

Atome & Kerne

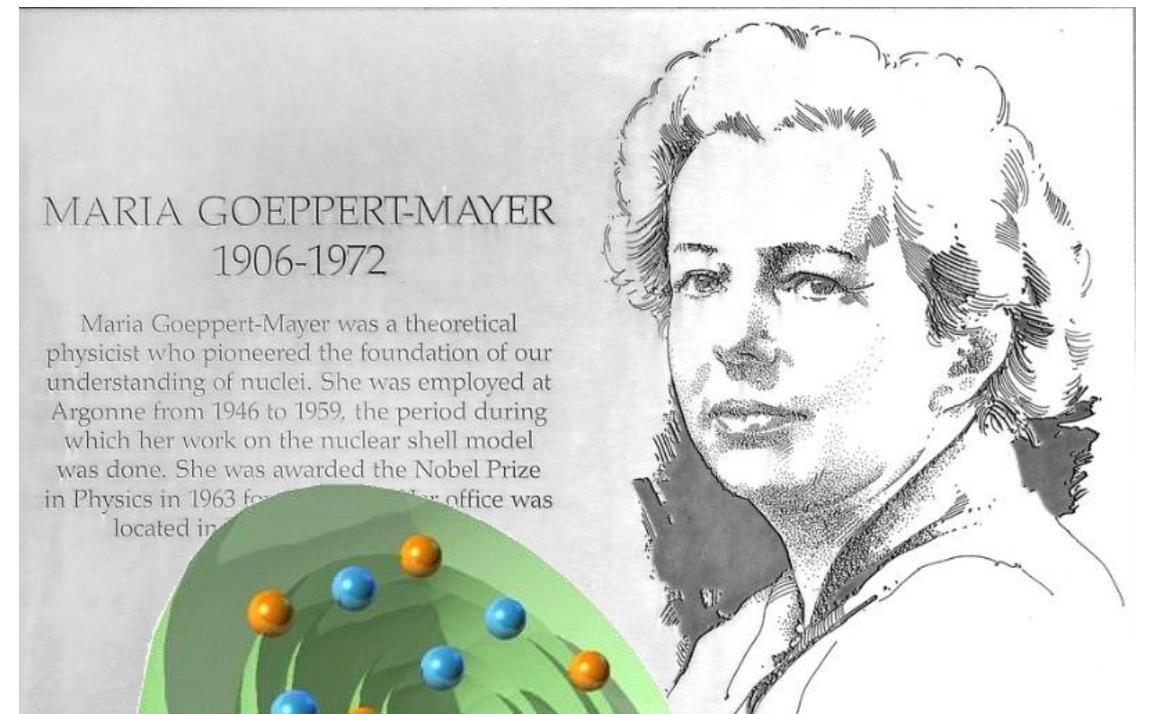
Sommersemester 2019

Vorlesung # 20, 04.07.19

Guido Drexlin, Institut für Experimentelle Teilchenphysik, Fakultät für Physik

Kerne

- Fermigas-Modell:
 - Größe des Fermi-Impulses
 - Fermigas im Kern und Festkörper
- Magische Zahlen & Potenzialansätze
- Schalenmodell der Kerne
 - LS Kopplung



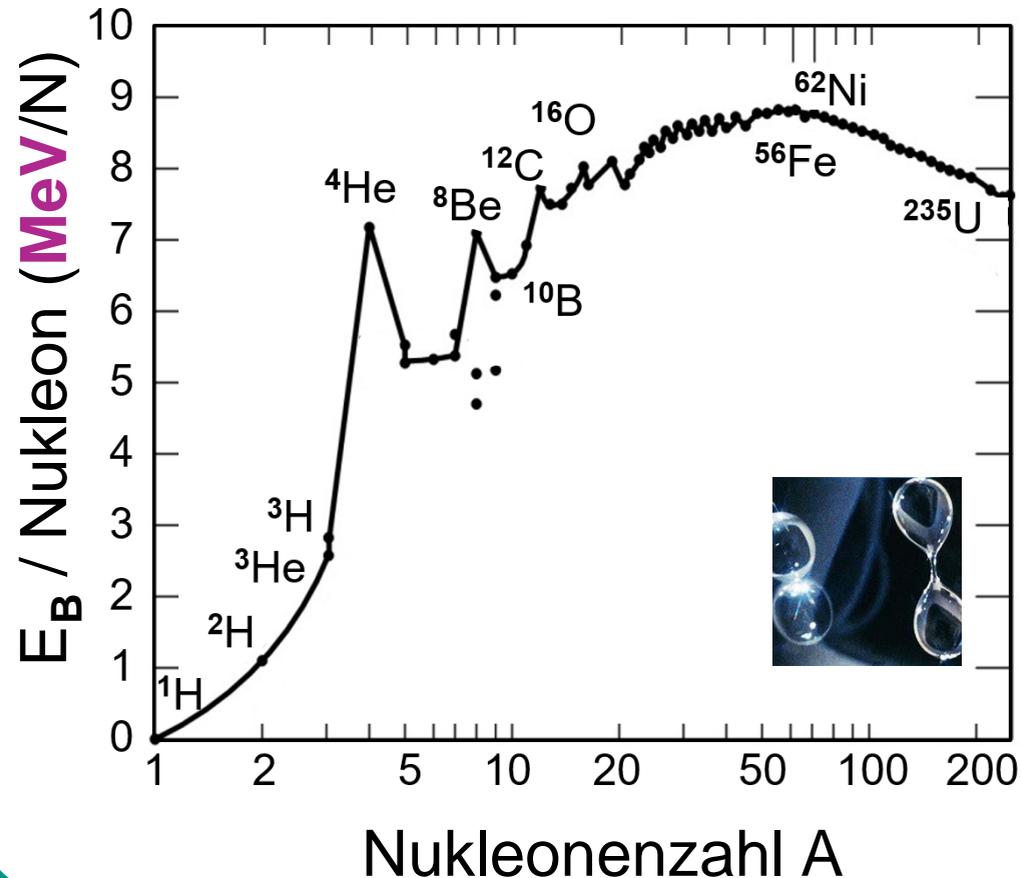
Kerne - Bindungsenergien



- **starke Kernkraft:** kurzreichweitig (~ 1 fm), gesättigter Charakter

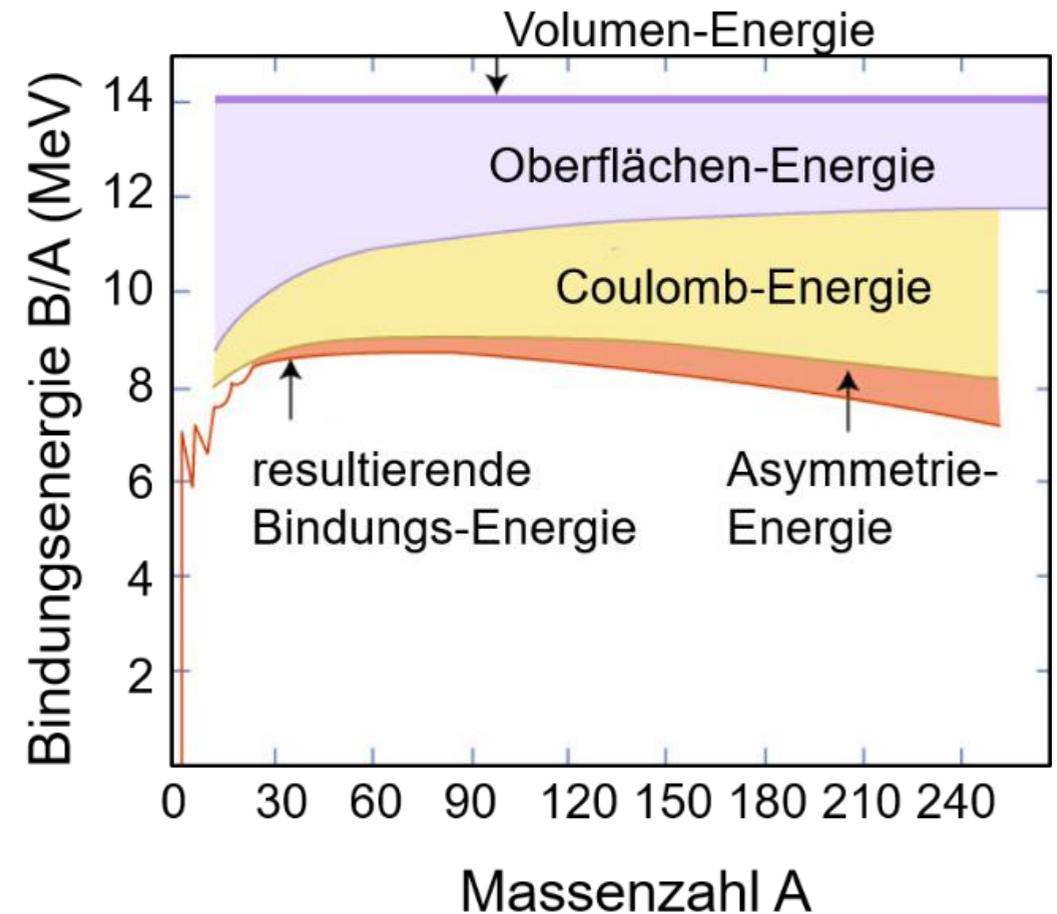
■ Bindungsenergien:

- Bindungsenergie auf **MeV**-Skala



■ Tröpfchenmodell:

