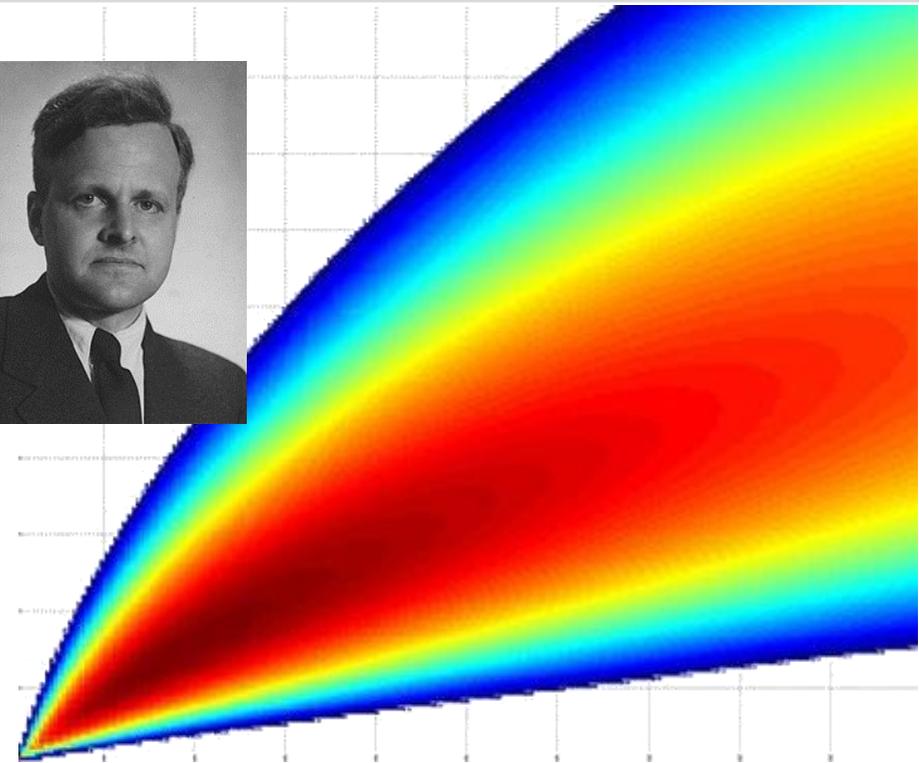


Atome & Kerne

Sommersemester 2019

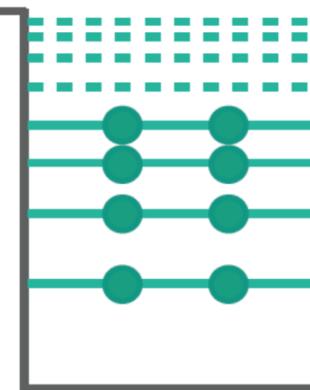
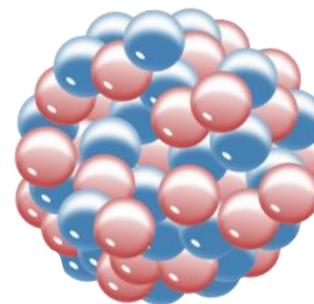
Vorlesung # 19, 02.07.19



Guido Drexlin, Institut für Experimentelle Teilchenphysik, Fakultät für Physik

Kerne

- Kernmodelle:
 - Überblick & Aufgaben
- Bindungsenergien von Kernen
- Tröpfchenmodell:
 - Terme und Kernmassen
- Fermigas-Modell: Einführung

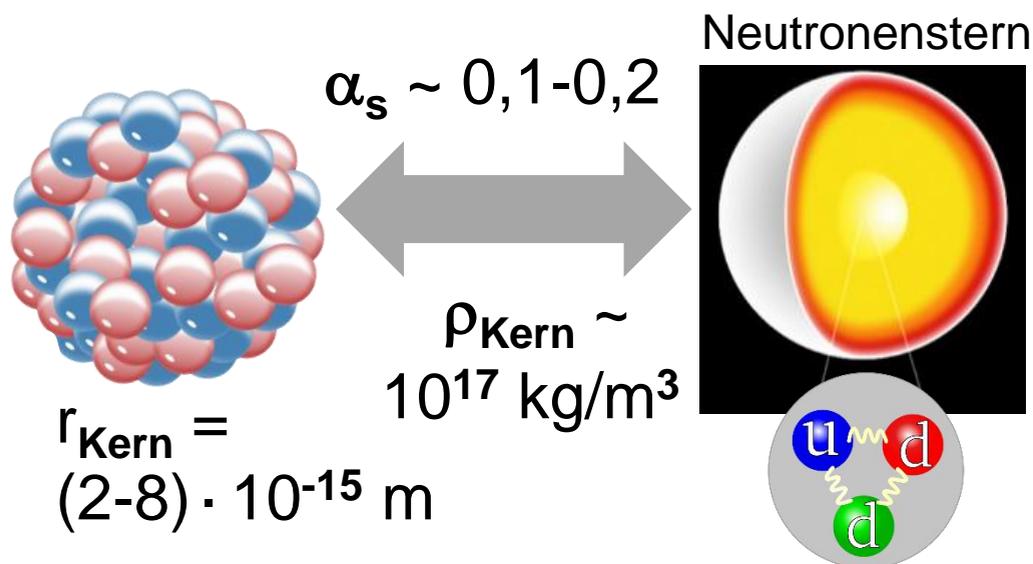


Kerne - Eigenschaften



- Kerne: gebundene Vielteilchensysteme (**starke Kernkraft**)

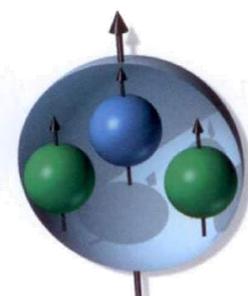
■ Kernmaterie:



■ Spin-Eigenschaften:

- Spin spielt sehr wichtige Rolle in der Kernphysik & Prozessen der starken Wechselwirkung

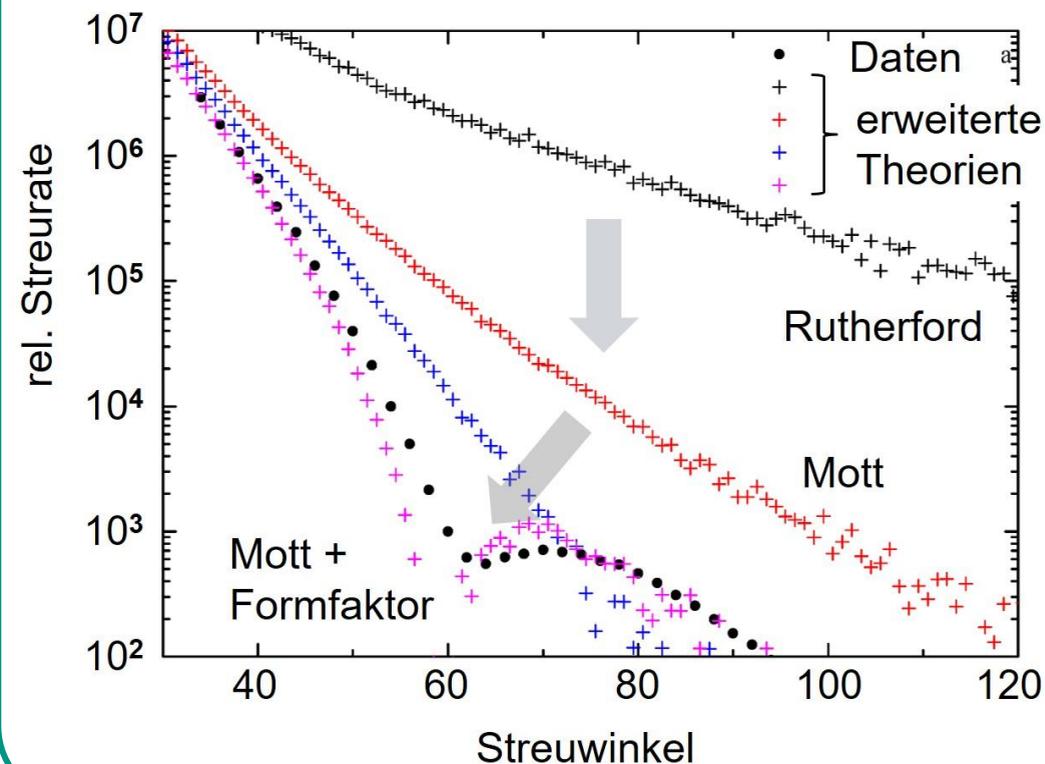
$$S = 3/2$$



Δ -Resonanz

■ Streu-Querschnitte:

- von punktförmigen Streuzentren zur Messung von **Ladungsverteilungen** mit $S = \frac{1}{2}$ Teilchen



Formfaktoren & Ladungsverteilungen

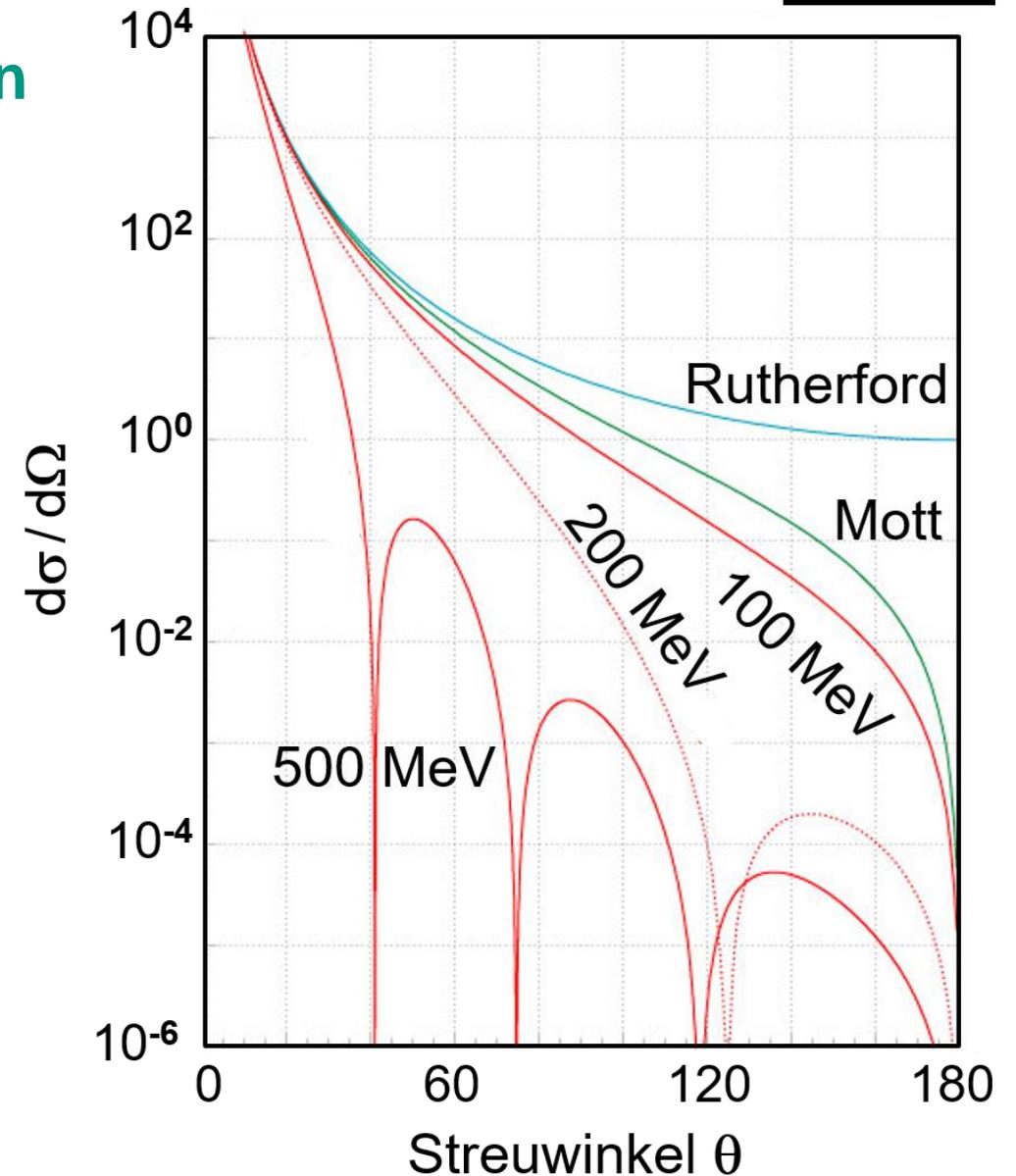
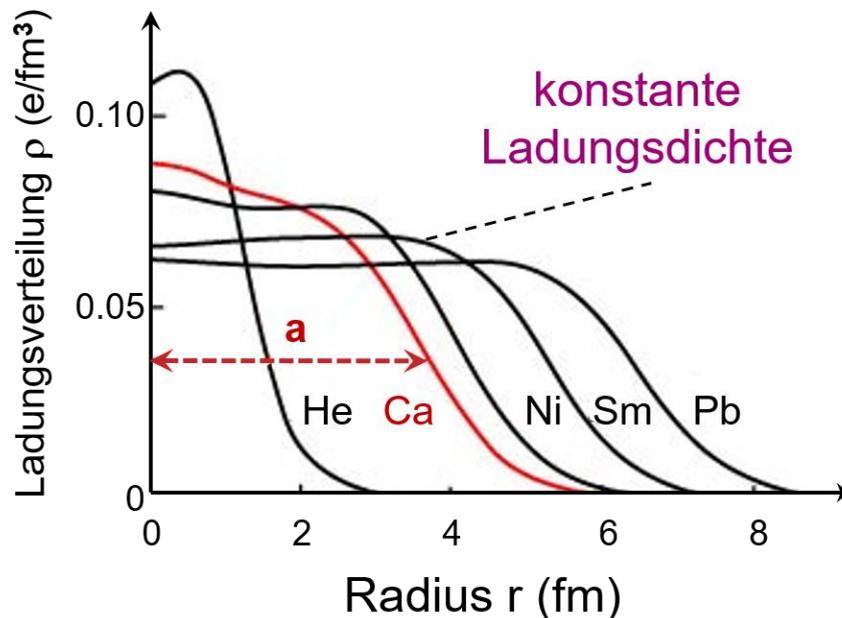


■ vom Formfaktoren zur Ladungsverteilung via Fourier-Transformation

- Bestimmung des Formfaktors:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{exp.}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Mott}} \cdot |F(q^2)|^2$$

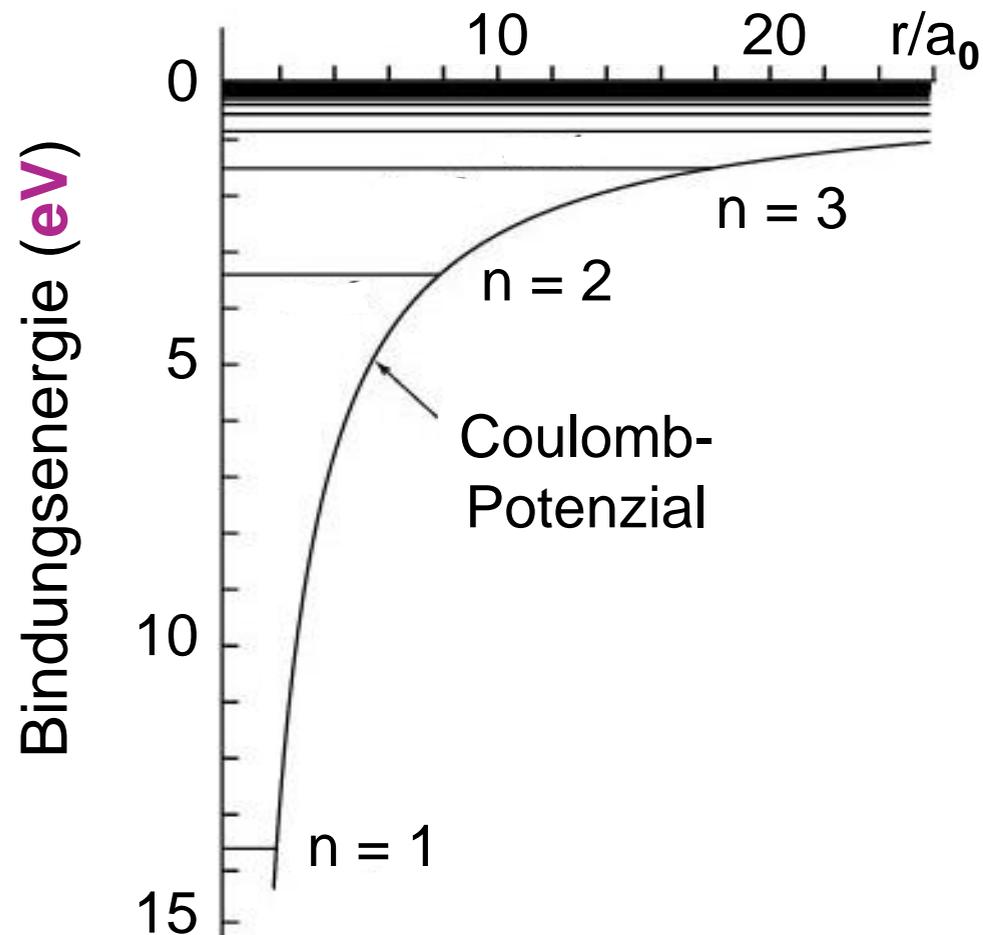
- resultierende Ladungsverteilung:



