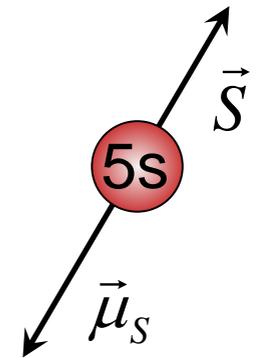
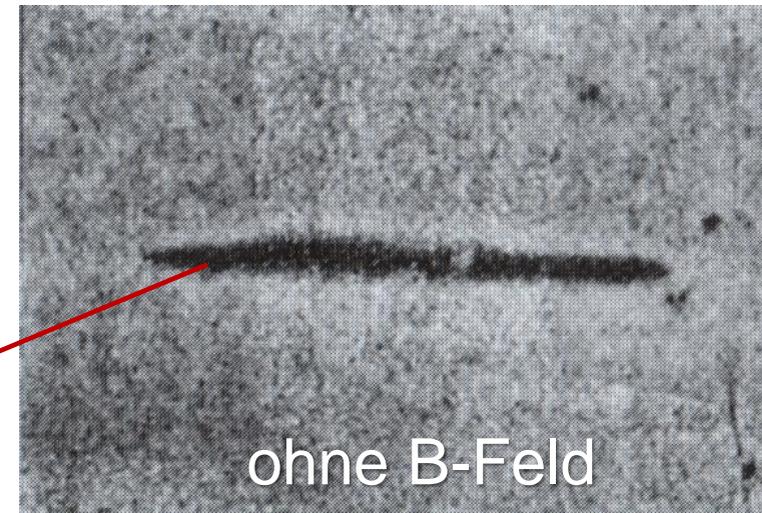
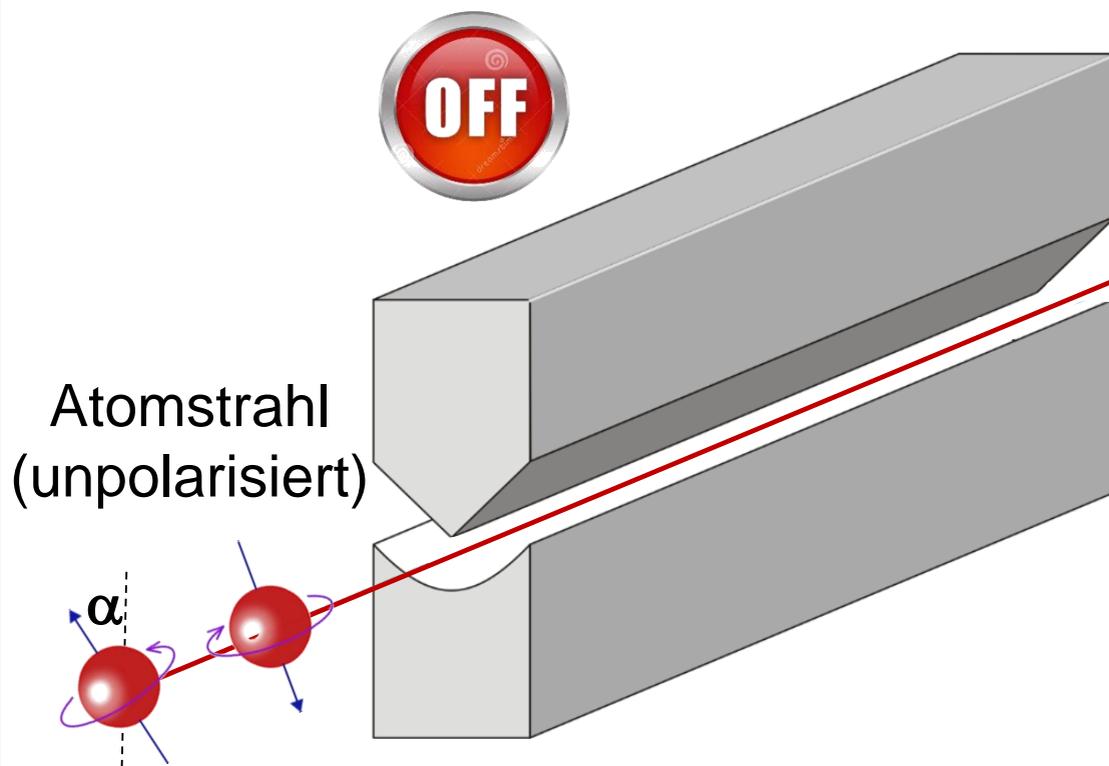
# Stern-Gerlach Experiment – ohne B-Feld

■ unpolarisierter Atomstrahl mit neutralen Ag-Atomen:

- ohne B-Feld: keine magnetische Gradientenkraft, keine Ablenkung

$$F_z = \mu_z \cdot \frac{\partial B}{\partial z} = 0$$

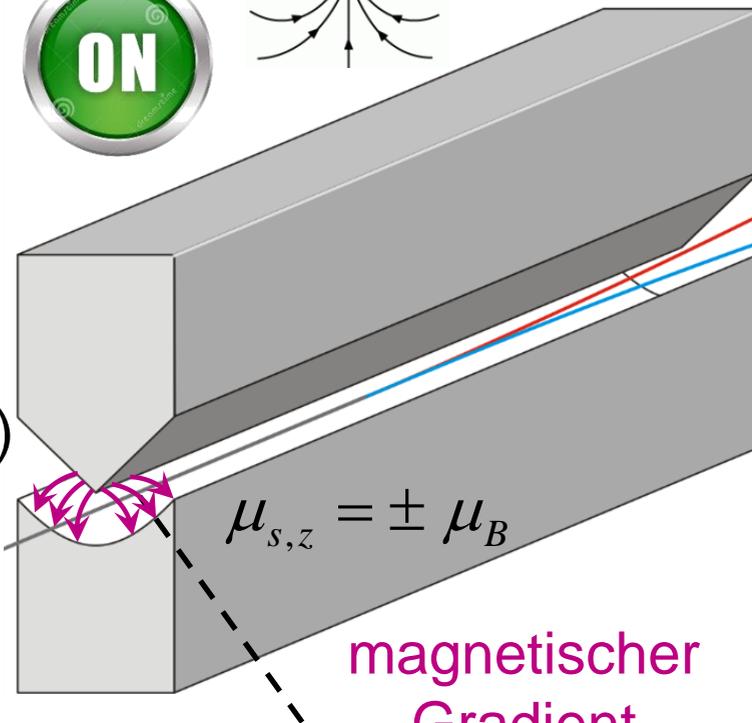
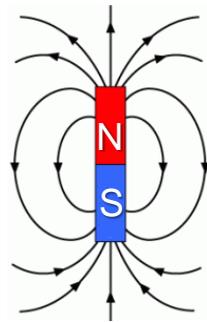
- B = 0: Atomstrahl zeigt keine Ablenkung



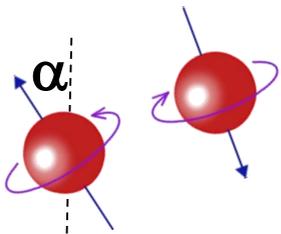
# Stern-Gerlach Experiment – mit B-Feld

- experimentelle Resultate zeigen immer **2 diskrete Atomstrahlen** unabhängig von der Orientierung des Gradienten
  - **klassische Erwartung**: magnetische Momente beliebig ausgerichtet!

$$F_z = \mu_z \cdot \frac{\partial B}{\partial z}$$



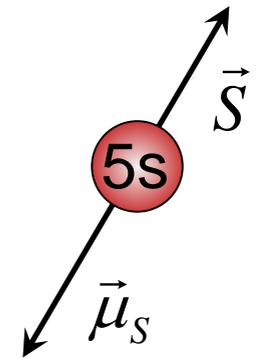
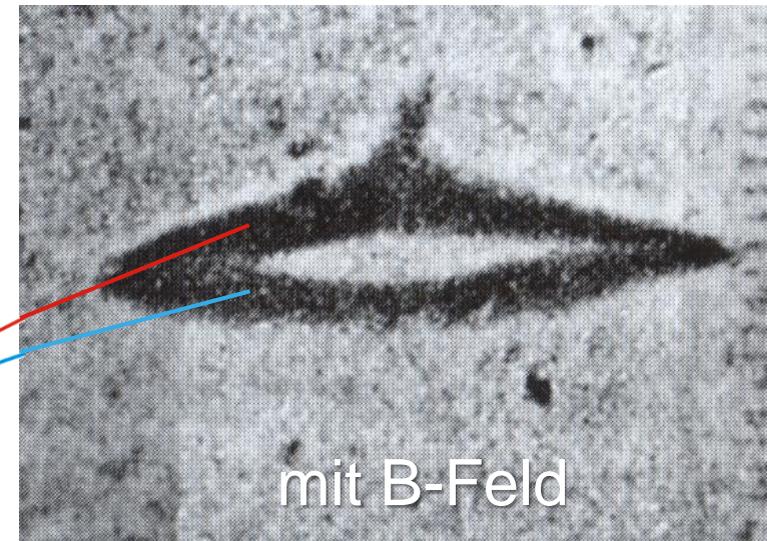
Atomstrahl  
(unpolarisiert)



$$\mu_{s,z} = \pm \mu_B$$

magnetischer  
Gradient

Original-Resultate  
von Stern & Gerlach

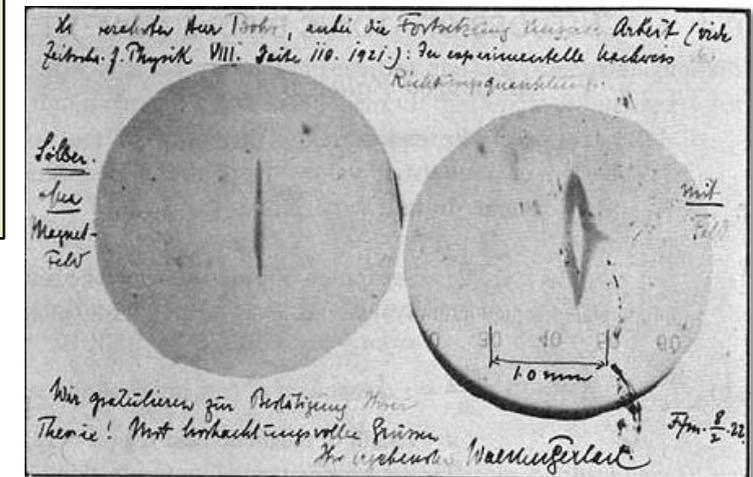
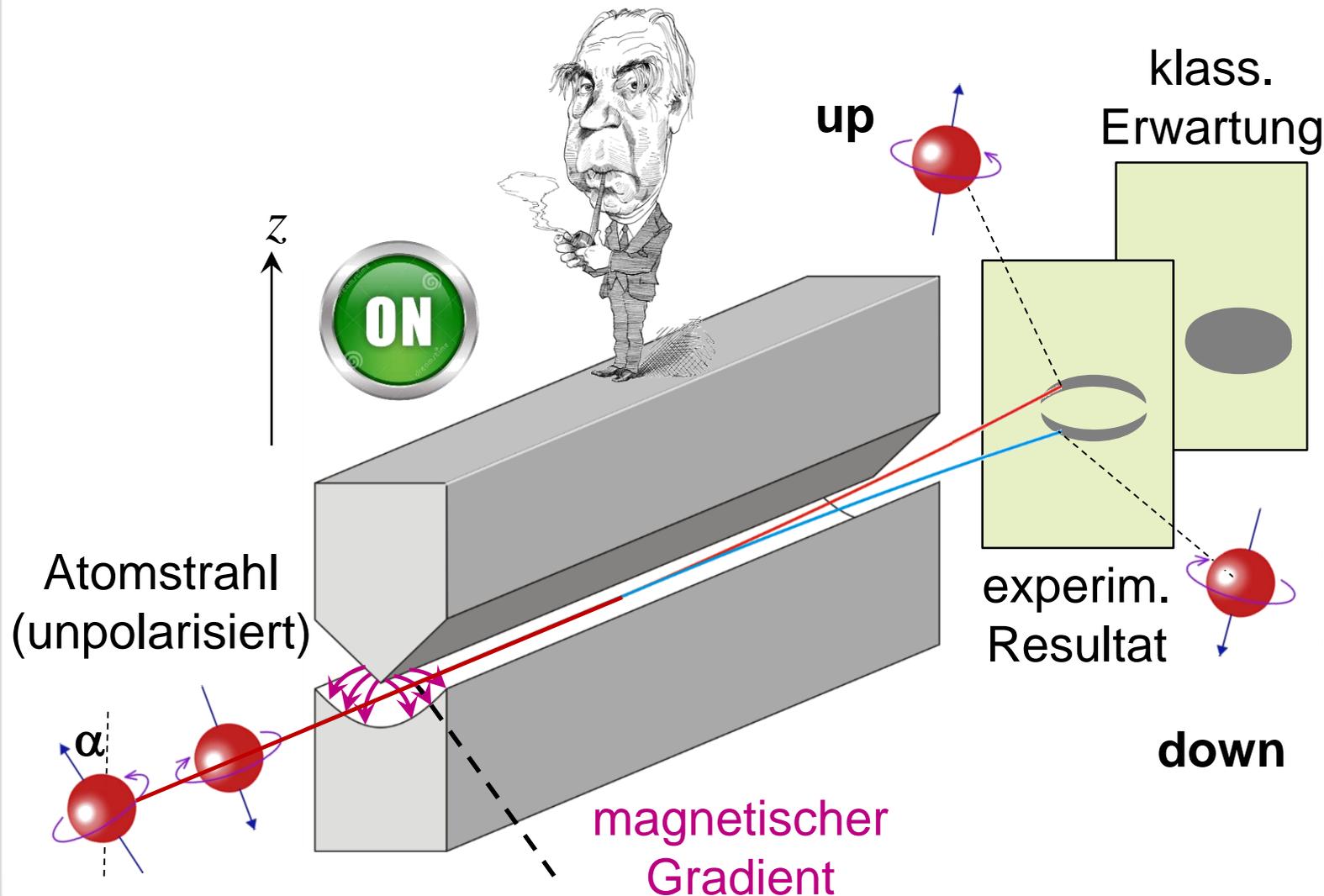


