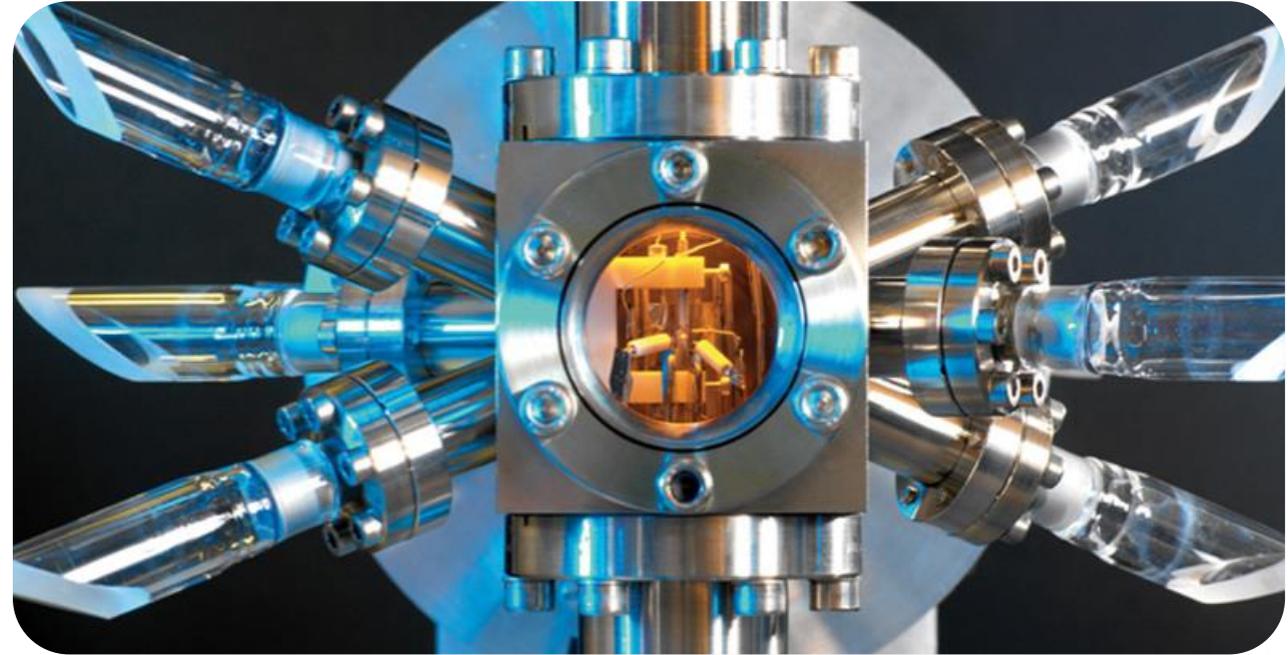


Atome & Kerne

Sommersemester 2019

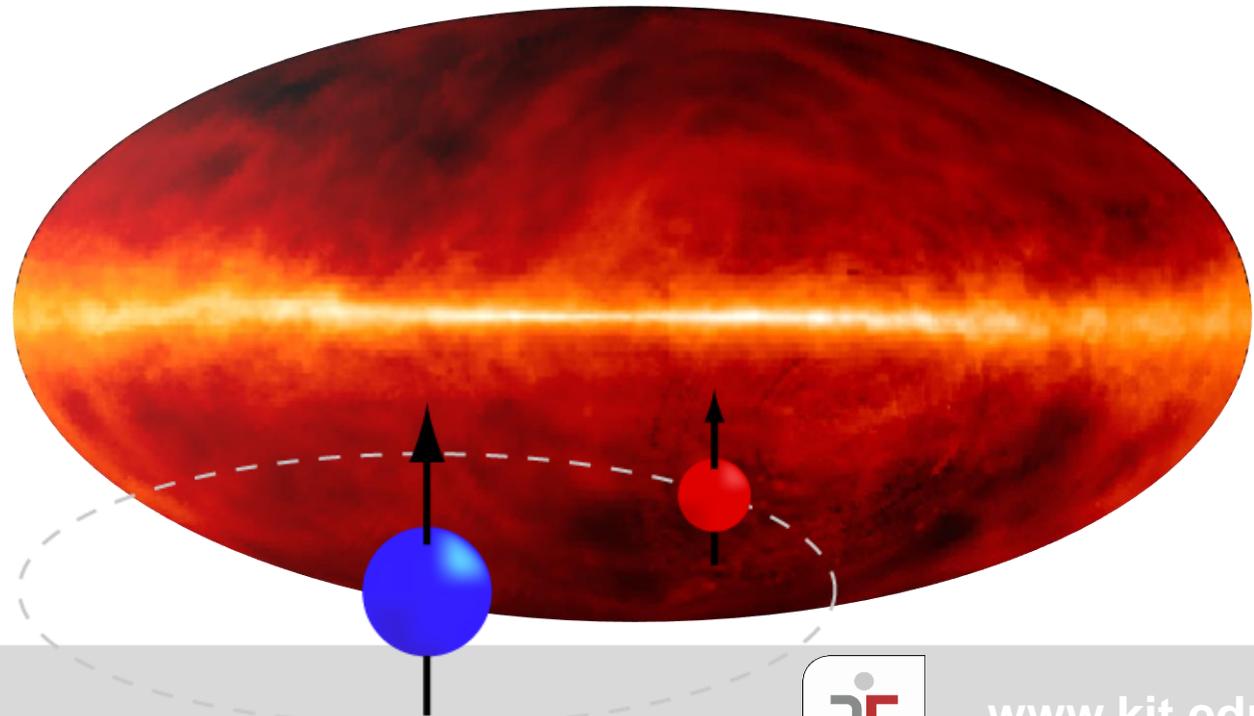
Vorlesung # 12, 04.06.19



Guido Drexlin, Institut für Experimentelle Teilchenphysik, Fakultät für Physik

Das Wasserstoff-Atom

- Lambshift
- Vakuum-Fluktuationen
- 21 cm Line von HI-Regionen
- Kernspins
- Hyperfeinwechselwirkung
- Atomuhren



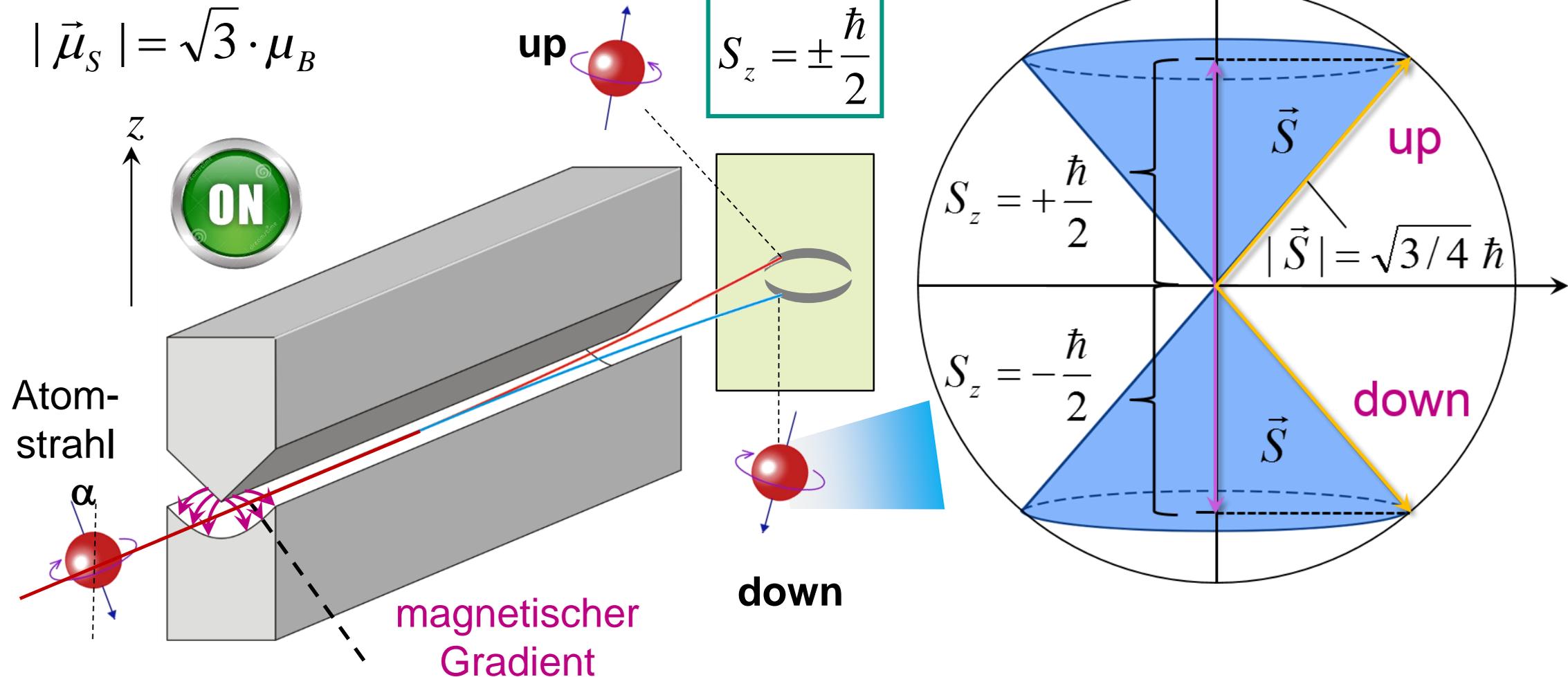
Stern-Gerlach Experiment



- Nachweis der **Richtungsquantisierung**: Spin up – Spin down

$$\hat{S}^2 |s, m_s\rangle = \hbar^2 \cdot s \cdot (s + 1) \quad \hat{S}_z |s, m_s\rangle = \hbar \cdot m_s$$

$$|\vec{\mu}_s| = \sqrt{3} \cdot \mu_B$$



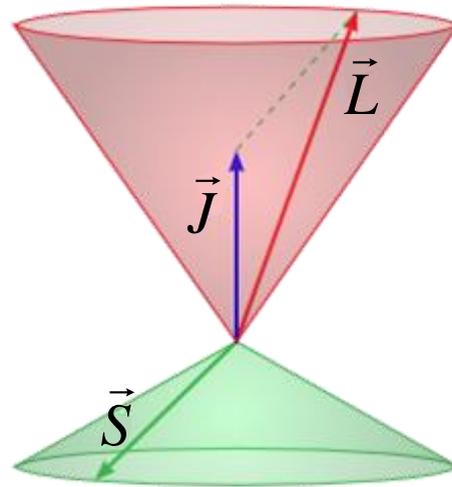
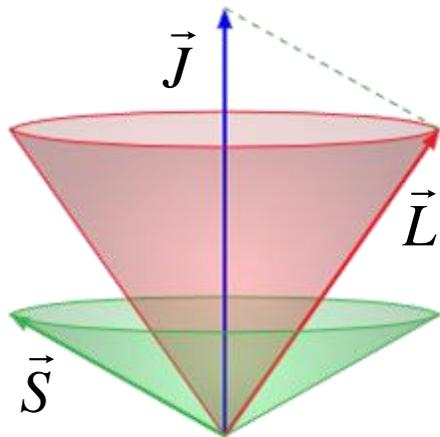
Feinstrukturaufspaltung durch LS-Kopplung



- Kopplung Bahndrehimpuls L und Spin S zu **Gesamtdrehimpuls J**

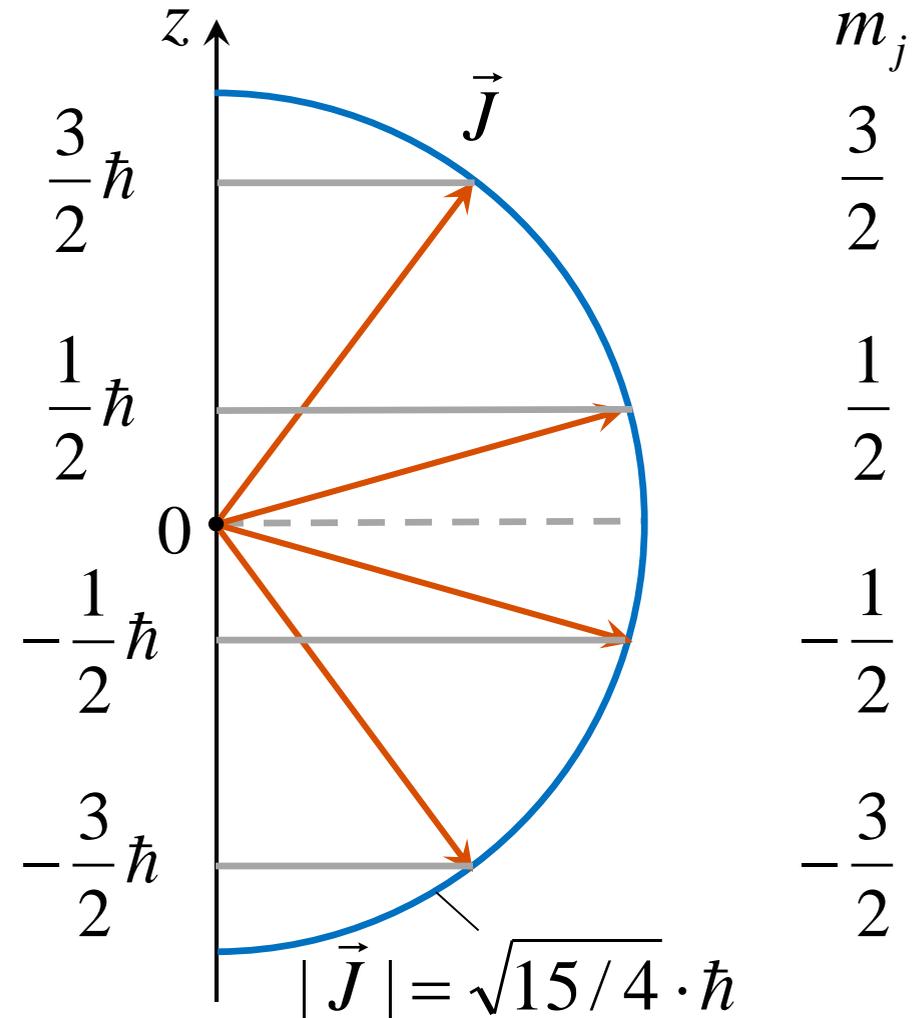
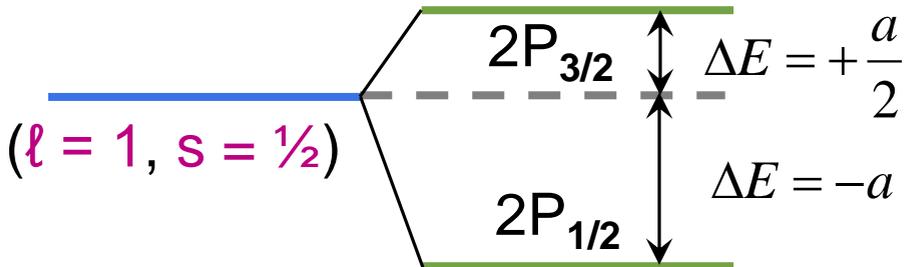
■ Spin-Bahnkopplung

$$|\vec{J}| = \sqrt{j \cdot (j+1)} \cdot \hbar$$

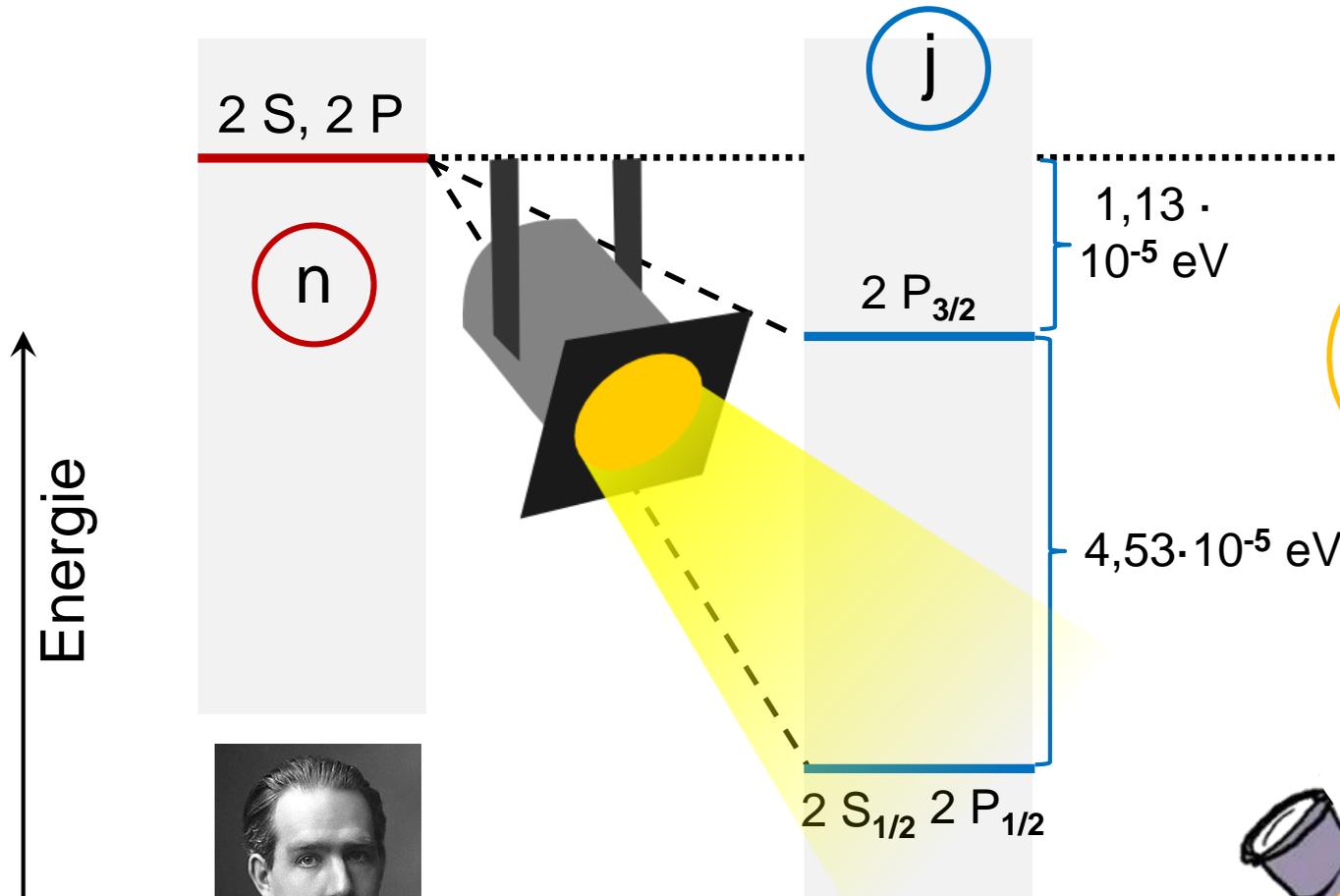


4 (d.h. $2j+1$) Orientierungen für $j = 3/2$

$$V_{ls} = \frac{a}{2} \cdot [j \cdot (j+1) - \ell \cdot (\ell+1) - s \cdot (s+1)]$$