■ Bindungsenergien bei Atomen und Kernen sind deutlich verschieden

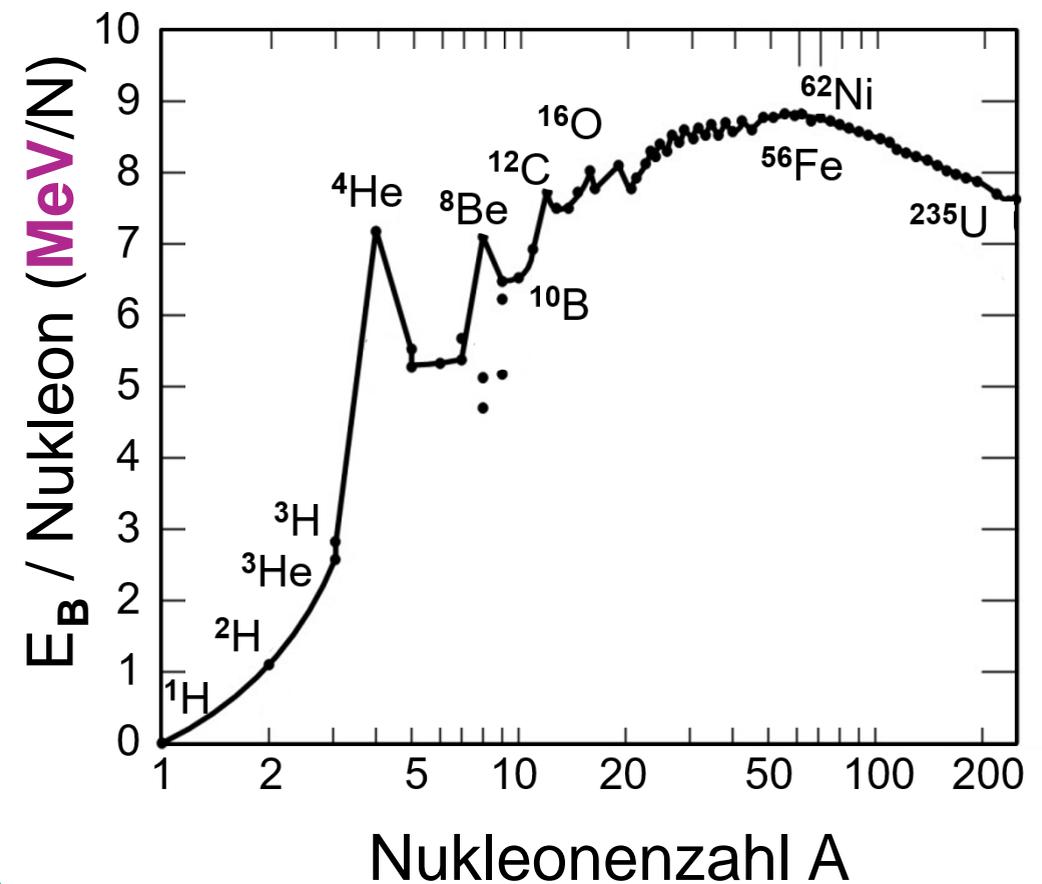
Atomphysik

- Bindungsenergie auf **eV**-Skala



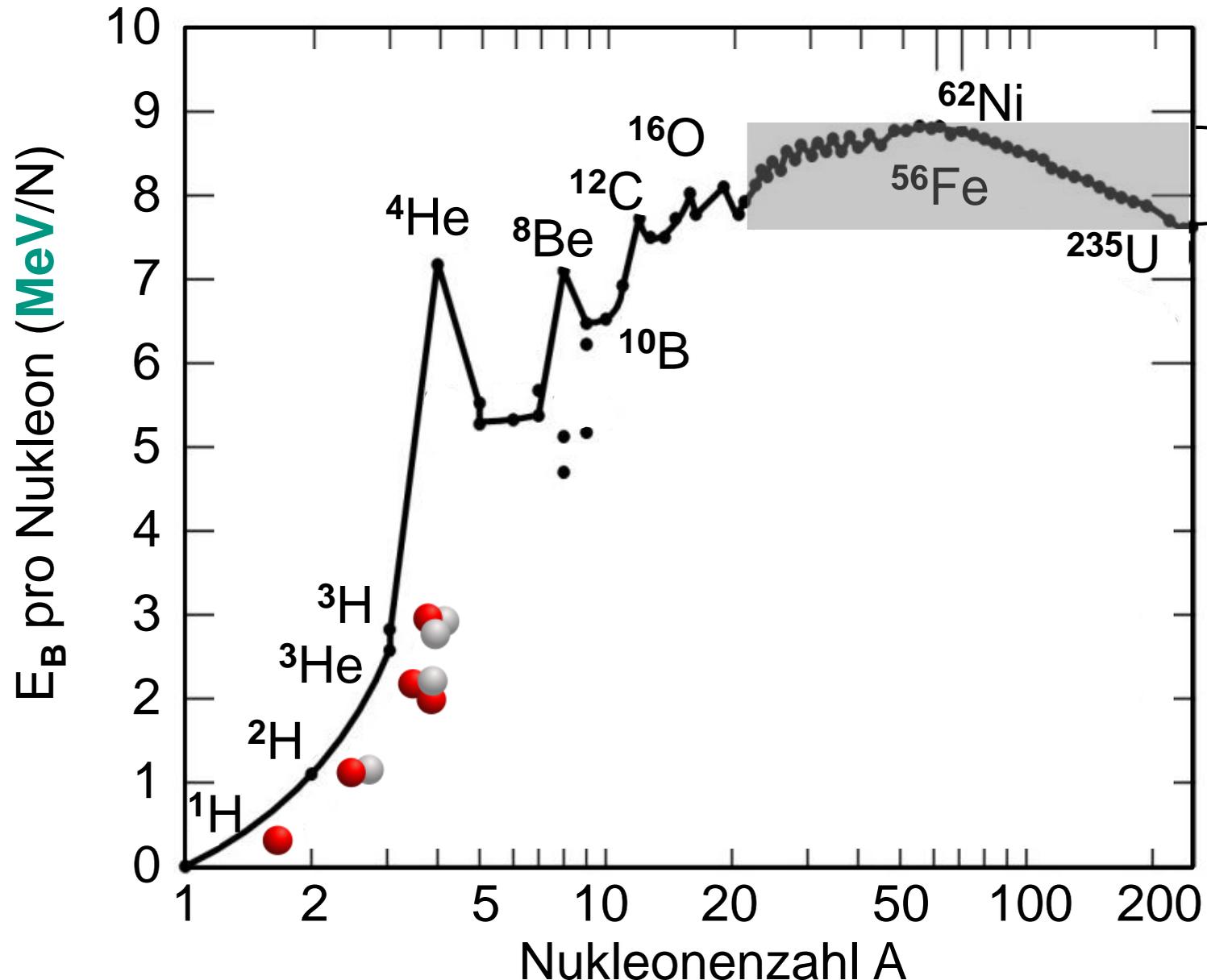
Kernphysik

- Bindungsenergie auf **MeV**-Skala



Befund 1: Bindungsenergie pro Nukleon

- Bindungsenergie pro Nukleon: $B/A \sim 8 \text{ MeV}$, \sim konstant für $A > 20$

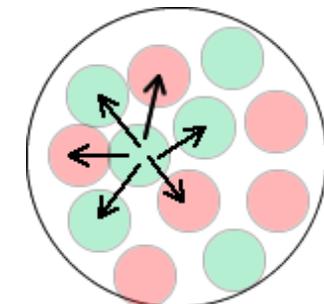


$\langle B/A \rangle \sim 8 \text{ MeV}$

↪ Kernwechselwirkung
nur mit dem nächsten
Nachbarnukleon!

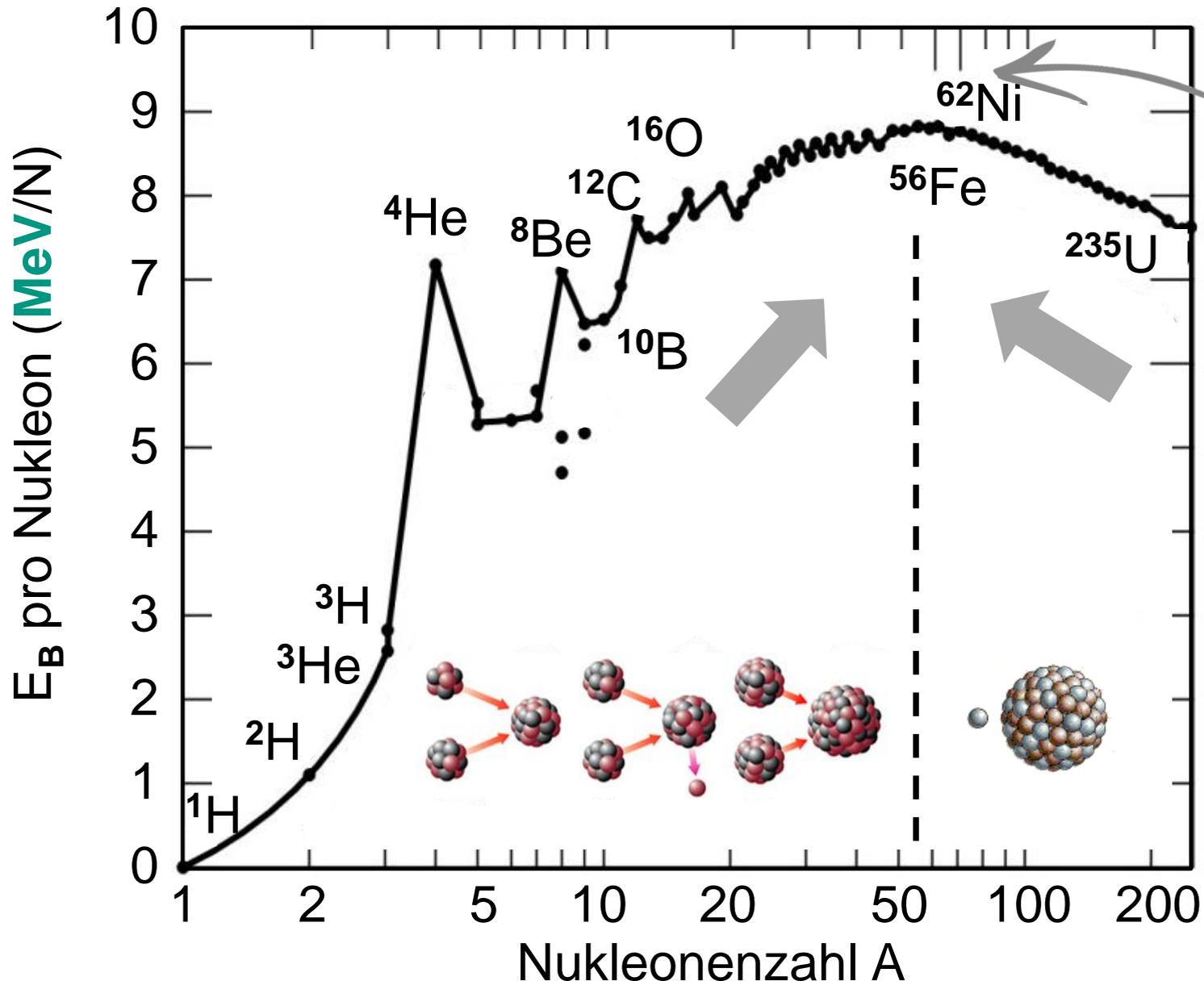
kurzreichweitige
Kernkräfte

Reichweite $\sim 1 \text{ fm}$



Befund 1: Bindungsenergie pro Nukleon

- Bindungsenergie pro Nukleon: $B/A \sim 8 \text{ MeV}$, \sim konstant für $A > 20$



maximales B/A bei
 $A = 56-58$ (^{56}Fe , ^{56}Ni)
stabilste Elemente

$A < 56$: **Kernfusion**
Fusionsreaktionen
von Kernen führen
zu Kernen mit höherer
Bindungsenergie
⇒ **Energiegewinn**

$A > 56$: **Spaltung**

Fun with Facts: Kernmassen - 1

■ Wieso gibt's keine superschweren Kerne $A > 250$? Da diese...

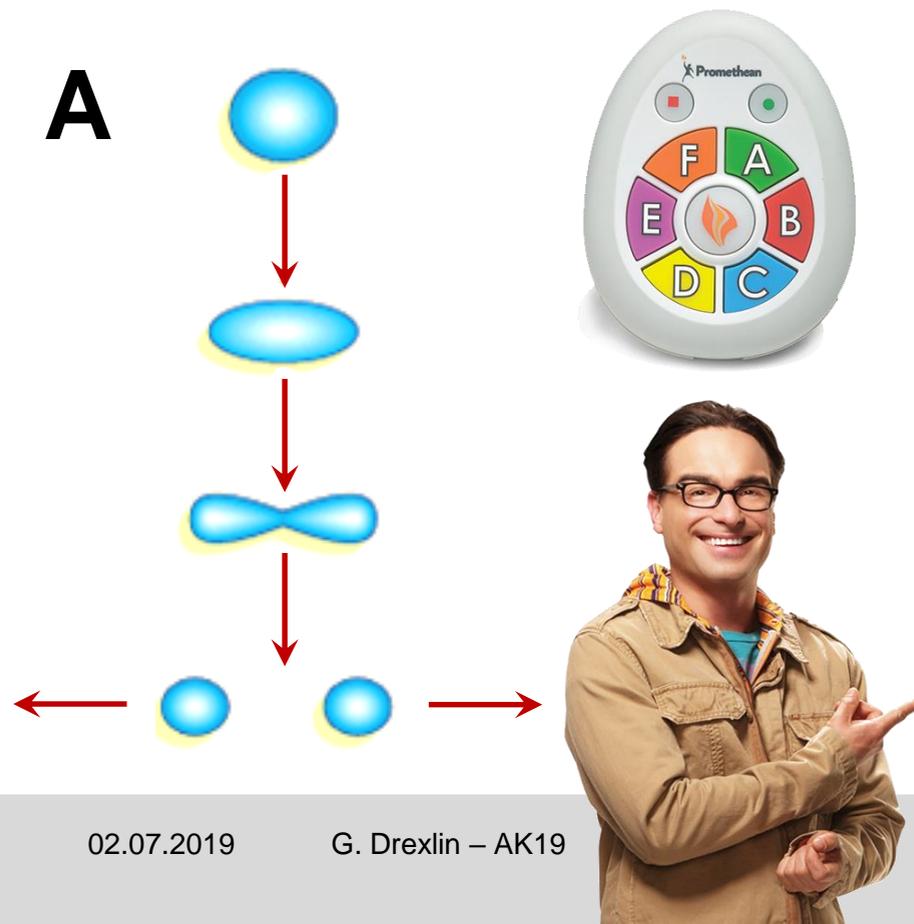
- A) ...spontan spalten können!
- B) ... α -Teilchen emittieren können!
- C) ... Nukleonen emittieren können!