**OOPS!**

# Stern-Gerlach Experiment - Implikationen

## ■ 2 Spin-Freiheitsgrade für Elektronen: up - down

- weitere Experimente mit H-Atomen bestätigen Resultate von Ag-Atomen



# Stern-Gerlach Experiment - Implikationen

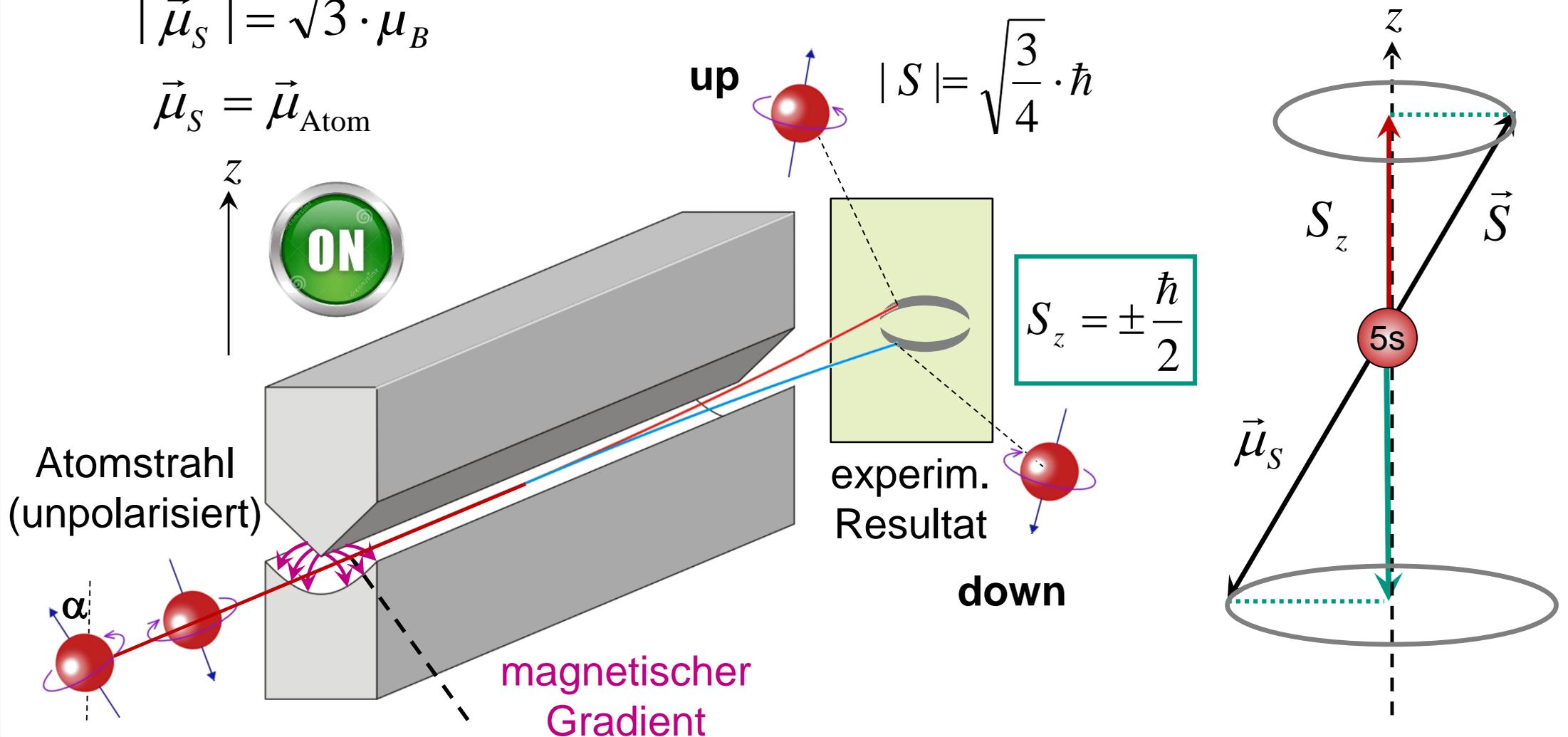
## ■ 2 Spin-Freiheitsgrade für Elektronen: up - down

- zwei Drehrichtungen für Elektronen (linkshändig, rechthändig)

$$|\vec{\mu}_S| = \sqrt{3} \cdot \mu_B$$

$$\vec{\mu}_S = \vec{\mu}_{\text{Atom}}$$

$$|S| = \sqrt{\frac{3}{4}} \cdot \hbar$$



# Stern-Gerlach Experiment - Implikationen

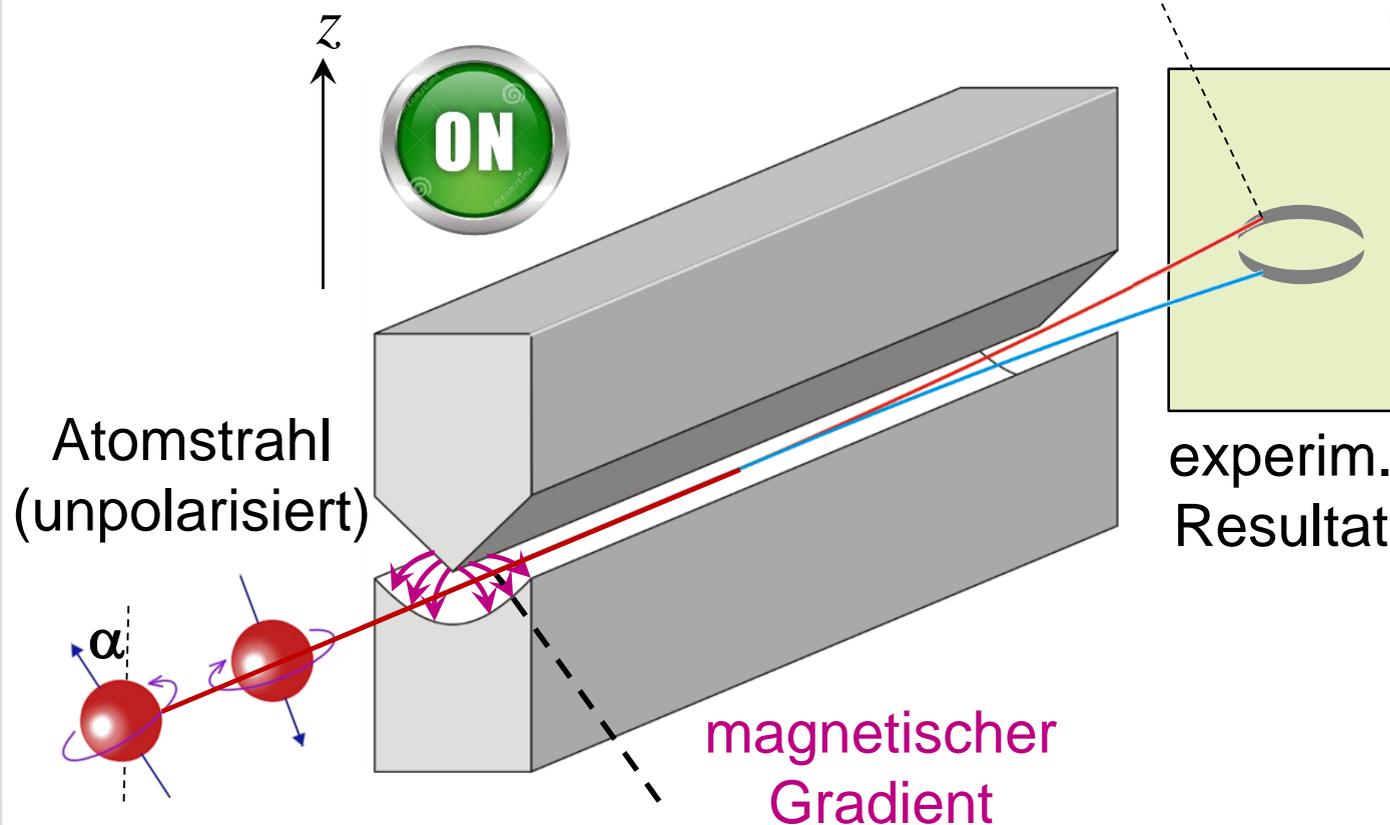
## ■ 2 Spin-Freiheitsgrade für Elektronen: up - down

- weitere Experimente mit H-Atomen bestätigen Resultate von Ag-Atomen

$$|\vec{\mu}_S| = \sqrt{3} \cdot \mu_B$$

$$\vec{\mu}_S = \vec{\mu}_{\text{Atom}}$$

The Nobel Prize in Physics 1943 was awarded to Otto Stern "for his contribution to the development of the molecular ray method and his discovery of the magnetic moment of the proton".



Otto Stern  
(1888-1969)

82x nominiert...



# Stern-Gerlach Experiment - Rückblick

- Experiment sollte Bohrsche Theorie (quantisierte Orbitale) bestätigen
  - die experimentellen Resultate wurden erst 5 Jahre später korrekt als **Richtungsquantisierung des Spins** interpretiert (Fraser 1927)
  - aus der Aufspaltung der Teilstrahlen bestimmten Stern und Gerlach das entsprechende **magnetische Moment  $\mu = \mu_B = 9,3 \cdot 10^{-24} \text{ J/T}$**
  - „Koinzidenz“ der Stärke von Bahn- und Spin- Magnetismus

$$\vec{\mu}_l = -g_l \cdot \mu_B \cdot \frac{\vec{L}}{\hbar}$$

$$g_l = 1, l = 1$$

$$\vec{\mu}_s = -g_s \cdot \mu_B \cdot \frac{\vec{S}}{\hbar}$$

$$g_s = 2, s = \frac{1}{2}$$



$$\mu_B = \frac{e}{2m_e} \cdot \hbar$$



Otto Stern  
(1888-1969)