Motivation zur Lamb-Shift



Bohr-Modell
Schrödinger-Gl.
ohne Spin

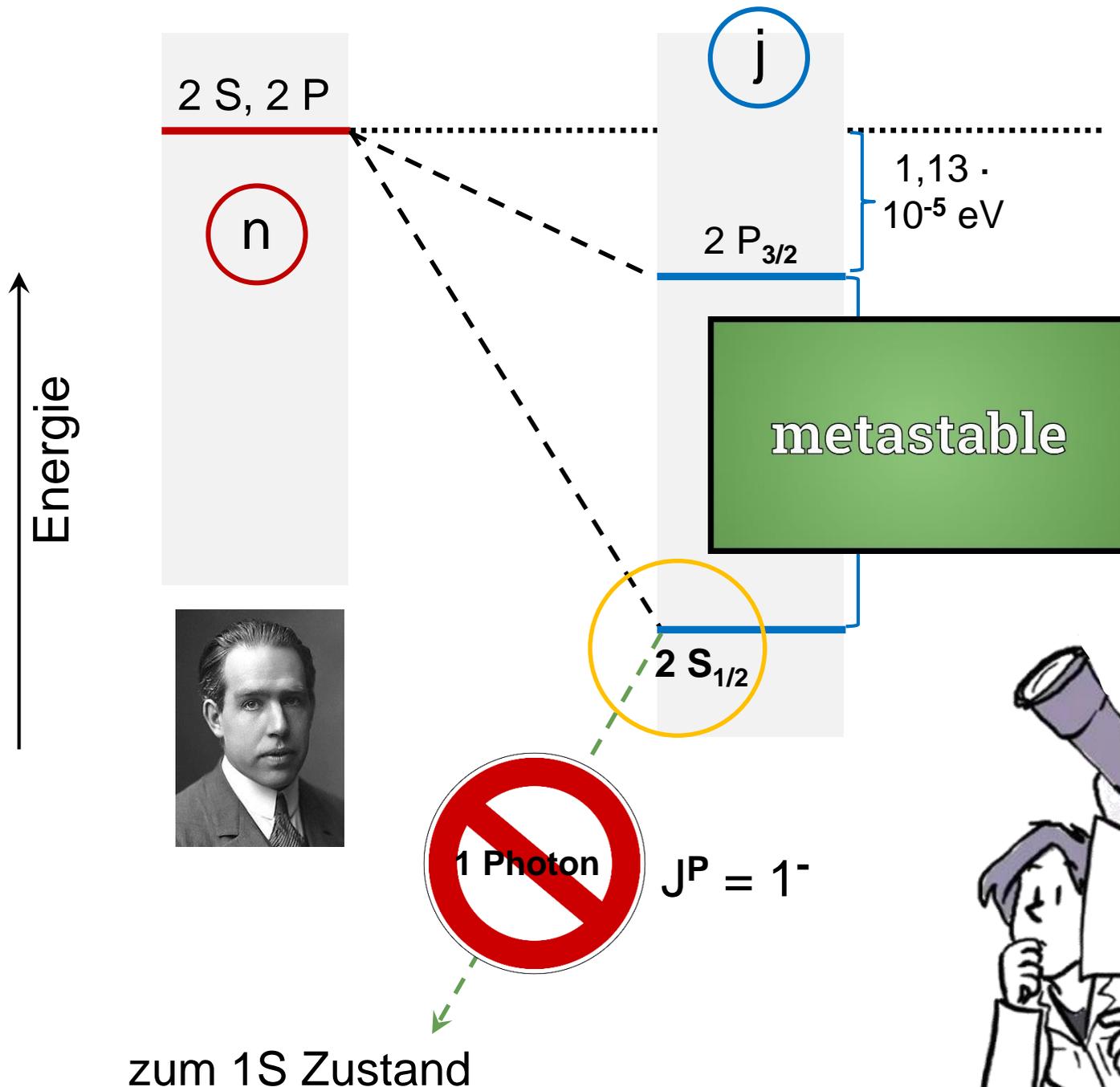


Dirac-Theorie
Feinstruktur

Ah, Monsieur Dirac, vielleicht sind die $J = \frac{1}{2}$ Orbitale doch energetisch aufgespalten?! Wir messen das mal...

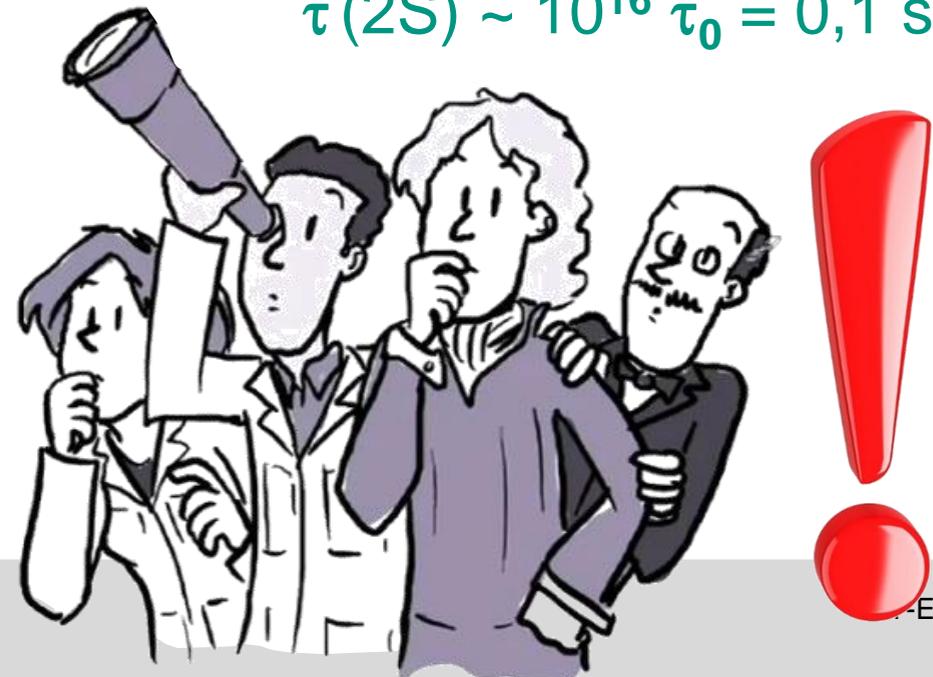


Motivation zur Lamb-Shift



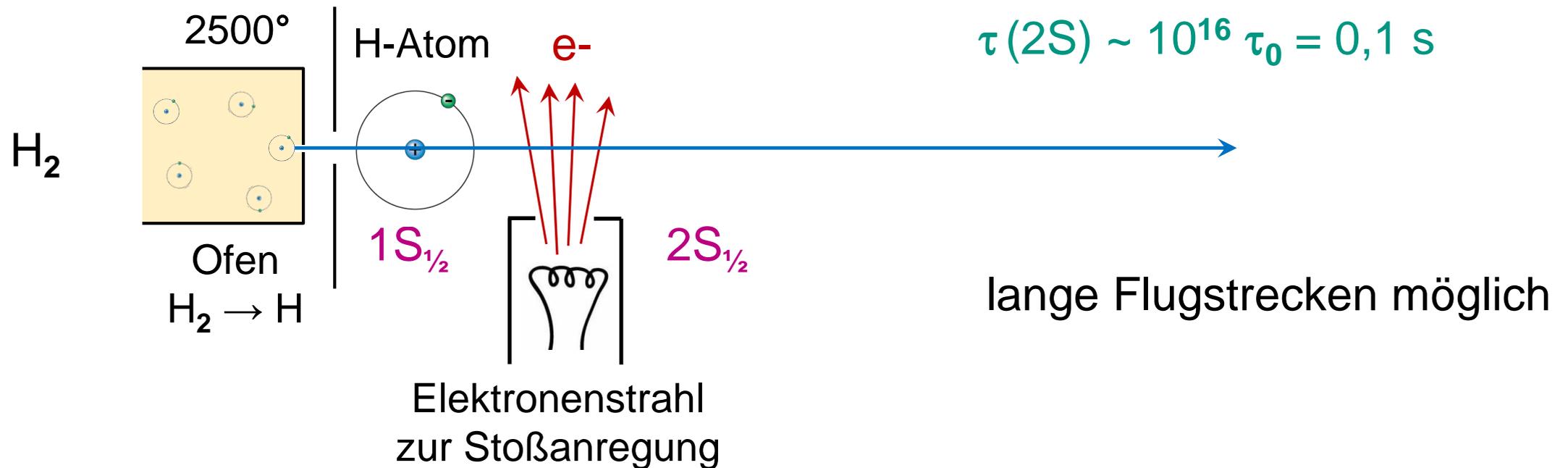
- Das 2 S_{1/2} Orbital ist ideal als Startzustand, da es **metastabil** ist: 2S → 1S Übergänge nur möglich bei der Emission von 2 Photonen (Auswahlregel ΔL = ±1)

$$\tau(2S) \sim 10^{16} \tau_0 = 0,1 \text{ s}$$



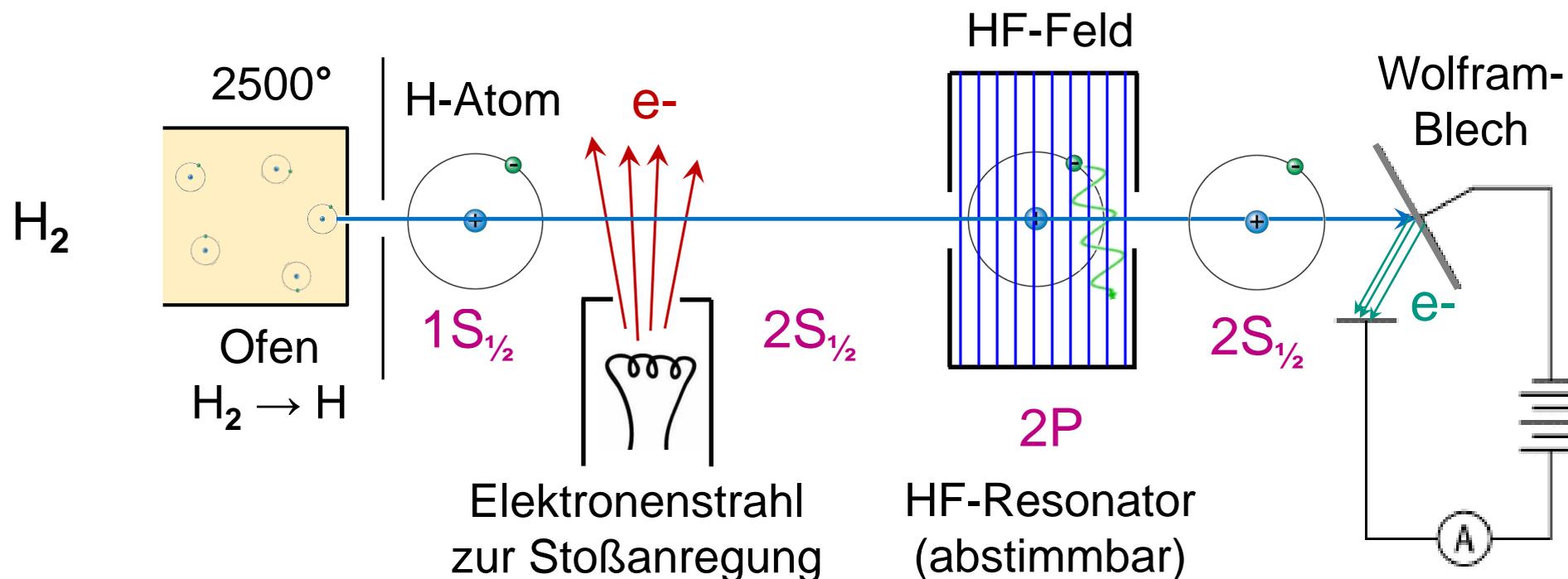
Experiment zur Lamb-Shift des H-Atoms

- 1947-1952: Willis E. Lamb & R.C. Retherford weisen erstmals die **Aufspaltung der $2S_{1/2}$ und $2P_{1/2}$ Zustände** im H-Atom nach
- Messung der **Lamb-Verschiebung mit Strahl aus atomarem H**
 - **metastabiler $2S_{1/2}$ Zustand** muss vom 1S Grundzustand speziell präpariert werden über Elektronenstöße (da nicht über Photon!!)



Experiment zur Lamb-Shift

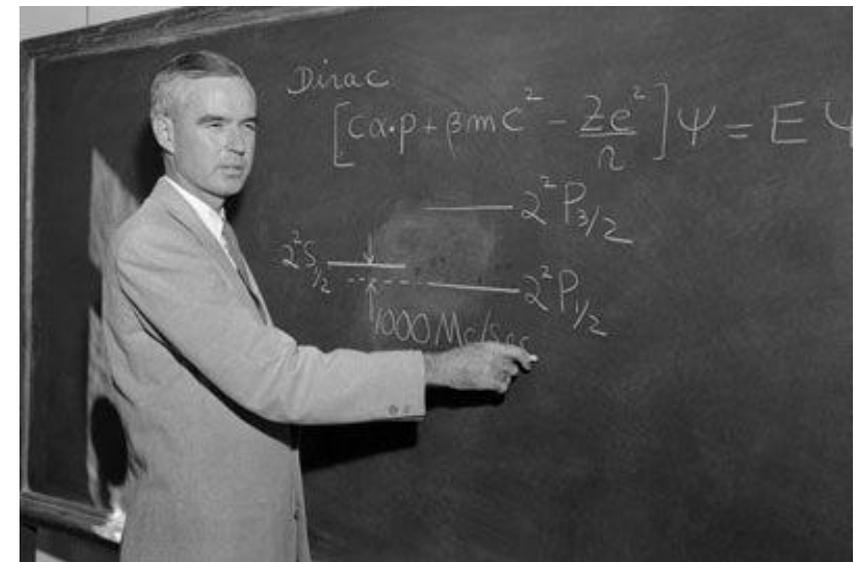
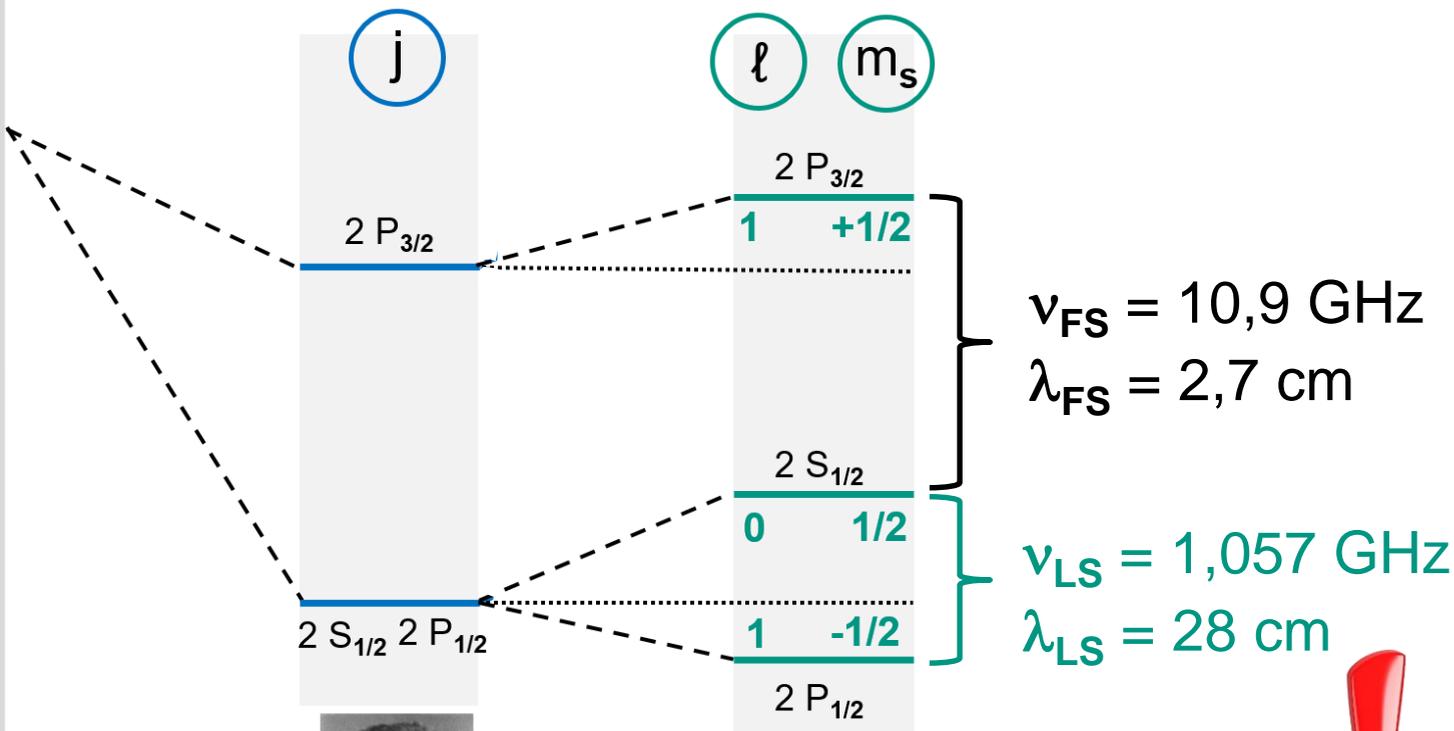
- Grundlegende Technik: in einem **HF Resonator** wird ein kleiner Teil der metastabilen $2S$ -Zustände in kurzlebige $2P$ -Zustände umgewandelt
 - **Mikrowellen** induzieren Übergänge $2S_{1/2} \rightarrow 2P_{3/2} \text{ \& } 2P_{1/2}$
⇒ alle $2P$ Zustände sind kurzlebig und zerfallen sofort
 - Nachweis der **verbleibenden $2S_{1/2}$ Zustände** über e- Strom an W-Blech