SHELDON COOPER
presents
FUN WITH ~~FACTS~~

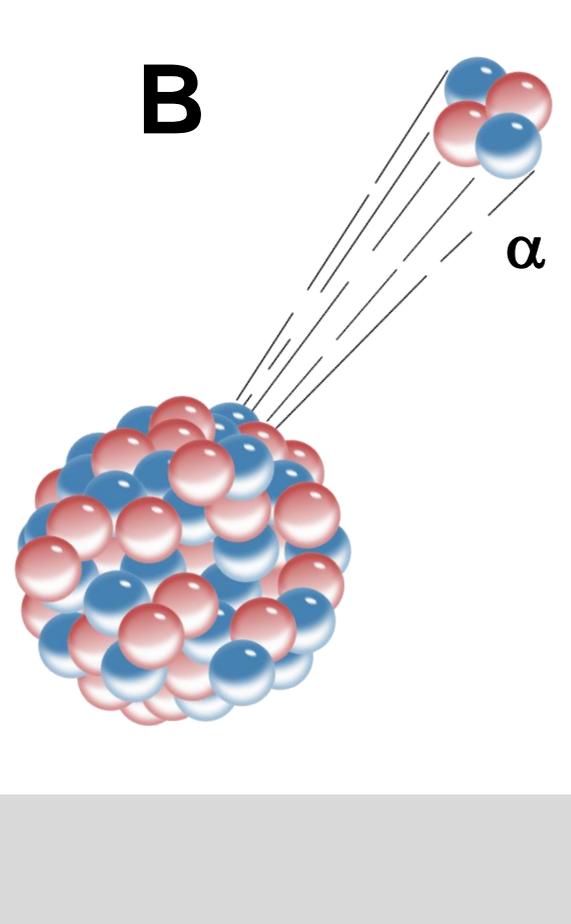
Facts



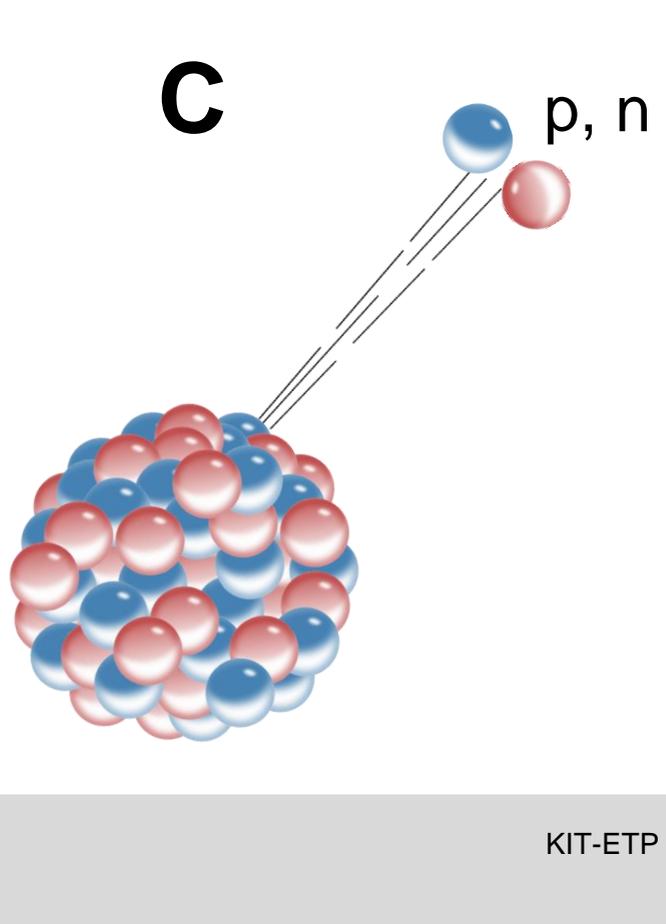
A



B



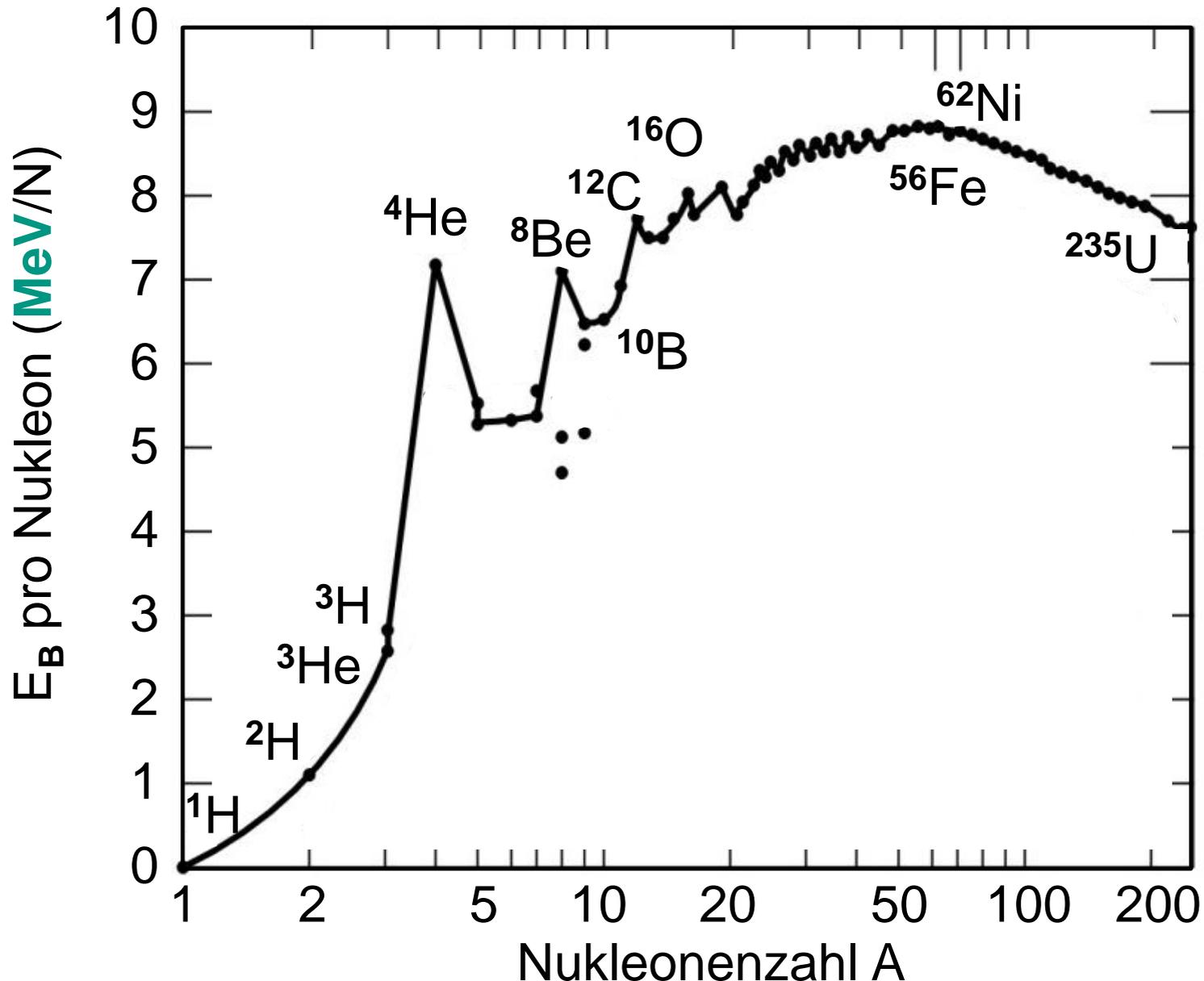
C



p, n

Befund 1: Bindungsenergie pro Nukleon

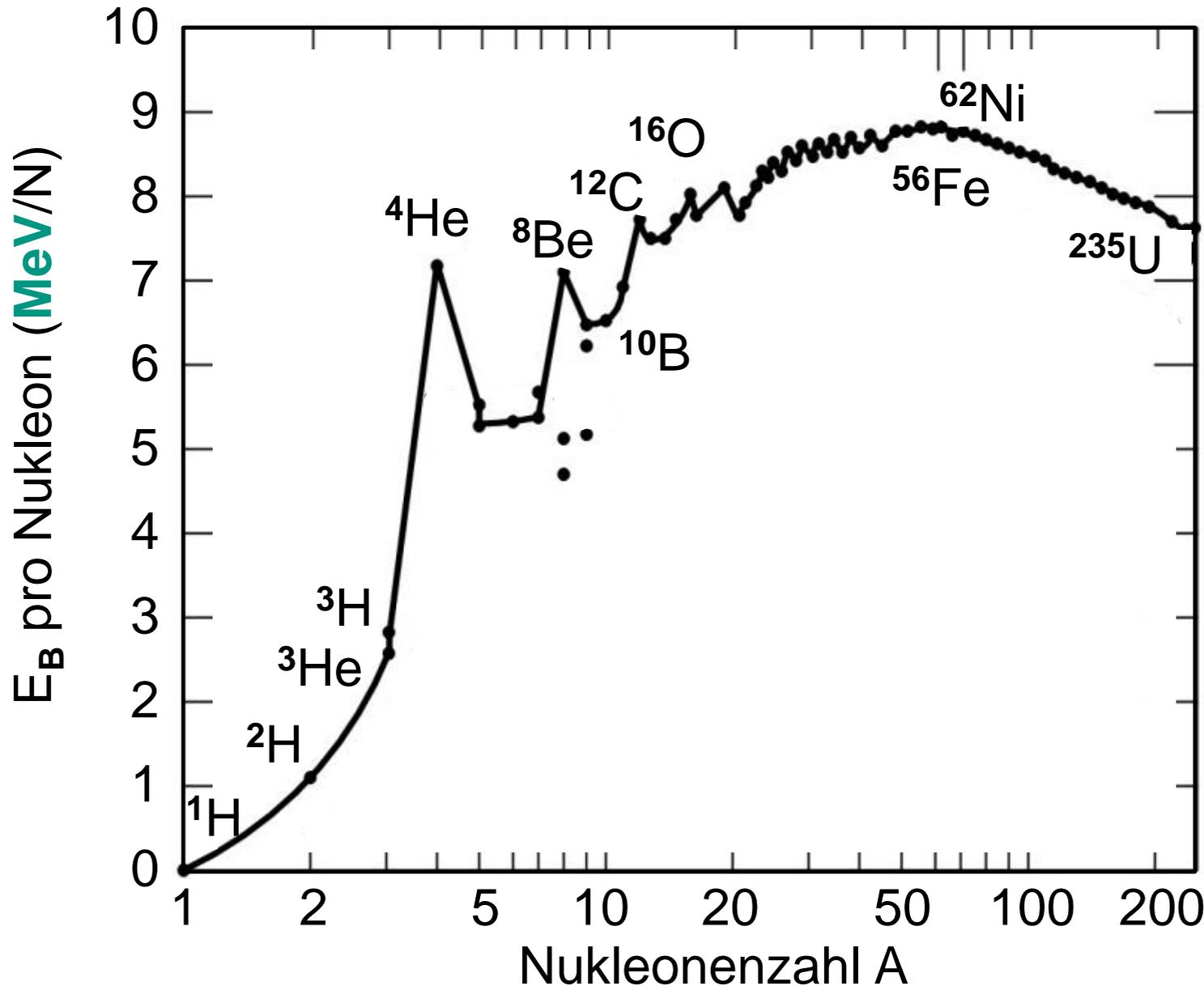
■ Bindungsenergie pro Nukleon:



- können die Kernmodelle den Verlauf von B/A reproduzieren?
- generischer Verlauf mit Maximum bei $A = 56$?
- absolute Größe B/A ?
- Peak-Strukturen ($A=4$) & gerade-ungerade ?

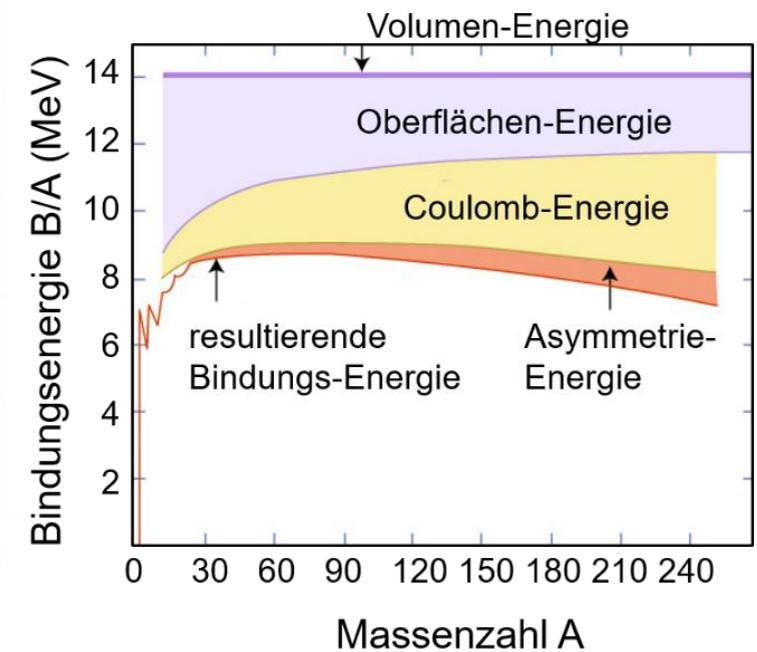
Befund 1: Bindungsenergie pro Nukleon

■ Bindungsenergie pro Nukleon



C. F. von Weizsäcker

mein Modell kann den mittleren Verlauf halb-klassisch erklären!!



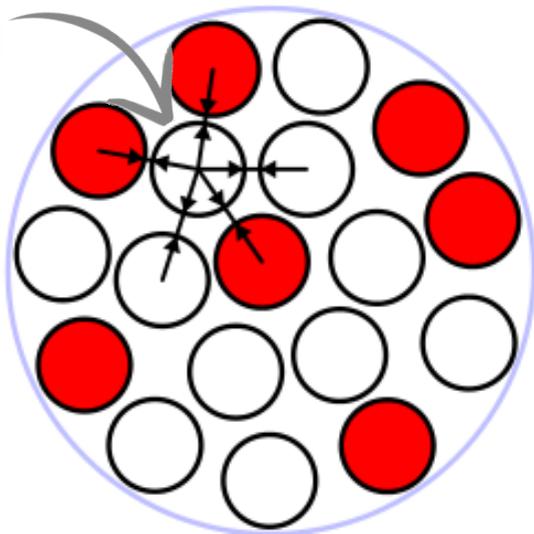
Tröpfchenmodell – gesättigte Kernkräfte

■ Semi-empirisches Modell zur Beschreibung von B/A und von Fusions-/Spalt-Prozessen

- Kerne als inkompressible, geladene „Flüssigkeitstropfen“
- kurzreichweitige, gesättigte Kernkräfte:

$$B/A = \text{const.}$$

Nukleon
1



Kern mit A
Nukleonen

Nukleon-Ww. nur mit direkten Nachbarn:

Nukleon # 1: Ww. nur mit engsten Nachbarn

⋮ ⋮

Nukleon # A : Ww. nur mit engsten Nachbarn

⇒ Anzahl der Wechselwirkungen $\sim A$

⇒ $B/A = \text{const.}$

falls Nukleon-Ww. mit allen anderen Nukleonen

⇒ Anzahl der Wechselwirkungen $\sim A^2$

⇒ $B/A \sim A$

Tröpfchenmodell – kurzreichweitige Kräfte

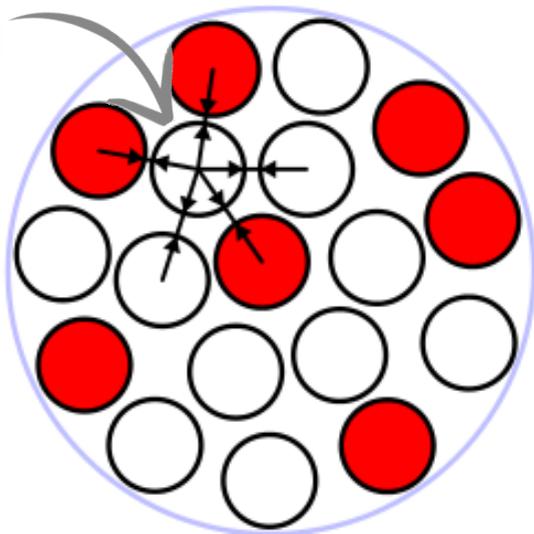
■ Semi-empirisches Modell zur Beschreibung von B/A und von Fusions-/Spalt-Prozessen

- Modell der **Nukleon-Nukleon Wechselwirkung** via Pionen
- kurzreichweitige, gesättigte Kernkräfte:

$$B/A = \text{const.}$$

Nukleon

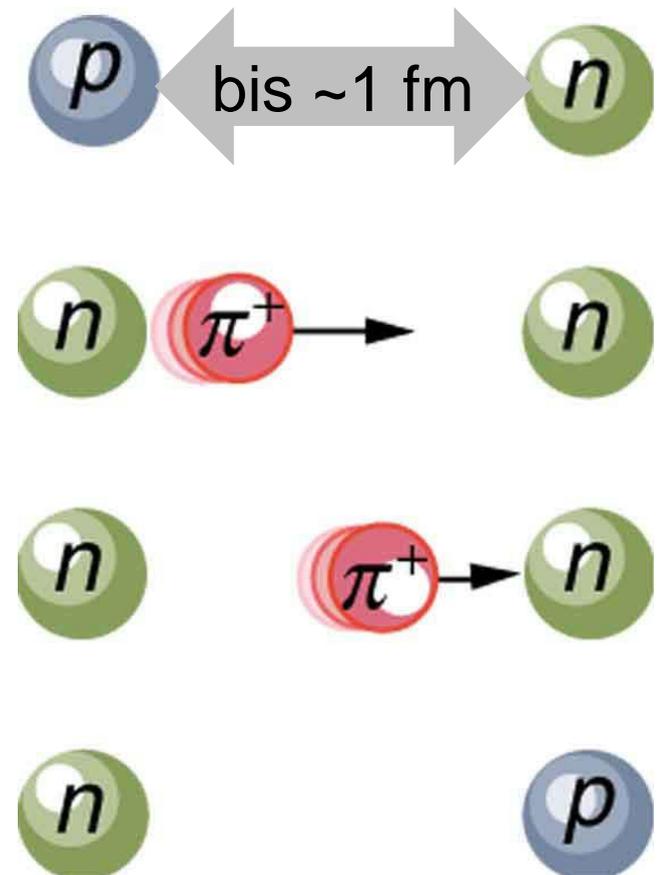
1



Kern mit A
Nukleonen



Kernradius \sim
einige fm



Tröpfchenmodell – einzelne Terme

■ **Semi-empirisches Modell** zur Beschreibung von B/A und von Fusions-/Spalt-Prozessen