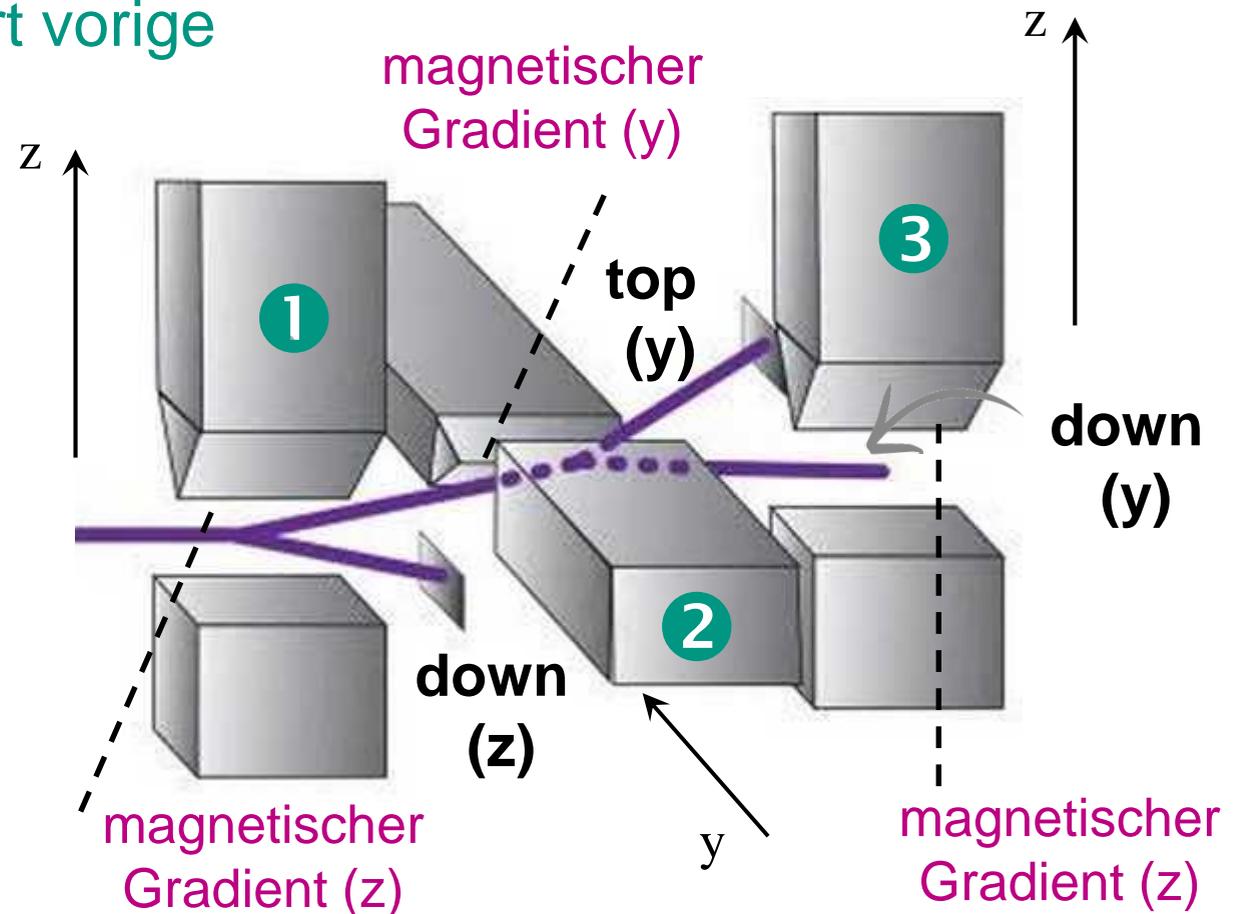
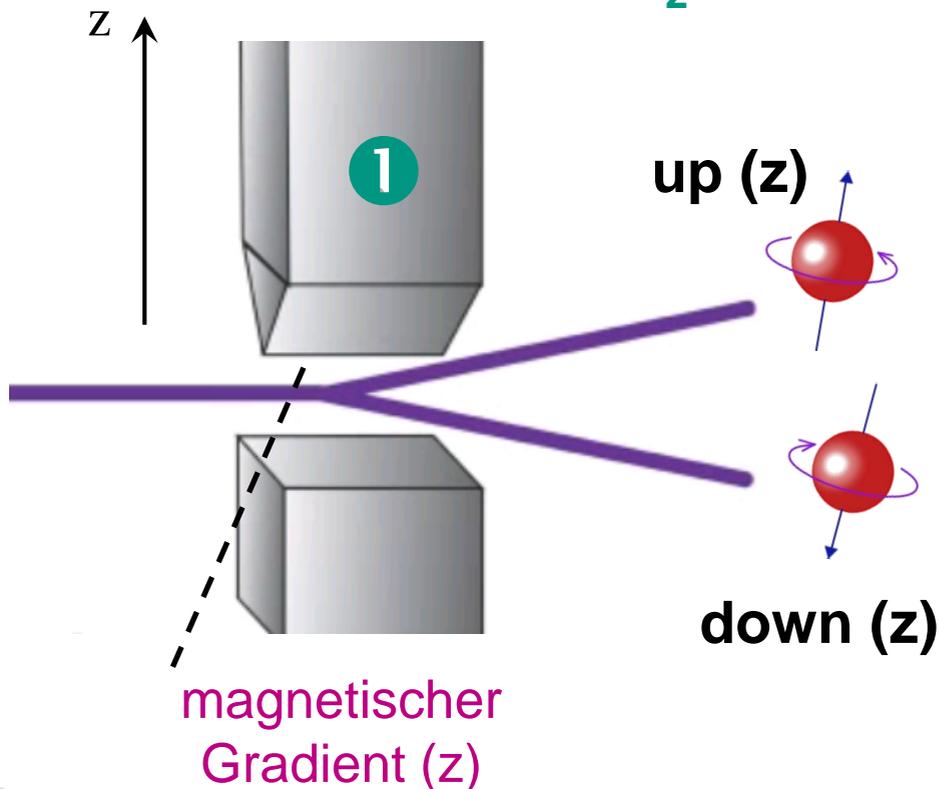
**OOPS!**

# Stern-Gerlach Experiment - Verständnis

## ■ Abfolge von mehreren Stern-Gerlach Aufbauten zur Spin-Selektion:

- 1: Selektion von Spin up/down in z-Richtung ( $s_z = \pm 1/2$ )  $\Rightarrow s_z = +1/2$
- 2: Selektion von Spin up/down in y-Richtung ( $s_y = \pm 1/2$ )  $\Rightarrow s_y = -1/2$
- 3: nochmalige Selektion von  $s_z$  in z-Richtung: was passiert?

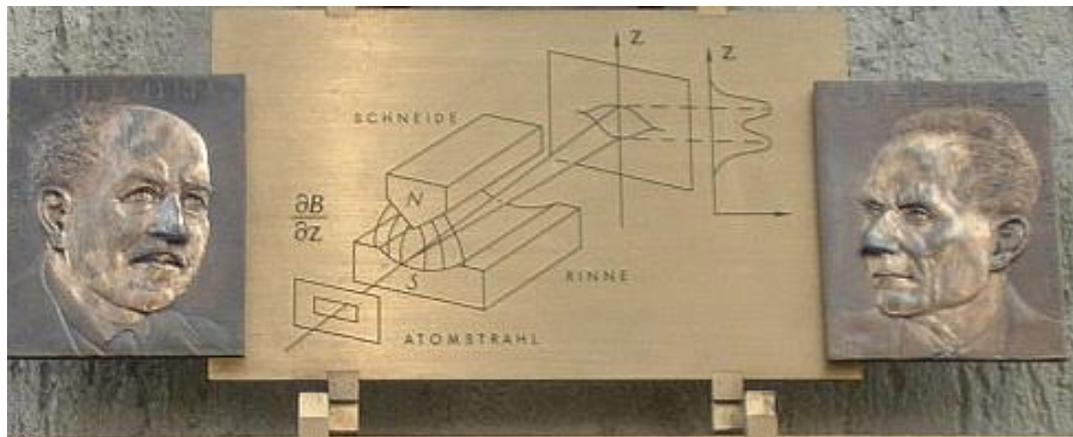
Selektion nach  $s_y$  in 2 zerstört vorige  
Selektion nach  $s_z$  in 1 !!



# Stern-Gerlach & ihre Medaille

## ■ Stern-Gerlach Medaille der DPG

höchste Auszeichnung für experimentelle Arbeiten, wird jährlich vergeben & würdigt eine oder mehrere hervorragende **experimentelle Arbeiten** aus dem gesamten Bereich der Physik



IM FEBRUAR 1922 WURDE IN DIESEM GEBÄUDE DES PHYSIKALISCHEN VEREINS, FRANKFURT AM MAIN, VON OTTO STERN UND WALTHER GERLACH DIE FUNDAMENTALE ENTDECKUNG DER RAUMQUANTISIERUNG DER MAGNETISCHEN MOMENTE IN ATOMEN GEMACHT. AUF DEM STERN-GERLACH-EXPERIMENT BERUHEN WICHTIGE PHYSIKALISCH-TECHNISCHE ENTWICKLUNGEN DES 20. JHDTS., WIE KERNSPINRESONANZMETHODE, ATOMUHR ODER LASER. OTTO STERN WURDE 1943 FÜR DIESE ENTDECKUNG DER NOBELPREIS VERLIEHEN.



junge  
Deutsche  
Physikalische  
Gesellschaft



Otto Stern  
(1888-1969)

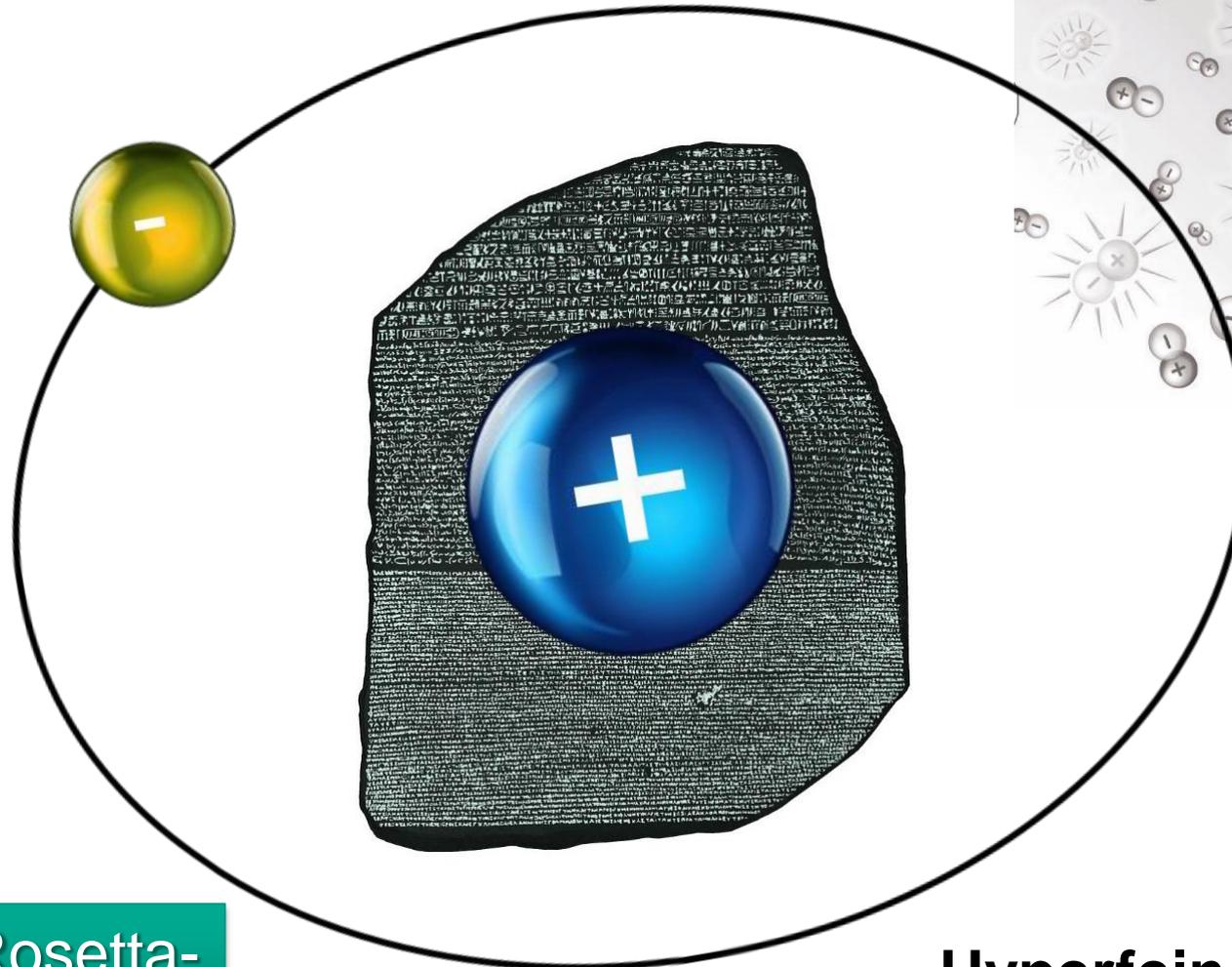
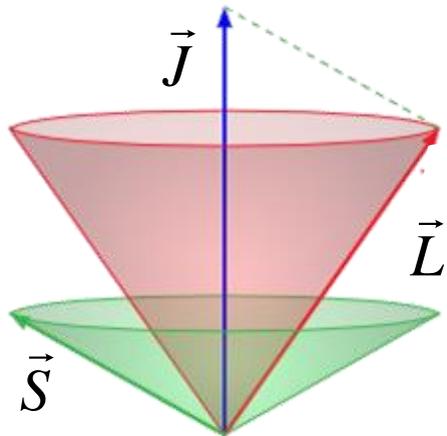


Walther Gerlach  
(1889-1979)