Experiment zur Lamb-Shift: Resultate

■ Experimentelle Resultate im H-Atom

- 1. HF-Absorptionsline bei $\nu_{FS} = 10,9 \text{ GHz}$: FS-Aufspaltung $2S_{1/2} \rightarrow 2P_{3/2}$
- 2. HF-Absorptionsline bei $\nu_{LS} = 1,057 \text{ GHz}$: Lambshift $2S_{1/2} \rightarrow 2P_{1/2}$



Feinstruktur
LS-Kopplung

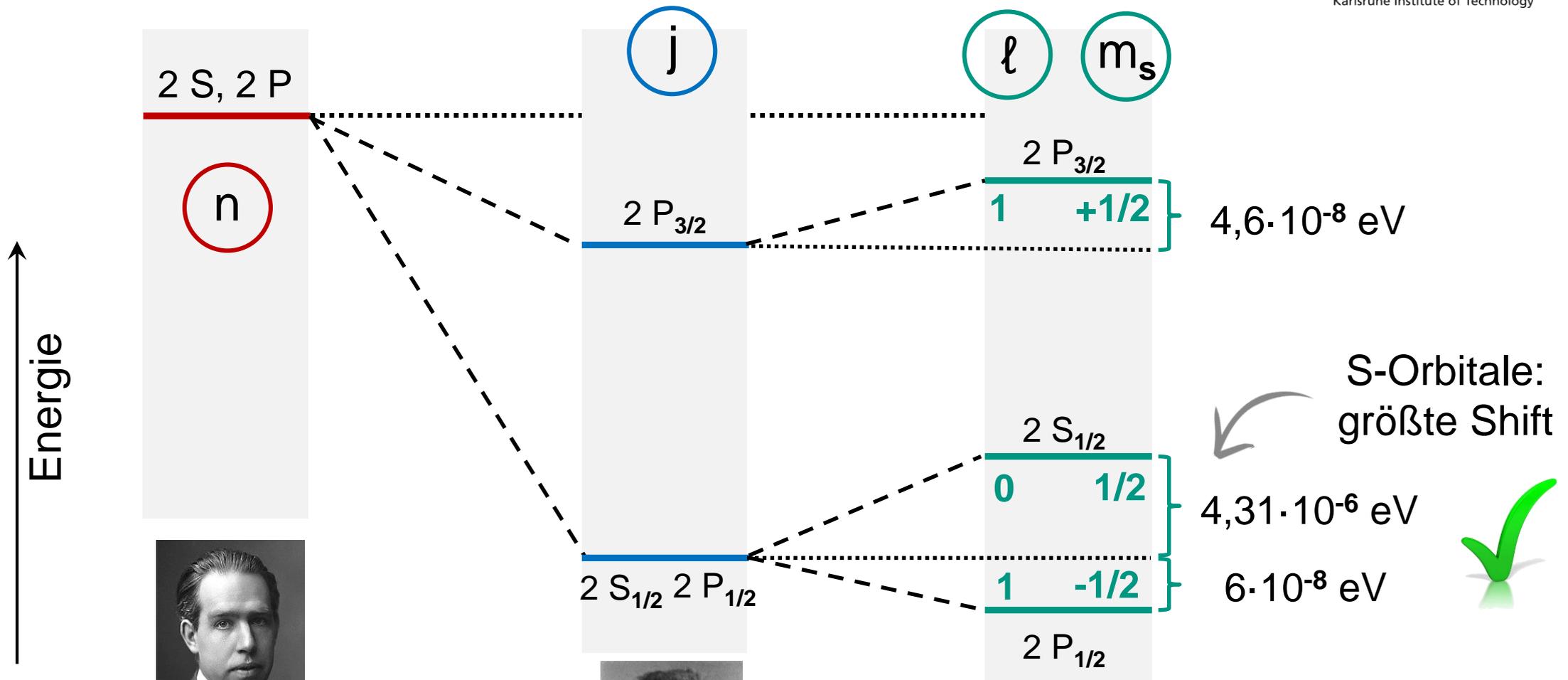


Lamb-Shift
QED



*bei Resonanzfrequenzen
erzeuge ich Übergänge:
Strom am W-Blech sinkt!*

Energieniveaus: FS & Lamb-Shift



Bohr-Modell
Schrödinger-Gl.
ohne Spin



Dirac-Theorie
Feinstruktur



Lamb-Shift
QED

Lamb-Shift – „take home“ & Implikation

■ Lamb-Shift – Nachweis durch Mikrowelleneinstrahlung

Aufhebung der Entartung von Zuständen mit gleichem J

- Anregung von $2S_{1/2}$ nach $2P_{3/2}$ (Absorption von Strahlung)
- Abregung von $2S_{1/2}$ nach $2P_{1/2}$ (stimulierte Emission von Strahlung)
- **wichtiger Effekt für die Entwicklung der QED (Vakuum-Effekte)**

PHYSICAL REVIEW

VOLUME 72, NUMBER 3

AUGUST 1, 1947

Fine Structure of the Hydrogen Atom by a Microwave Method* **

WILLIS E. LAMB, JR. AND ROBERT C. RETHERFORD

Columbia Radiation Laboratory, Department of Physics, Columbia University, New York, New York

(Received June 18, 1947)

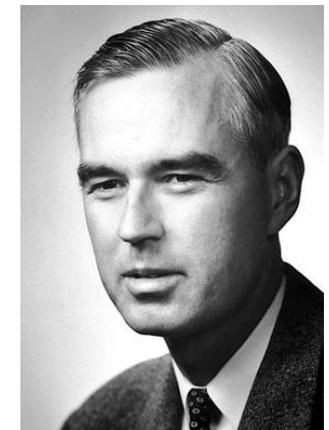
THE spectrum of the simplest atom, hydrogen, has a fine structure¹ which according to the Dirac wave equation for an electron moving in a Coulomb field is due to the combined effects of relativistic variation of mass with velocity and spin-orbit coupling. It has been considered one of the great triumphs of Dirac's theory that it gave the "right" fine structure of the energy levels. However, the experimental attempts to obtain a really detailed confirmation through a study of the Balmer lines have been frustrated by the large Doppler effect of the lines in comparison to the small splitting of the lower or $n=2$ states. The various spectroscopic workers have alternated between finding confirmation² of the theory and discrepancies³ of as much as eight



a "rare theorist
turned experimentalist"

Nobelpreis
1955

"for his discoveries
concerning the fine
structure of the
hydrogen spectrum"

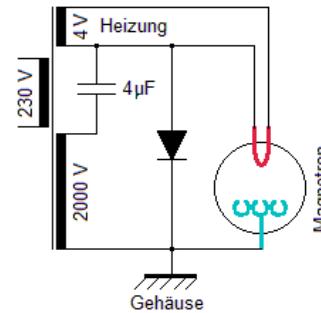


Willis E. Lamb

Fun with Facts: Frequenz einer Mikrowelle

■ Bei welcher Frequenz f arbeitet eine Haushaltsmikrowelle?

- A) bei $f = 2,455$ MHz
- B) bei $f = 2,455$ GHz
- C) bei $f = 2,455$ THz



Massachusetts
Institute of
Technology

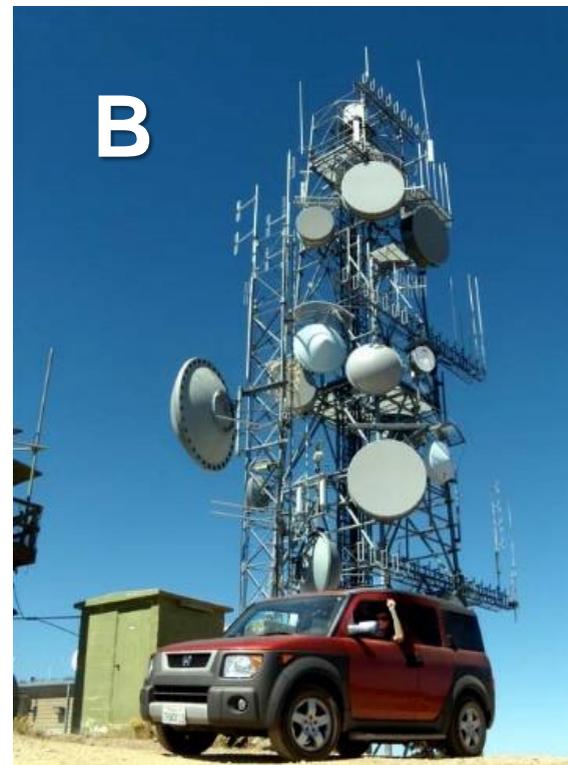
SHELDON COOPER
C/o presents
FUN WITH FACTS

Facts

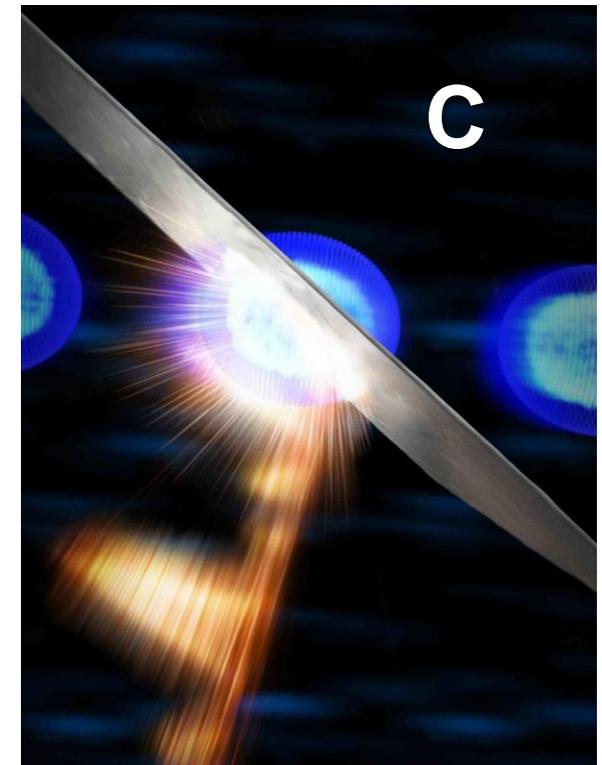
A



B



C

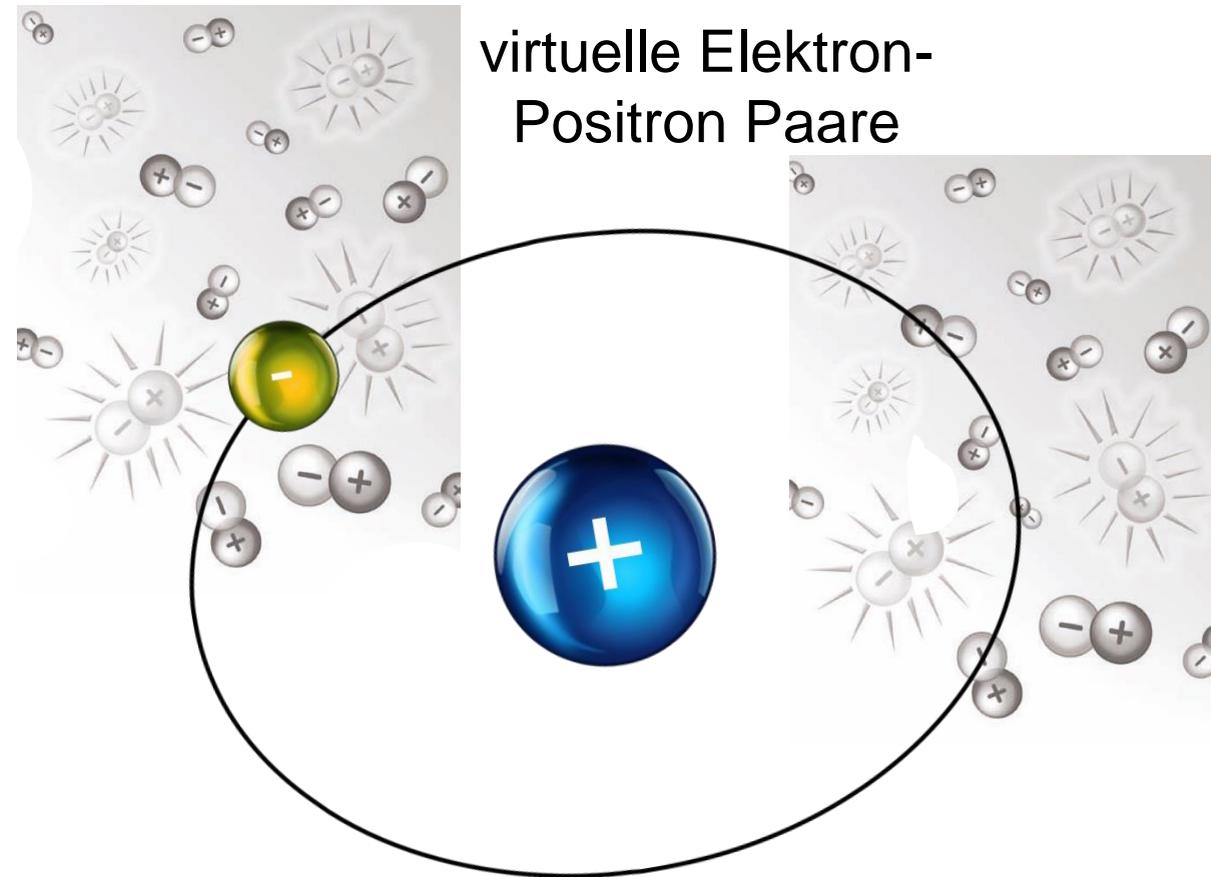


Vakuumpolarisation & H-Atom

- QED: Vakuumgrundzustand ist angefüllt mit **virtuellen Teilchen** die der Heisenbergschen Unschärferelation unterliegen (**Vakuum-Polarisation**)

$$\Delta E \cdot \Delta t \leq \frac{\hbar}{2}$$

- virtuelle Teilchen sind nicht direkt beobachtbar
- virtuelle Photonen
- virtuelle Elektron-Positron Paare
- virtuelle e^-e^+ Paare beeinflussen Elektronorbitale (\Rightarrow **Lambshift**)



virtuelle Elektron-Positron Paare

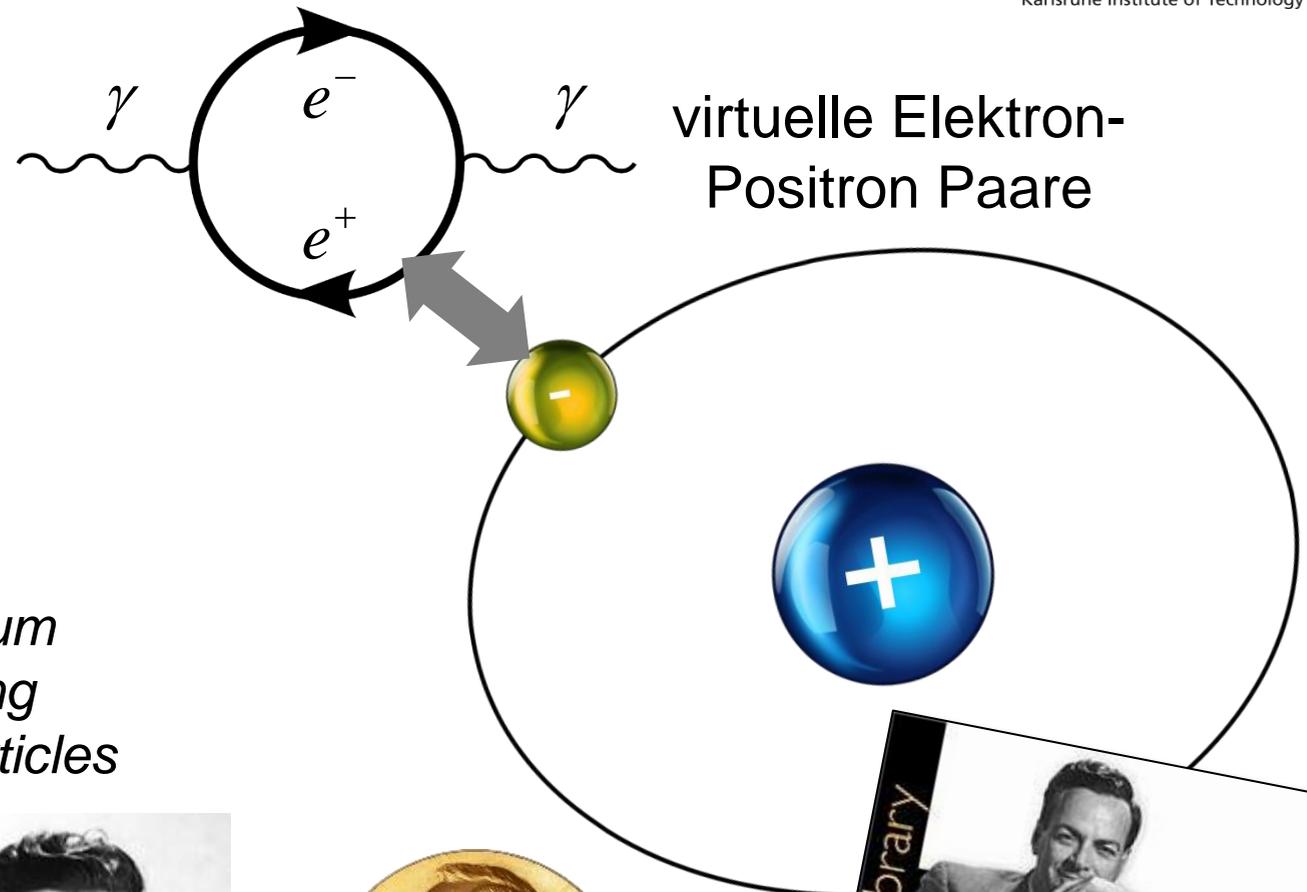
$$\langle E_{pot} \rangle = -\frac{Z \cdot e^2}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \left\langle \frac{1}{r + \delta r} \right\rangle$$

Bahnänderung durch virtuelle Teilchen

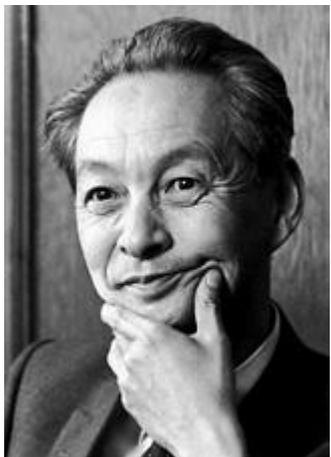
Vakuumpolarisation & QED

■ Lambshift:

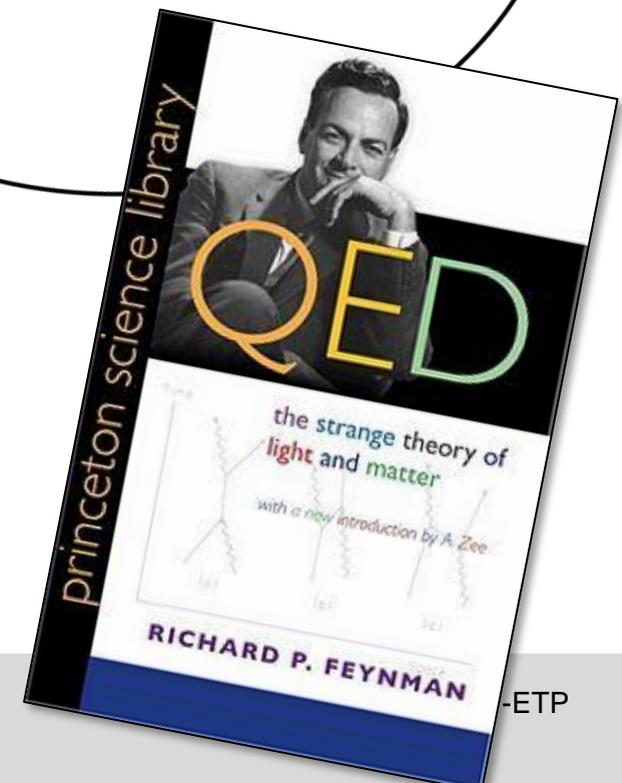
- wichtiger experimenteller Stützpfeiler & Befund für die Weiterentwicklung der Quanten-Elektro-Dynamik (QED)



"for their fundamental work in quantum electrodynamics, with deep-ploughing consequences for the physics of particles"



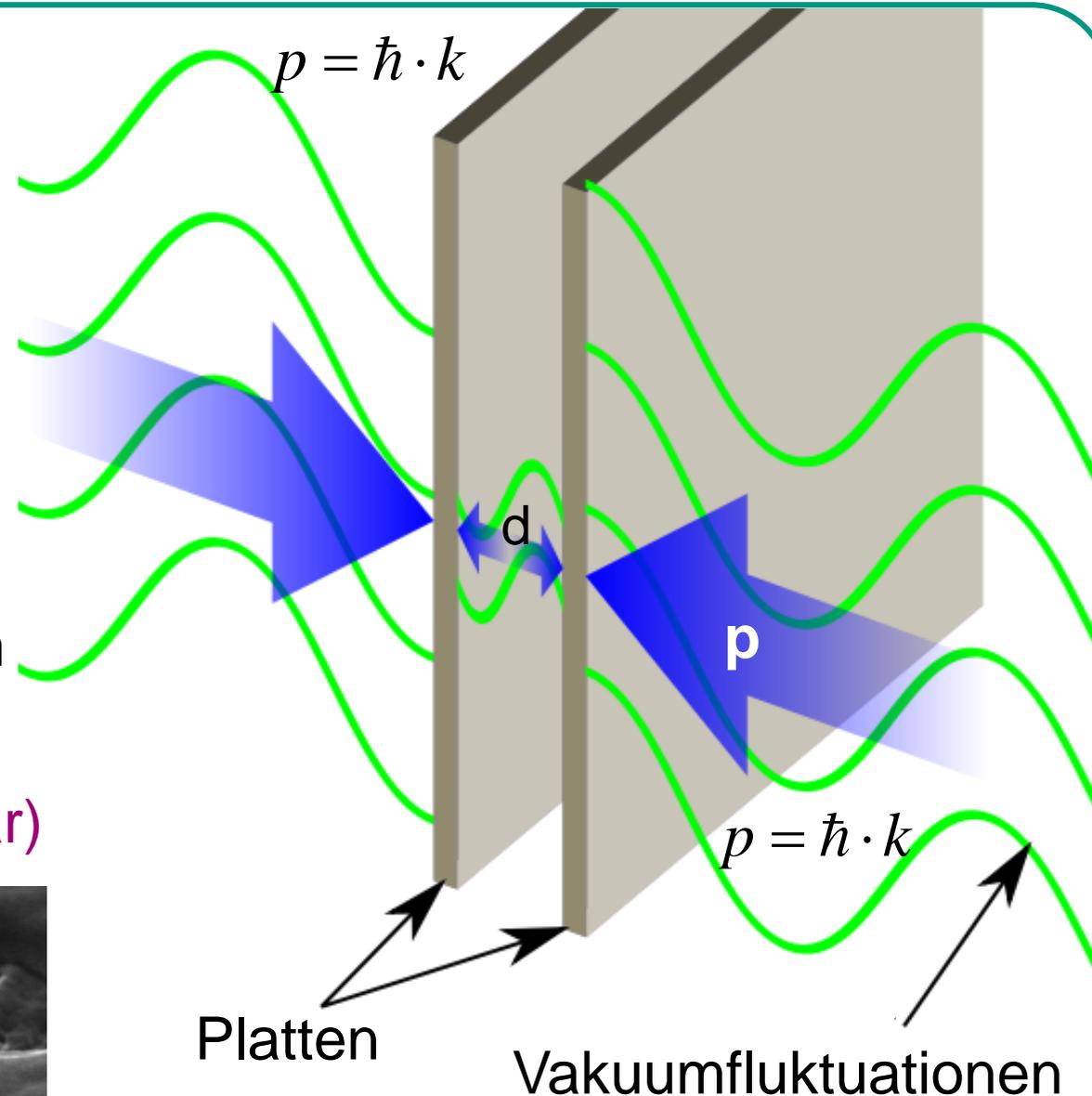
Nobelpreis
1965



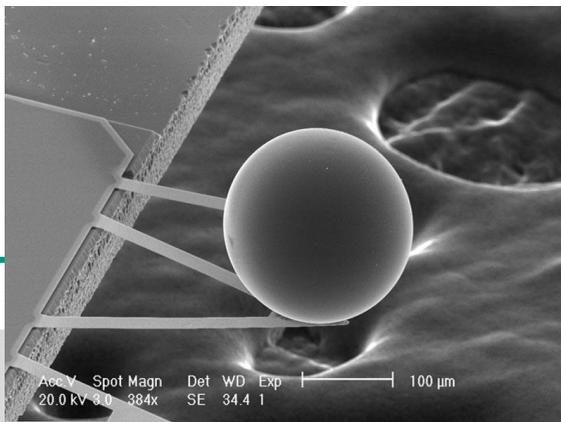
Sin-Itiro Tomonaga Julian Schwinger Richard P. Feynman

Casimir-Effekt

- **Vakuum: Raum gefüllt mit virtuellen Teilchen**
- innerhalb: nur diskrete Anzahl an Teilchen, da Randbedingung Platte
- außerhalb: kontinuierliches Spektrum
- **Casimir-Druck $P_c \sim 1/d^4$**
(bei $d = 11 \text{ nm} \Rightarrow p = 1 \text{ bar}$)



Hendrik
Casimir



6.7 Hyperfeinstruktur

■ **Energiezustände** im Atomen werden beeinflusst durch folgende Eigenschaften des **Kerns**:

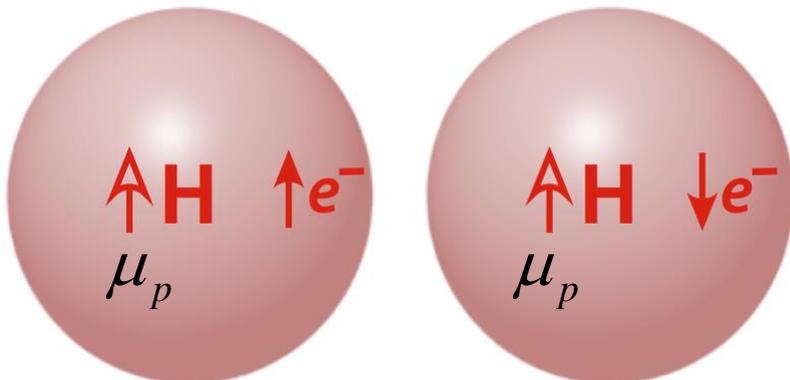
- **Q**: Coulombfeld der Protonen, Ladungsverteilung im Kern
- **M**: endliche Kernmasse (reduzierte Masse \Rightarrow Isotopeneffekt)

PREVIOUSLY

■ **Hyperfeinstruktur**- Zustände in Atomen beeinflusst durch das **magnetische Kernmoment** μ_{Kern} des **Kernspins** I , wechselwirkt mit magnetischem Dipolmoment μ_e der Hüllenelektronen

NEW

- sehr kleine Hyperfein-Aufspaltung der Zustände (Mikro-Wellen) –
 $\sim 10^3$ kleiner als Feinstruktur-Aufspaltung



erklärt von Wolfgang Pauli – 1924:
Postulat der Existenz des Spins
& magnetischen Moments des Kerns



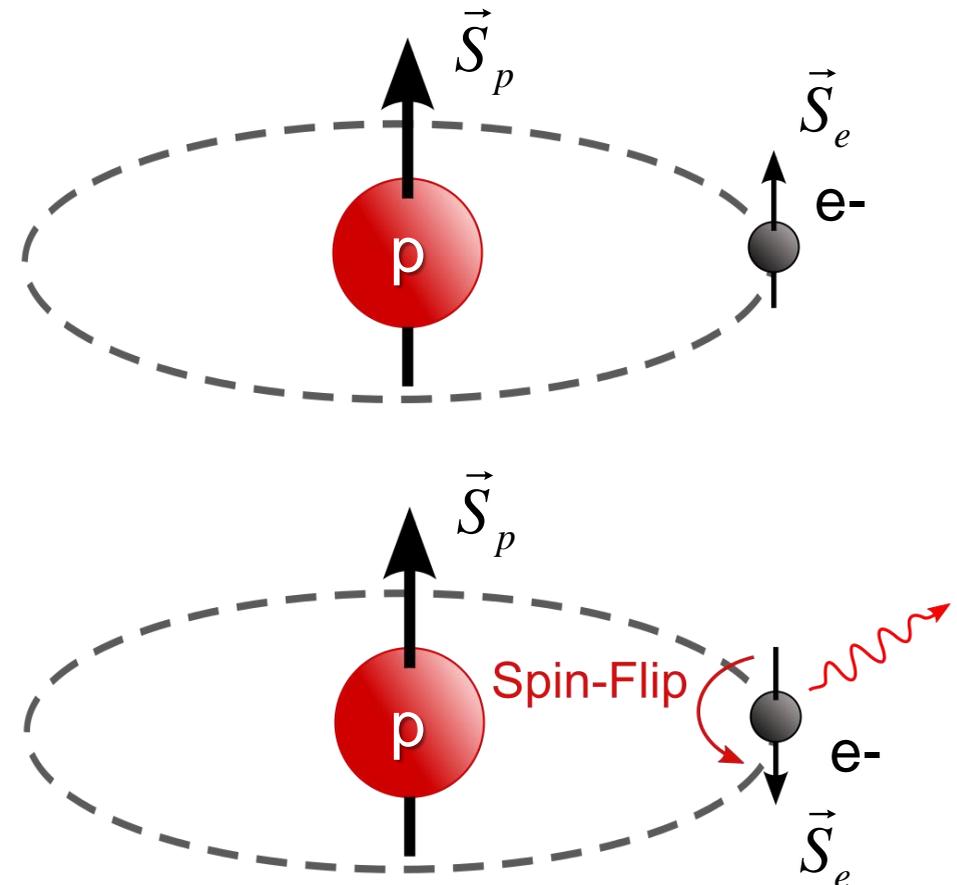
Hyperfeinstruktur von Wasserstoff

- **Hyperfeinstruktur** (HFS) atomarer Wasserstoff (Grundzustand 1S):
 - 2 Hyperfeinstruktur-Zustände: Spin-Orientierung Proton \leftrightarrow Elektron

- Kopplung von Gesamtdrehimpuls \mathbf{J} (Elektron) & Kernspins \mathbf{I} zu neuem **Gesamtdrehimpuls \mathbf{F}**

$$\vec{J} + \vec{I} = \vec{F}$$

- einfachstes Beispiel: H-Atom
parallele Ausrichtung $\uparrow\uparrow$
anti-parallele Ausrichtung $\uparrow\downarrow$
der Spins \vec{S}_p und \vec{S}_e
- Übergang zwischen HFS-Zuständen:
Spinflip des Elektrons (21 cm Welle)

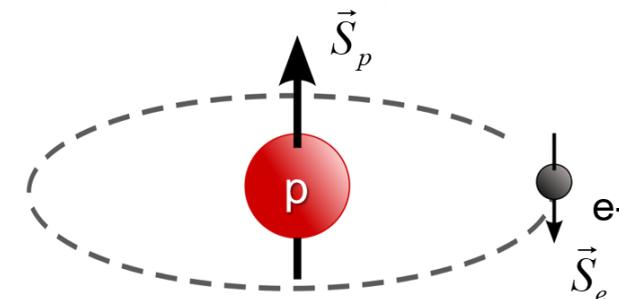
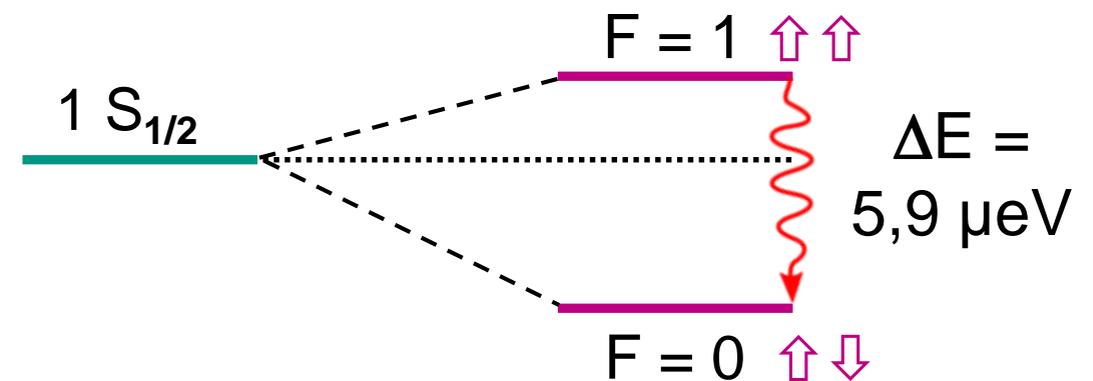
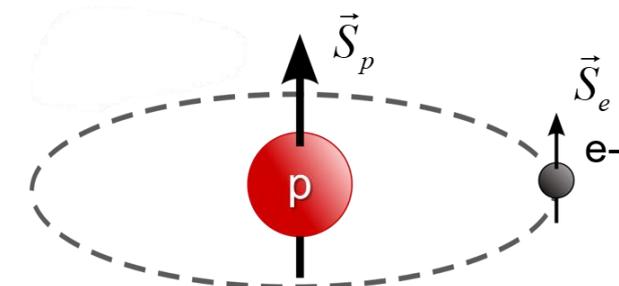


$$f = 1420 \text{ MHz} \quad \lambda = 21 \text{ cm}$$

Hyperfeinstruktur von Wasserstoff

- **Hyperfeinstruktur (HFS) atomarer Wasserstoff (Grundzustand 1S):**
 - 2 **Hyperfeinstruktur-Zustände F**: Spin-Orientierung Proton \leftrightarrow Elektron

- Spinflip-Übergänge des e- sind hochgradig **unterdrückt**
Dipol-Regel: $\Delta L = \pm 1$