- Berücksichtigung aller Effekte durch **empirische Terme:**

Effekte im Kernvolumen

Effekte an der Kernoberfläche

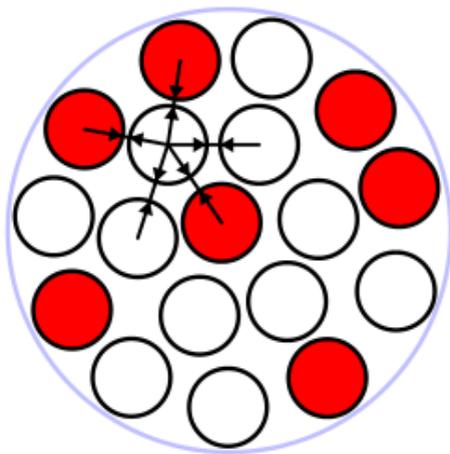
Coulomb-Abstoßung der Protonen

Verhältnis von Protonen zu Neutronen

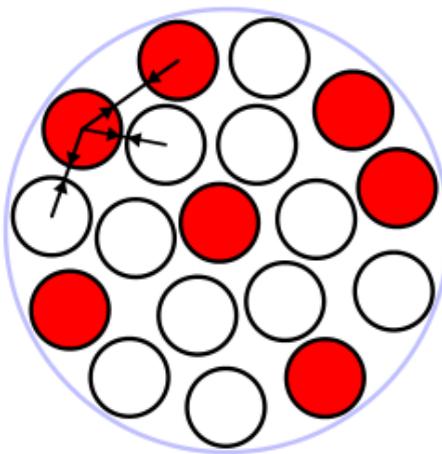
Paarung von 2 Nukleonen

klassisch

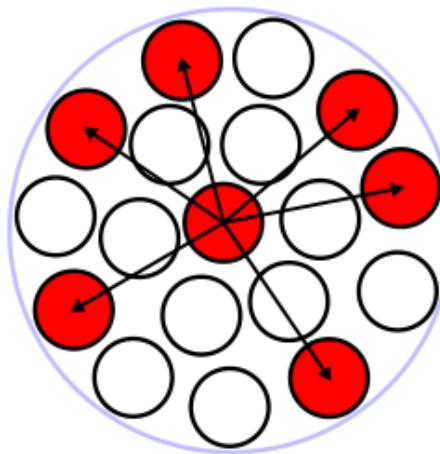
quantenmechanisch



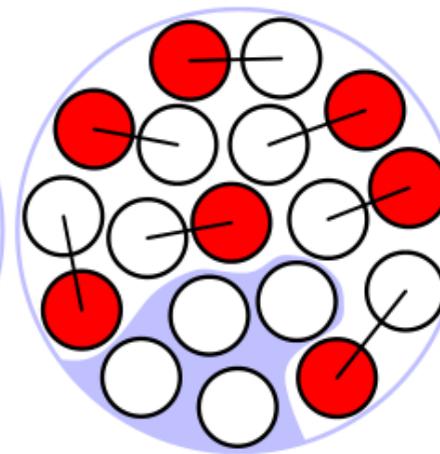
Volumen



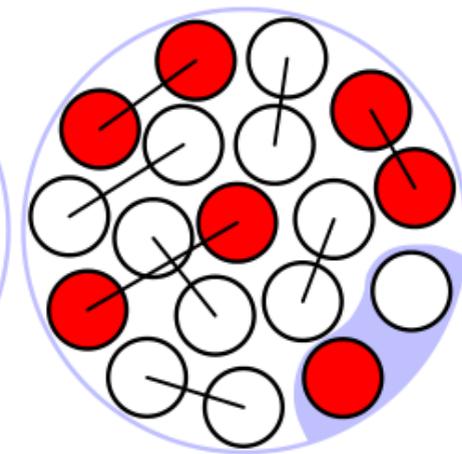
Oberfläche



Coulomb



Asymmetrie



Paarung

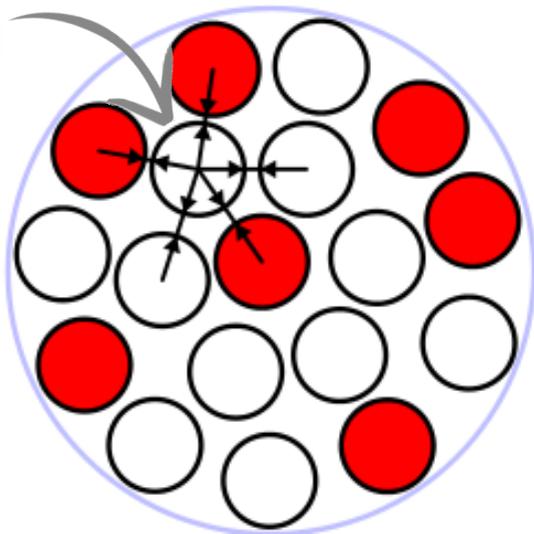
Tröpfchenmodell – Volumenterm

■ Semi-empirisches Modell zur Beschreibung von B/A und von Fusions-/Spalt-Prozessen

- **Volumenterm** : Nukleon „fühlt“ nur die unmittelbaren Nachbarn
- beschreibt unendlich großen Kern ohne Oberfläche, dominanter Term im Tröpfchenmodell

Nukleon

1



Kern mit A
Nukleonen

- Beitrag zur Bindungsenergie (positiv!)

$$B(Z,A) \sim a_v \cdot A$$

Tröpfchenmodell – Oberflächenterm

- **Semi-empirisches Modell** zur Beschreibung von B/A und von Fusions-/Spalt-Prozessen

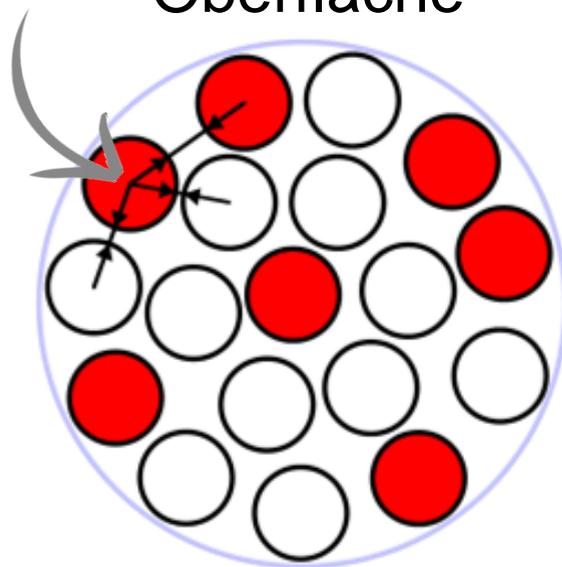
- **Oberflächenterm** : Nukleonen an der Oberfläche des Kerns besitzen weniger Partnernukleonen

⇒ **Reduktion der Bindungsenergie**

Nukleon

1

Oberfläche



Oberfläche mit $A^{2/3}$
Nukleonen

- Beitrag zur Bindungsenergie (negativ)

$$B(Z,A) \sim - a_s \cdot A^{2/3}$$

Tröpfchenmodell – Oberflächenterm

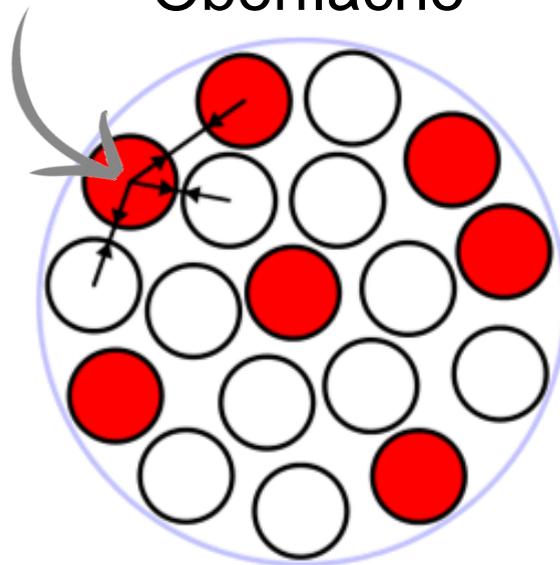
- **Semi-empirisches Modell** zur Beschreibung von B/A und von Fusions-/Spalt-Prozessen

- **Oberflächenterm** : Nukleonen an der Oberfläche des Kerns besitzen weniger Partnernukleonen

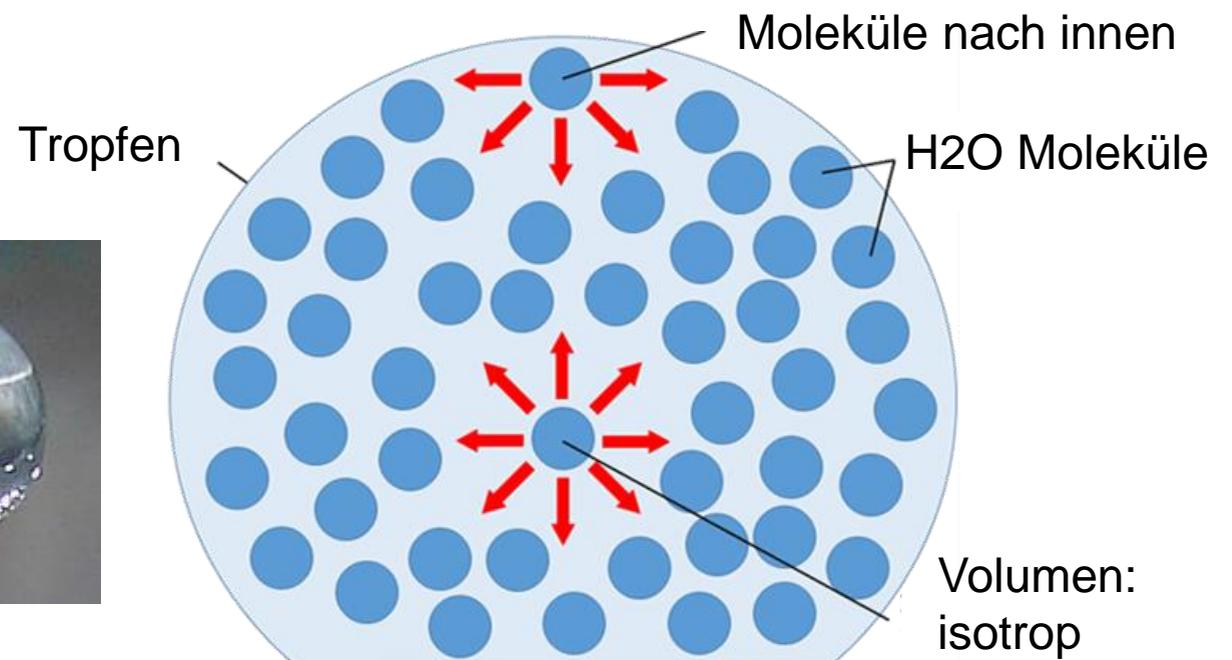
⇒ **Reduktion der Bindungsenergie**

Nukleon

1 Oberfläche



- *klassisch*: Oberflächenspannung eines Tropfens



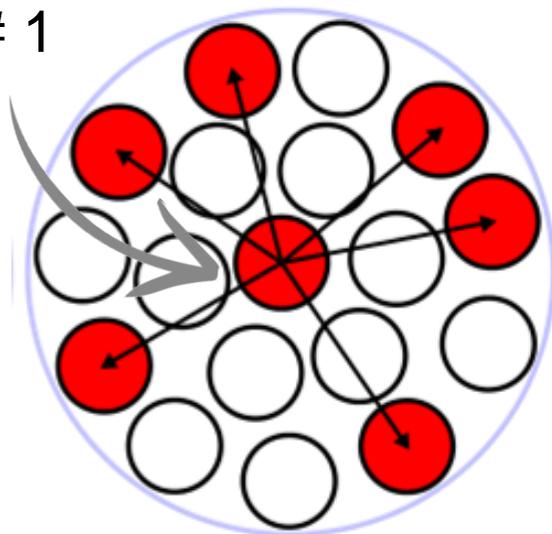
Tröpfchenmodell – Coulombterm

- **Semi-empirisches Modell** zur Beschreibung von B/A und von Fusions-/Spalt-Prozessen

- **Coulombterm** : Protonen erzeugen langreichweitige ($\sim 1/r$) abstoßende Coulombkraft

⇒ **Reduktion der Bindungsenergie**

Proton
1



Kern mit Z
Protonen

- Beitrag zur Bindungsenergie (negativ)

$$B(Z,A) \sim - a_c \cdot Z^2 \cdot A^{-1/3}$$

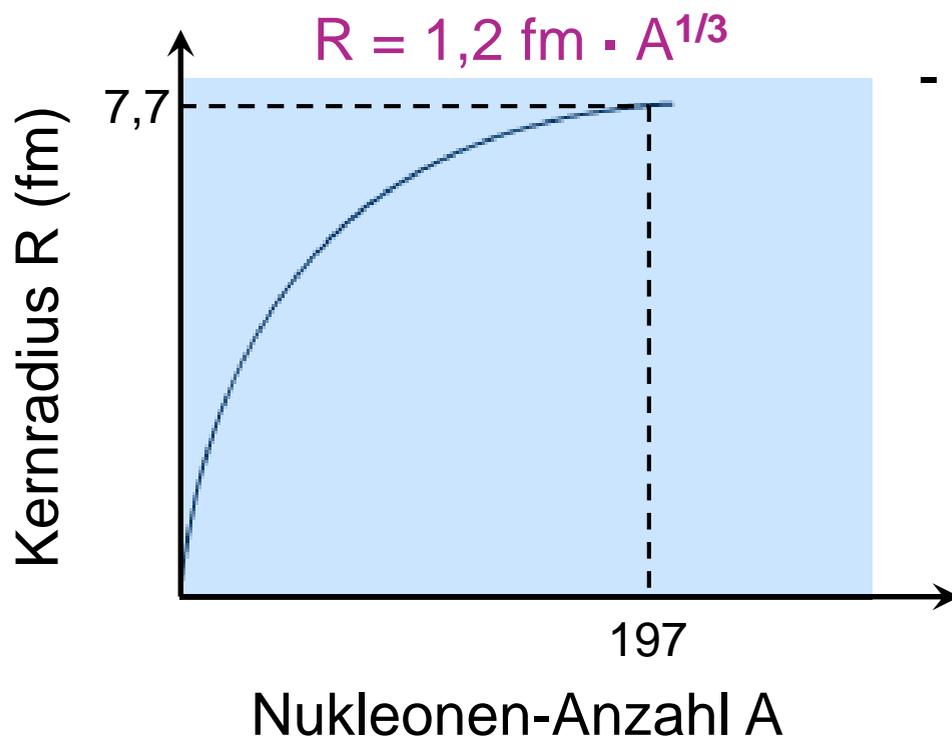


$$R = R_0 \cdot A^{1/3}$$

Tröpfchenmodell – Coulombterm

- **Semi-empirisches Modell** zur Beschreibung von B/A und von Fusions-/Spalt-Prozessen

- **Coulombterm** : Protonen erzeugen abstoßende Coulombkraft über gesamten Kern, vgl. mit starker Kernkraft: **stärker, aber nur kurzreichweitig über ~ 1 fm**



- Beitrag zur Bindungsenergie (negativ)

$$B(Z,A) \sim - a_c \cdot Z^2 \cdot A^{-1/3}$$

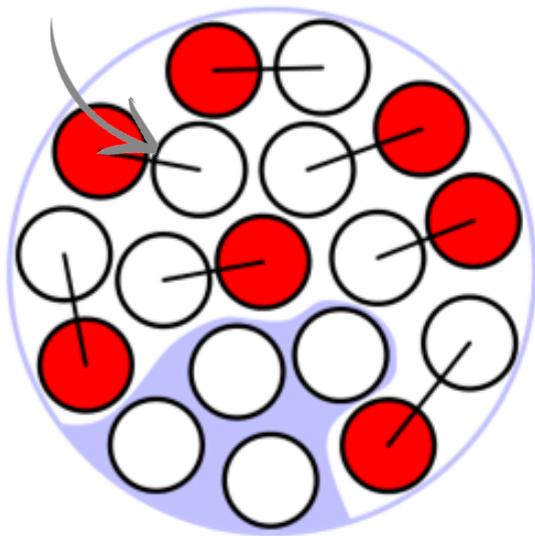
- dabei Modell homogen geladener Kugel
 - Radius R
 - konstante Ladungsdichte
 $\rho = (Z \cdot e) / (4/3 \cdot \pi \cdot R^3)$

Tröpfchenmodell – Asymmetrieterm

■ Semi-empirisches Modell zur Beschreibung von B/A und von Fusions-/Spalt-Prozessen