- auf semi-empirischer Basis

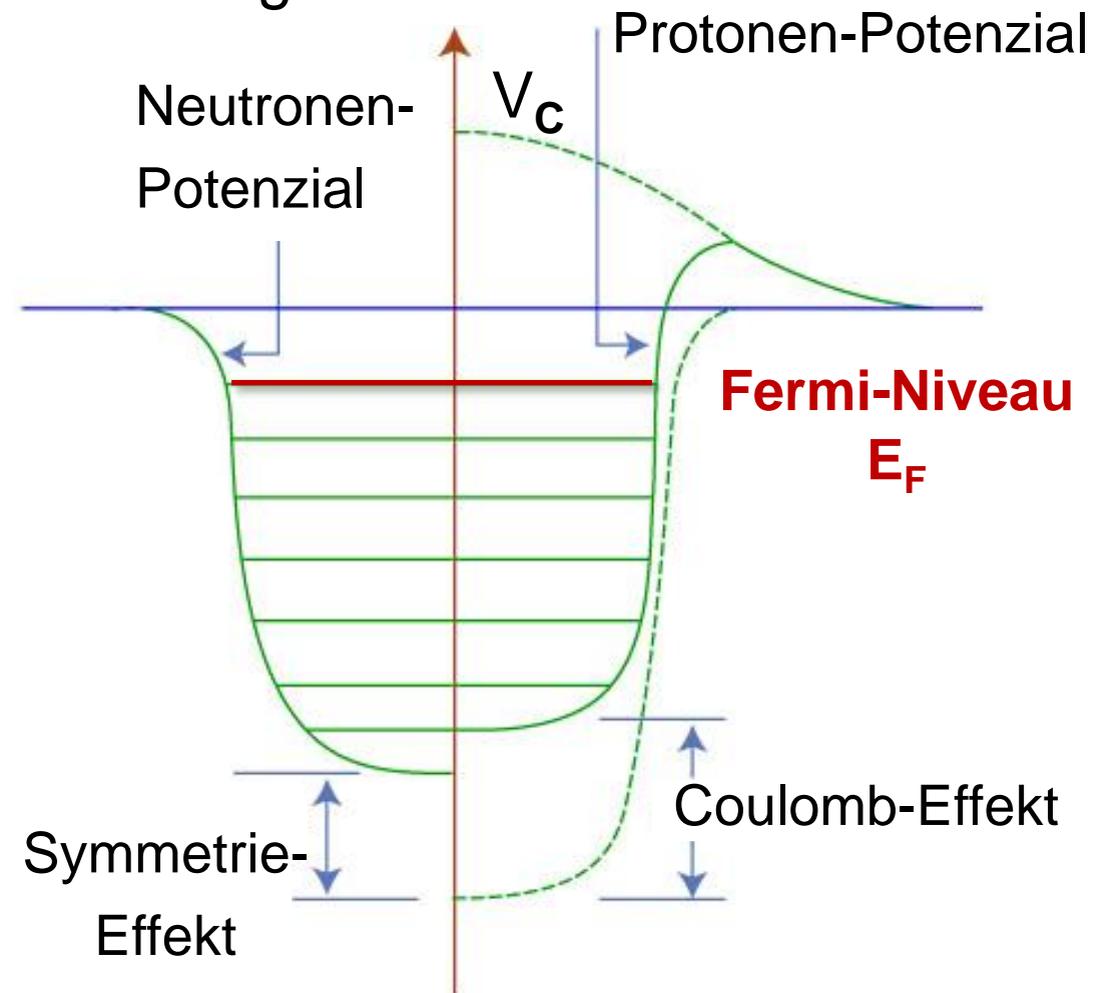


Fermigas-Modell – ein Einteilchenmodell



■ Fermigas-Modell

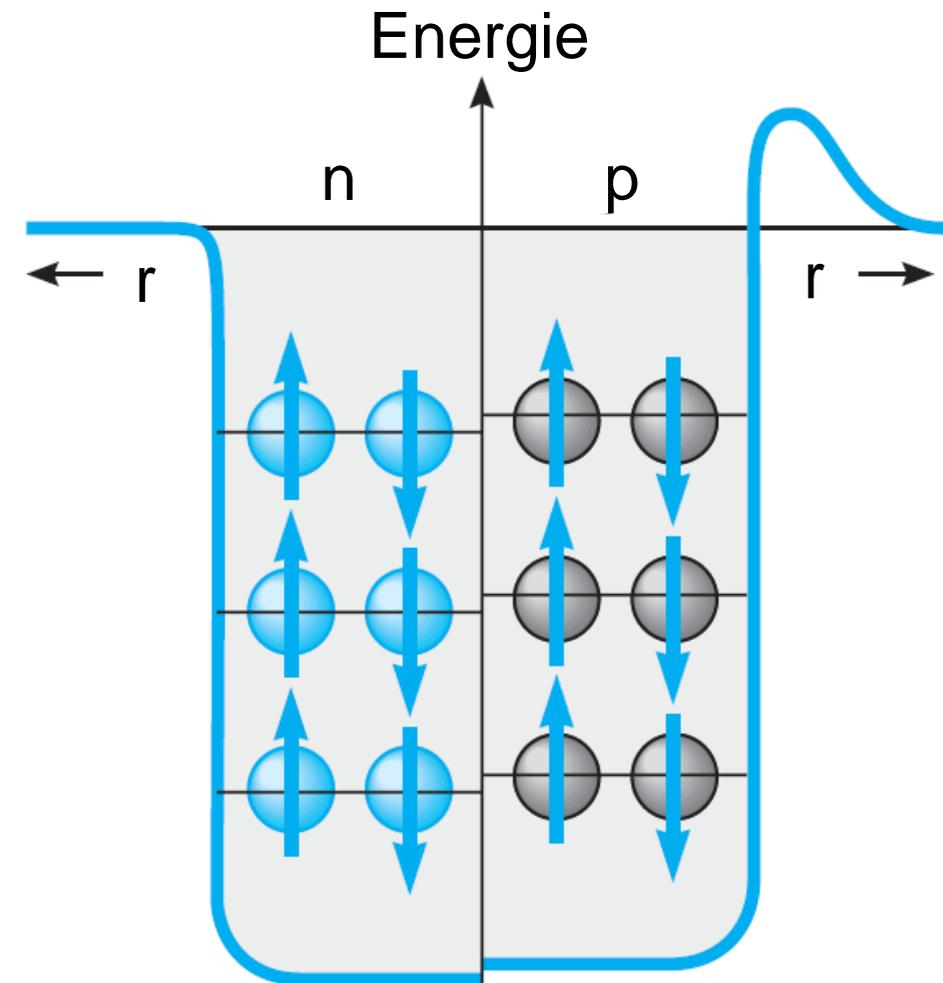
- jedes Nukleon bewegen sich wechselwirkungsfrei in **mittlerem Potenzial**
- unterschiedliche Potenziale für Protonen & Neutronen
- **Pauli-Prinzip:**
jeder p- oder n-Zustand besetzt mit 2 Teilchen (Spin $\uparrow\downarrow$)
- Grundzustand ($T = 0$):
alle Nukleon-Zustände ($\uparrow\downarrow$) ab Potenzialboden V_0 sind besetzt, identische **Fermi-Energie E_F** (ansonsten Zerfälle $n \rightarrow p$)



Fermigas-Modell – Größe Fermienergie?

Ah, Herr Fermi,
wir möchten die
Fermi-Energie
von Nukleonen
bestimmen!
Aber wie?

no problemo!

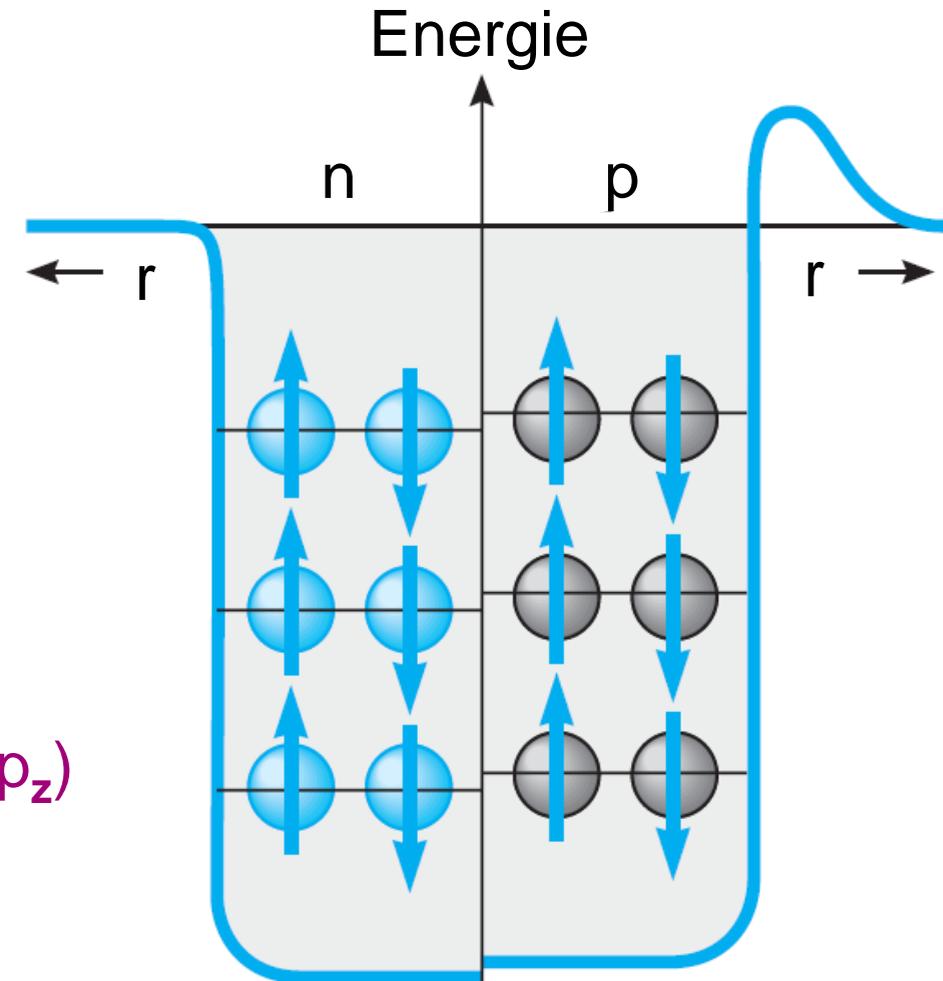
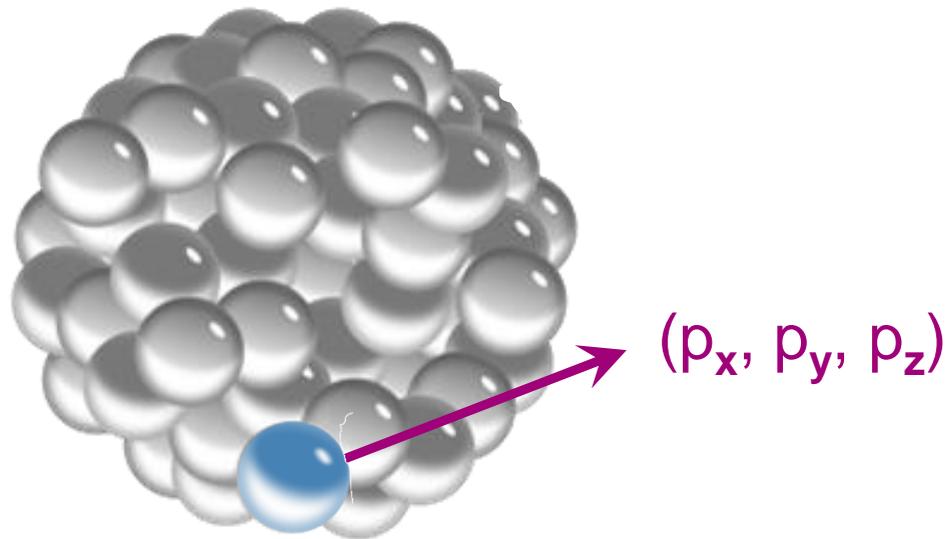