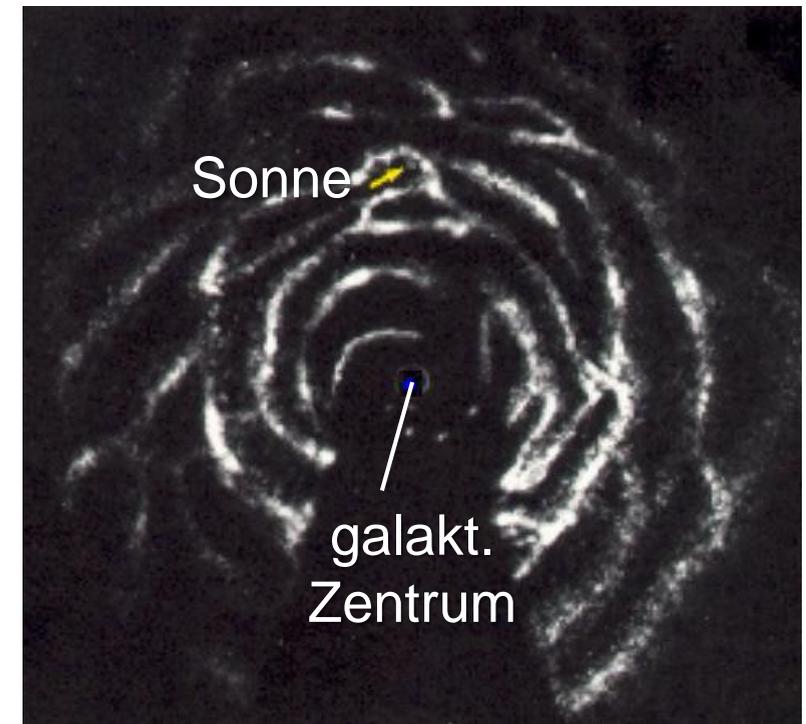
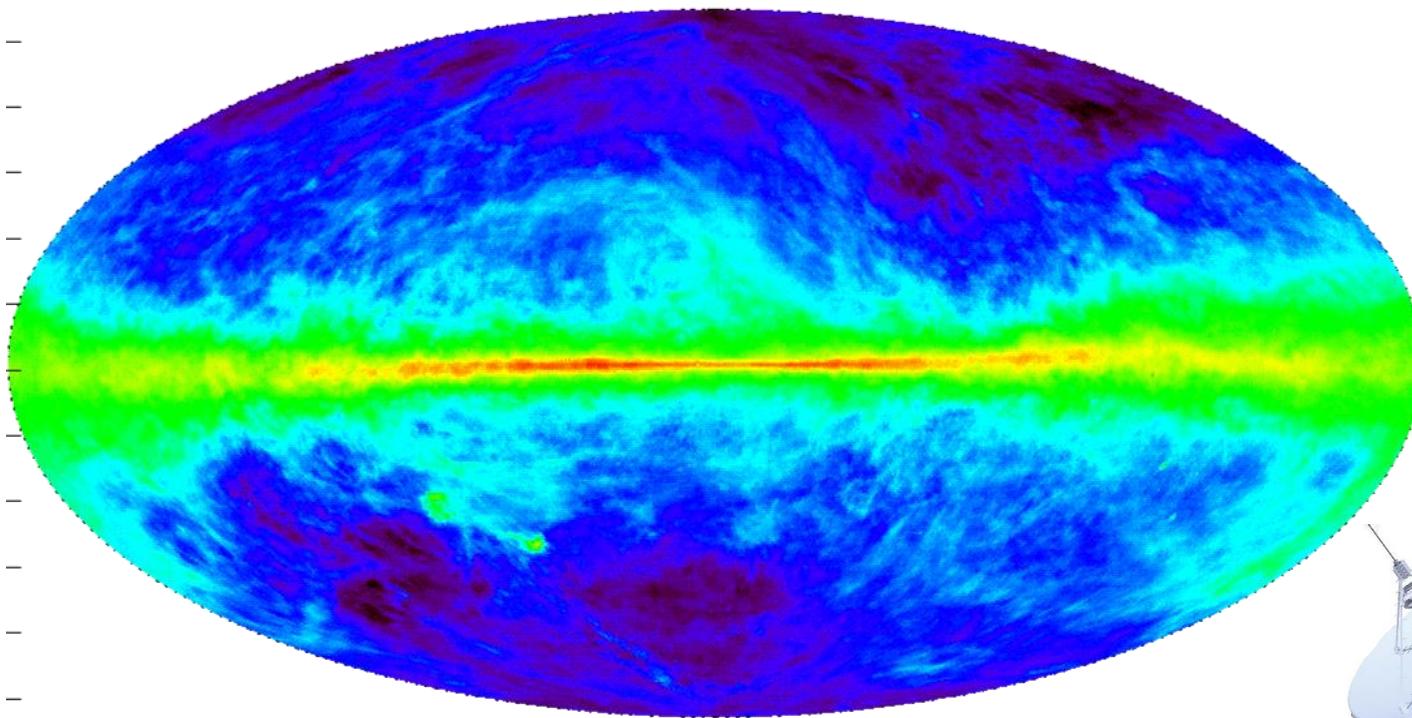
HFS-Übergang im H-Atom
mit extrem kleiner Übergangsrage:
 $R = 2,9 \cdot 10^{-15} \text{ s}^{-1}$

in astrophysikalischer Umgebung:
 $\tau \sim 10^7$ Jahre
 \Rightarrow extrem enge Linienbreite

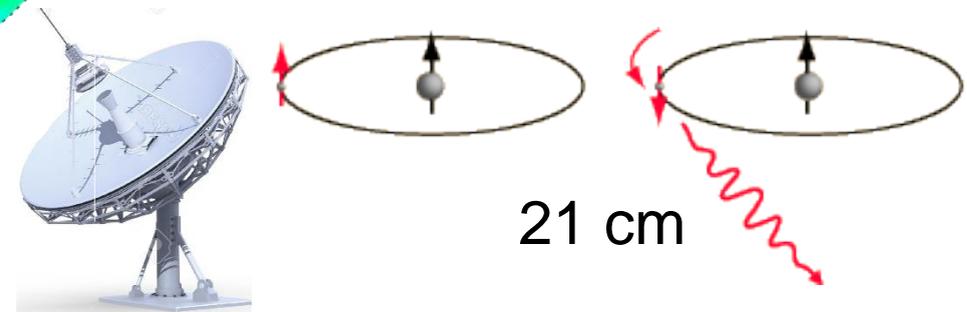
21 cm Linie in Radioastronomie

- **Hyperfeinstrukturübergänge** von atomarem Wasserstoff (21 cm Linie) spielen eine wichtige Rolle in der Radioastronomie (**HI Regionen**)

- Spiralstruktur unserer Galaxis
 - Rotationskurven von Galaxien
- } Doppler-Effekt



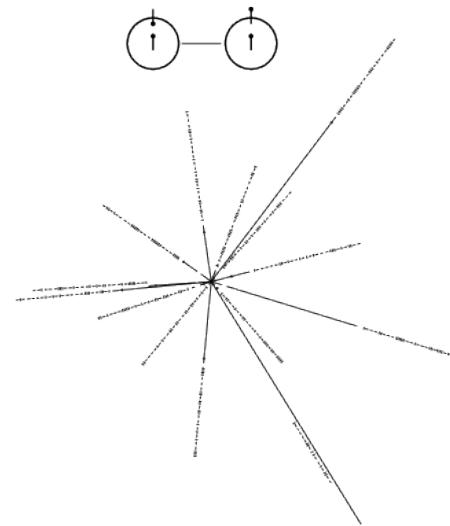
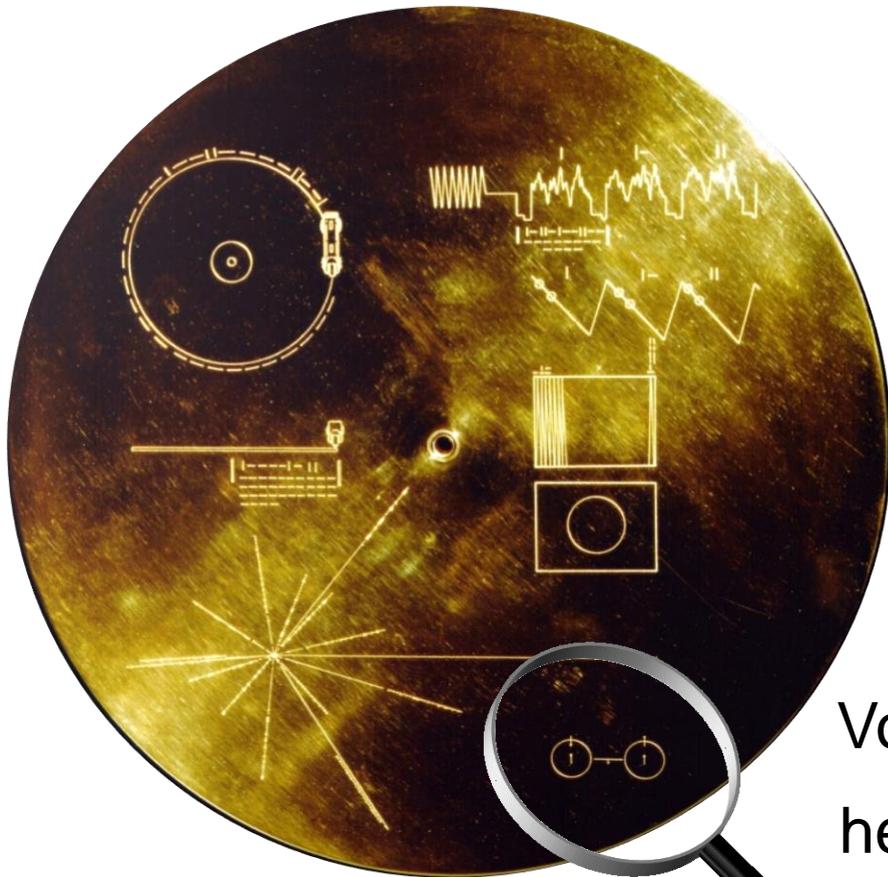
21 cm Bild von neutralen H-Atomen in Galaxis



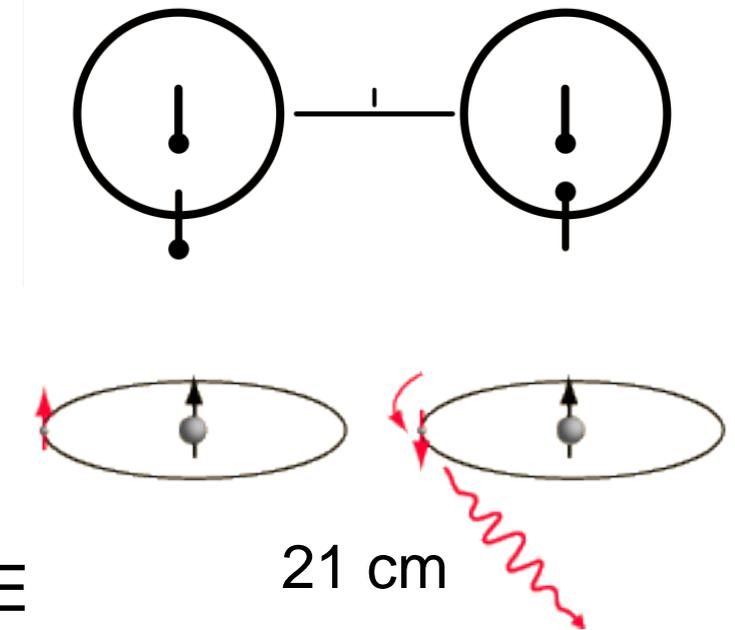
HFS von Wasserstoff on „Grand Tour“

■ Hyperfeinstruktur von atomarem Wasserstoff einer der „Messenger“ der Menschheit

- Voyager-Sonden (Golden Record) zeigen den Hyperfein-Übergang von neutralem H-Atom



Voyager 1 (2) Missionen
heute in $d = 145$ (121) AE



Proton als einfachster Kern

- **Proton** als Fermion mit Spin $S = \frac{1}{2}$
 - definiert über seine Masse m_p die Einheit des **Kernmagneton** μ_N

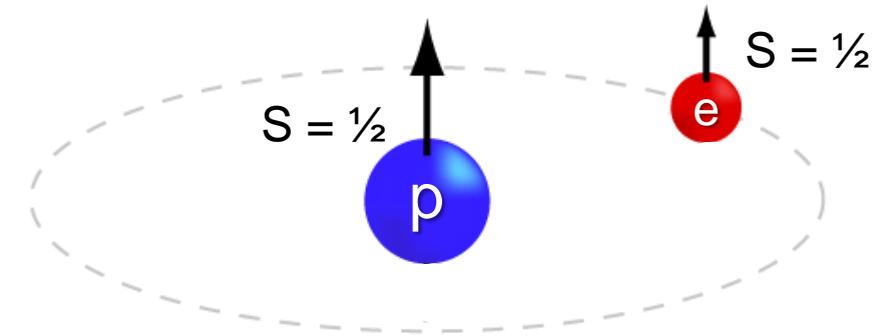
$$\mu_N = \frac{e}{2m_p} \cdot \hbar$$

$$\begin{aligned} \mu_N &= 3,152\,451\,2250\,(15) \cdot 10^{-8} \text{ eV/T} \\ &= 5,050\,783\,699\,(31) \cdot 10^{-27} \text{ J/T} \end{aligned}$$

- Kernmagneton ist $\sim 2000 \times$ kleiner als Bohrsches Magneton!

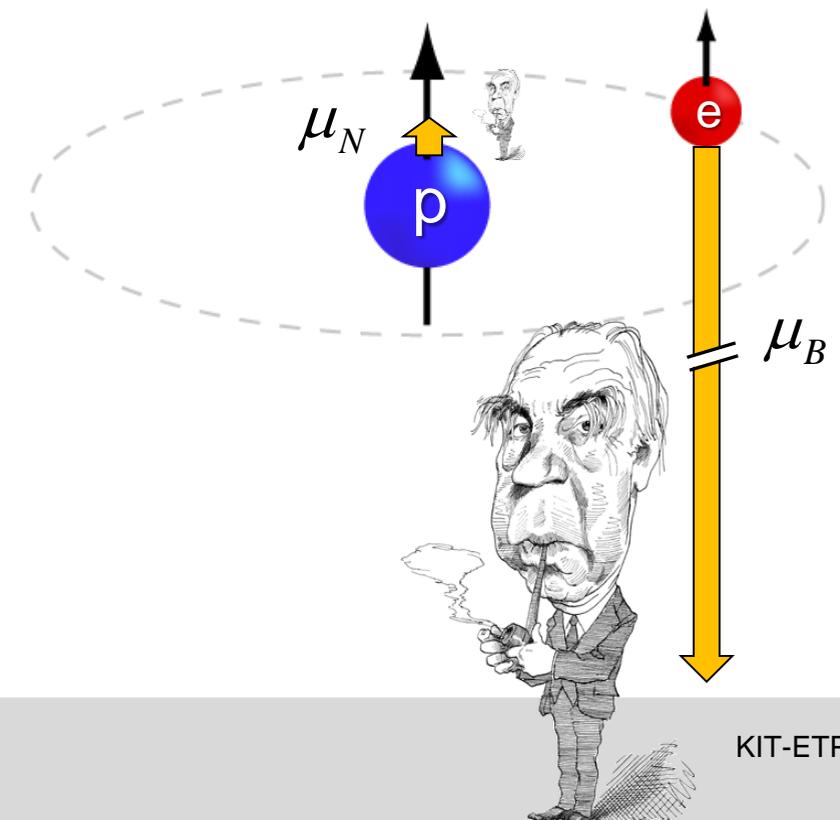
- Magnetisches Kernmoment μ_I :

$$\vec{\mu}_I \sim \mu_N \cdot \vec{I}$$



$$m_p = 938,272\,0813(58) \text{ MeV}$$

$$m_e = 0,510\,998\,9461(31) \text{ MeV}$$

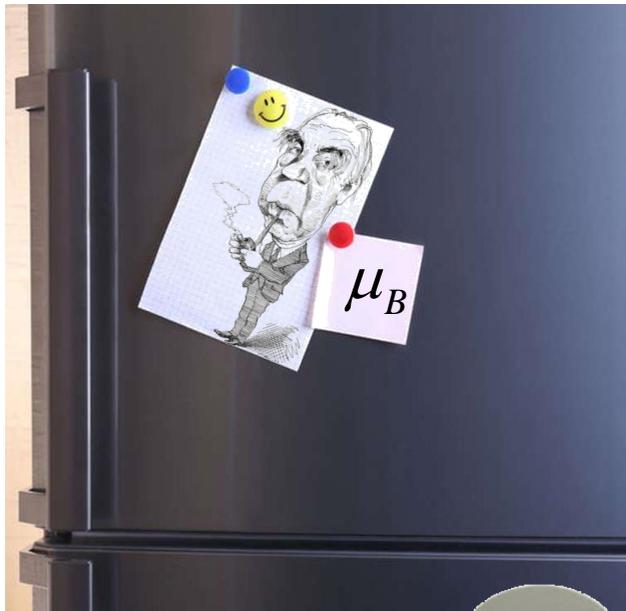
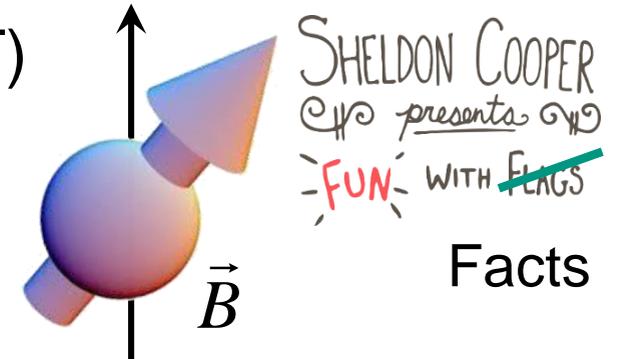


■ Welche B-Feldstärke benötigt man zur Polarisation von Kernen ?

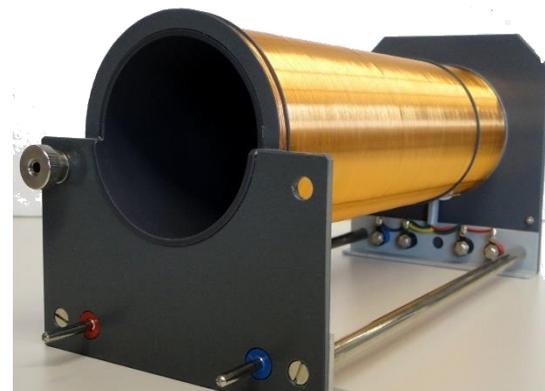
A) Kühlschrankmagnet reicht vollkommen aus (1 mT)

B) Normalleitende Zylinderspule (bis 100 mT)

C) Supraleitender Hochfeld-Solenoid (10 T)