- **Asymmetrieterm**: quantenmechanischer Ursprung aus Pauli's Ausschließungsprinzip, ideal ist $N = Z$
⇒ **Reduktion der Bindungsenergie**

p/n-“Balance“



Kern mit asymmetrischer
Nukleonenzahl

- Beitrag zur Bindungsenergie (negativ)

$$B(Z,A) \sim - a_A \cdot (N - Z)^2 / A$$

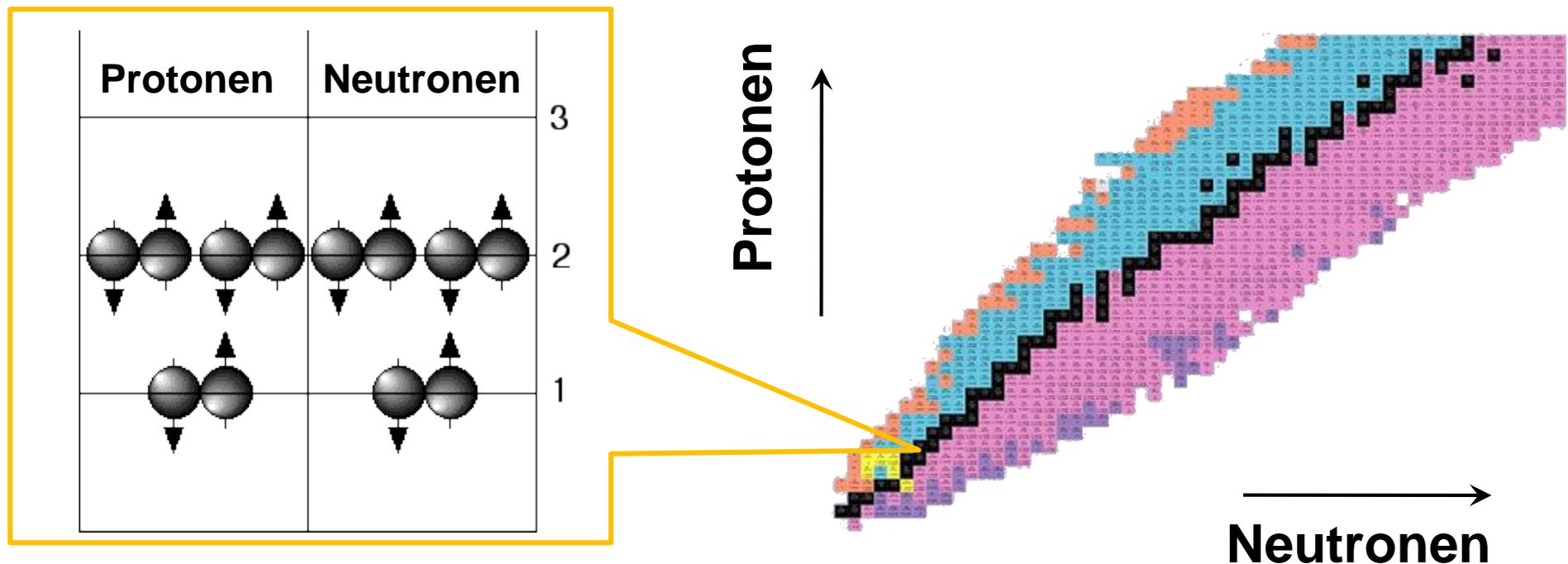
- Kerne bevorzugen Konfiguration mit identischer Zahl an Protonen (Z) und Neutronen (N)

$$N = Z$$

Tröpfchenmodell – Asymmetrieterm

■ Semi-empirisches Modell zur Beschreibung von B/A und von Fusions-/Spalt-Prozessen

- **Paarungsterm** : keine stabilen Kerne mit starkem Protonen- oder Neutronenüberschuss (s. Fermigas-Modell)
- **Pauli-Prinzip** : wird bei $N = Z$ ein p gegen ein n ausgetauscht
⇒ **Reduktion von B/A**

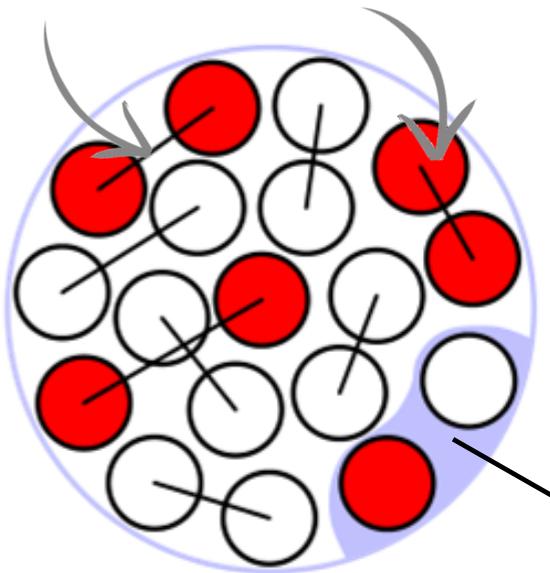


Tröpfchenmodell – Paarungsterm

■ Semi-empirisches Modell zur Beschreibung von B/A und von Fusions-/Spalt-Prozessen

- **Paarungsterm** : experimenteller Befund – **gg** (**gerade-gerade**)- Kerne sind stärker gebunden als **ug** (**ungerade-gerade**)-Kerne und **uu** (**ungerade-ungerade**) -Kerne

Nukleonenpaar



ungepaarte
Nukleonen

uu-Kern mit 2 ungepaarten
Nukleonen

- Beitrag zur Bindungsenergie (variabel)

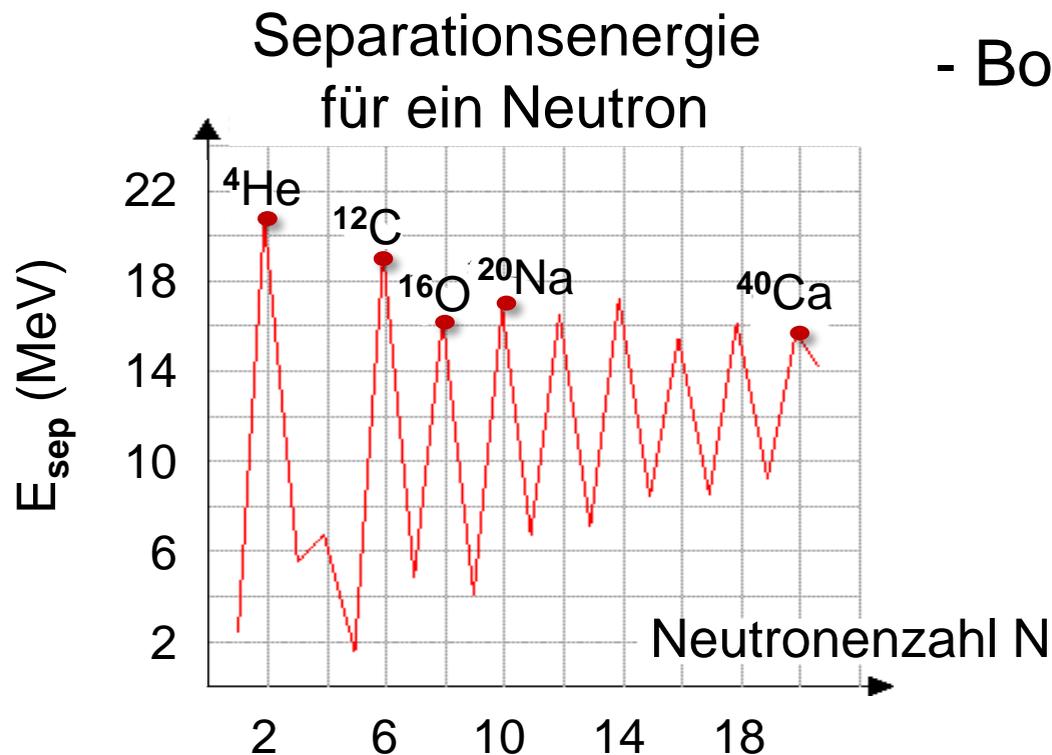
$$\delta(Z,A) \sim a_p \cdot A^{-1/2}$$

$$\left[\begin{array}{l} + \text{ für } gg \\ 0 \text{ für } ug \\ - \text{ für } uu \end{array} \right]$$

Tröpfchenmodell – Paarungsterm

- **Semi-empirisches Modell** zur Beschreibung von B/A und von Fusions-/Spalt-Prozessen

- **Paarungsterm** : experimenteller Befund – Kerne mit gerader Neutronenanzahl sind 2 MeV stärker gebunden
gepaarte Nukleonen mit antiparallelem Spin



- Bohr-Mottelson Erweiterung von Weizsäcker

$$\delta(Z,A) \sim a_p \cdot A^{-1/2}$$



Aage Niels Bohr Ben Mottelson

Nobelpreis
1975



Tröpfchenmodell – alle Terme

- **Tröpfchen-Modell:** Zusammenfassung aller Terme zu einer (semi-)empirischen **Bethe-Weizsäcker'sche Massenformel:**

$$B(Z,A) = a_v \cdot A - a_s \cdot A^{2/3} - a_c \cdot Z^2 \cdot A^{-1/3} - a_A \cdot (N - Z)^2 / A + \delta(Z,A)$$

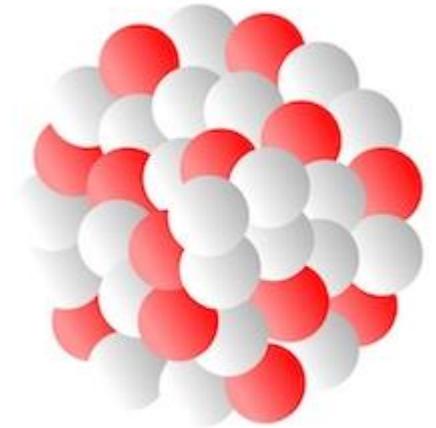
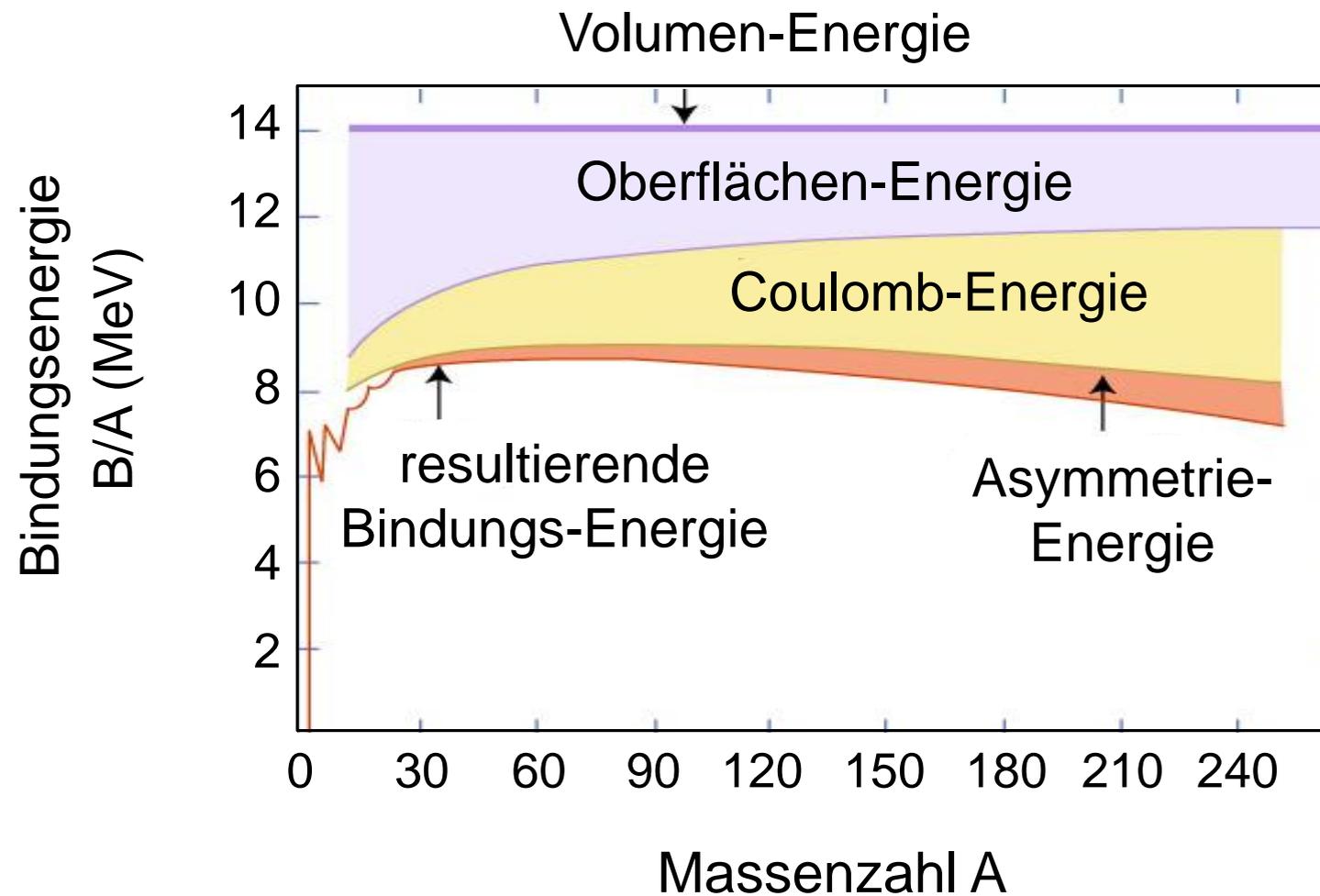
Beitrag	Faktor a	Größe (MeV)
Volumenterm	a_v	15,58
Oberflächenterm	a_s	16,91
Coulombterm	a_c	0,71
Asymmetrieterm	a_A	23,21
Paarungsterm	a_p	11,46

BETHE-WEIZSÄCKER
FORMEL

Anpassung an zahlreiche experimentell bekannte Kernmassen für $A > 40$: ~ 10% Genauigkeit

Tröpfchenmodell – alle Terme

- **Tröpfchen-Modell:** Zusammenfassung aller Terme zu einer (semi-)empirischen **Bethe-Weizsäcker'sche Massenformel:**



H. A. Bethe



C. Weizsäcker

Tröpfchenmodell & Kernmassen

- **Kernmassen:** die berechneten Bindungsenergien können verglichen werden mit **gemessenen Kernmassen M**

Kernmasse M

$$M(Z,A) = Z \cdot M_p + N \cdot M_n - B(Z,A)$$

$$M_p = 938,27 \text{ MeV} \quad M_n = 939,57 \text{ MeV} \quad B/A \sim 8-9 \text{ MeV}$$

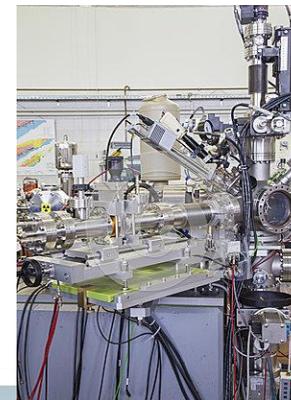
$$B/A \sim \alpha_s^2 \cdot m_N$$

$$\sim 5 \text{ MeV}$$

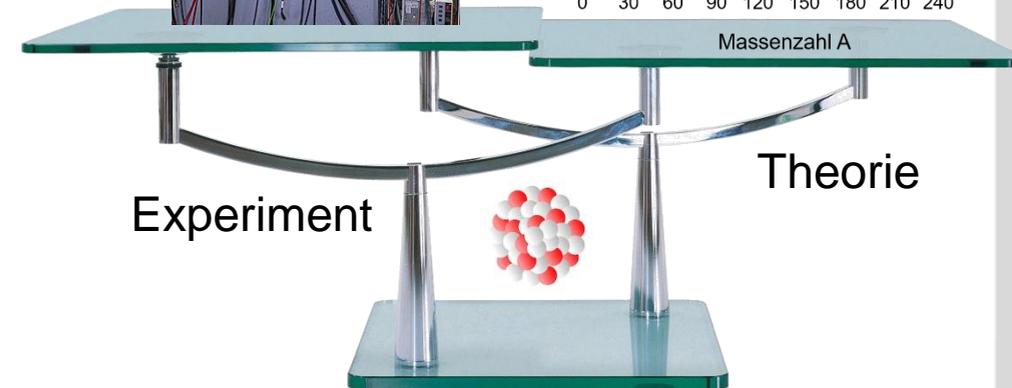
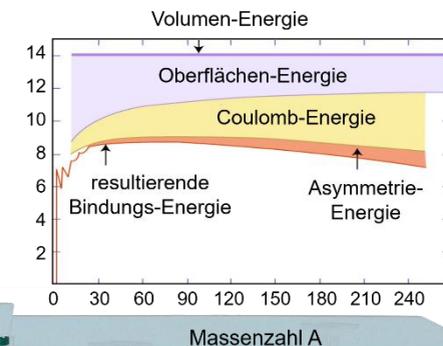
α_s : Kopplung der starken Wechselwirkung (= 0.15)

Bindungsenergie des Kerns
klein, ~ 1% der **Nukleonenmasse**

Massenspektrometer



Tröpfchenmodell



Fun with Facts: Kernmassen - 2

■ Wie schwer sind Nukleonen im Kern? Sie sind...