# 6.5 Feinstruktur und Spin-Bahnkopplung

## Feinstruktur

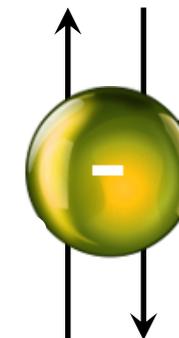
Spin-Bahn-Kopplung



**QED**  
Vakuum-Fluktuationen

H-Atom = der Rosetta-Stein der Atomphysik

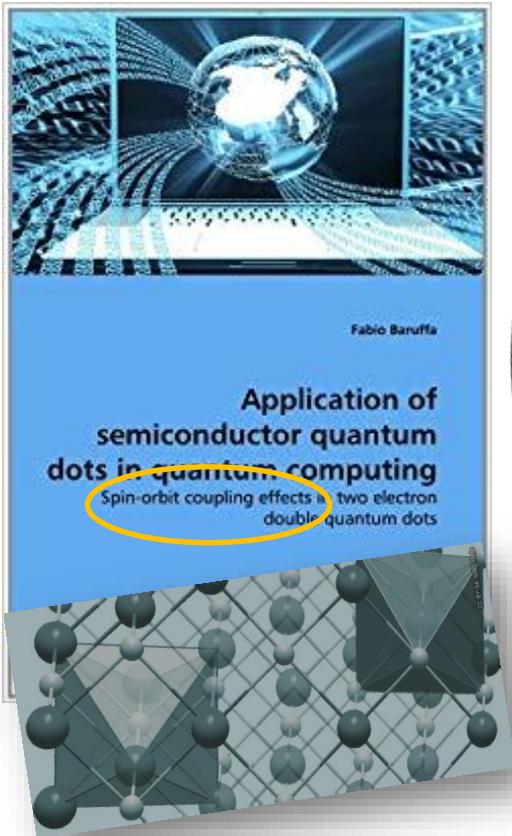
**Hyperfeinstruktur**



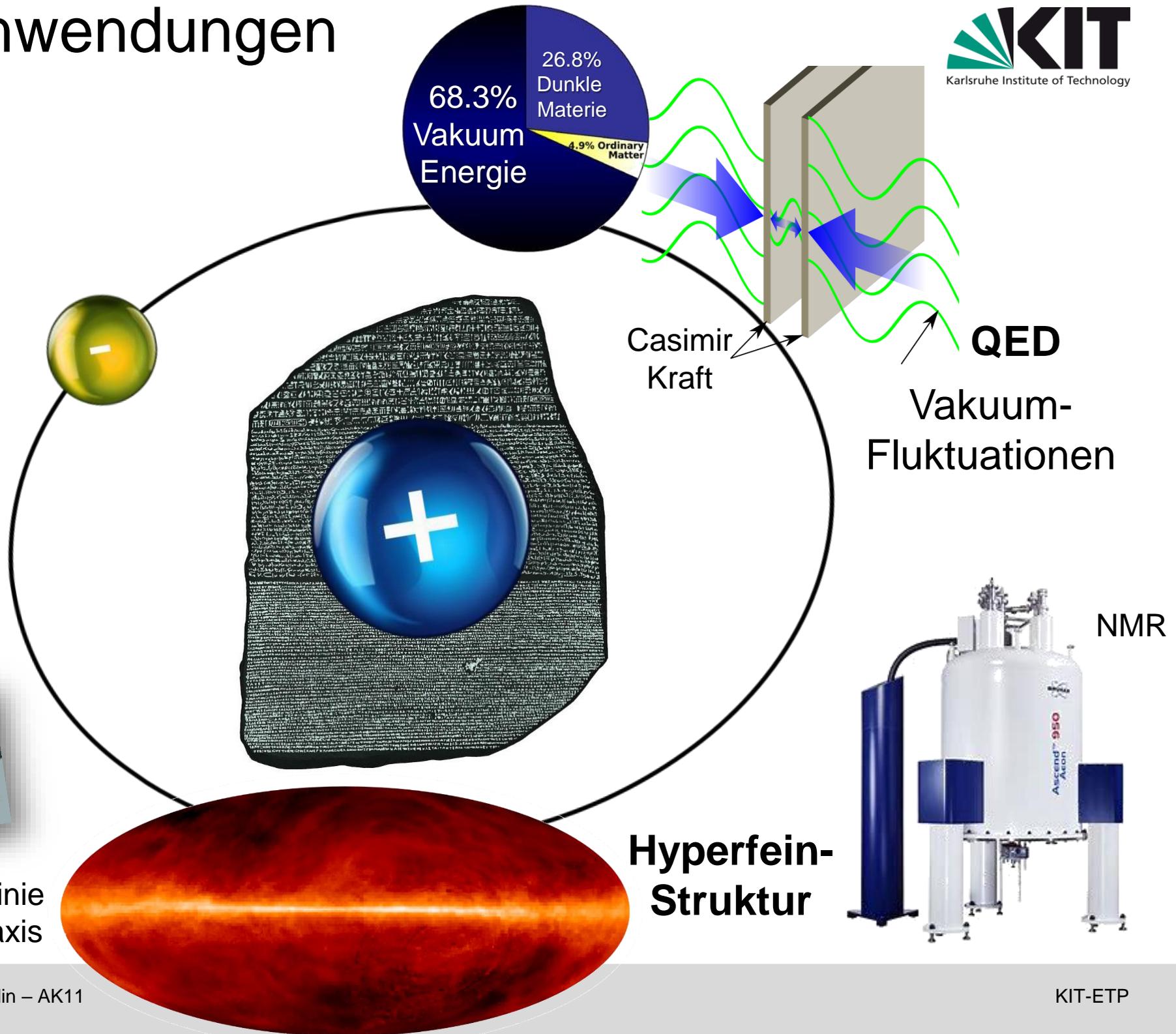
# H-Atom: Anwendungen

## Feinstruktur

Spin-Bahn-Kopplung



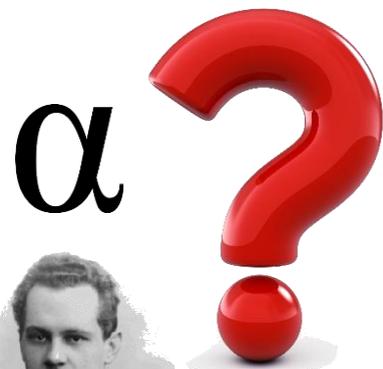
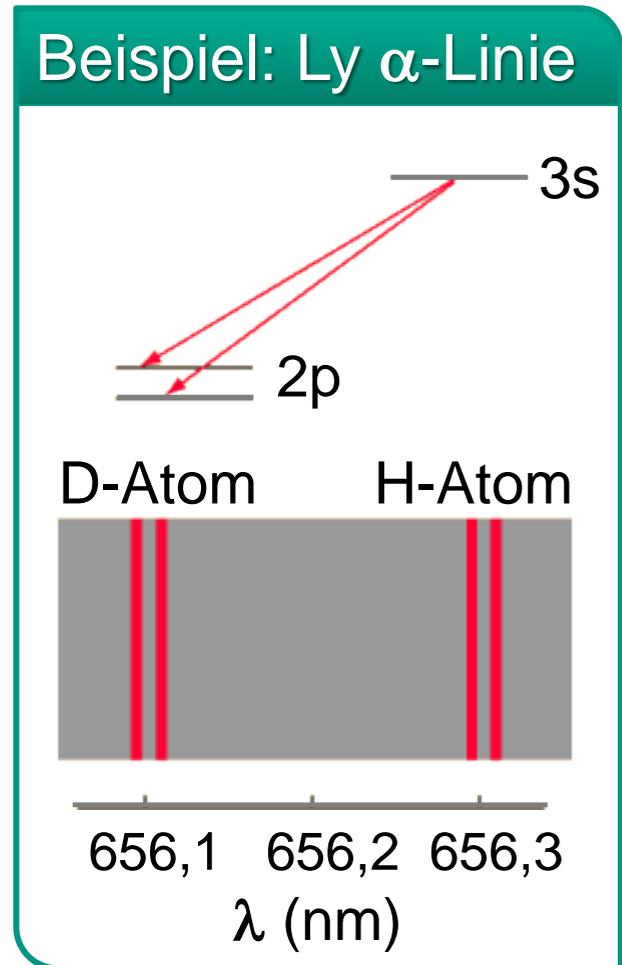
21 cm Linie der Galaxis



# Spin-Bahnkopplung: Vektormodell & Größe

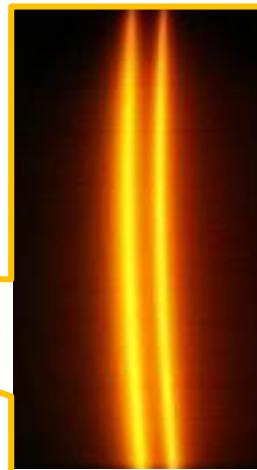
- Energiezustände von Elektronen in p,d,.. Orbitalen sind aufgespalten in Dubletts bzw. Multipletts  $\Rightarrow$  **Feinstruktur**

- Effekte in der Größenordnung von  $10^{-3}$  ...  $10^{-5}$  der Übergangsenergie
- resultiert aus der **Spin-Bahn-Kopplung**: Bahnmagnetismus und Spinmagnetismus unterliegen **magnetischer Wechselwirkung**



D-Linien von Na

$\lambda = 589$  nm



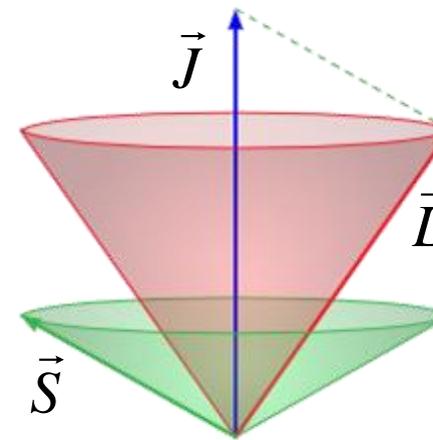
$\lambda = 589,6$  nm

# Spin-Bahnkopplung: Vektormodell & Größe

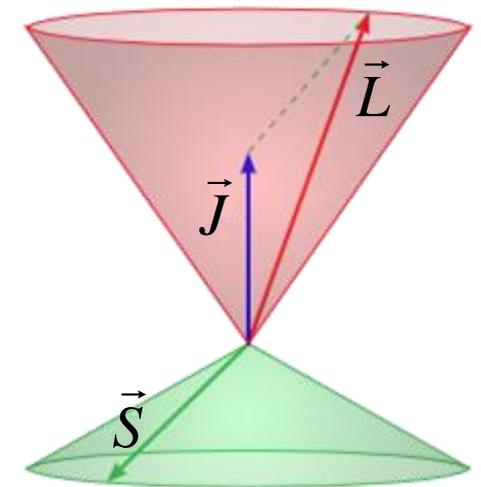
■ Wie sieht **Spin-Bahnkopplung im Vektormodell** aus?

- Was ist mit der Präzession?

■ Wie kann ich die **Größe der FS-Aufspaltung** berechnen?

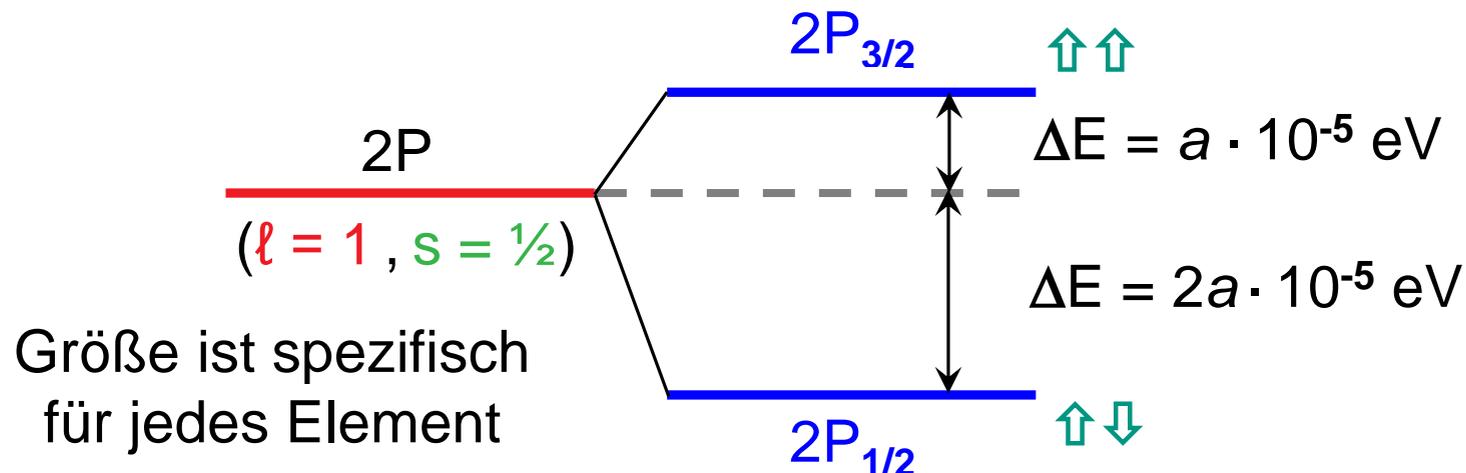


parallel ( $\uparrow\uparrow$ )



anti-parallel ( $\uparrow\downarrow$ )

⇒ parallele ( $\uparrow\uparrow$ ) / anti-parallele ( $\uparrow\downarrow$ ) Einstellungen von  $\mu_L$  und  $\mu_S$  ergeben unterschiedliche Orbital-Energien:

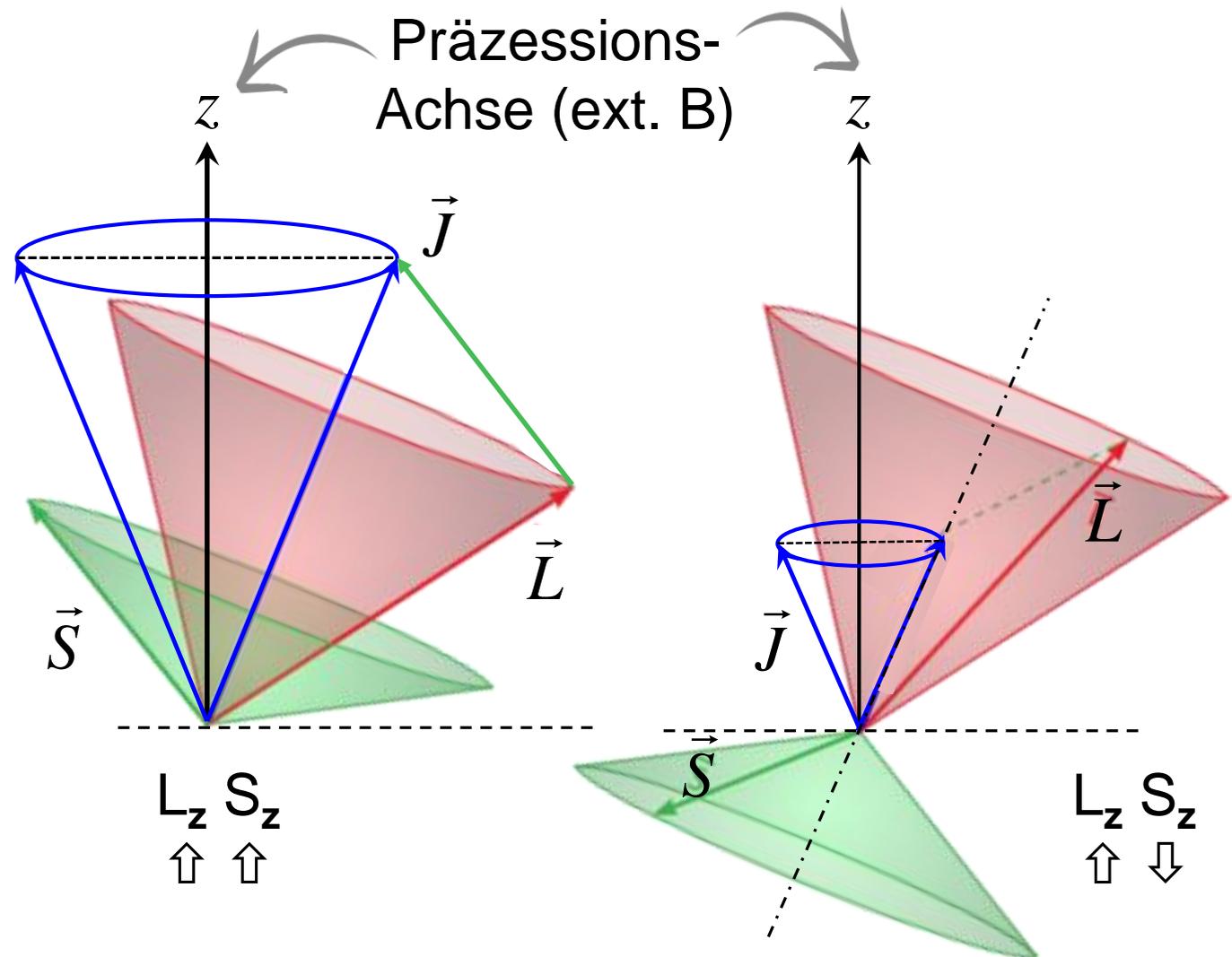


# Spin-Bahnkopplung: Vektormodell

- **Vektorielle Kopplung** von  $\vec{L}$  und  $\vec{S}$  zum Gesamtdrehimpuls  $\vec{J}$  mit neuer **Quantenzahl Gesamtdrehimpulszahl  $j$**

$$|\vec{J}| = \sqrt{j \cdot (j+1)} \cdot \hbar$$

- die Vektoren  $\vec{L}$  und  $\vec{S}$  präzedieren um den Gesamtdrehimpuls  $\vec{J}$
- in einem äußeren Magnetfeld präzediert Gesamtdrehimpuls  $\vec{J}$  um z-Achse (s. Kap. 8)
- **Ein-Elektron-System:**  
 $s = 1/2$ , damit  $j = |\ell \pm 1/2|$



# Gesamtdrehimpuls-Quantenzahl $j$

- **Vektorielle Kopplung** von  $\vec{L}$  und  $\vec{S}$  zum Gesamtdrehimpuls  $\vec{J}$  mit neuer **Quantenzahl  $j$**

$$|\vec{J}| = \sqrt{j \cdot (j+1)} \cdot \hbar$$

$$j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$$

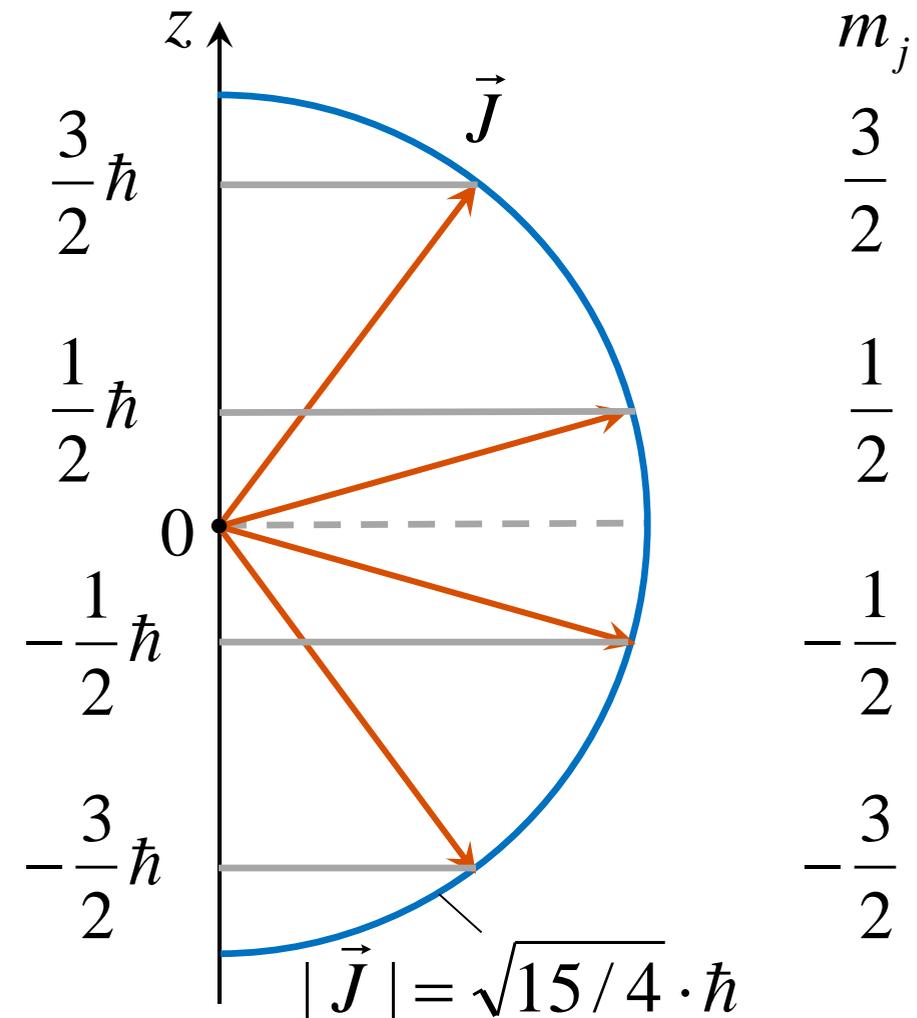
- **Richtungsquantelung** für die z-Komponenten  $j_z$ :

$$j_z = m_j \cdot \hbar$$

$$m_j = j, (j-1), \dots, 0, (-j)$$

- optische Übergänge mit Auswahlregeln  $\Delta j = 0, \pm 1$

4 (d.h.  $2j+1$ ) Orientierungen für  $j = 3/2$



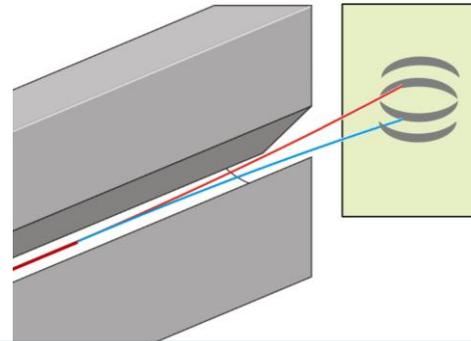
# Fun with Facts: Otto's Linienaufspaltung

■ In einem SG-Experiment sieht man 4 Atom-Teilstrahlen. Weshalb?

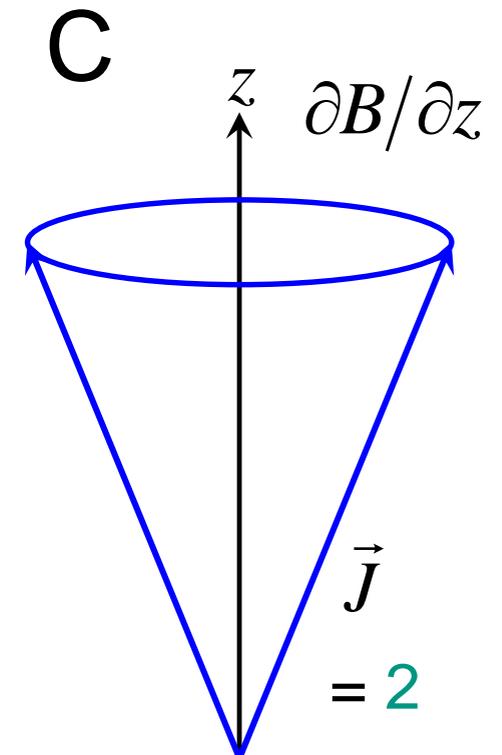
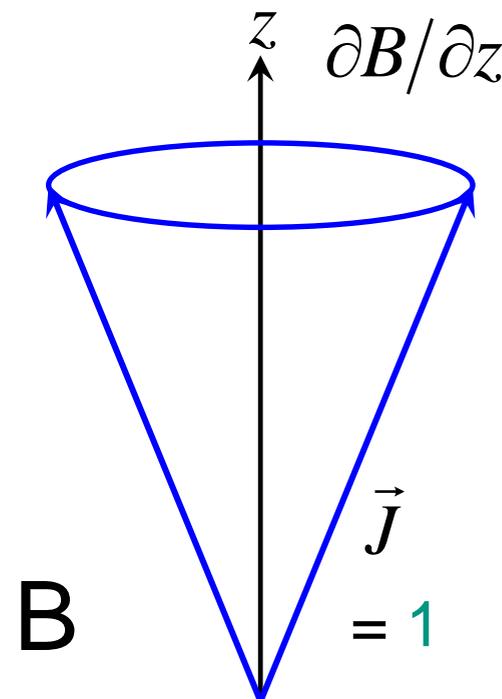
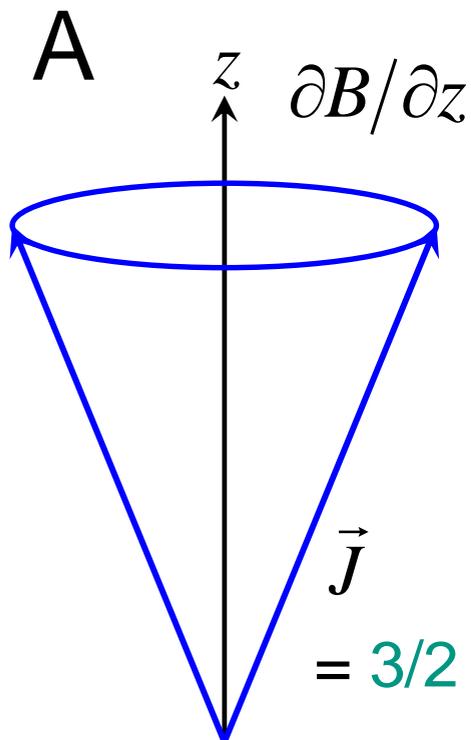
A) Gesamtdrehimpuls  $J = 3/2$