Lösungsweg: bestimme **Anzahl n**
der Zustände bis E_F

Fermigas-Modell

■ Fermigas-Modell: Nukleonen mit Fermi-Impuls p_F

- alle Nukleonen bewegen sich im Kern mit einem nicht vernachlässigbaren **Fermi-Impuls p_F**



wichtig für Pauli-Prinzip:
Nukleonen mit **Impuls-Spektrum**



Lösungsweg: bestimme **Anzahl n**
der Zustände bis E_F

Fermigas-Modell & Heisenberg

■ Fermigas-Modell:

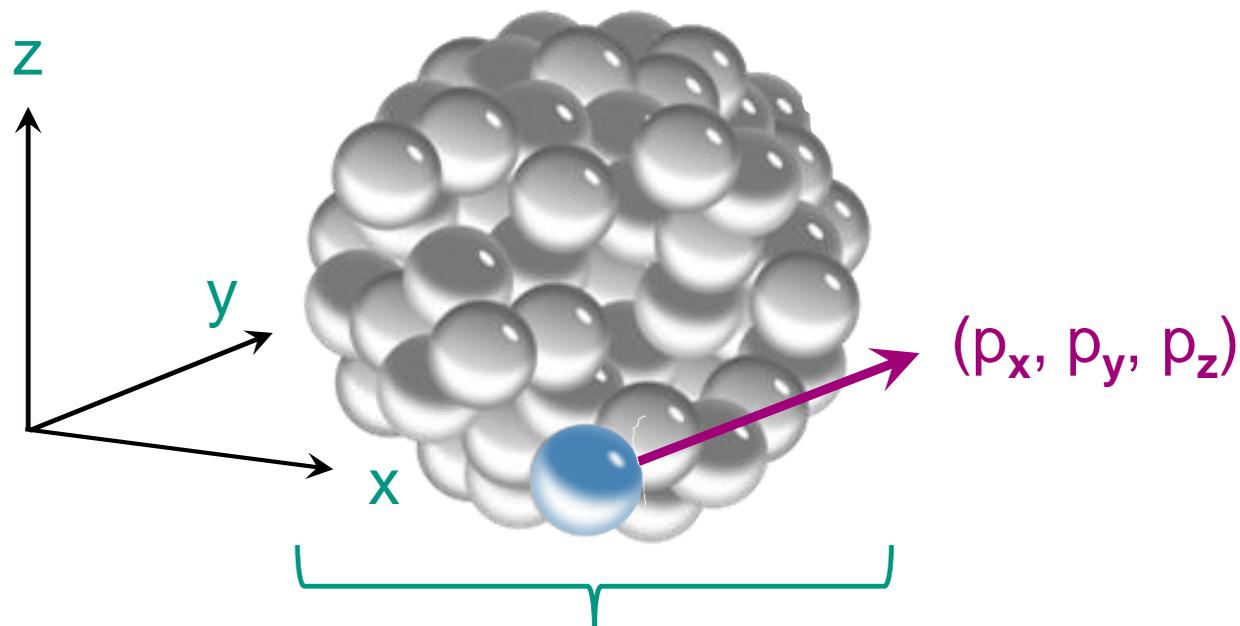
Nukleon im Kern bewegt sich mit nicht vernachlässigbarem Impuls

Fermi-Impuls p_F durch Heisenbergsche Unschärferelation

- Ortsraum der Nukleons

Unschärferelation

$$dx \cdot dp_x > \hbar/2$$



dx : Kerndimension (einige fm)

dp : Fermi-Impuls (~ 250 MeV/c)



Fermigas-Modell - Phasenraum

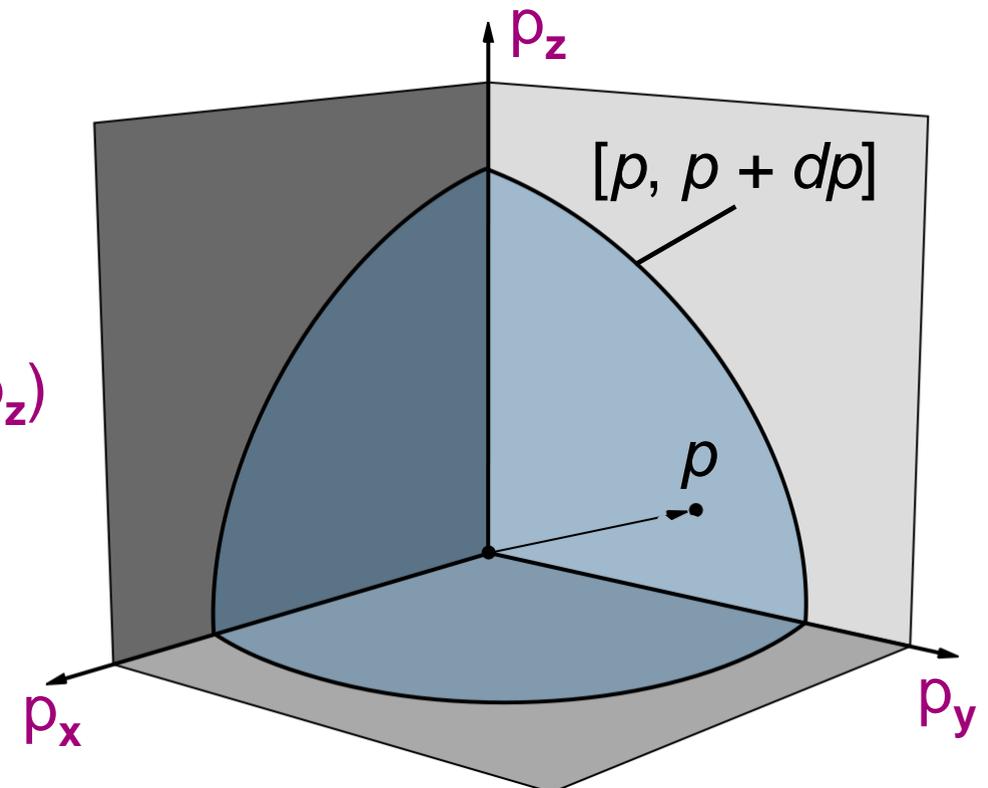
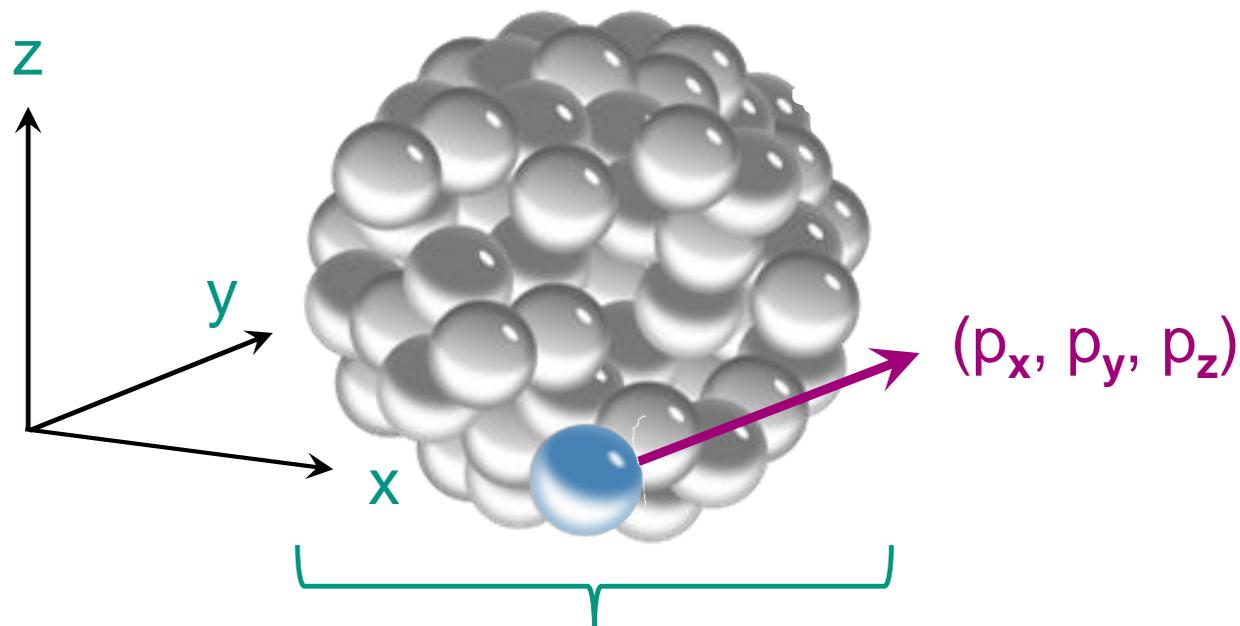
■ Fermigas-Modell:

Nukleon - 6 dimensionaler Phasenraum

$$\underbrace{dx \cdot dy \cdot dz}_{\text{Ortsraum}} \cdot \underbrace{dp_x \cdot dp_y \cdot dp_z}_{\text{Impulsraum}}$$

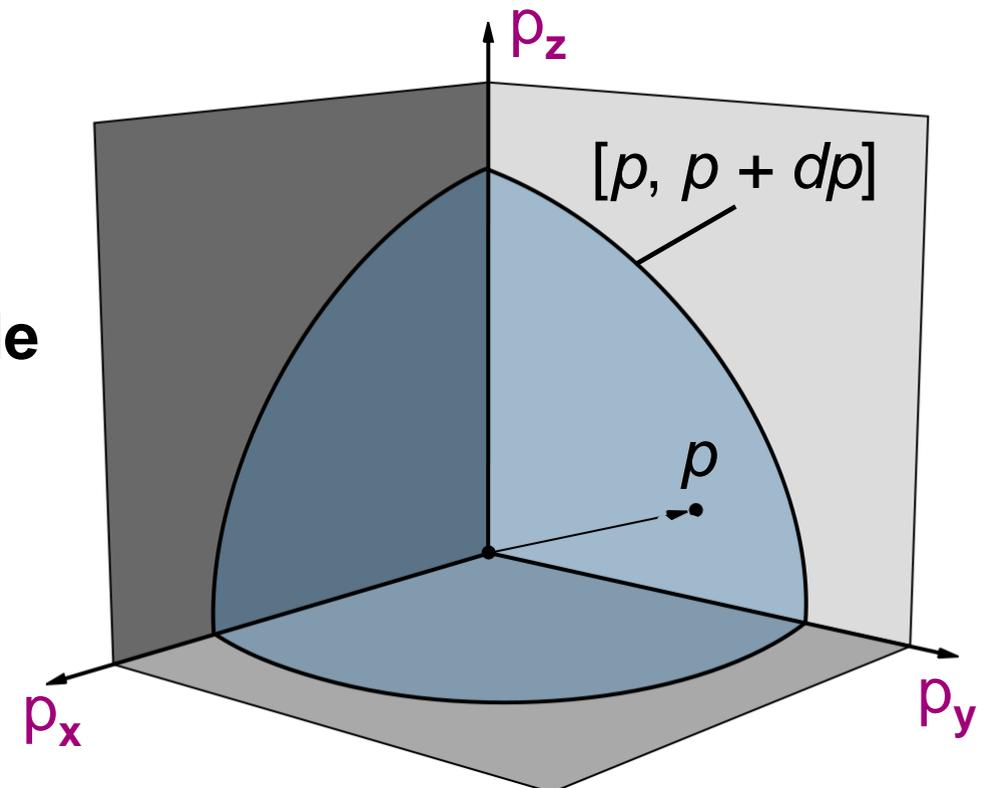
- Ortsraum des Nukleons

- Impulsraum des Nukleons



■ Nukleonenzahl dn in Impulsschale dp

- Ziel: bestimme die Anzahl der Zustände (Protonenzahl Z , Neutronenzahl N bzw. Massenzahl A) bis Fermi-Energie E_F
- Pauli: pro Phasenraumzelle $\sim h^3$ können wir 2 Zustände besetzen
- zunächst differentiell im Impulsraum über das Kernvolumen
- **Anzahl dn der Nukleonen-Zustände** im Impuls-Intervall $[p, p+dp]$, d.h. an der Oberfläche $4\pi p^2$ der Kugelschale mit Dicke dp