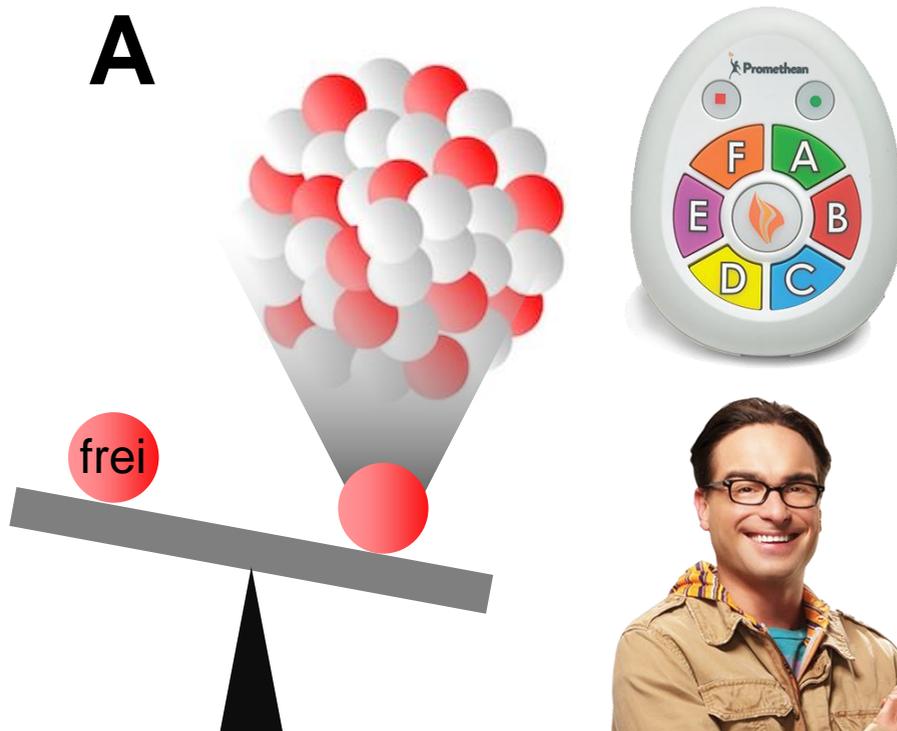
- A) ...**schwerer**, da relativistisch (p_{Fermi})!
- B) ... **gleich schwer**, da Nukleon = Nukleon!
- C) ... **leichter**, da im Kernverbund mit Masse A !

SHELDON COOPER
presents
FUN WITH ~~FACTS~~

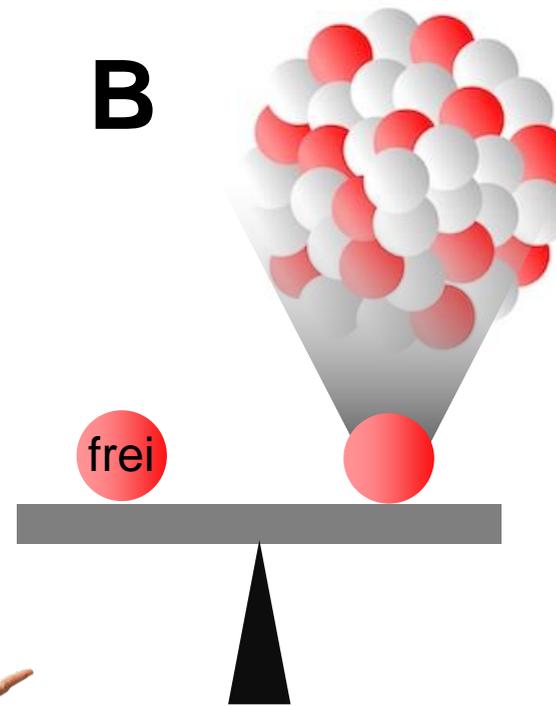
Facts



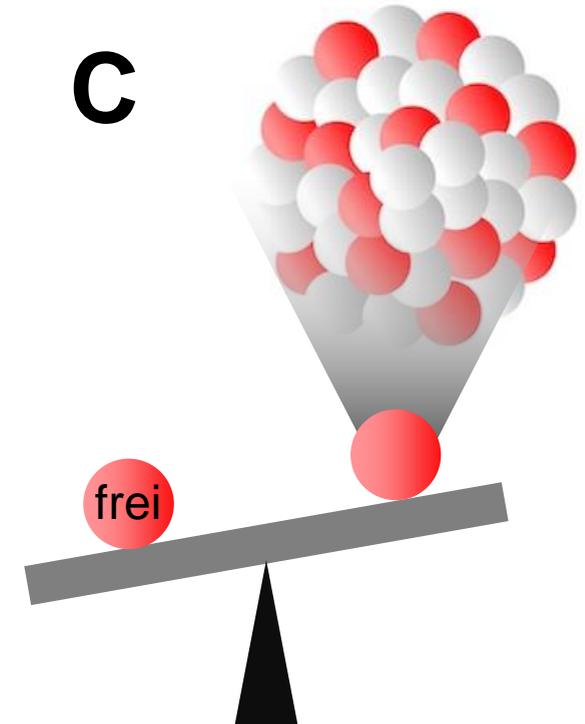
A



B



C



Kerne – Bindungsenergie & Masse

■ Begrifflichkeiten bei Kernen (Nukliden):

Isotope

Kerne mit gleicher Protonenzahl Z ,
 $^{124,126,128,129,130,131,132,134,136}_{54}\text{Xe}$ (ein chemisches Element)

Isotone

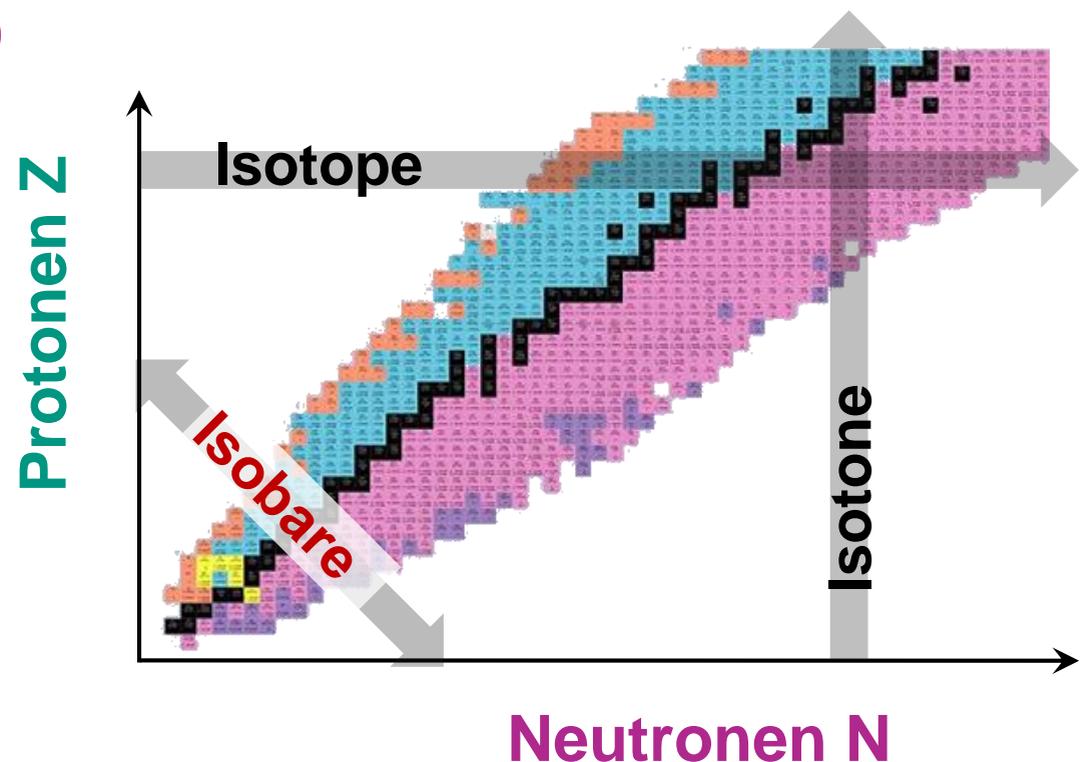
Kerne mit gleicher Neutronenzahl N ,
 $^{36}_{20}\text{S}$, $^{37}_{20}\text{Cl}$, $^{38}_{20}\text{Ar}$, $^{39}_{20}\text{K}$

Isobare

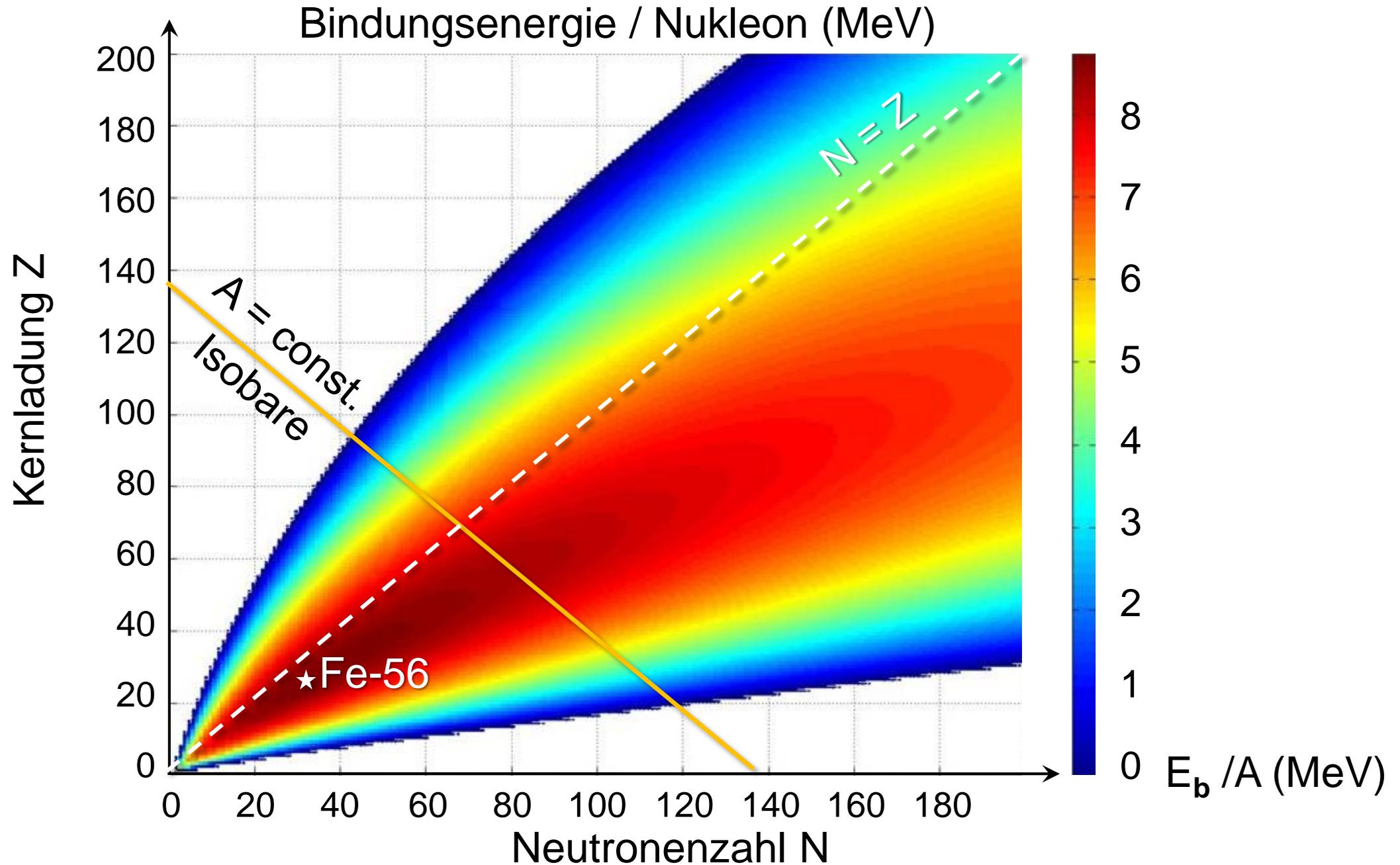
Kerne mit gleicher
Nukleonenzahl A ,
 $^{138}_{56}\text{Ba}$, $^{138}_{57}\text{La}$, $^{138}_{58}\text{Ce}$

Spiegelkerne: gleiches $A =$
 $Z_1 + N_1 = Z_2 + N_2$

Bsp.: **C-14** (6p, 8n) \leftrightarrow **O-14** (8p, 6n)



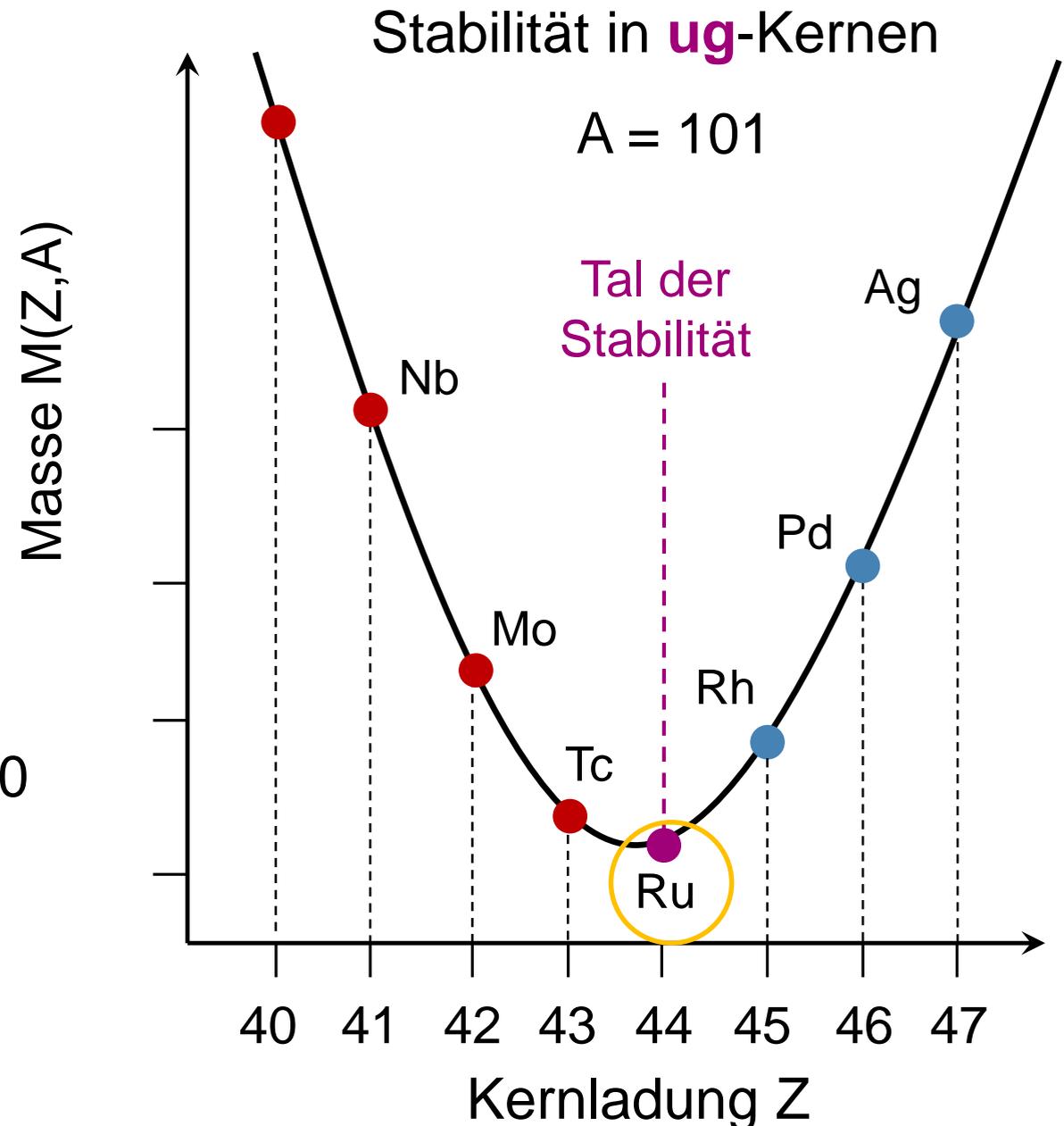
Tröpfchenmodell – Bindungsenergien



Tröpfchenmodell - Stabilitätstal

■ Eigenschaften von Isobaren

- es gibt für jedes $A = \text{const.}$ ein **stabilstes Nuklid im „Stabilitätstal“**
- wie finde ich dieses?
 - ordne Nuklide mit Masse $M(Z, A = \text{const.})$ bzw. $B(Z, A = \text{const.})$ nach Kernladung Z
 - bilde $\partial B(Z, A = \text{const.}) / \partial Z = 0$
- **Kerne mit $A = \text{ungerade}$**
⇒ 1 Massenparabel für ug- Kerne