B) Gesamtdrehimpuls  $J = 1$

C) Gesamtdrehimpuls  $J = 2$

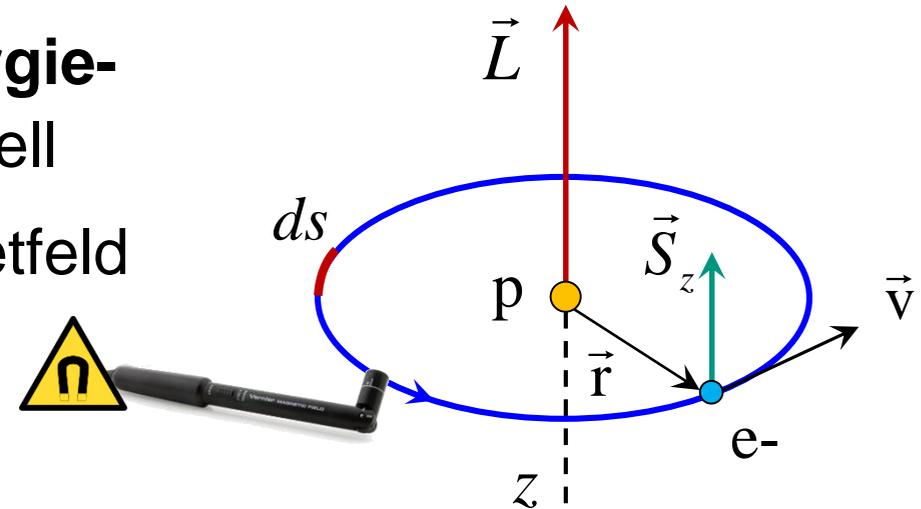
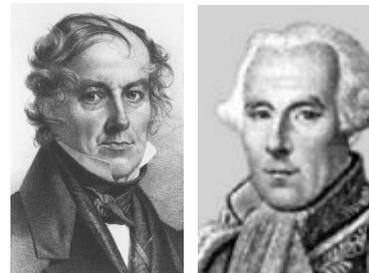
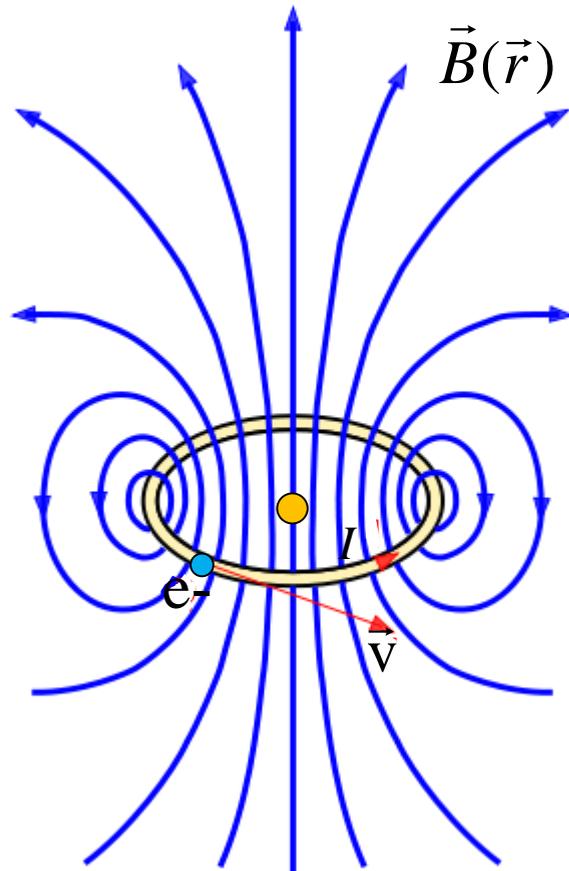


SHELDON COOPER  
presents  
~~WITH FLAGS~~  
FUN WITH FACTS



# Spin-Bahnkopplung: Energie-Aufspaltung

- Semiklassische Berechnung der **Energieaufspaltung** im Bohrschen Atommodell
  - kreisendes Elektron erzeugt Magnetfeld (s. klassische Leiterschleife)



Ruhesystem des Protons

- **Biot-Savart** für Strom I:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \int I \cdot \frac{d\vec{s} \times \vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

- **Biot-Savart** für bewegte Ladung e:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot e \cdot \frac{\vec{v} \times \vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

# Spin-Bahnkopplung: Energie-Aufspaltung

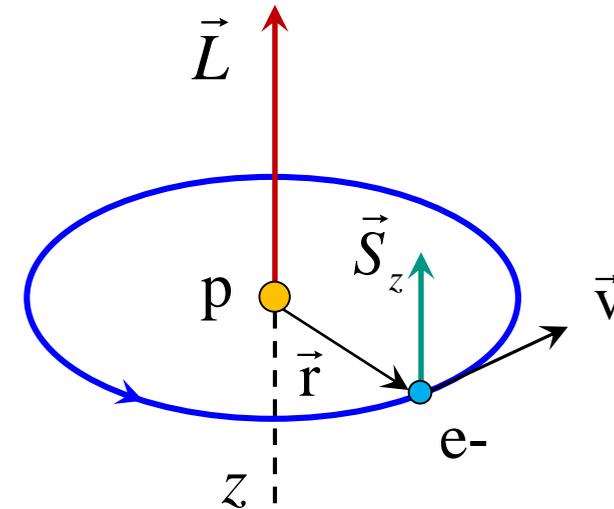
- Semiklassische Berechnung der Energieaufspaltung im Bohrschen Atommodell
  - im Ruhesystem des Elektrons entsteht B-Feld  $\vec{B}_e$  durch Kreisstrom des Protons:

$$\vec{B}_e = -\frac{\mu_0}{4\pi \cdot r^3} \cdot e \cdot (\vec{v} \times \vec{r})$$

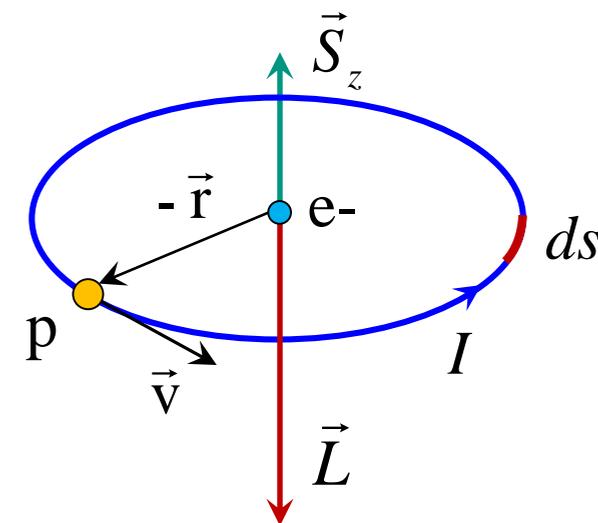
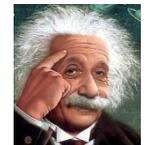
$$\vec{L} = \vec{r} \times m_e \cdot \vec{v} = -m_e \cdot \vec{v} \times \vec{r}$$

$$\vec{B}_e = \frac{\mu_0 \cdot e}{4\pi \cdot r^3 \cdot m_e} \cdot \vec{L} \quad \times \frac{1}{2}$$

- bei Rücktransformation ins Labor (Ruhesystem des Protons) tritt ein nicht-trivialer relativistischer Faktor (Thomas-Faktor =  $\frac{1}{2}$ ) auf



Ruhesystem des Protons



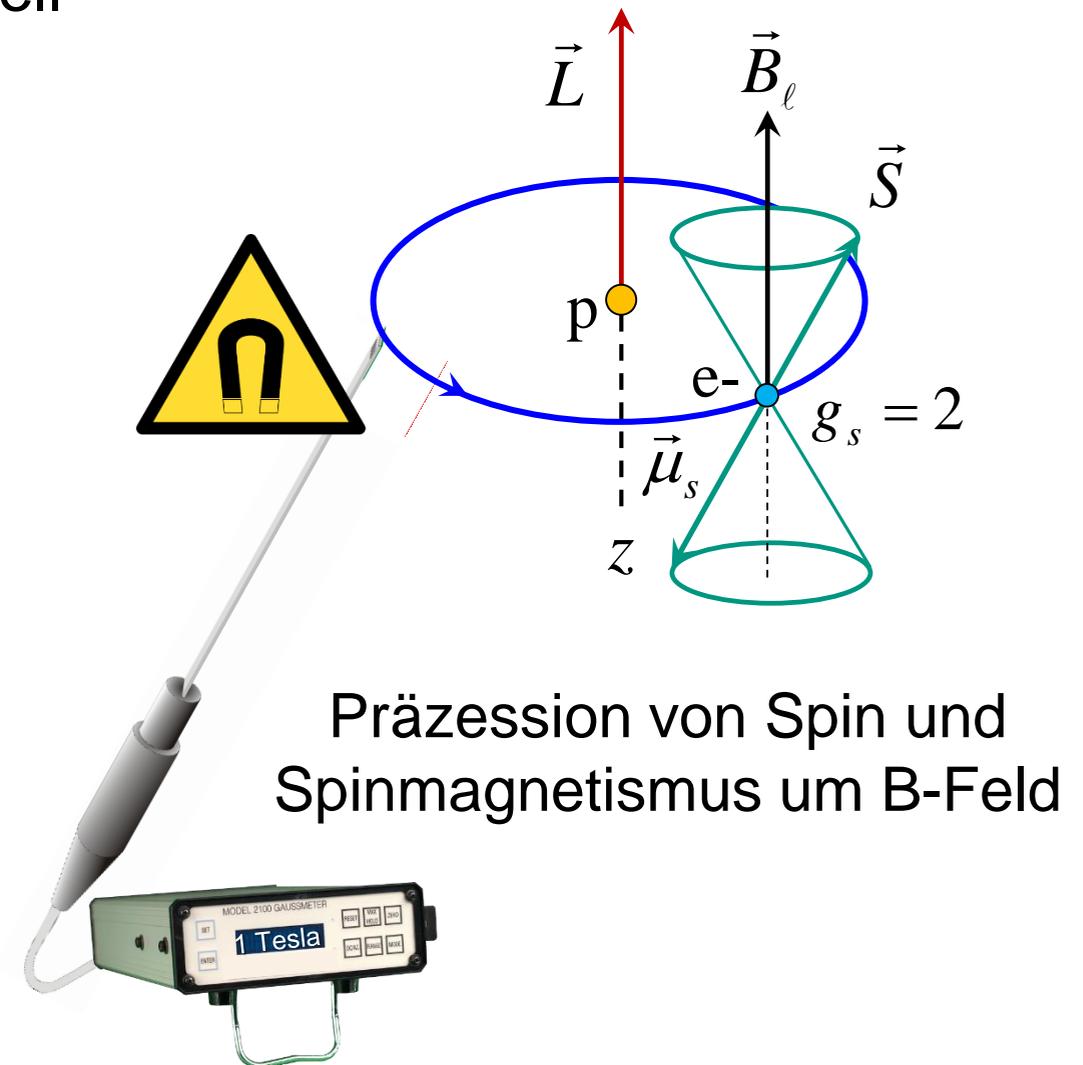
Ruhesystem des Elektrons

# Spin-Bahnkopplung: Energie-Aufspaltung

## ■ Semiklassische Berechnung der Energieaufspaltung im Bohrschen Atommodell

- am Ort des Elektrons existiert ein „inneres B-Feld“ durch seinen Bahnmagnetismus  $B_\ell$   
⇒ Präzession des Elektronspins

- Stärke des B-Felds im H-Atom bei  $r = 100 \text{ pm}$   
 $B_\ell \sim 1 \text{ T}$



# Spin-Bahnkopplung: Energie-Aufspaltung

- Wechselwirkungsenergie  $V_{\ell s}$  zwischen Spin und Bahndrehimpuls:

$$V_{\ell s} = -\vec{\mu}_s \cdot \vec{B}_\ell$$

$$V_{\ell s} = \frac{a}{\hbar^2} \cdot \vec{L} \cdot \vec{S}$$

Einsetzen von

$$\vec{\mu}_s = -g_s \cdot \frac{e}{2m_e} \cdot \vec{S}$$

$$\vec{B}_\ell = \frac{\mu_0 \cdot e}{8\pi \cdot r^3 \cdot m_e} \cdot \vec{L}$$

Konstante  $a = \frac{e^2 \cdot \mu_0}{8\pi \cdot m_e^2 \cdot r^3} \cdot \hbar^2$

größte Feinstruktur-Aufspaltung bei kleinem  $r$  (d.h. speziell bei  $n = 2$ )

- Größe der Energie-Aufspaltung im H-Atom bei  $r = 100 \text{ pm}$ :  $V_{\ell s} \sim 10^{-4} \text{ eV}$  (Feinstruktur)