■ Nukleonenzahl dn in Impulsschale dp

- Anzahl der Phasenraumzustände im Kernvolumen V mit $[p, p+dp]$:

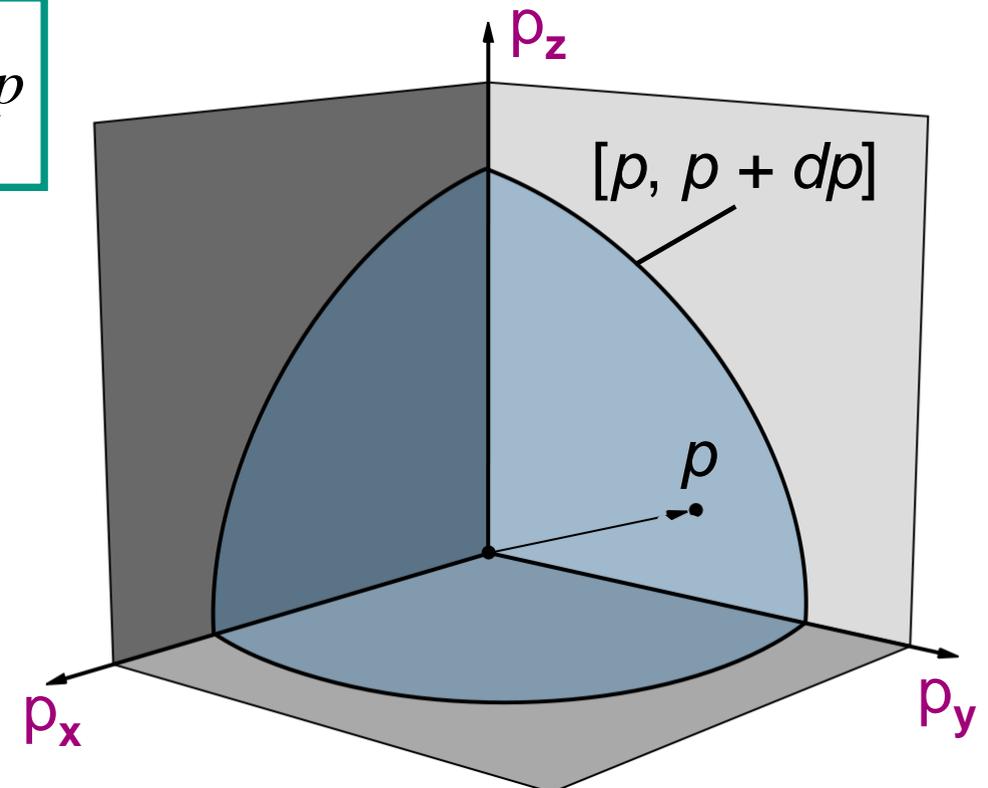
$$dn = \frac{4\pi}{(2\pi\hbar)^3} \cdot V \cdot p^2 dp = \frac{1}{2\pi^2\hbar^3} \cdot V \cdot p^2 dp$$

Kugel-Oberfläche
 $4\pi p^2$

Dicke dp

Phasenraumzelle $\sim h^3$

Anzahl dn der Zustände
 $\sim V \cdot 4\pi p^2 dp / h^3$



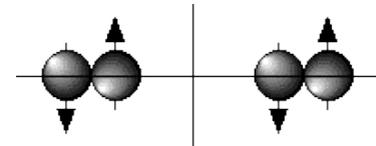
Fermigas-Modell – Nukleonenzahl n

■ Nukleonenzahl dn in Impulsschale dp

- Gesamtzahl n der Nukleonzustände aus Integration bis p_F

$$n = 2 \int_0^{p_F} dn = \frac{2}{2\pi^2 \hbar^3} \cdot V \cdot \int_0^{p_F} p^2 dp \quad \longrightarrow \quad n = 2 \cdot \frac{V \cdot p_F^3}{6 \cdot \pi^2 \cdot \hbar^3}$$

Nukleonspinfaktor



Anzahl **N**
an Neutronen:

$$N = \frac{V}{3\pi^2 \hbar^3} \cdot (p_F^n)^3$$

Anzahl **Z**
an Protonen:

$$Z = \frac{V}{3\pi^2 \hbar^3} \cdot (p_F^p)^3$$

Fermigas-Modell – Fermi-Impuls p_F

■ Bestimmung des Fermi-Impulses aus V und n

- Gesamtzahl n der Nukleonzustände aus Integration bis p_F

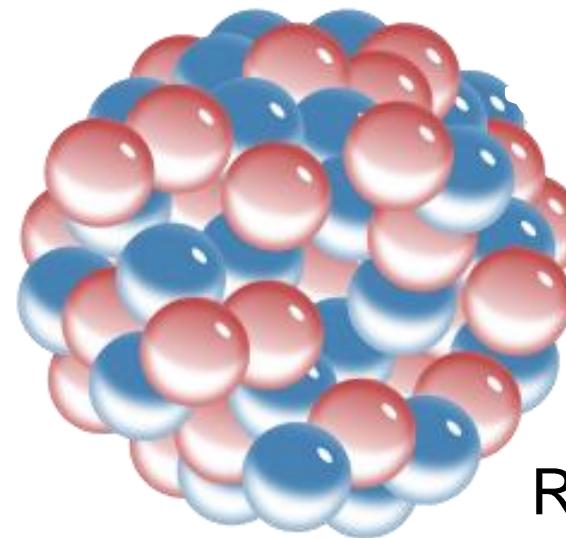
$$n = 2 \cdot \frac{V \cdot p_F^3}{6 \cdot \pi^2 \cdot \hbar^3}$$

mit $n = A / 2$
(für Kerne mit $N = Z = A/2$)

$$p_F = \left(\frac{9\pi}{8} \right)^{1/3} \frac{\hbar}{R_0} \approx 250 \text{ MeV} / c$$

Kernvolumen V :

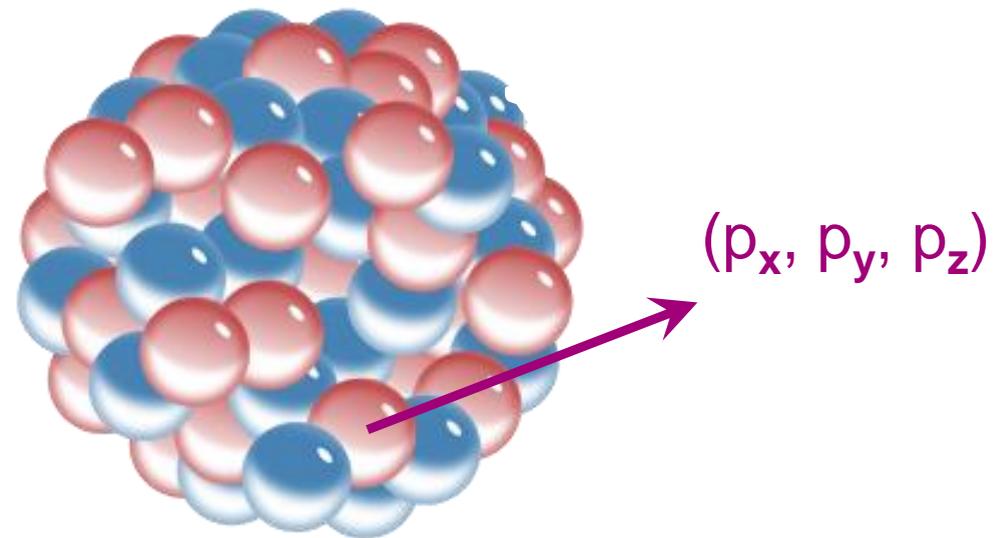
$$V = \frac{4}{3} \pi \cdot R^3 = \frac{4}{3} \pi \cdot R_0^3 \cdot A$$



$$R = R_0 \cdot A^{1/3}$$
$$R_0 = 1,21 \text{ fm}$$

■ Nukleonen besitzen nicht-vernachlässigbaren Fermi-Impuls

- Nukleonen bewegen sich frei (ohne Stoßprozesse) im Kern mit Impuls $p < p_F$
- Ursache: Heisenbergsche Unschärfe-Relation
- wichtig:
wir können p_F nur aus Nukleonenzahl A und Radius R_0 berechnen !



$$p_F = \left(\frac{9\pi}{8} \right)^{1/3} \frac{\hbar}{R_0} \approx 250 \text{ MeV} / c$$