A



B



C

Nukleonen: g-Faktor

- Magnetisches Dipol-Moment des **Protons**:

$$\vec{\mu}_p = g_p \cdot \mu_N \cdot \vec{S}_p$$

$$g_p = 5,585\,694\,702(17)$$

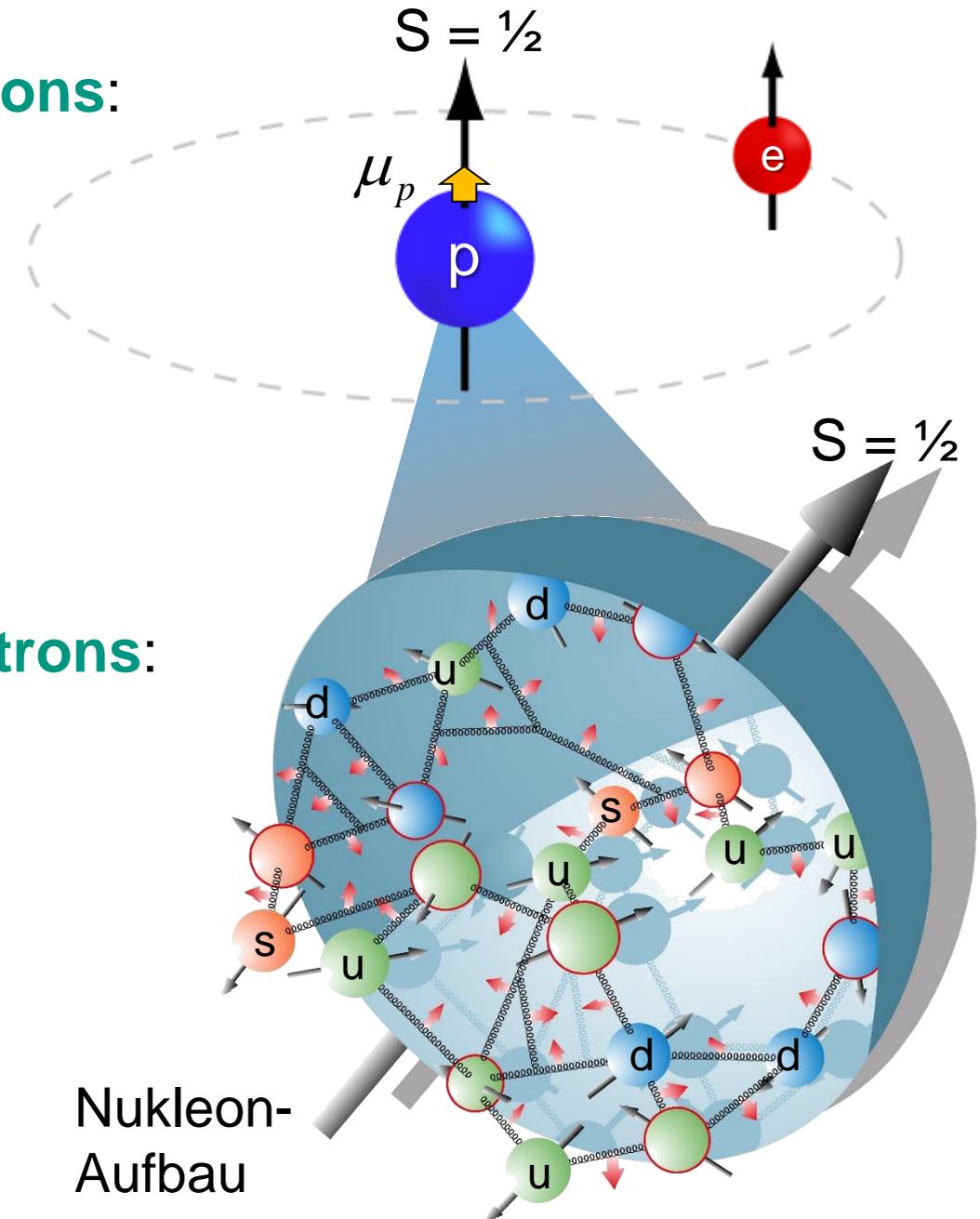
$$\mu_p = +2,79 \mu_N$$

- Magnetisches Dipol-Moment des **Neutrons**:

$$\vec{\mu}_n = g_n \cdot \mu_N \cdot \vec{S}_n$$

$$g_n = -3,826\,085\,45$$

⇒ komplexer Aufbau des Nukleons aus **Partonen** (Valenzquarks, Seequarks und Gluonen), s. Mod. Exp. Phys. III



- **Kernspin-Quantenzahl I** ist wichtige Eigenschaft von Kernen
 - Kernspin entsteht aus der Kopplung der Bahndrehimpulse & Spins der einzelnen Nukleonen (**Protonen, Neutronen**)

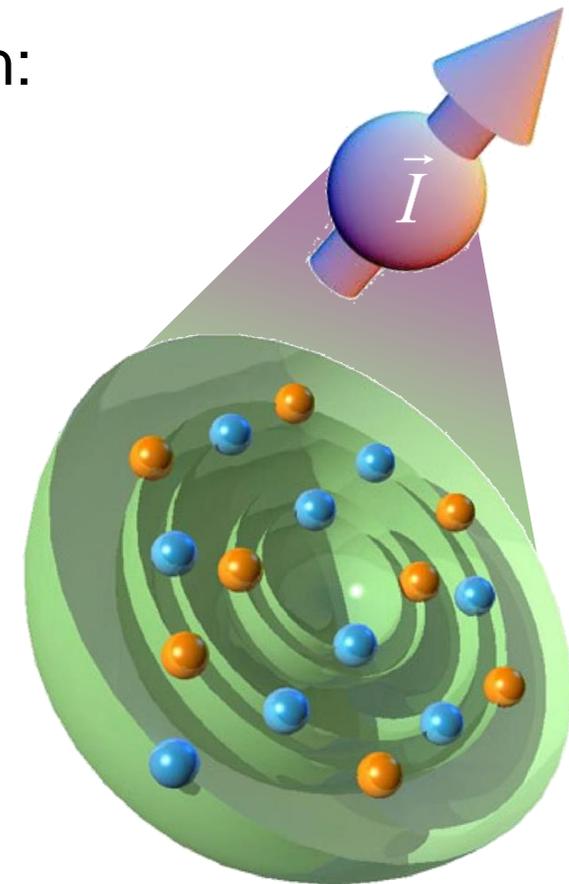
- Kernspin I mit „üblichen“ Drehimpuls-Relationen:

$$|\vec{I}| = \sqrt{I \cdot (I + 1)}$$

$$\vec{I}_z = m_I \cdot \hbar \quad \text{mit } m_I = I, I - 1, \dots, -I$$

- **Kernspinzahl I ist halb- oder ganzzahlig:**

$$I = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \dots$$



Kernspin – allgemeine Eigenschaften

- **Kernspin I** wichtige Eigenschaft von Kernen

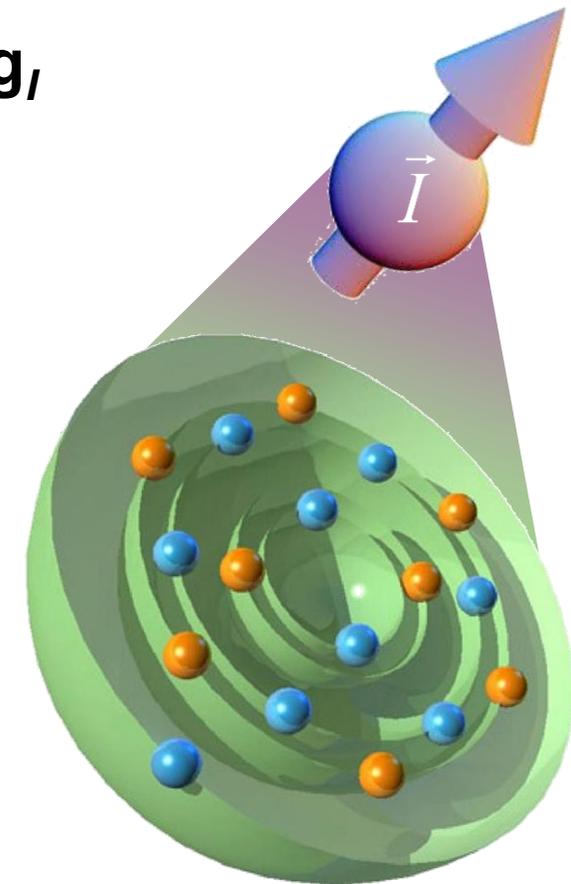
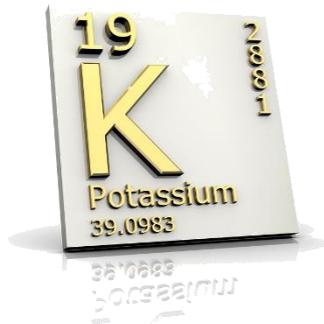
- entsteht aus der Kopplung der Bahndrehimpulse und Spins der einzelnen Nukleonen (**Protonen, Neutronen**)

- magnetische Momente μ_I und Lande-Faktoren g_I von Kernen sind i.a. nicht-trivial und müssen experimentell bestimmt werden

- Beispiel: **Kalium-40**

$$\mu_I(^{40}\text{K}) = -1,29\mu_N$$

$$I = 4 \quad g_I = -0,32$$

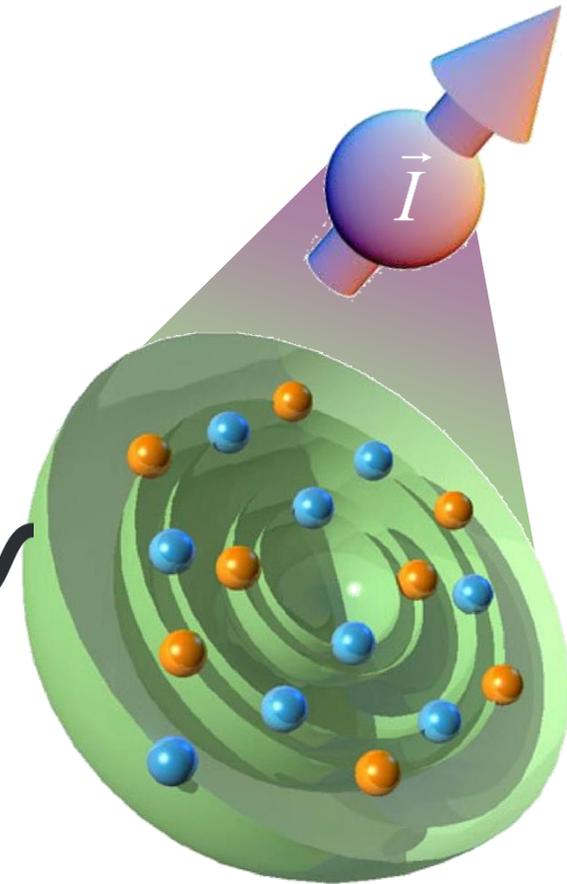


Kernspin – Ausblick auf Master ATP

- **Kernspin I** wichtige Eigenschaft von Kernen
 - Kerne lassen sich in einem externen Feld & bei extrem niedrigen Temperaturen polarisieren (s. Kap. 11.3 Wu-Experiment)
- Kernspin I spielt eine wichtige Rolle z.B. bei direkter Suche nach Dunkler Materie
 - Teilchen koppeln an den **Kernspin**



Xenon als Target



Kernspin – Eigenschaften

■ Kernspin I wichtige Eigenschaft von Kernen

- Kerne sind **Vielteilchensysteme** bestehend aus einer großen Anzahl an Nukleonen (Protonen & Neutronen)



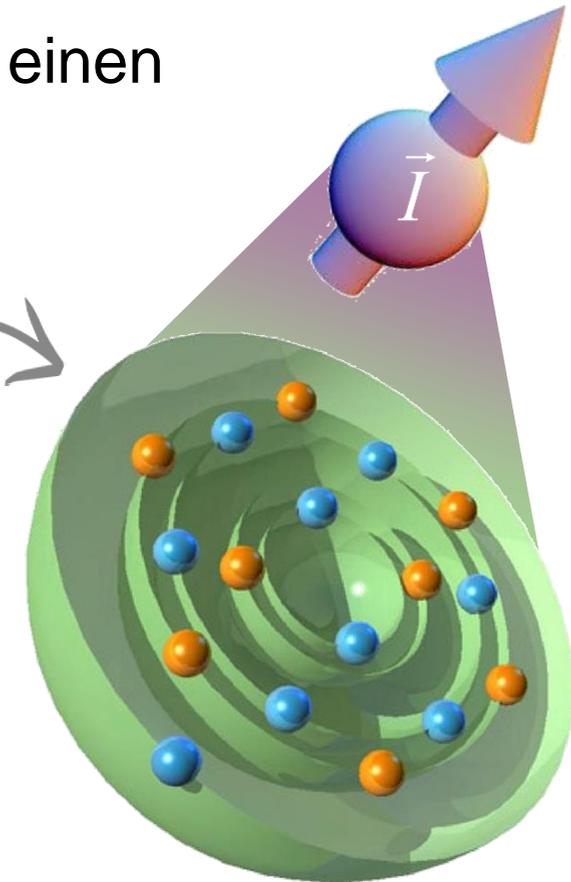
■ Kernspin I – welche Isotope besitzen eigentlich einen endlichen Spin? Beispiel: Xenon

Xe-129:	1/2
Xe-130:	0
Xe-131:	3/2
Xe-132:	0
Xe-133:	3/2
Xe-134:	0

innere Struktur
des Kerns ist
entscheidend

gerade

ungerade



gerade p-Anzahl: $Z = 54$
gerade/ungerade n-Anzahl

- **Nukleonen** in einem Kern sind in Kernschalen angeordnet:

Schalenmodell des Kerns (vgl. Kap. 10.4)

- jedes Nukleon mit Quantenzahlen **Bahndrehimpuls l** und **Spin s**

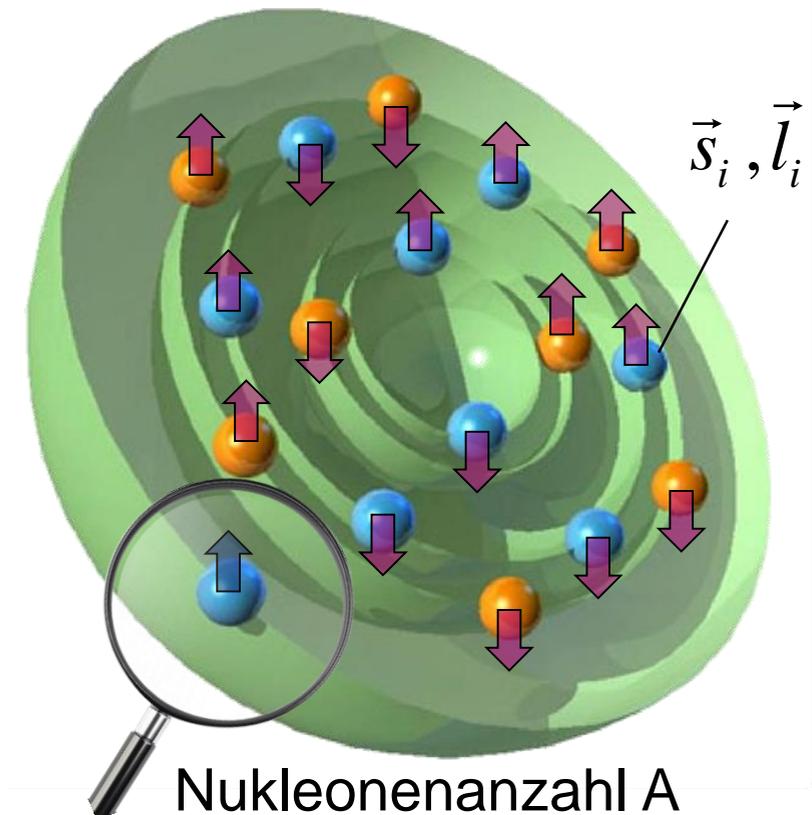
- **Kernspin I** aus **Gesamtsumme aller Drehimpulse** der A

Nukleonen im Kern:

$$\vec{I} = \sum_{i=1}^A (\vec{s}_i + \vec{l}_i)$$



Kern-
Schalen-
Modell



- 2 Nukleonen (pp, nn) bilden Paare mit antiparallem Drehimpuls (**Paarungsterm** in Bethe-Weizsäcker Massenformel, s. Kap. 10.4)

Kernspin – gg/ug/uu Kerne

- Kernspin abhängig von gerade/ungerade Konfiguration der Nukleonen:
 ⇒ **gg/uu/ug-Kerne**

A = gerade

- **gg** (gerade, gerade) **Kerne** wie He-4, C-12, Xe-134:
 ⇒ **kein** Kernspin ($|\vec{I}| = 0$)

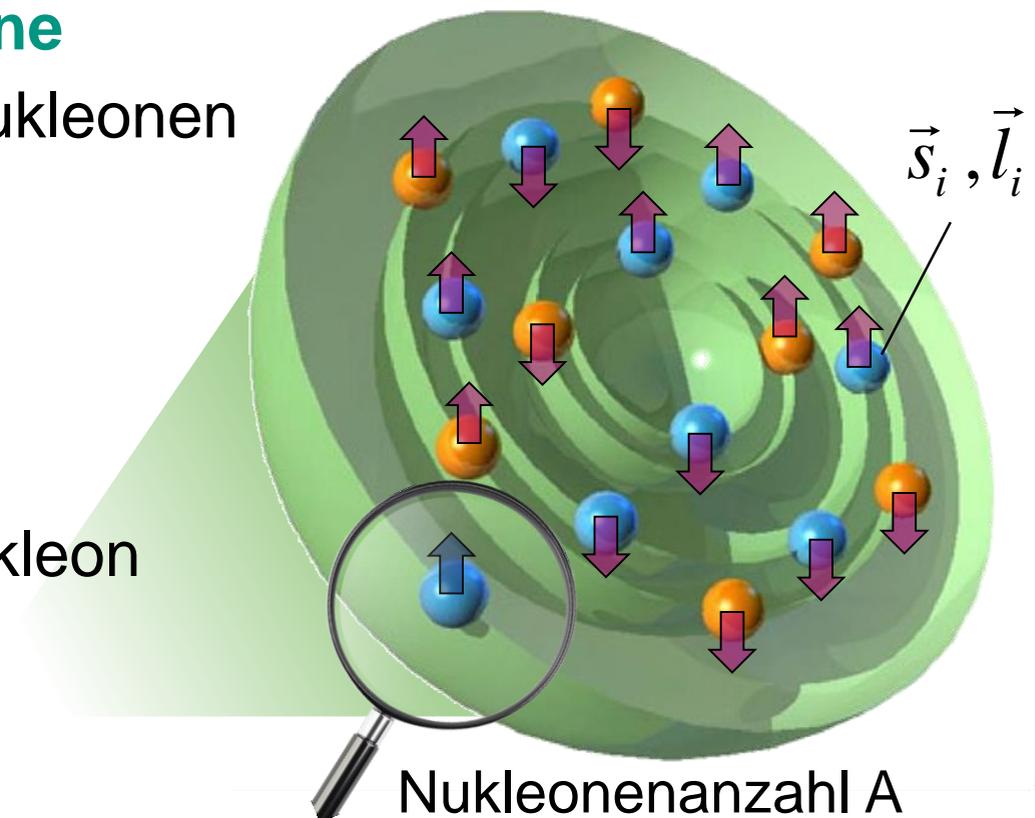
- **uu** (ungerade, ungerade) **Kerne**
 es verbleiben 2 ungepaarte Nukleonen
 ⇒ **ganzzahliger** Kernspin

$$\vec{I} = 0 ({}^{206}_{81}Tl), 1 ({}^2_1D), \dots, 8 ({}^{90}_{41}Nb)$$

A = ungerade

- **ug** (ungerade, gerade) **Kerne**
 es verbleibt 1 ungepaartes Nukleon
 ⇒ **halbzahliger** Kernspin

$$\vec{I} = 1/2 ({}^1_1H), \dots, 9/2 ({}^{209}_{83}Bi)$$



Kernspin - Einstellungen

■ Diskrete Einstellungen des Kernspins I relativ zu B-Feld entlang z-Achse

- magnet. Moment des Kerns:

$$\vec{\mu}_I = g_I \cdot \frac{\mu_N}{\hbar} \cdot \vec{I}$$

|
g-Faktor des Kerns

$$|\vec{I}| = \sqrt{I \cdot (I + 1)}$$

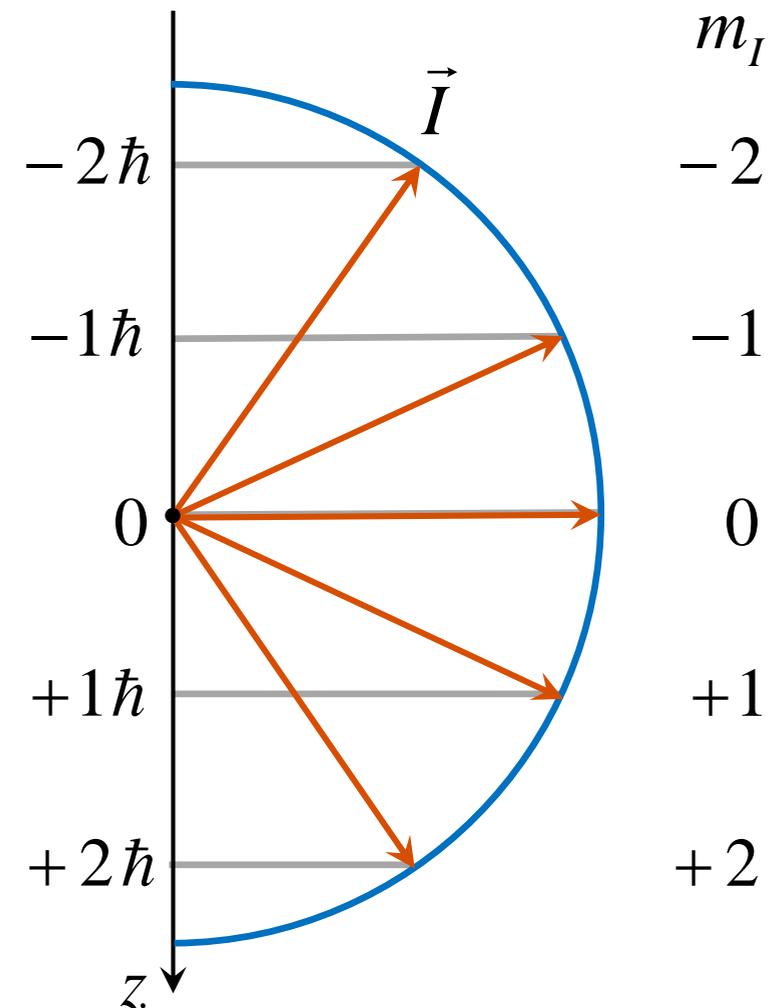
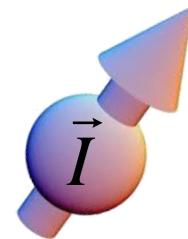
- messbar nur **z-Komponente**
entlang der Vorzugs- /
Quantisierungs-Achse

$$(\vec{\mu}_I)_z = g_I \cdot \mu_N \cdot m_I$$

mit $m_I = I, I-1, \dots, -I$

Kernspin - Messbare Komponenten

$$I = 2$$

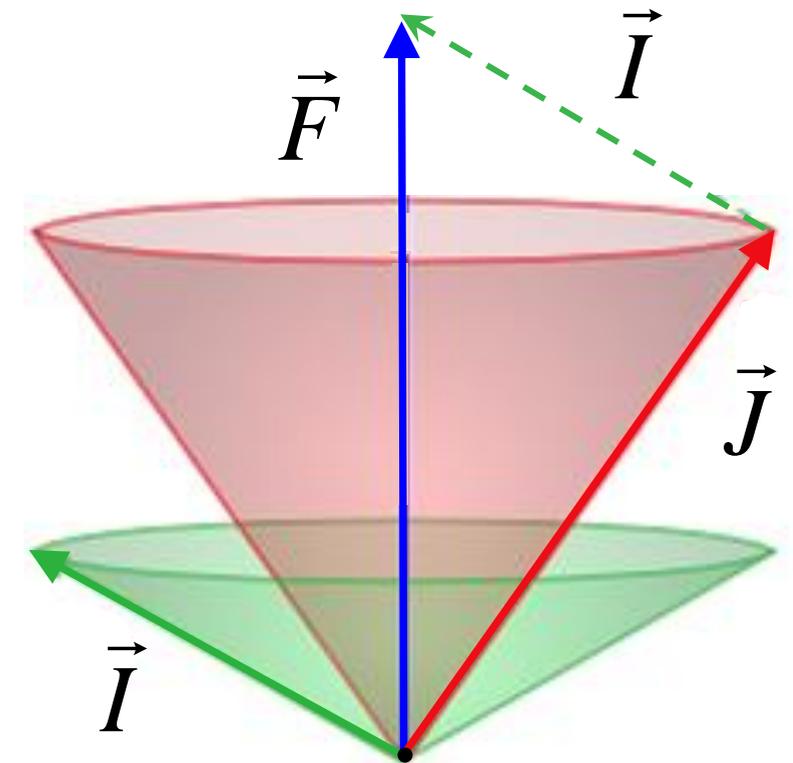


Kopplung von Kernspin und J der Hülle

- **Hyperfeinstruktur** durch Kopplung des Gesamtdrehimpulses \vec{J} der Elektronen und des Kernspins \vec{I} zum **Gesamtdrehimpuls \vec{F} (HFS-Zustand)**

$$\vec{J} + \vec{I} = \vec{F}$$

- mit HFS-Quantenzahl
 $F = J + I, (J+I) - 1, \dots, J - I$
- Präzession von Kernspin \vec{I} & Gesamtdreh-Drehimpuls \vec{J} der Hülle um den raumfesten Vektor \vec{F}

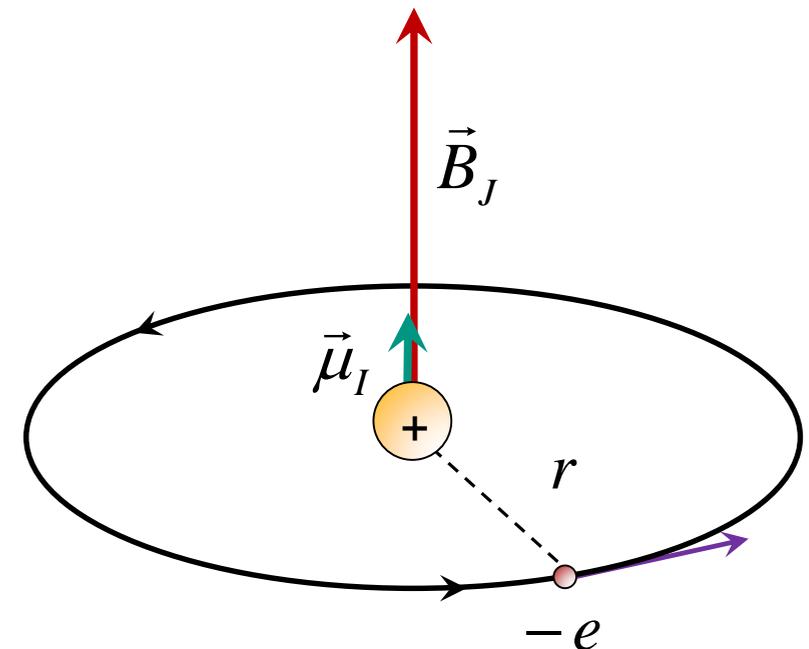


- Analog zu Betrachtungen bei der Feinstruktur (FS):
 - am Ort des Protons (Kerns) existiert ein **Magnetfeld \vec{B}_J** durch die Hüllenelektronen, d.h. der Kernspin I (bzw. Kernmoment μ_I) richtet sich aus durch den Bahn-Spin- Magnetismus der Elektronen

- Energie der **Hyperfein-Wechselwirkung**

$$V_{HFS} = -\vec{\mu}_I \cdot \vec{B}_J$$

- $V_{HFS} \sim (1/1000) \cdot V_{FS}$ [da $\mu(p) \ll \mu(e)$]



Hyperfein-Aufspaltung

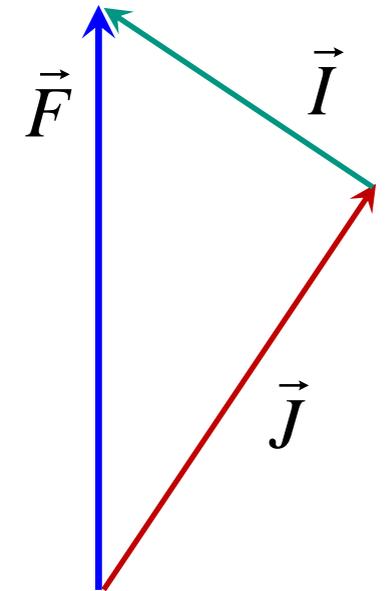
■ Hyperfeinstruktur-Aufspaltung V_{HFS} :

- Energieaufspaltung durch Einstellung des Kernspins I im Feld B_J der Hüllenelektronen:

$$V_{HFS} = g_I \cdot \mu_N \cdot B_J \cdot \frac{F \cdot (F + 1) - [J \cdot (J + 1) + I \cdot (I + 1)]}{2 \cdot \sqrt{J \cdot (J + 1)}}$$

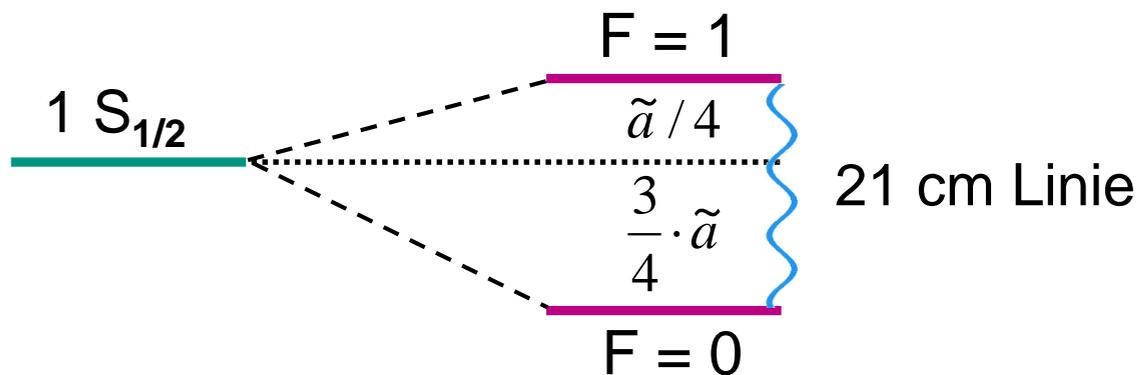
$$V_{HFS} = \frac{\tilde{a}}{2} \cdot [F \cdot (F + 1) - I \cdot (I + 1) - J \cdot (J + 1)]$$

$$\tilde{a} = \underbrace{g_I \cdot \mu_N}_{\text{Kern}} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{J \cdot (J + 1)}} \cdot B_J}_{\text{Elektronenhülle}}$$



Hyperfein-Wechselwirkung

- $J = 1/2$ - Zustände ($1S_{1/2}, 2S_{1/2}, 2P_{1/2}, \dots$) spalten auf in **Hyperfein-Dubletts**

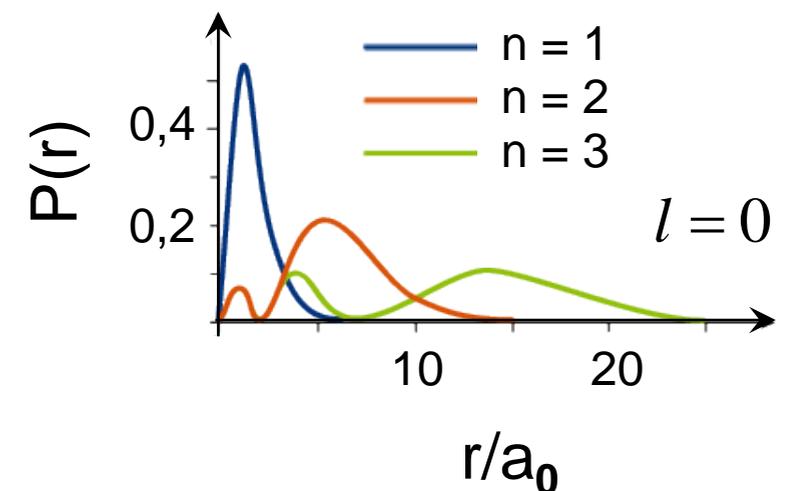
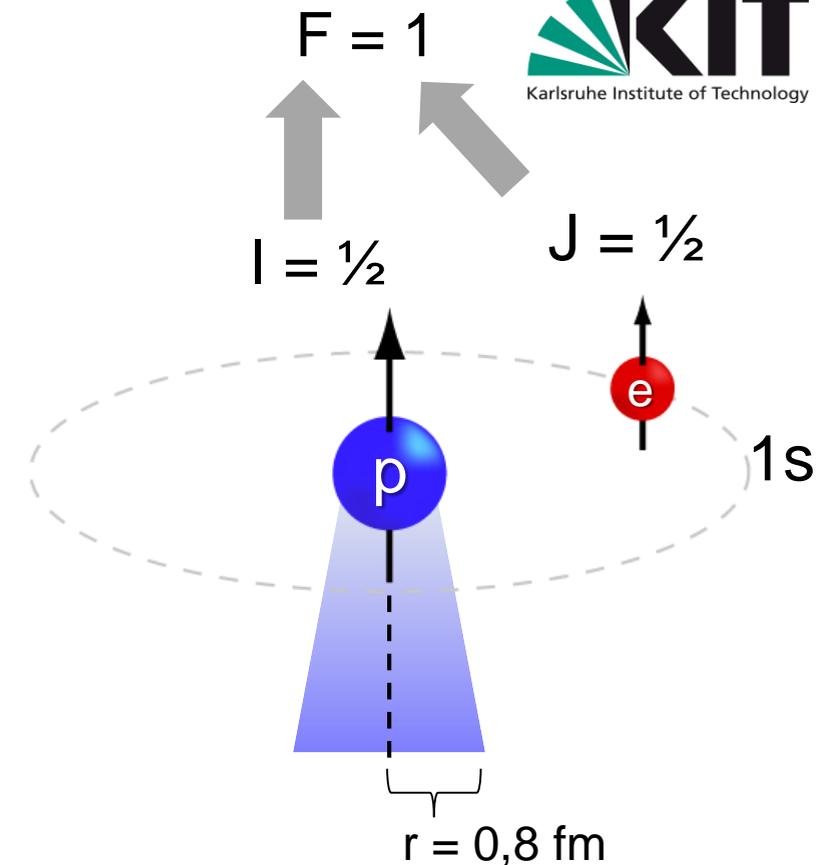


- s-Orbitale:

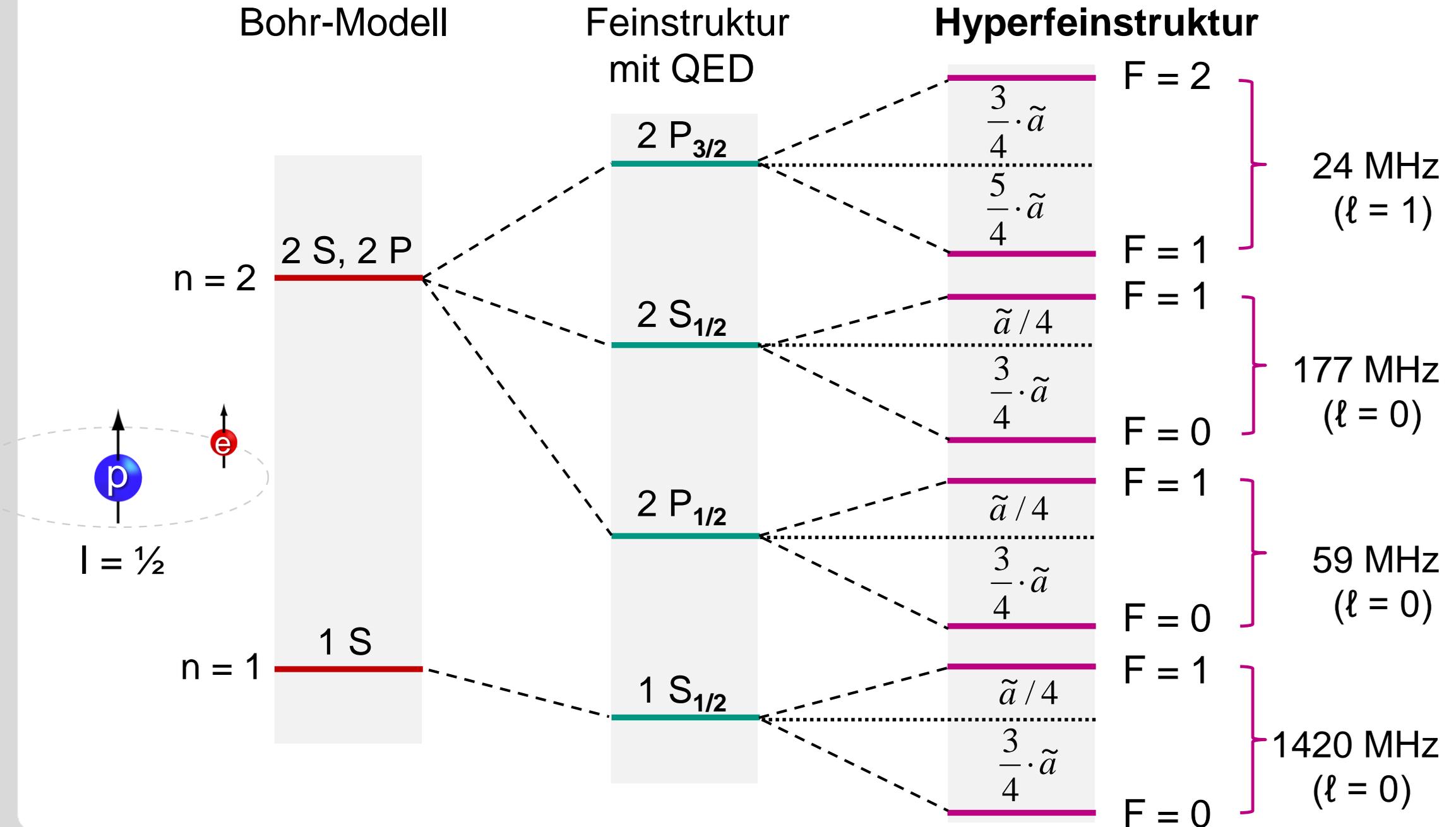
⇒ starke Aufspaltung, da e- Radialfunktion am Kern $|R(r \sim 0, n, l = 0)|^2 \neq 0$