$\alpha$



# Spin-Bahnkopplung: Energie-Aufspaltung

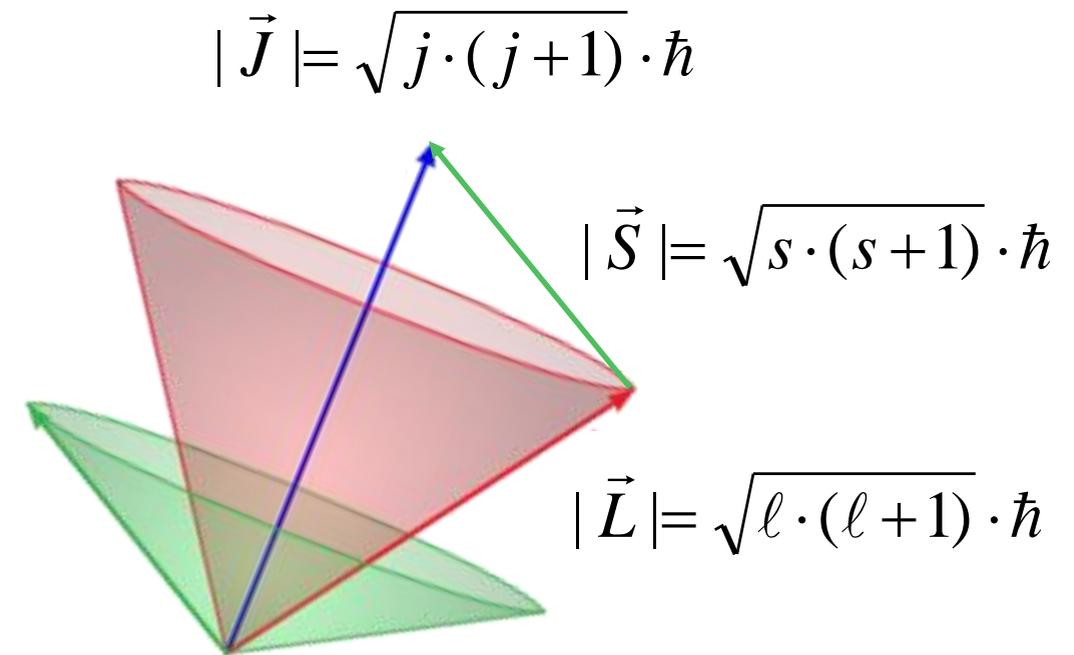
- Wechselwirkungsenergie  $V_{\ell s}$  zwischen Spin und Bahndrehimpuls:

$$V_{\ell s} = \frac{a}{\hbar^2} \cdot \vec{L} \cdot \vec{S}$$

- mit  $\hat{J}^2 = \hat{L}^2 + \hat{S}^2 + 2 \cdot \hat{L} \cdot \hat{S}$

$$\Rightarrow \hat{L} \cdot \hat{S} = \frac{1}{2} \cdot (\hat{J}^2 - \hat{L}^2 - \hat{S}^2)$$

$$V_{\ell s} = \frac{a}{2} \cdot [ j \cdot (j+1) - \ell \cdot (\ell+1) - s \cdot (s+1) ]$$

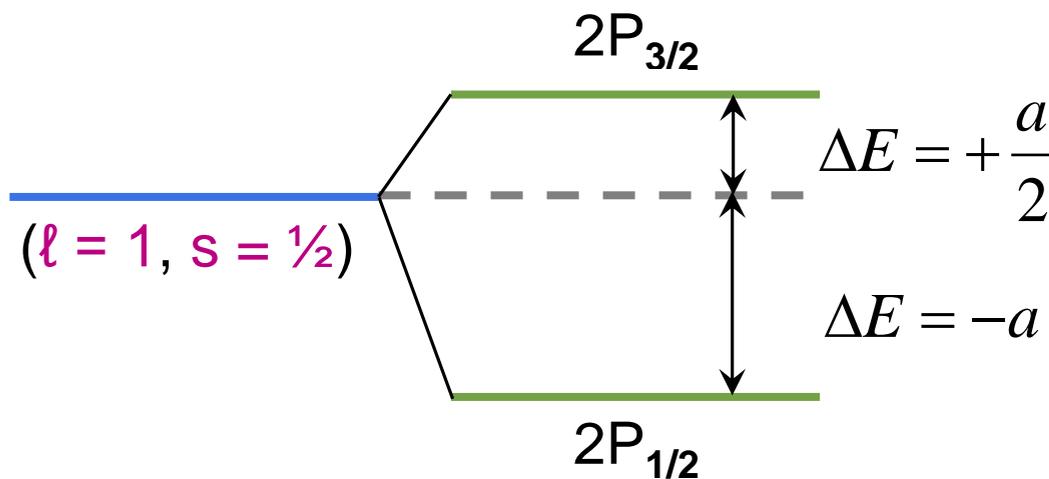


# Spin-Bahnkopplung: Energie-Aufspaltung

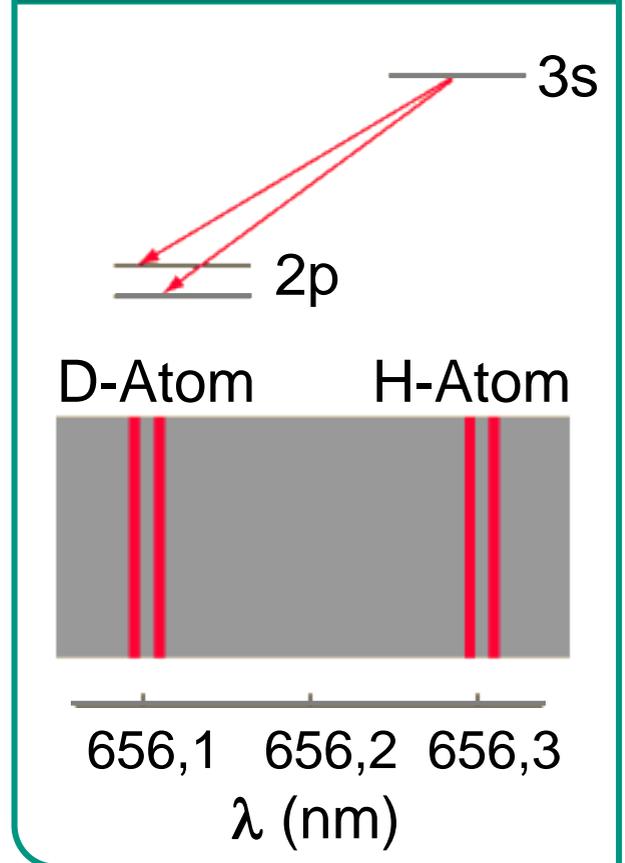
- Wechselwirkungsenergie  $V_{\ell s}$  zwischen Spin und Bahndrehimpuls:

- für  $j = \ell + \frac{1}{2}$   $V_{\ell s} = \frac{a}{2} \cdot \ell$

- für  $j = \ell - \frac{1}{2}$   $V_{\ell s} = -\frac{a}{2} \cdot (\ell + 1)$



## Beispiel: Ly $\alpha$ -Linie

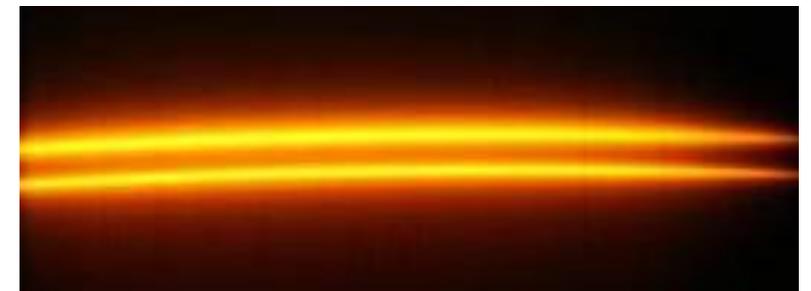


Aufspaltung 1:2

■ **QM:** keine klassischen Bahnen, sondern Orbitale mit Radialfunktionen, ersetze  $r$  mit quantentheoretischen Mittelwerten  $\bar{r}$

- Feinstruktur-Aufspaltung am größten bei **kleinem  $n$**  ( $n = 2$ , 2p-Orbital), aber keine Aufspaltung von s-Orbitalen da  $l = 0$
- Feinstruktur-Aufspaltung am größten bei **großem  $Z$** , z.B. Cs

- **Dublett-Struktur:**  $3P \rightarrow 3P_{1/2}$  und  $3P_{3/2}$



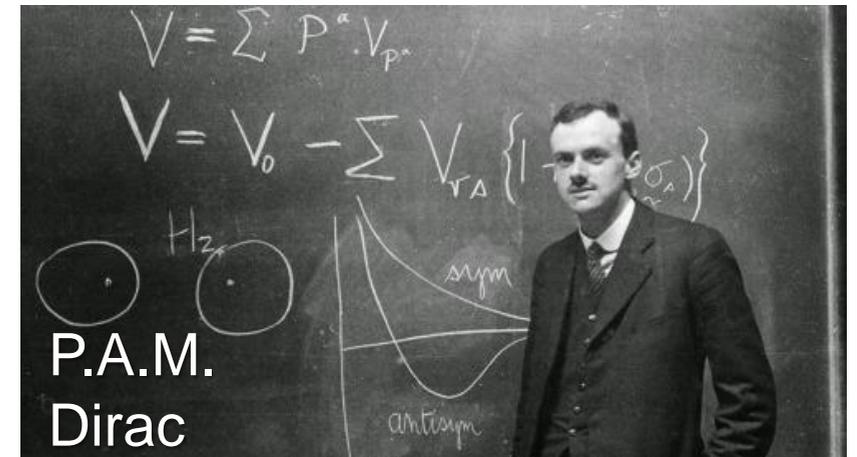
# Feinstruktur beim H-Atom

- Feinstrukturaufspaltung  $E_{FS}$  berechenbar in **Dirac-Theorie**, mit Beiträgen

- relativistische Massenzunahme
- Spin-Bahn-Kopplung

ergibt sich:

$$E_{FS} = -E_n \cdot \frac{1}{n} \cdot \alpha^2 \cdot \left( \frac{1}{j+1/2} - \frac{3}{4n} \right) \cdot Z^2$$



- mit Sommerfeldscher Feinstruktur-Konstanten  $\alpha$

$$\alpha = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137}$$



- im H-Atom sind Zustände mit gleicher Quantenzahl  $j$  entartet

# Feinstrukturkonstante – Größe

$\alpha$

*“It has been a mystery ever since it was discovered more than fifty years ago, and **all good theoretical physicists put this number up on their wall and worry about it.**”*

$\alpha$

$\alpha$

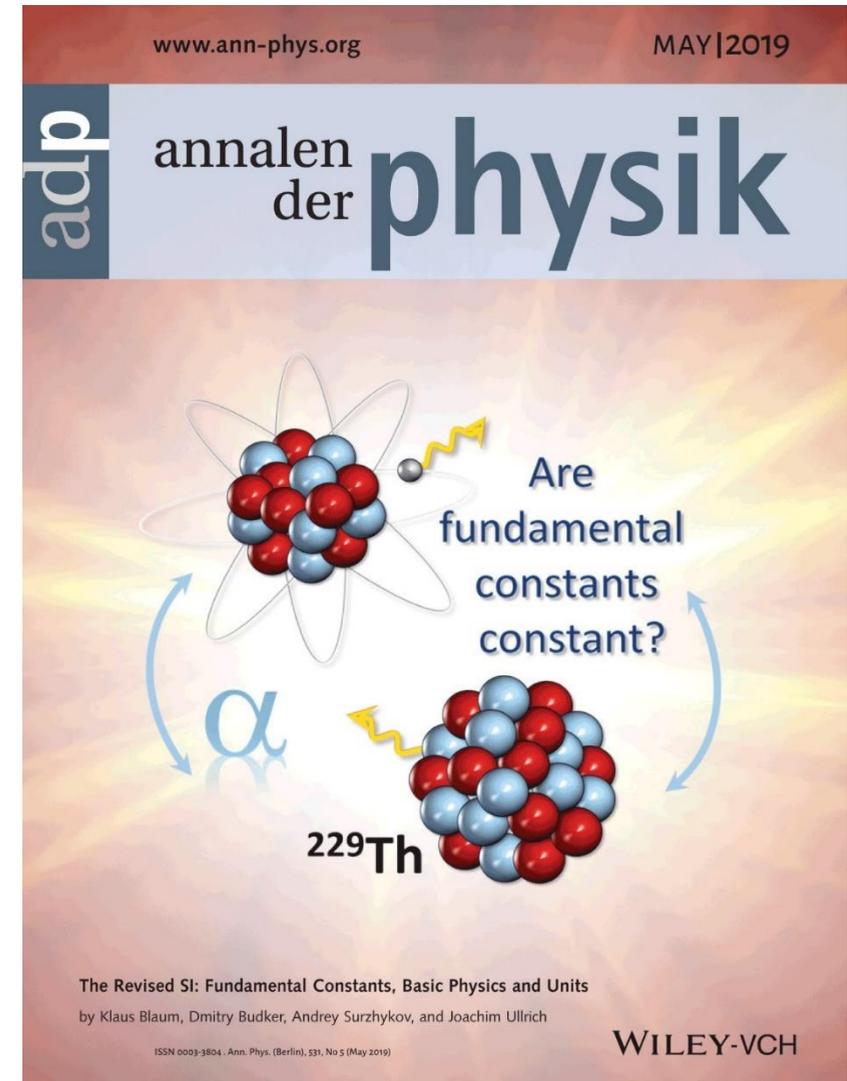
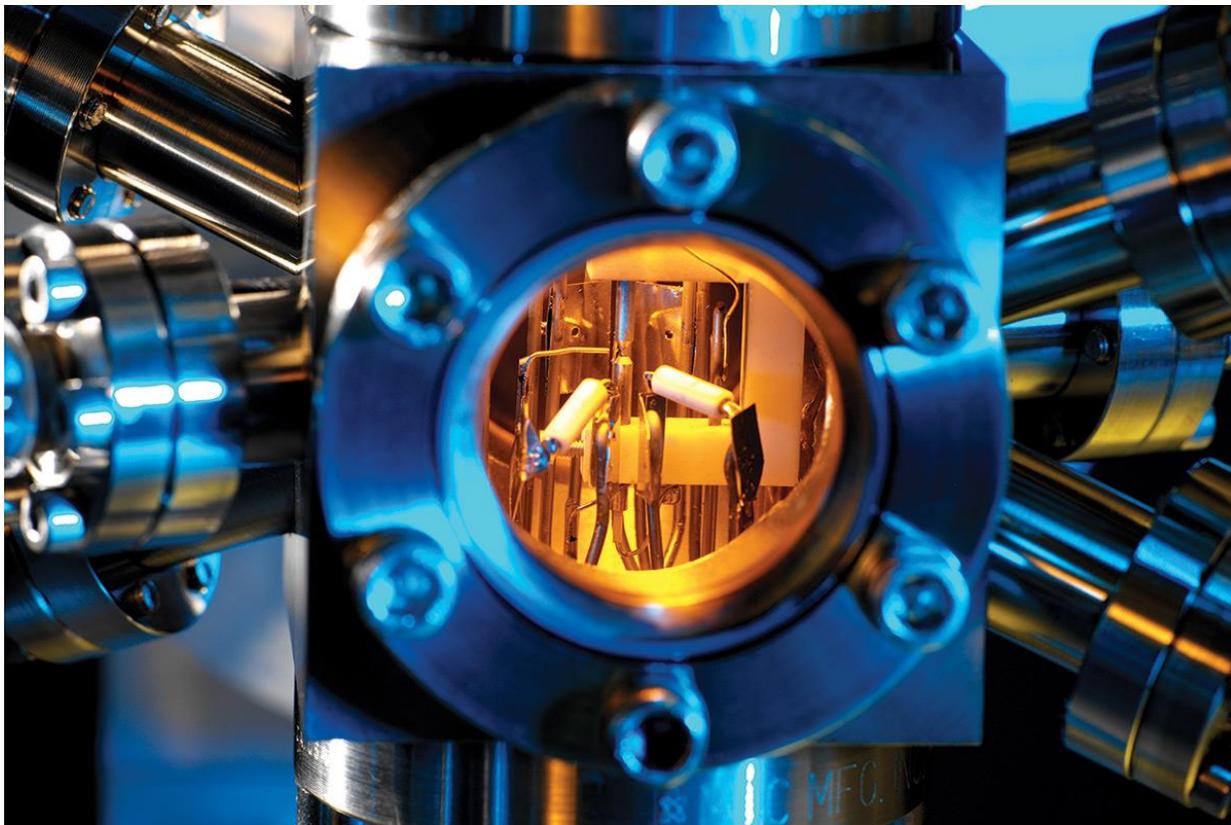
$\alpha = 1/137$ , warum?