Fermi-Energie

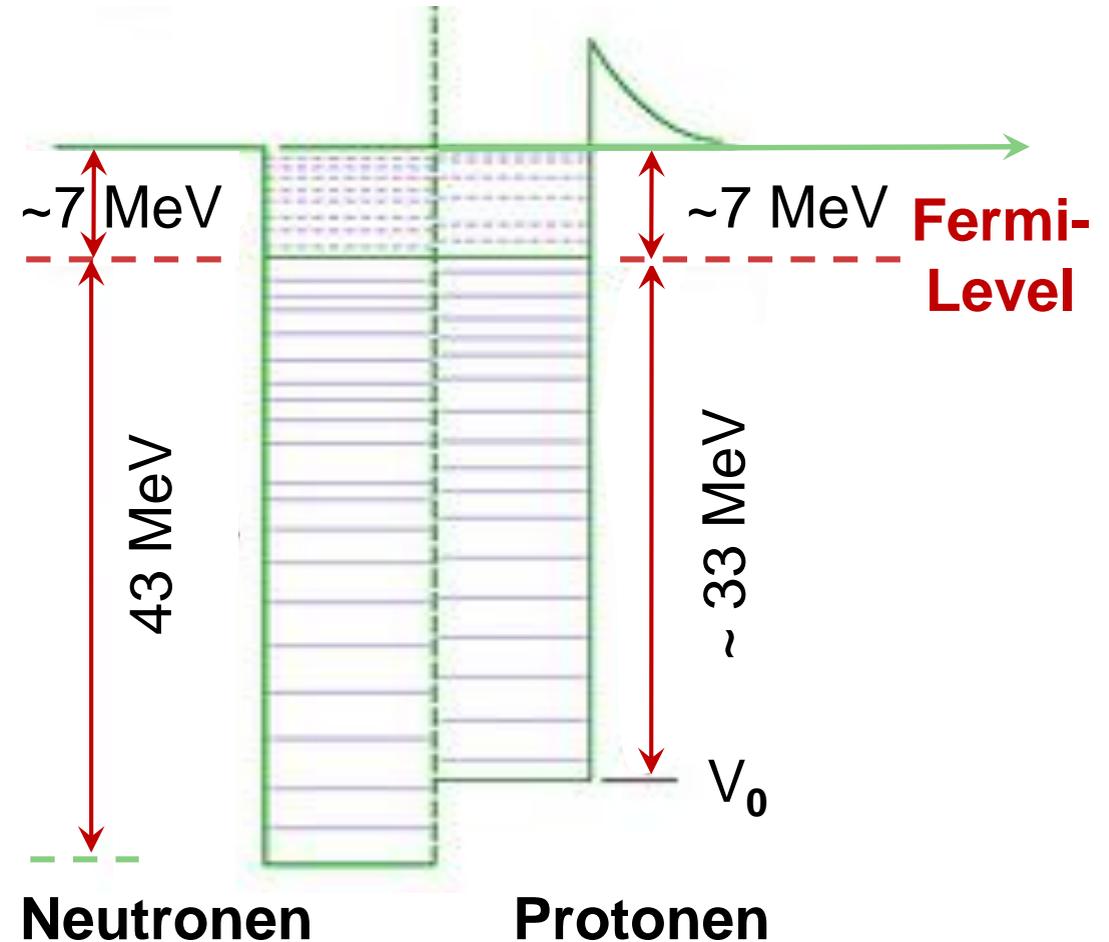
■ Nukleonen: Fermi-Energie E_F

- Nukleonen bewegen sich nicht-relativistisch!

$$E_F \approx \frac{p_F^2}{2M} = 33 \text{ MeV}$$

- wichtig: das anziehende Potenzial V_0 des Kerns muss tiefer sein! Aber: E_{kin} fast so groß wie V_0

$$V_0 \approx E_F + \langle B/A \rangle = 33 \text{ MeV} + 7 \text{ MeV} = 40 \text{ MeV}$$



Fermi-Energie: Zustandsdichte

- wie groß ist die Zustandsdichte dn/dE als Funktion der Nukleon-Energie E ?

$$dn = \frac{1}{2\pi^2 \hbar^3} \cdot V \cdot p^2 dp$$

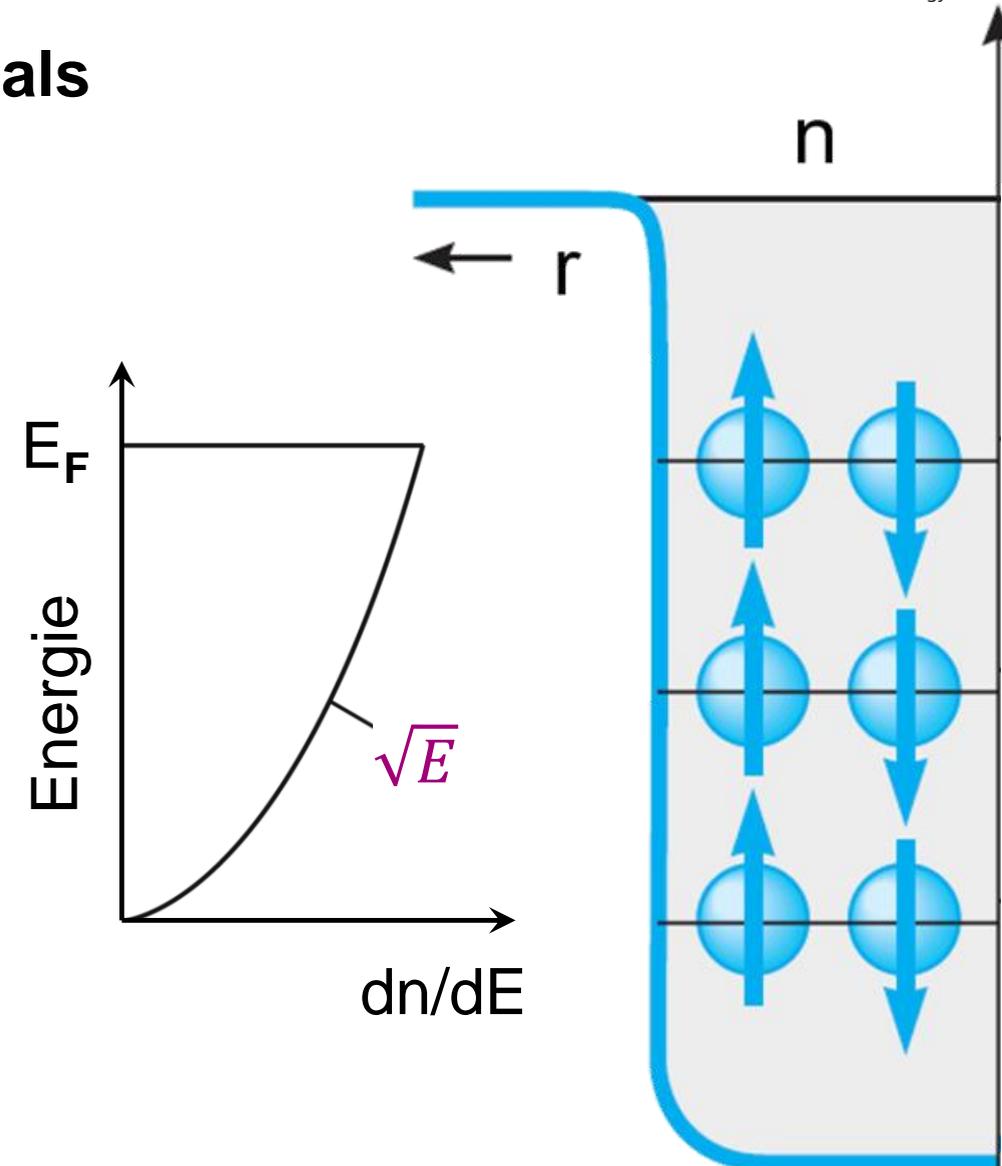
Energie-Impulsrelation $p^2 = 2 M_N \cdot E$

$$2 p dp = 2 M_N \cdot dE$$

$$p^2 \cdot dp = \sqrt{2 M_N^3 \cdot E} \cdot dE$$

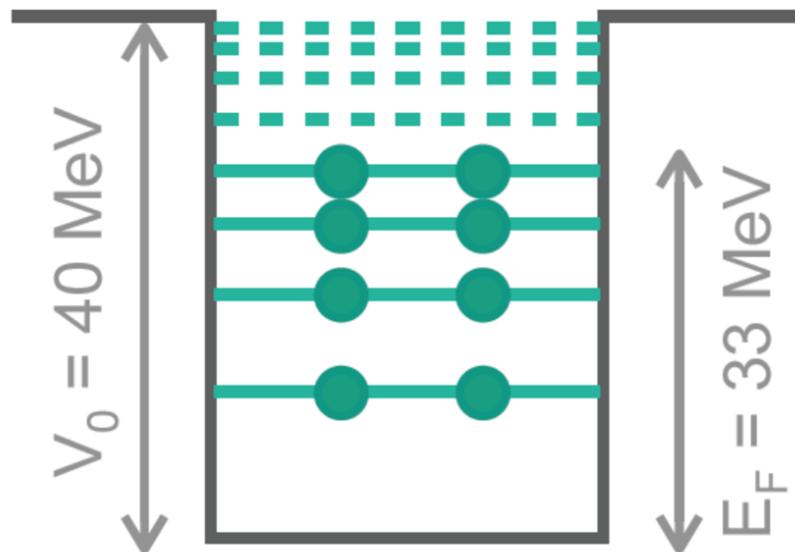
$$\frac{dn}{dE} = \frac{1}{\sqrt{2} \pi^2 \hbar^3} \cdot M_N^{3/2} \cdot V \cdot \sqrt{E}$$