Tröpfchenmodell - Stabilitätstal

■ Massenparabel

$$M(Z, A) = \alpha \cdot A - \beta \cdot Z + \gamma \cdot Z^2$$

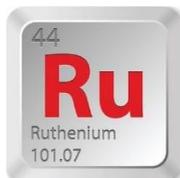


$$\alpha = M_n - a_V + a_S \cdot A^{-1/3} + a_A$$

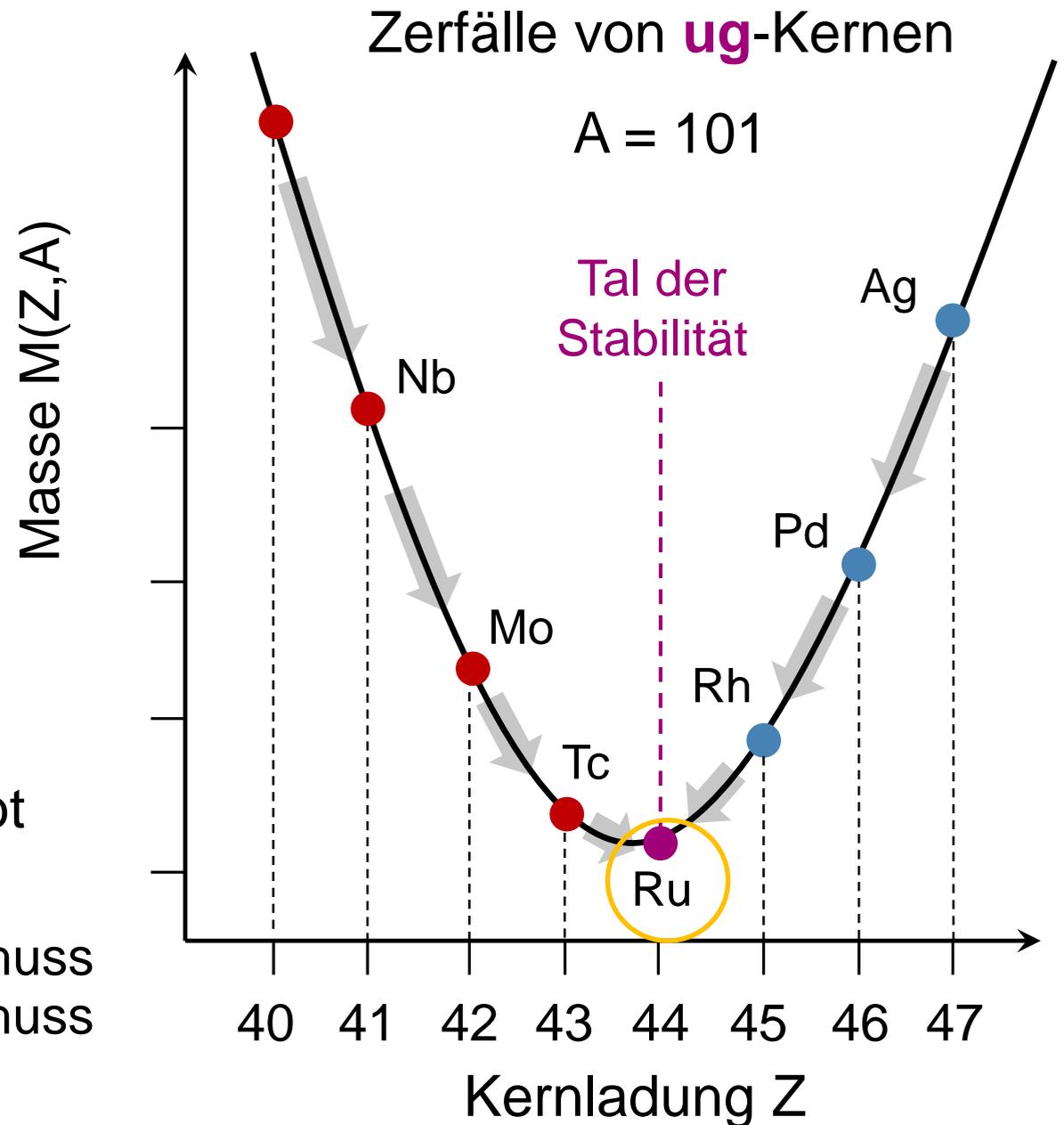
$$\beta = M_n - M_p - m_e + 2 \cdot a_A$$

$$\gamma = \frac{4}{A} \cdot a_A + a_C \cdot A^{-1/3}$$

- **nur ein stabiles Isobar** verbleibt



- n-Überschuss
- p-Überschuss
- stabil



■ Massenparabel

- Kerne mit $A = \text{gerade}$

⇒ 2 Massenparabeln
(gg- und uu- Kerne)
durch Paarungsterm

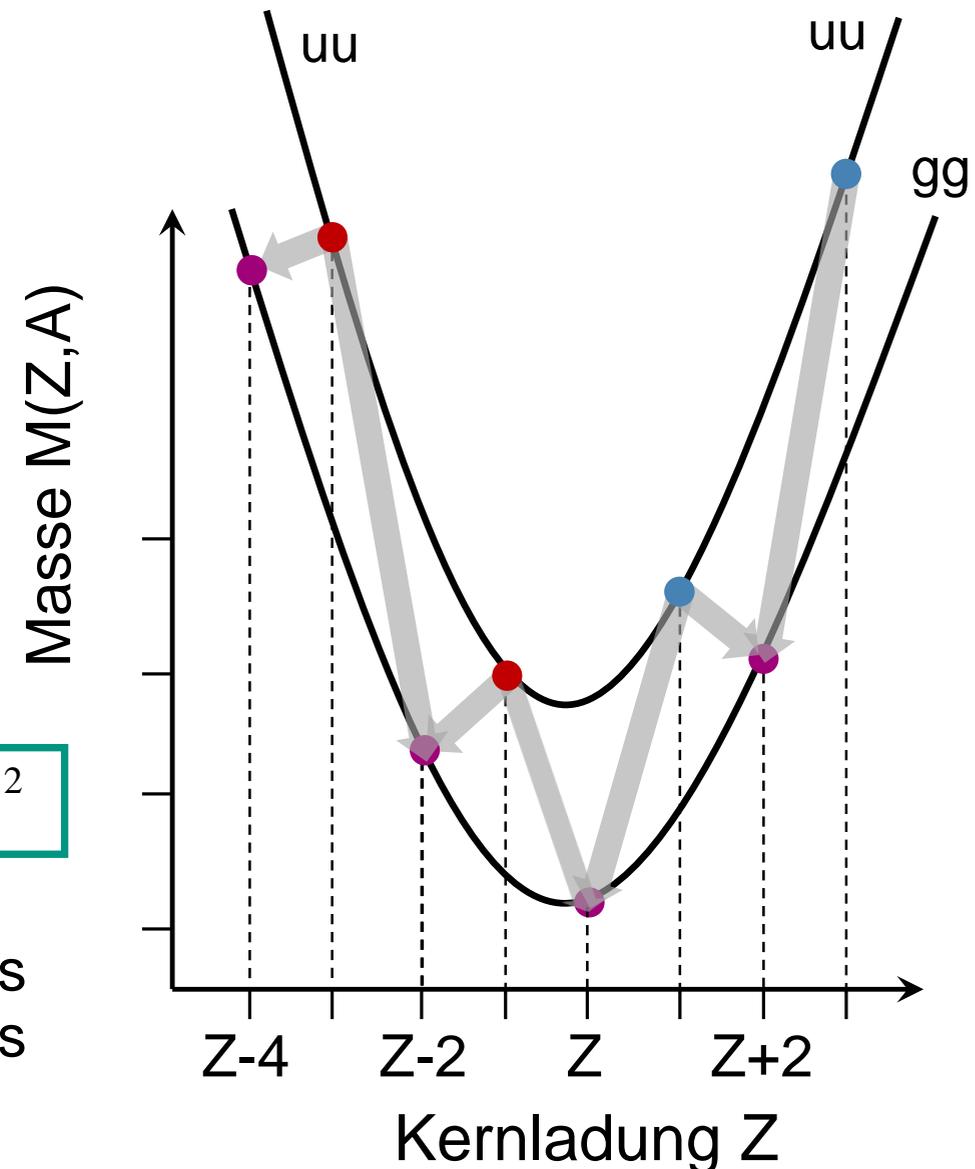
mehrere stabile Nuklide

wichtiger Beitrag der
Paarungsenergie δ

$$M(Z, A) = \alpha \cdot A - \beta \cdot Z + \gamma \cdot Z^2 + \delta \cdot A^{-1/2}$$

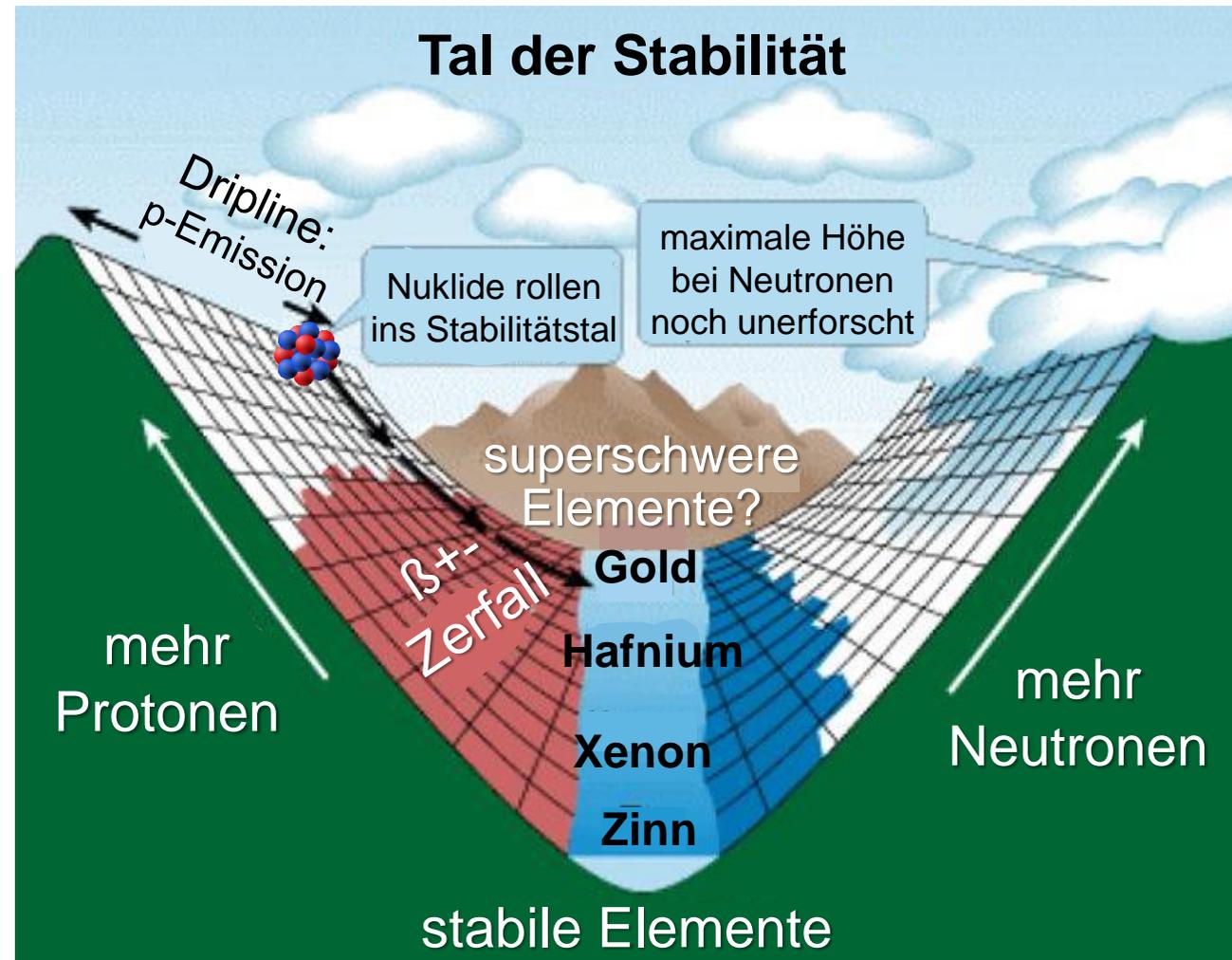
- n-Überschuss
- p-Überschuss
- stabil

Stabilität in gg- / uu- Kernen



■ Stabilitätstal

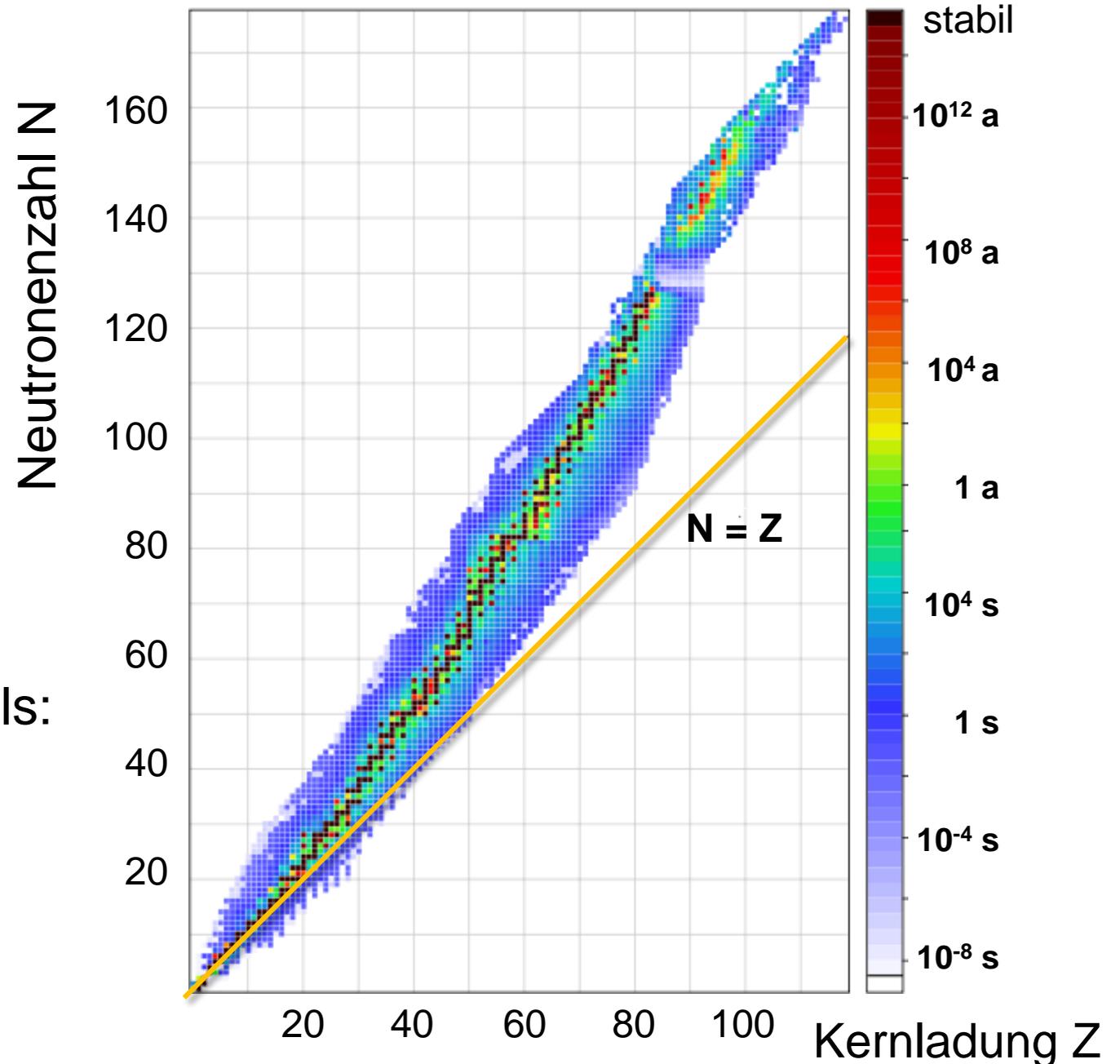
- **Coulomb-Abstoßung** der Protonen erzeugt bei schweren Kernen einen deutlichen **Neutronenüberschuss**
- außerhalb des Stabilitätstals: β -Zerfälle, α -Zerfälle oder Emission von p, n



Tröpfchenmodell - Stabilitätstal

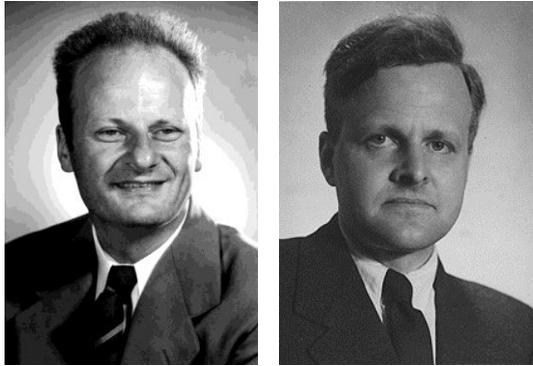
■ Stabilitätstal

- **Coulomb-Abstoßung** der Protonen erzeugt bei schweren Kernen einen deutlichen **Neutronenüberschuss** (Neutronen als Kitt)
- außerhalb des Stabilitätstals: β -Zerfälle, α -Zerfälle oder Emission von p, n