Richard Feynman

# Feinstrukturkonstante: wirklich konstant?

- Feinstrukturkonstante – Suche nach einer möglichen **Zeitvariabilität**
  - ⇒ Untersuchung mit **Atomuhren** mit extrem guter Stabilität (Kap. 6.7)

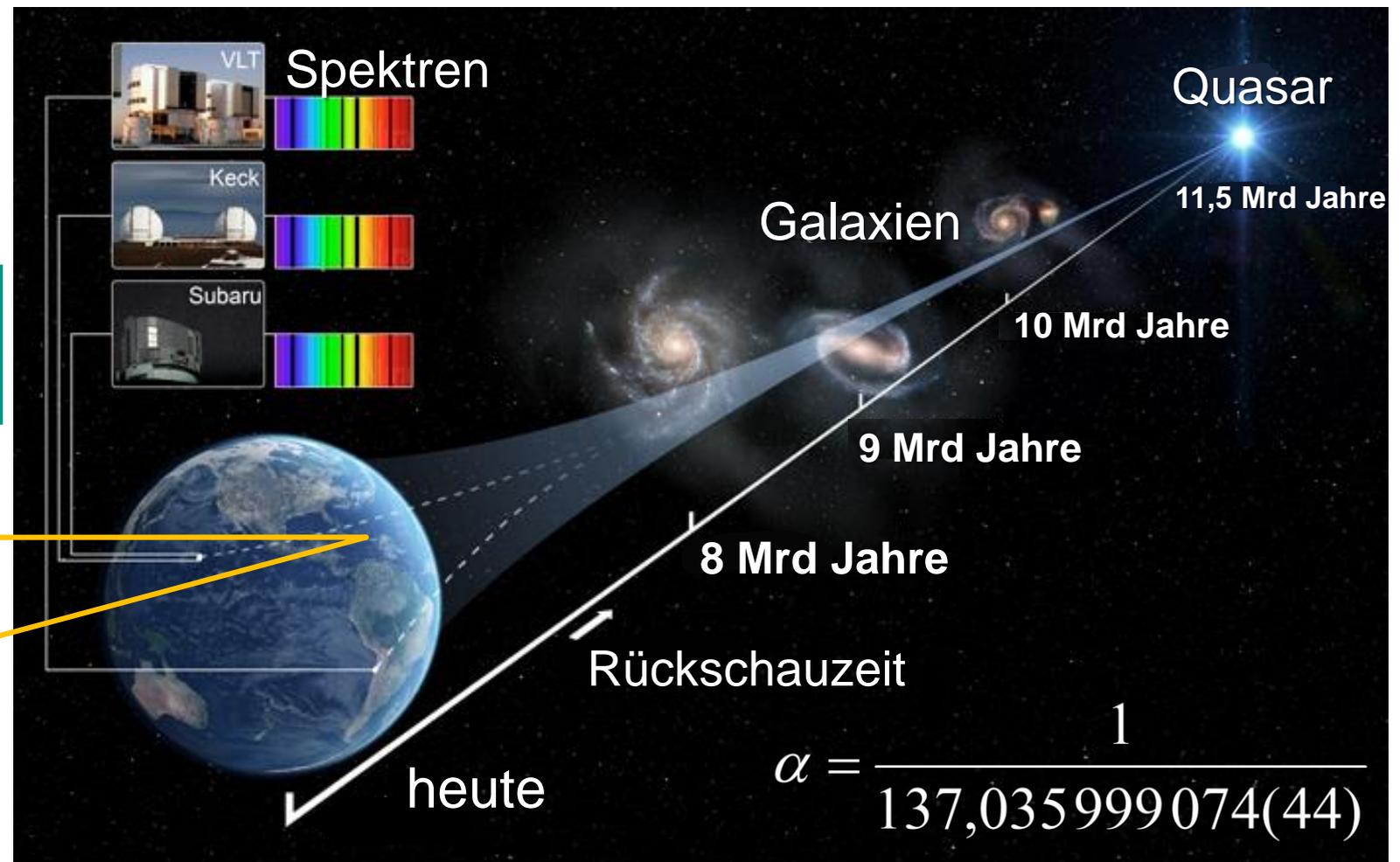
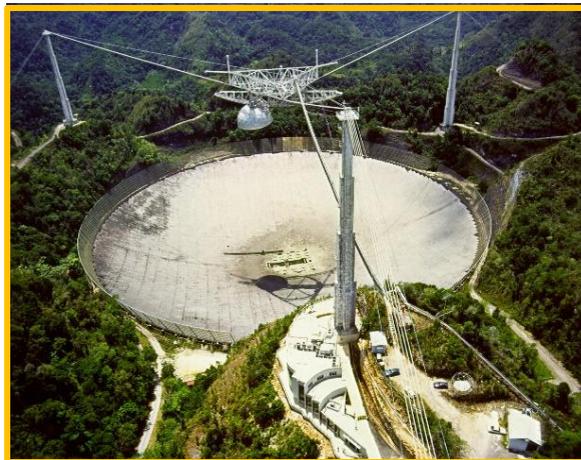


$$\alpha_t \rightarrow \alpha$$

# Feinstrukturkonstante: wirklich konstant?

- Feinstrukturkonstante – Suche nach einer möglichen **Zeitvariabilität**
  - ⇒ Untersuchung der Absorptionslinien von fernen Quasaren
  - 2017: Analyse der **Feinstruktur von H-Atomen** & OH-Molekülen mit dem

Arecibo Radio-  
Teleskop von  
PKS 1413+135

$$\frac{\Delta\alpha}{\alpha} < 0,00013\%$$


# Fun with Facts: Big Bang Theory

■ Werden Atome durch die universelle kosmische Expansion beeinflusst?

A) Ja, gemäß der **Big Bang Theorie** wird alles größer

B) Ja, aber da alles größer wird, ist das **nicht nachweisbar**

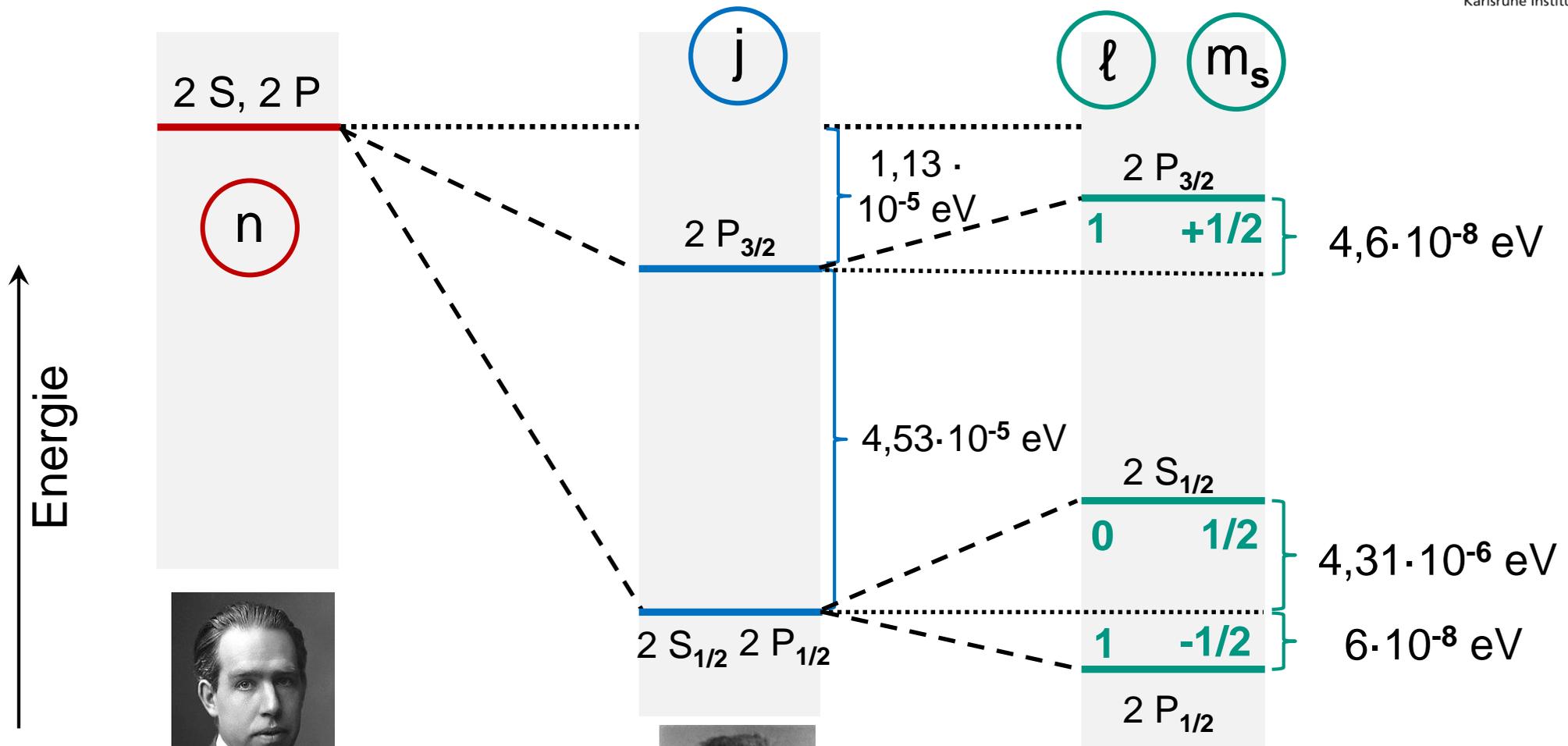
C) Nein, Atome bleiben **immer gleich groß**



the **Big**  
**BANG**  
THEORY



# Aufspaltung der Energieniveaus im H-Atom



Bohr-Modell  
Schrödinger-Gl.  
ohne Spin



Dirac-Theorie  
Feinstruktur



Lamb-Shift  
QED

# Spin-Bahn-Kopplung 2019