- Zustandsdichte $\sim \sqrt{E}$



■ Fermi-Energie E_F in der Kern- und Festkörper- Physik

**freies Nukleonengas
im Atomkern**

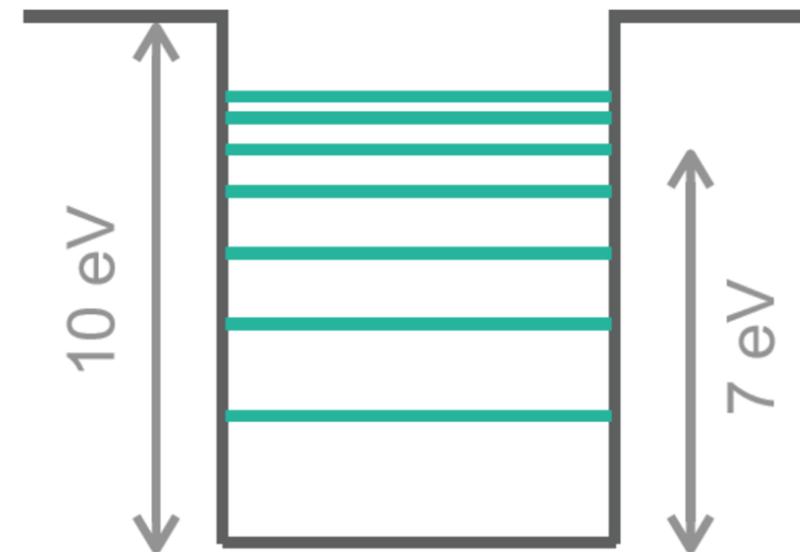


Fermi-Energie: $E_F \sim 33 \text{ MeV}$

Austrittsarbeit: $W \sim 7 \text{ MeV}$

Potenzialtiefe: $V \sim 40 \text{ MeV}$

**freies Elektronengas
im Festkörper (z.B. Cu)**



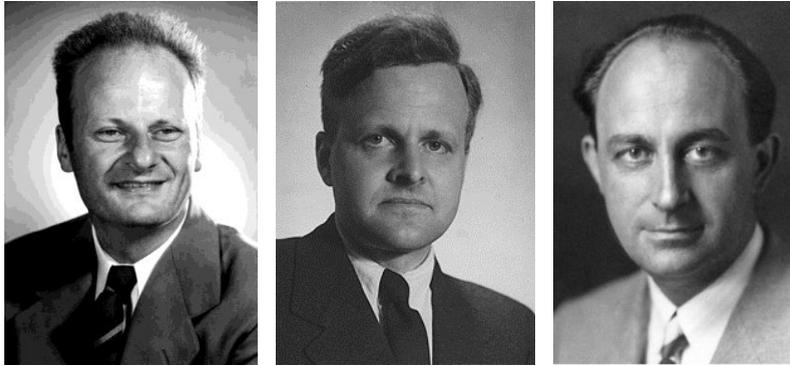
Fermi-Energie: $E_F \sim 7 \text{ eV}$

Austrittsarbeit: $W \sim 3-4 \text{ eV}$

Potenzialtiefe: $V \sim 10 \text{ eV}$

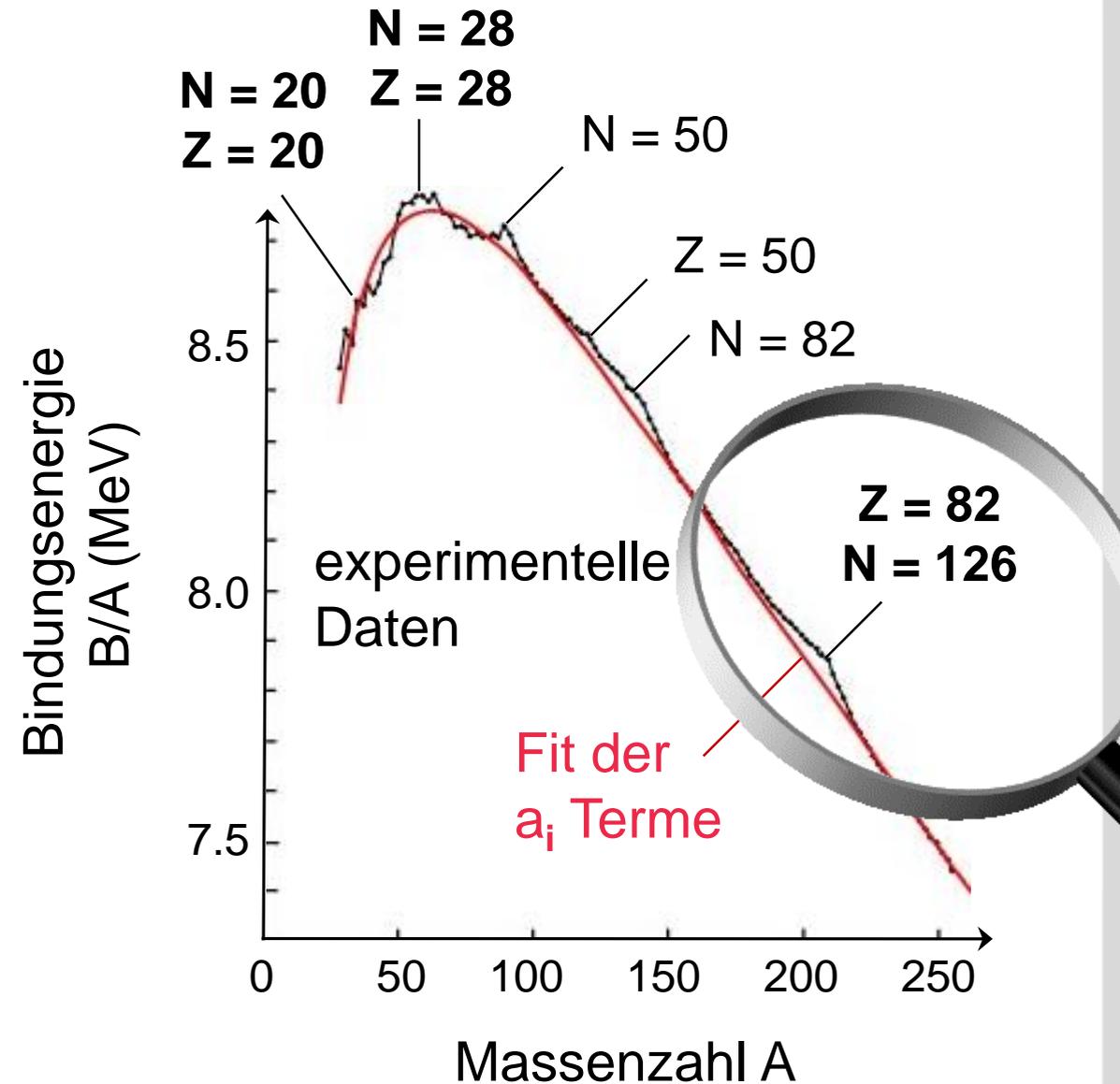
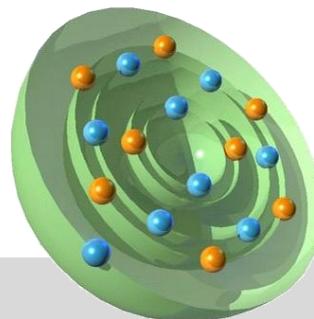
Limits der bisherigen Modelle

■ Vergleich von empirischen Modellen und experimentellen Daten



aber: magische Zahlen

Z oder N = 20, 28, 50, 82, 126
⇒ Schalenstruktur der Kerne



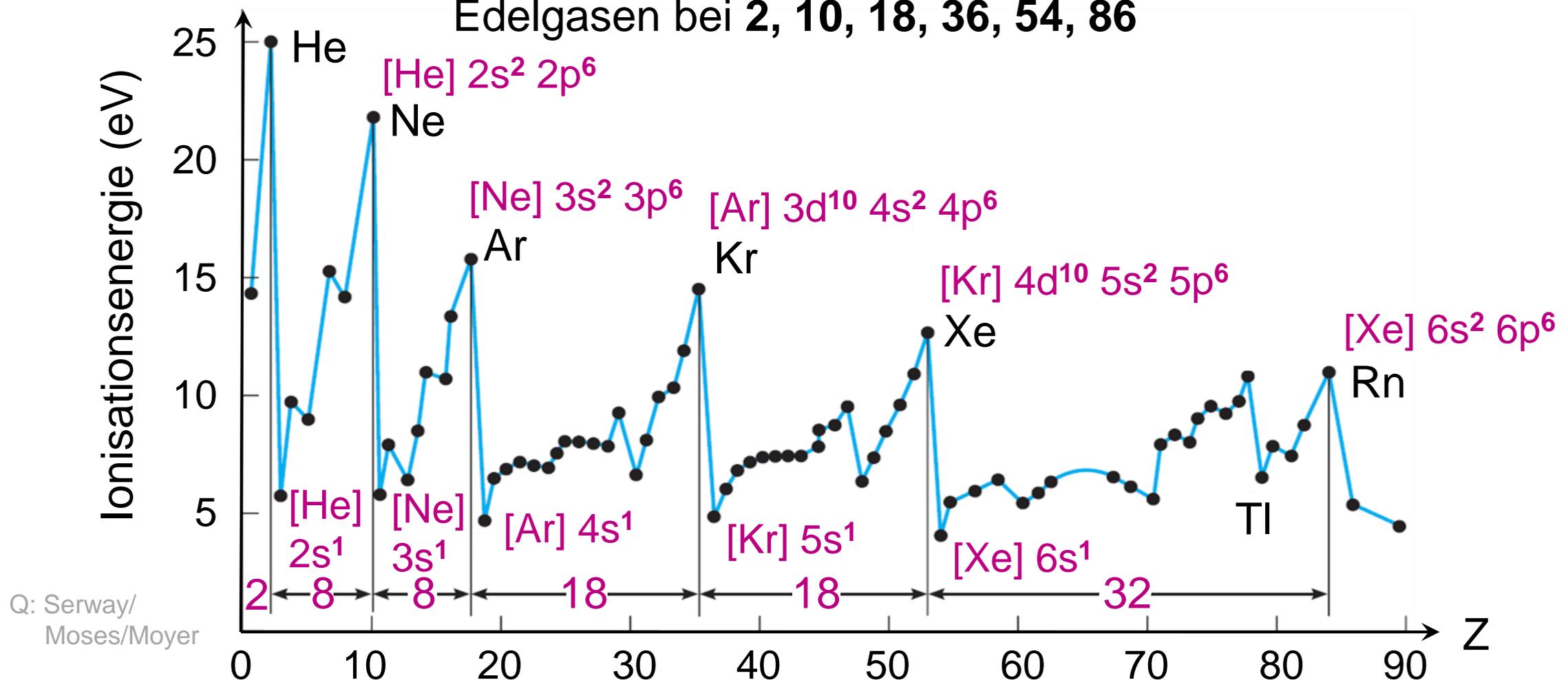
Schaleneffekte in der Atomphysik

■ Schalenstruktur der Elektronen in der Atomhülle

basiert auf **Aufbau-Prinzip von Madelung** (mit Hundschen Regeln)