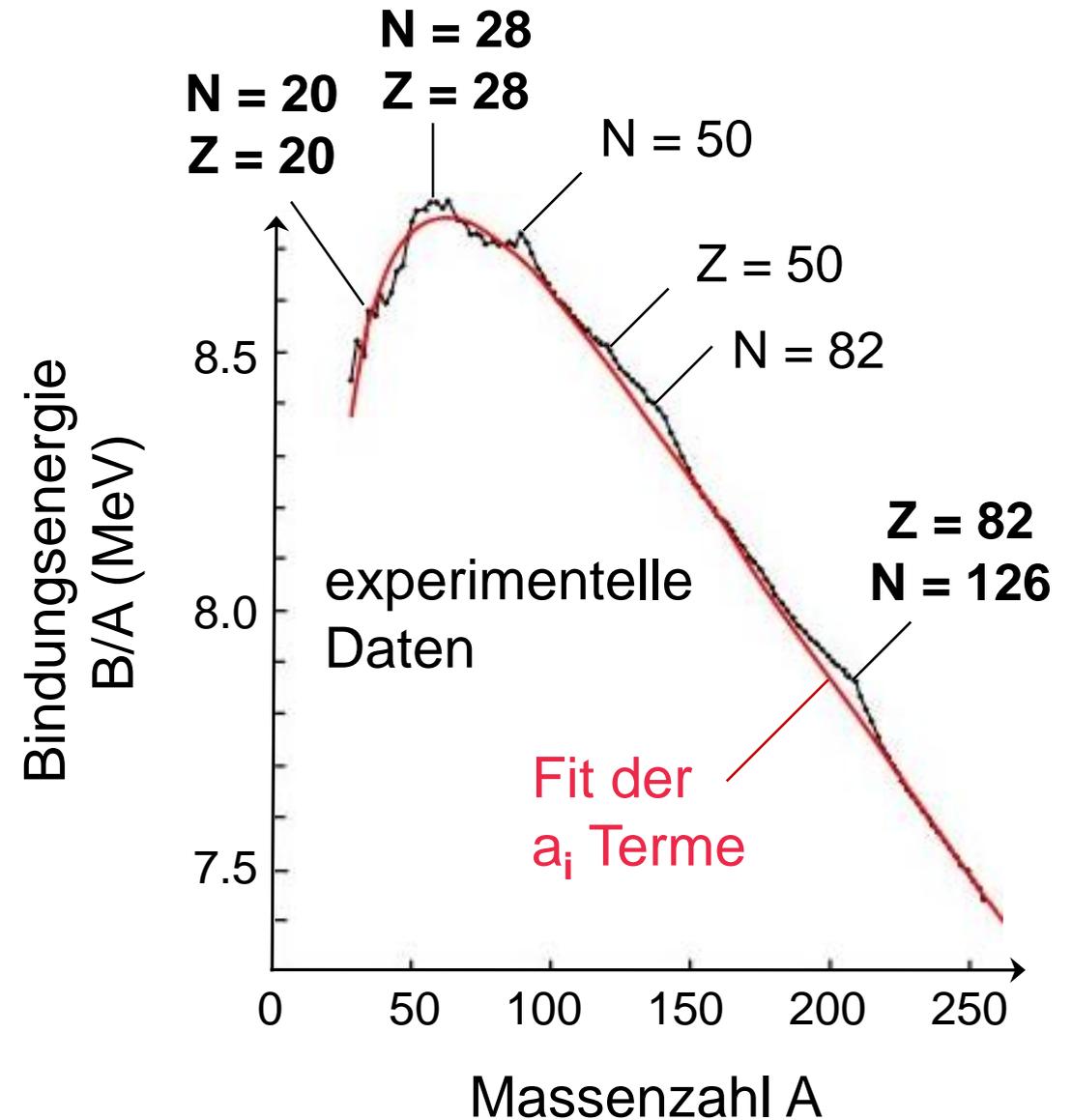
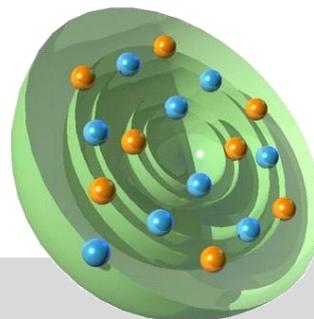
Tröpfchenmodell - Limits

■ Vergleich von empirischem Modell und experimentellen Daten



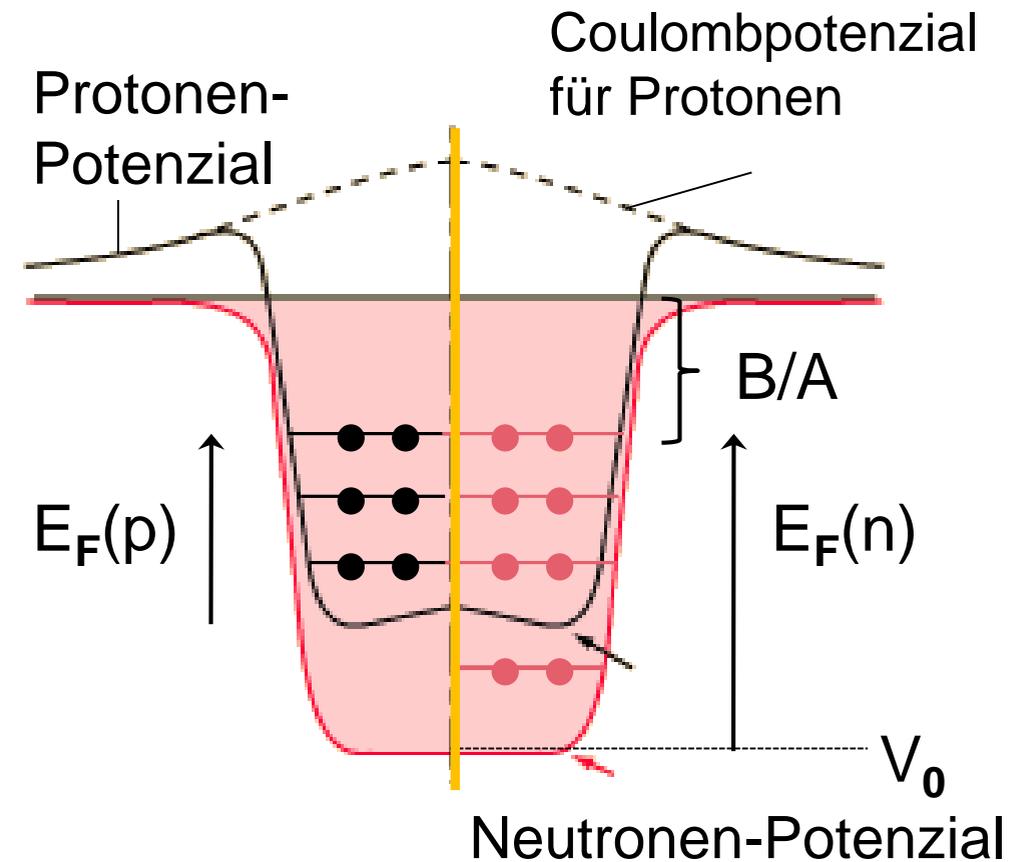
aber: magische Zahlen

Z oder N = 20, 28, 50, 82, 126
⇒ Schalenstruktur der Kerne



■ Fermigas-Modell

- Kern-Eigenschaften können auch beschrieben werden durch Modell, in dem sich Nukleonen in einem **mittleren Potenzial frei bewegen**
- zwei unabhängige Fermionen-Systeme:
Neutronen, Protonen
- Nukleonen bewegen sich unter Beachtung des Pauli-Prinzips (da Spin = $\frac{1}{2}$ Teilchen) **im Kern wechselwirkungsfrei**
- mittleres Kernpotenzial = **Überlagerung** der einzelnen kurzreichweitigen Nukleon-Nukleon-Wechselwirkungen



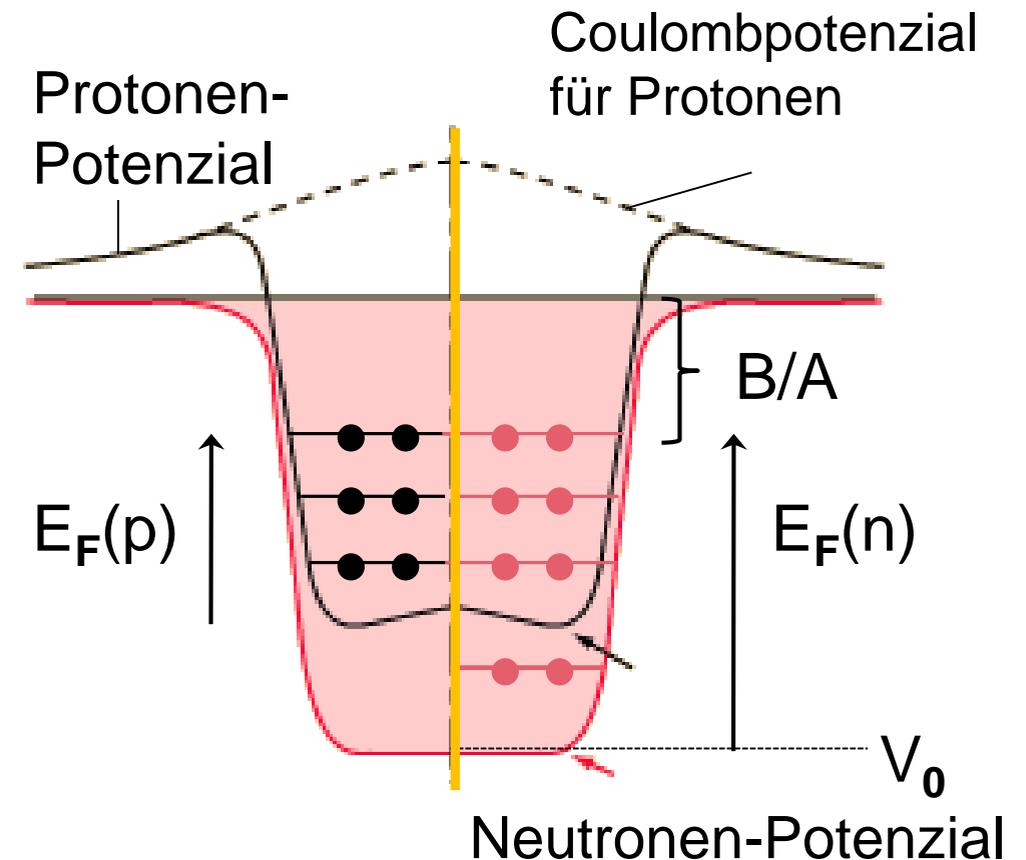
Fermigasmodell

■ Fermigas-Modell - Grundlagen

- verschiedene Potenziale für Protonen und Neutronen
- **Neutronen:** Kastenpotenzial

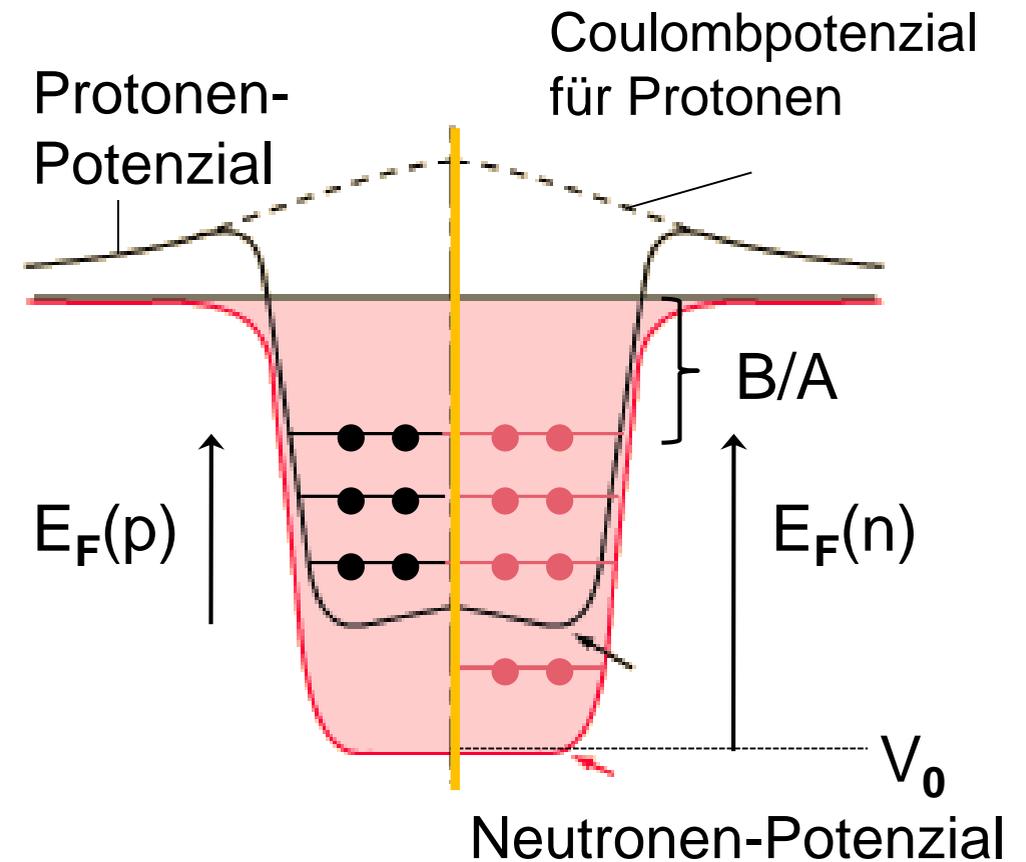
$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & 0 \leq r \leq R \\ 0 & r > R \end{cases}$$

- Protonen: Kastenpotenzial & Coulombkraft
⇒ geringere Tiefe V_0
- Grundzustand des Kerns ($T = 0$):
alle Nukleon-Zustände sind besetzt
⇒ **keine Stöße bzw. Wechselwirkungen**



■ Fermigas-Modell: Quantenstatistik

- Nukleonen bilden ein wechselwirkungsfreies Fermigas, d.h. **statistisches Ensemble** (s. Kap. 6, Spin)
- Grundzustand ($T = 0$)
alle Nukleon-Zustände ab dem Potenzialboden V_0 sind besetzt bis zur **Fermi-Energie E_F**
- **Pauli-Prinzip:**
jeder p- oder n-Zustand besetzt mit 2 Teilchen (Spin $\uparrow \downarrow$)



Fun with Facts: Fermi-Kante

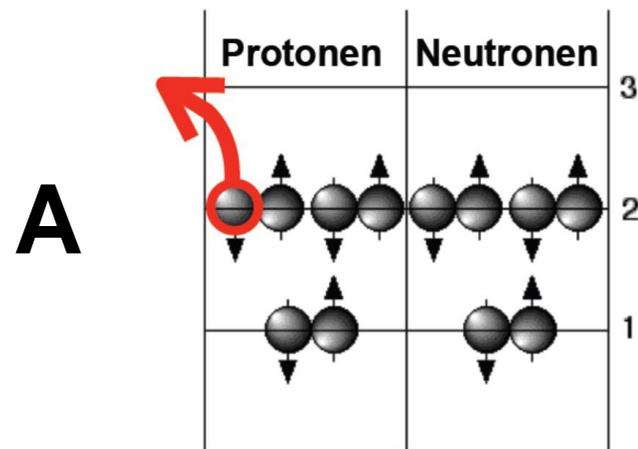
■ Was passiert, wenn man ein Nukleon an der Fermi-Kante wegnimmt?

- A) Es entsteht ein **Nukleon-Loch** !
- B) Es entsteht **kein Nukleon-Loch** !

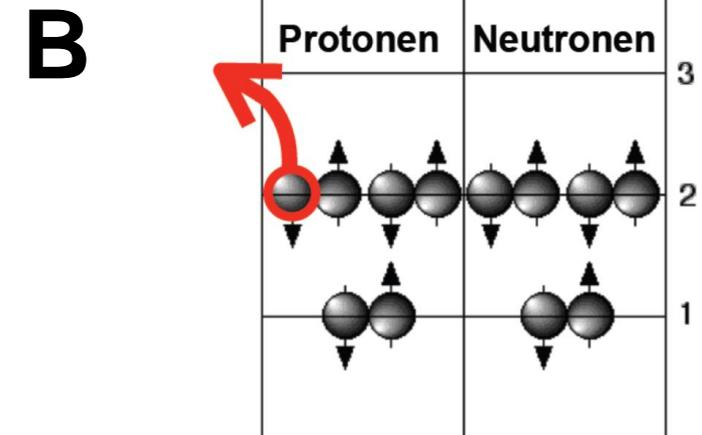
SHELDON COOPER
© presents ©
FUN WITH ~~FACTS~~



Facts



Die Abstände der besetzten Niveaus bleiben gleich !



Die Abstände der besetzten Niveaus werden größer !

Quantenphysik früher und heute