- p,d,...-Orbitale:

⇒ kleine Aufspaltung, da e- Radialfunktion am Kern $|R(r \sim 0, n, l = 1, 2, \dots)|^2 = 0$



Hyperfein-Wechselwirkung: H-Atom



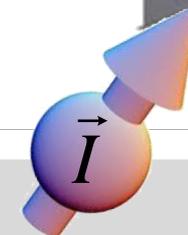
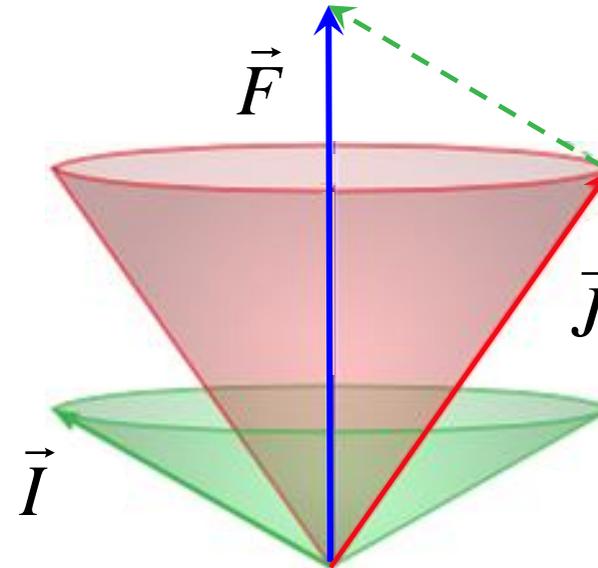
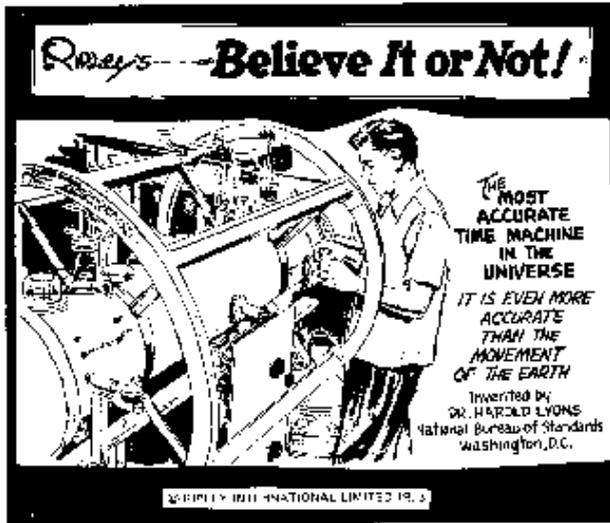
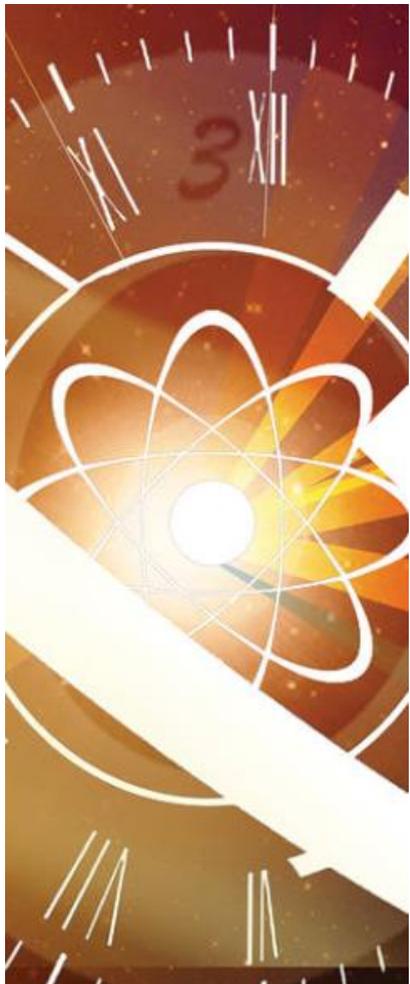
Hyperfein-Wechselwirkung: Anwendung

- gibt es auch Anwendungen für die Hyperfein-Wechselwirkung?

7,2 Mrd. €

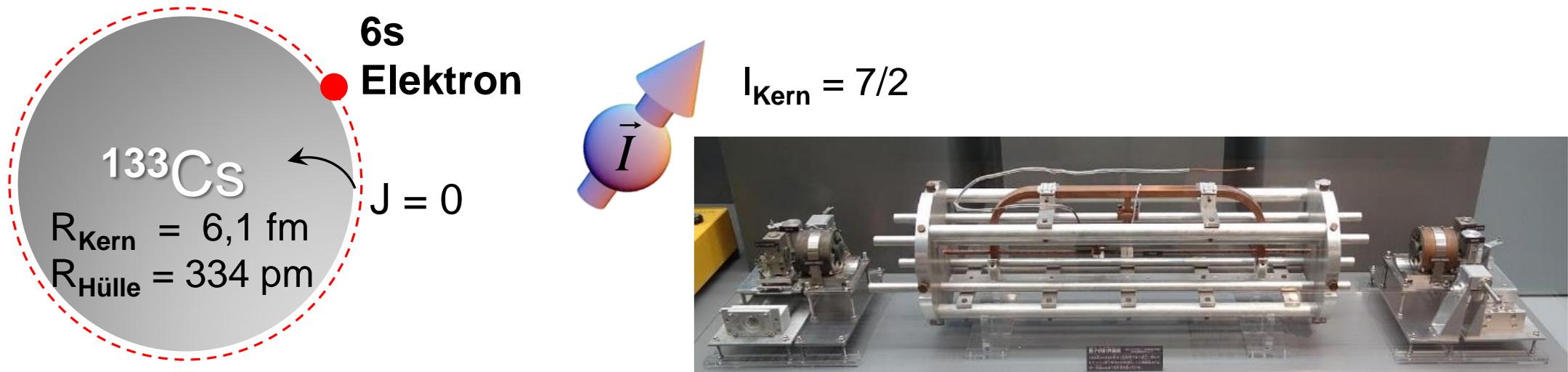
Atomuhren: GPS/Galileo 7 Mrd. €

Kernspin-Resonanz



Hyperfein-Wechselwirkung - Anwendung

- **Atomuhren:** wichtiges Anwendungsgebiet der Hyperfeinstruktur
 - Atomuhren auf Basis von Cäsium-133 nutzen den Hyperfeinstruktur-Übergang $F=3 \leftrightarrow F=4$ im Mikrowellenbereich ($\Delta E = 38 \mu\text{eV}$)



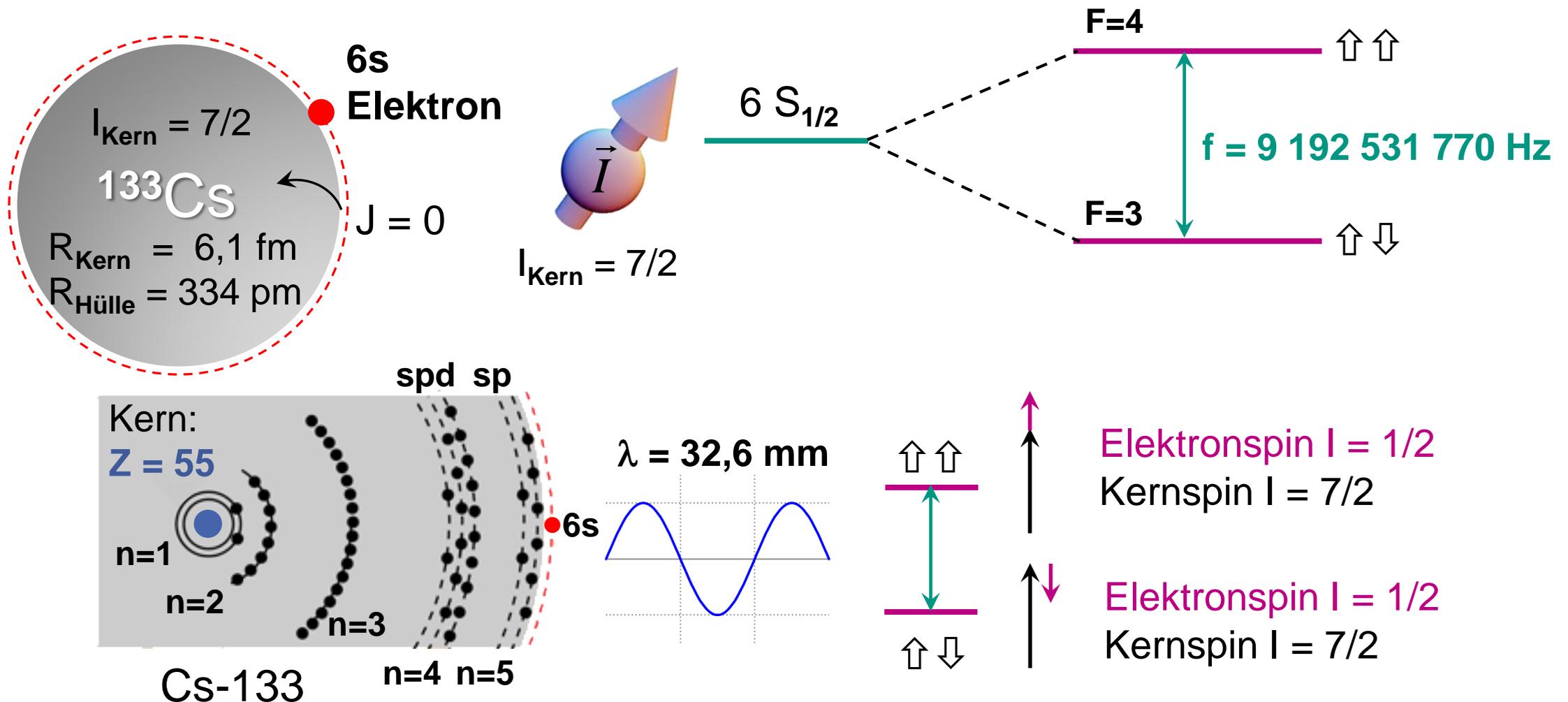
Definition der Sekunde

1 Sekunde = 9 192 631 770-fache der Perioden-Dauer der Mikrowellen-Strahlung aus dem Hyperfeinstruktur-Übergang $F=3 \leftrightarrow F=4$ des Grundzustands des Isotops **Cäsium-133**



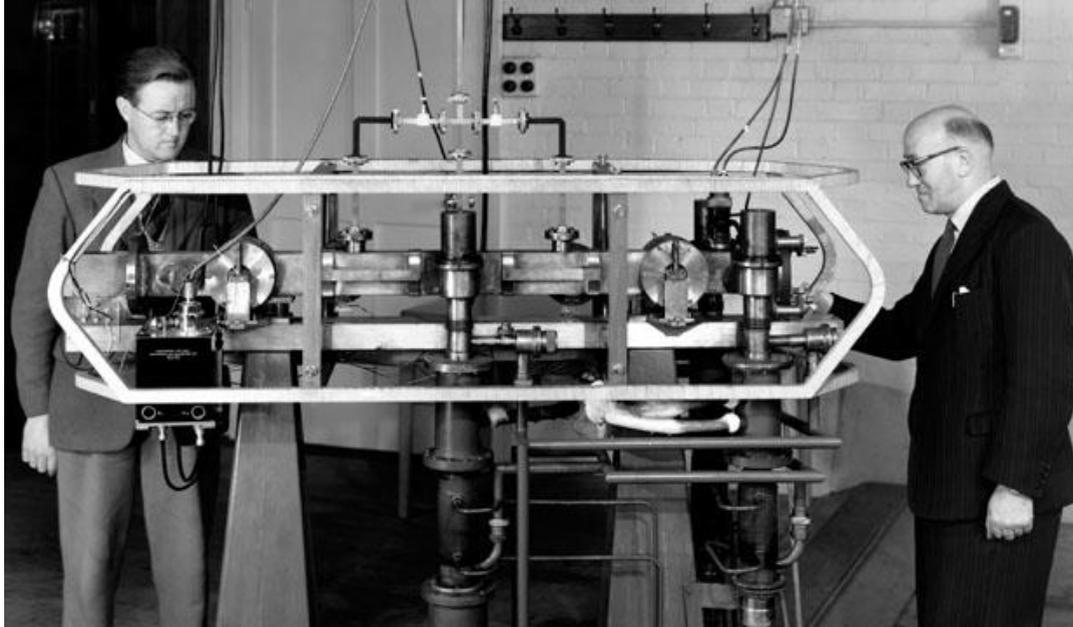
Hyperfein-Wechselwirkung - Anwendung

- der Hyperfein-Übergang $F=3 \rightarrow F=4$ bei $f_0 = 9,2 \text{ GHz}$ und $\lambda_0 = 32,6 \text{ mm}$ ideal für den Einsatz von Hohlraumleitern für die Zuleitung von MW (Mikrowellen)



Hyperfein-Wechselwirkung - Anwendung

■ Metrologie: Entwicklung von immer präziseren **Atomuhren**

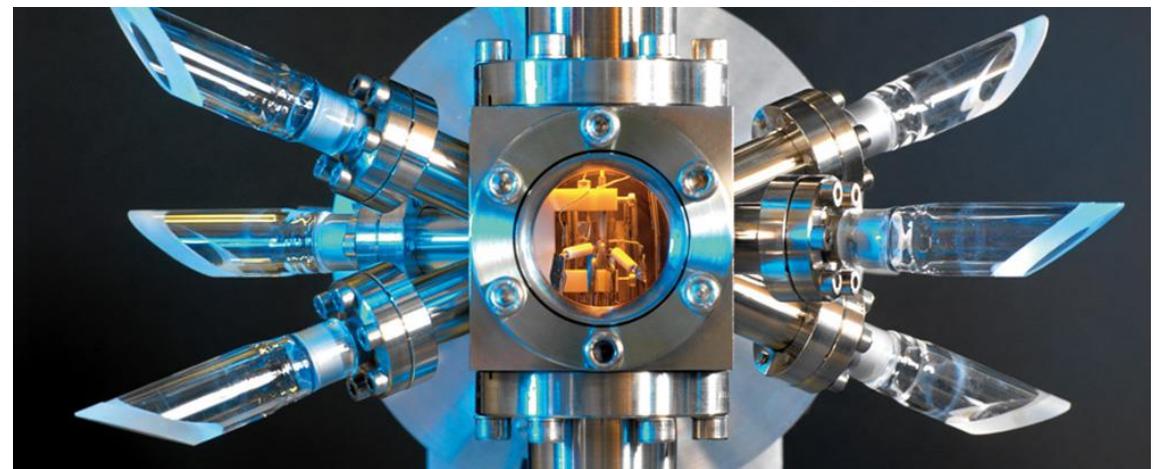


1955: Louis Essen und Jack Perry mit der ersten Cs-133 Atomuhr am National Physical Laboratory (UK) – die Geburt der „atomaren Sekunde“

(NPL in GB, PTB in D, NIST in USA)



2015: am NPL wird die neue präzise Cäsium-Fontänenuhr CsF3 in Betrieb genommen

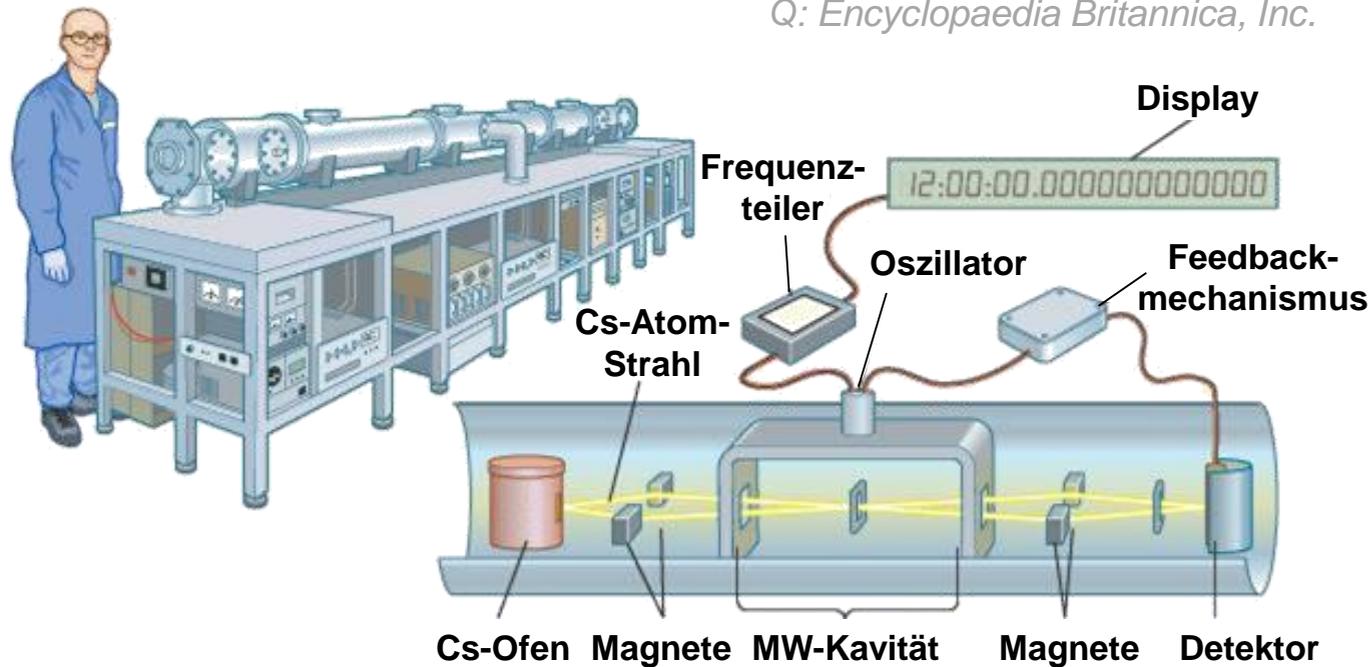


Hyperfein-Wechselwirkung - Anwendung

- Aufbau heutiger ultra-präziser **Atomuhren**

1990: Aufbau klassischer Cäsium-Uhr

Q: Encyclopaedia Britannica, Inc.



2009: Cäsium-Fontänen-Uhren
CSF1 und CSF2 an der PTB
Unsicherheit $< 4 \times 10^{-16}$ (CSF-2)



Quantentheorien im Wettstreit 2019