- (Sub-) Schalenabschluss bei $2 + 8 + 8 + 18 + 18 + 32$, d.h. Z von

Edelgasen bei **2, 10, 18, 36, 54, 86**

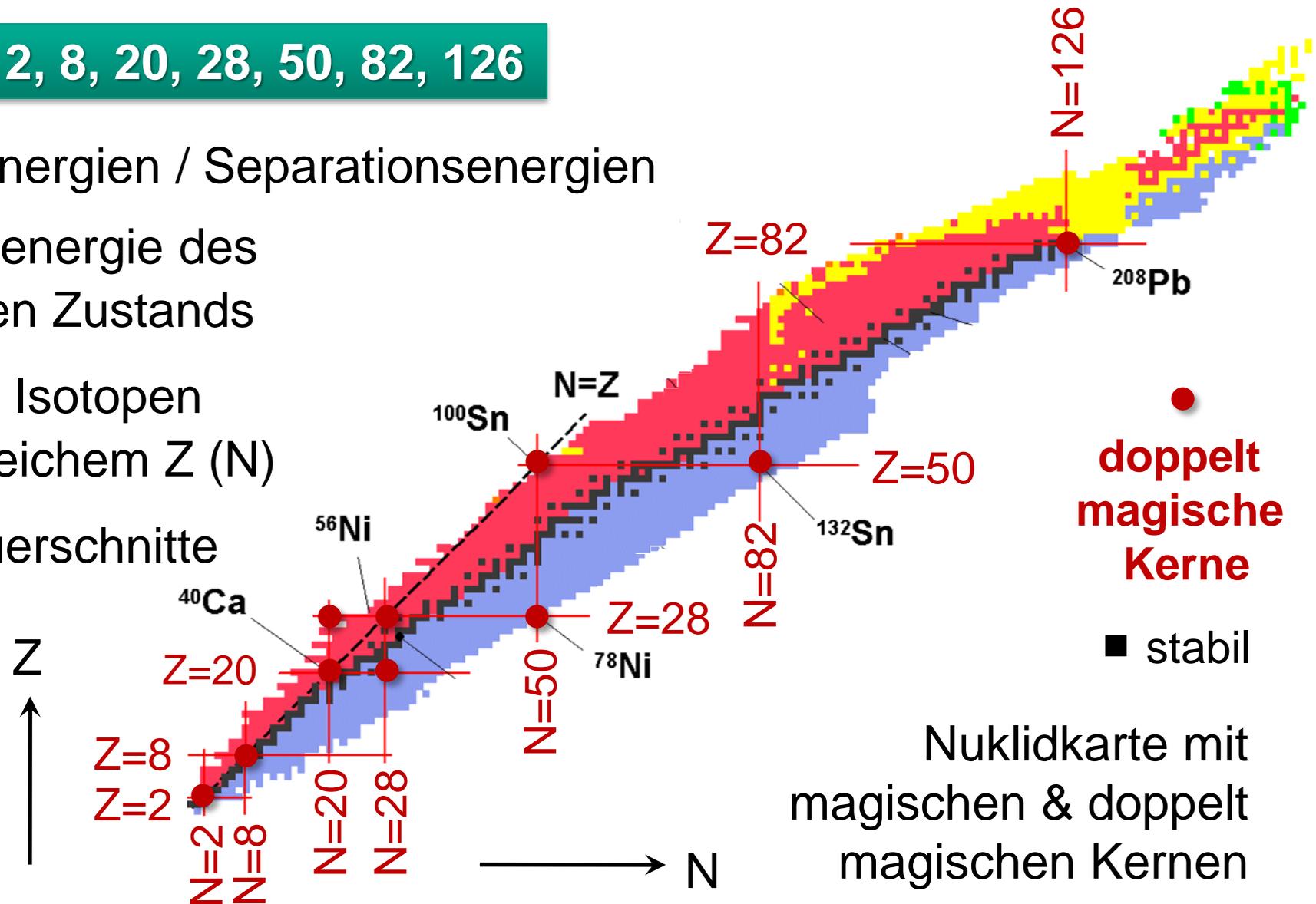


Magische Zahlen

■ Nuklide mit den folgenden „magischen“ Zahlen zeigen

Z oder N = 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126

- hohe Bindungsenergien / Separationsenergien
- hohe Anregungsenergie des ersten angeregten Zustands
- große Anzahl an Isotopen (Isotonen) bei gleichem Z (N)
- kleine Einfangquerschnitte für Neutronen
- große relative Häufigkeit



Magische Zahlen – experiment. Befunde

Bindungsenergie

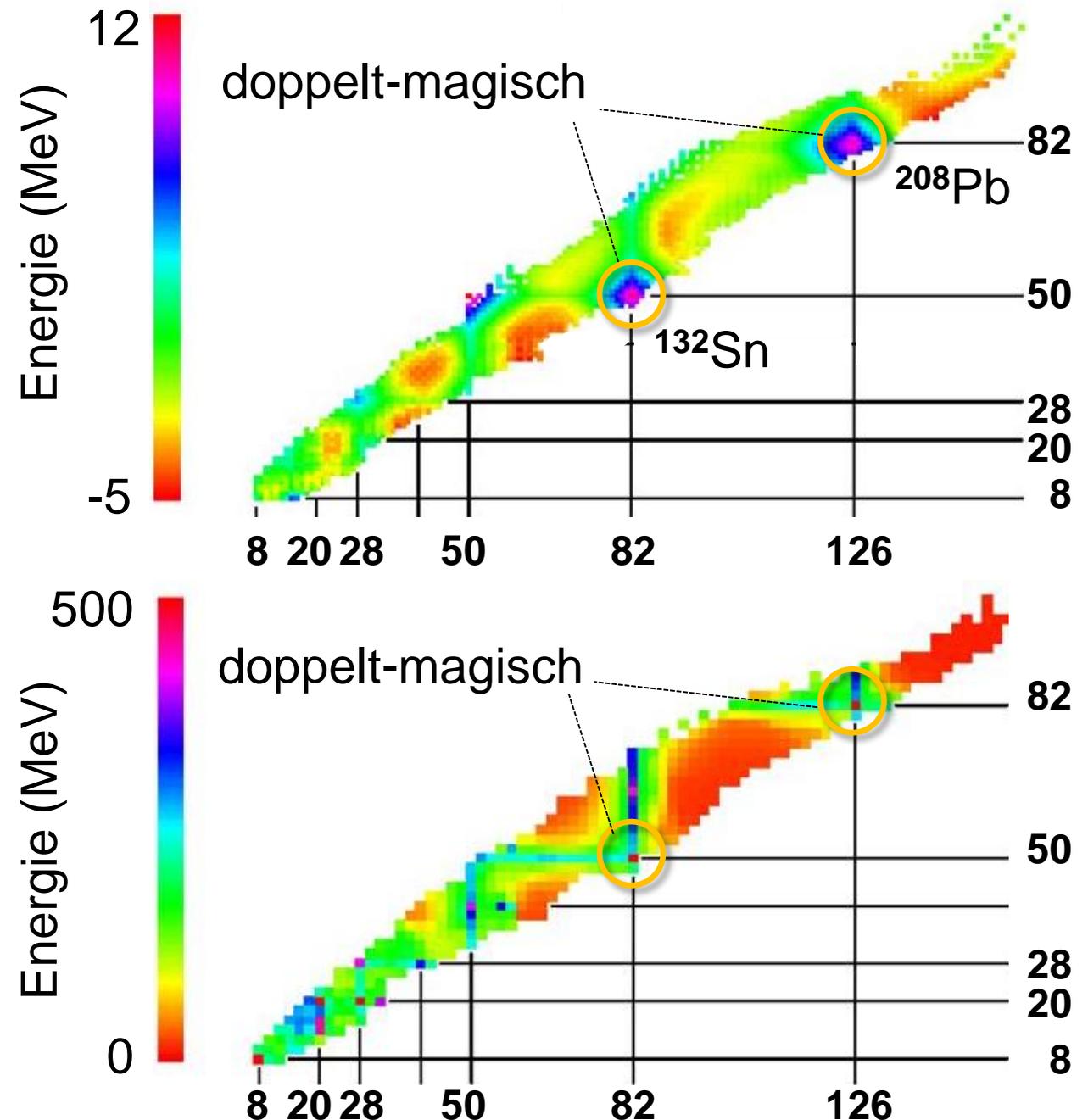
hier: Abweichungen ΔE
von Bethe-Weizsäcker
Massenformel:

hohe Bindung bei
magischen Zahlen

Anregungsenergie

hier: Energie des ersten
angeregten

Kernniveaus mit $J^P = 2^+$:
hohe Anregungsenergie
bei magischen Zahlen

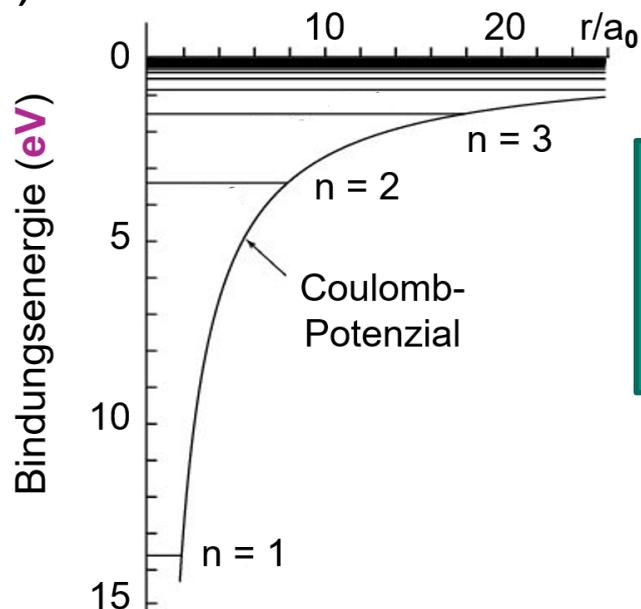


■ Analogien & Unterschiede im Kernpotenzial zur Atomphysik

■ Atomphysik

- magische Zahlen:
2, 10, 18, 36, 54, 86
- **erzeugendes Potenzial:**
langreichweitiges Coulombfeld

$$V(r) \sim -Z e^2 / r$$



gleiche
Notationen:
 n, ℓ, j

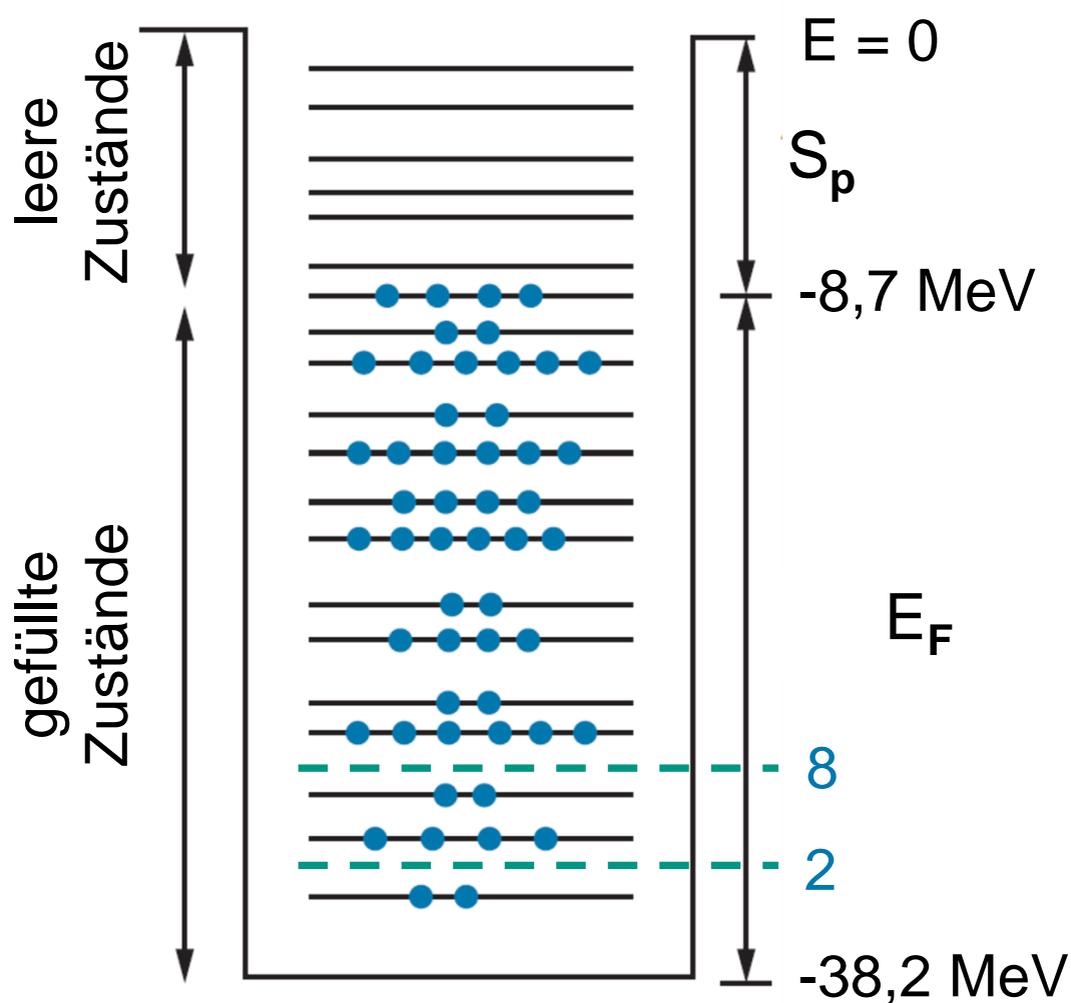
■ Kernphysik

- magische Zahlen:
2, 8, 20, 28, 50, 82, 126
- **erzeugendes Potenzial:**
kurzreichweitige Kernkraft (fm)
 $V(r) \sim ?$
 - ⇒ Kastenpotenzial ?
 - ⇒ Harmonischer Oszillator ?
 - ⇒ Woods-Saxon-Potenzial !

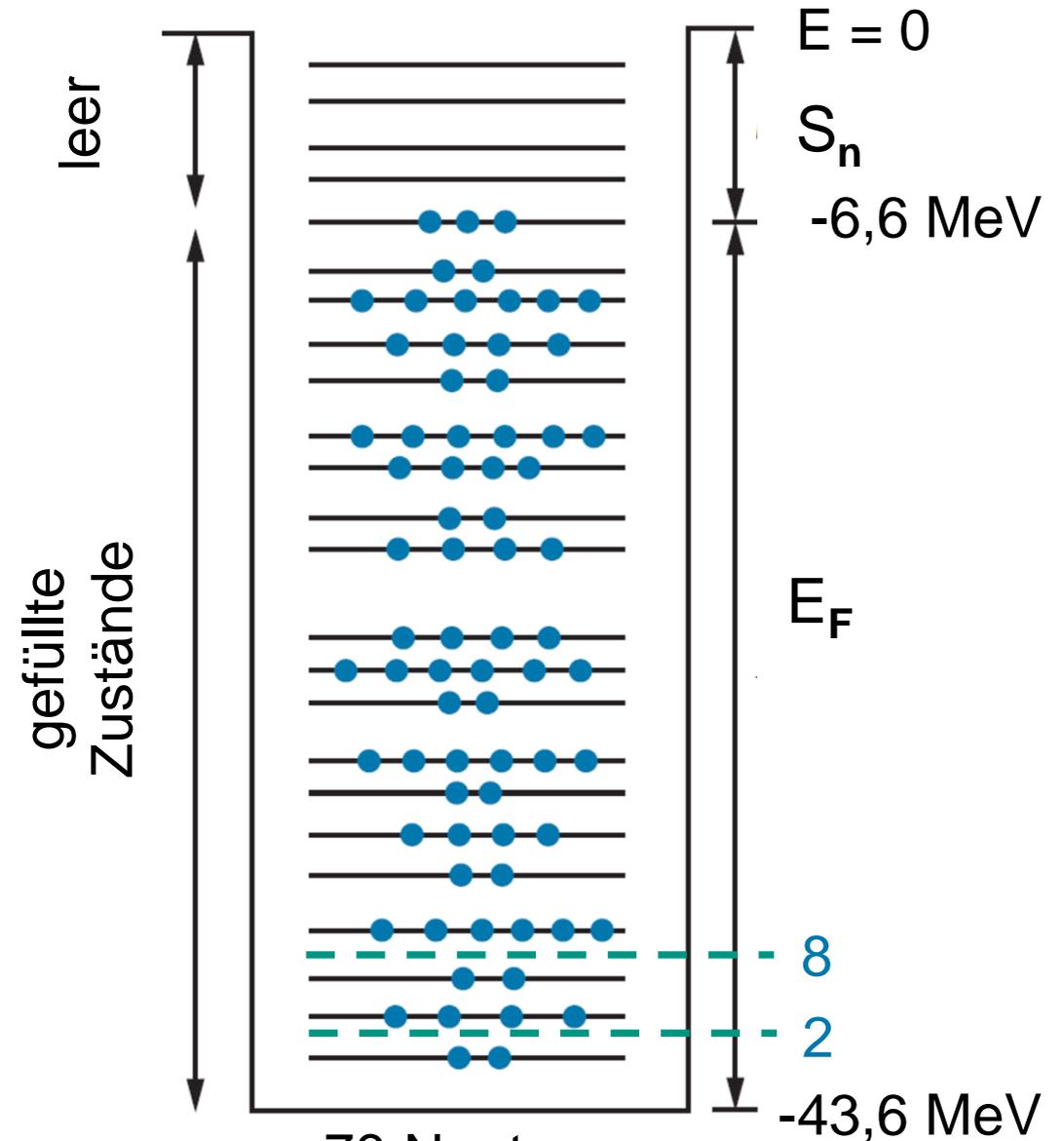
gemittelttes Kern-Potenzial:
Anpassung bis magische
Zahlen reproduziert

Kernpotenzial – Beispiel Tellur-125

■ Visualisierung unseres Ziels: ein Potential für Nukleon-Schalen



Zustände von 52 Protonen...



... 73 Neutronen

Kernpotenzial – Kastenpotenzial

■ Fallstudie # 1 – Nukleonen im Kasten

■ Kernphysik: magische Zahlen

2, 8, 20, 28, 50, 82, 126

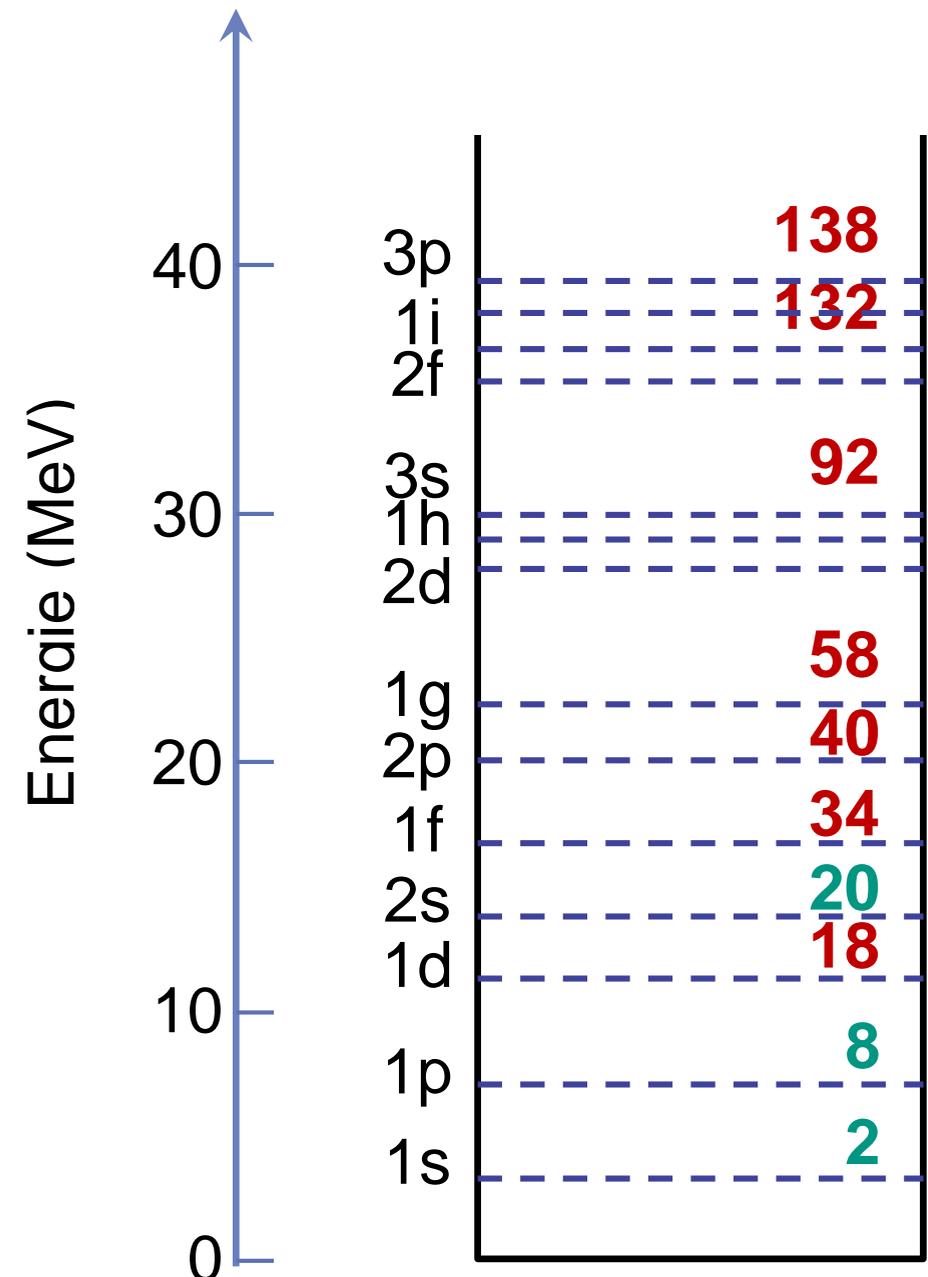
- Nukleonen in einem Kastenpotenzial mit Tiefe $V_0 = 40$ MeV (s. Fermigas)

$$V(r) = -V_0 \text{ für } r < R$$

$$V(r) = 0 \text{ für } r > R$$

für $\ell = 0$ (Zentrifugalterm für $\ell \neq 0$)

- Schalenabschlüsse stimmen für schwere Kerne nicht mehr mit magischen Zahlen überein

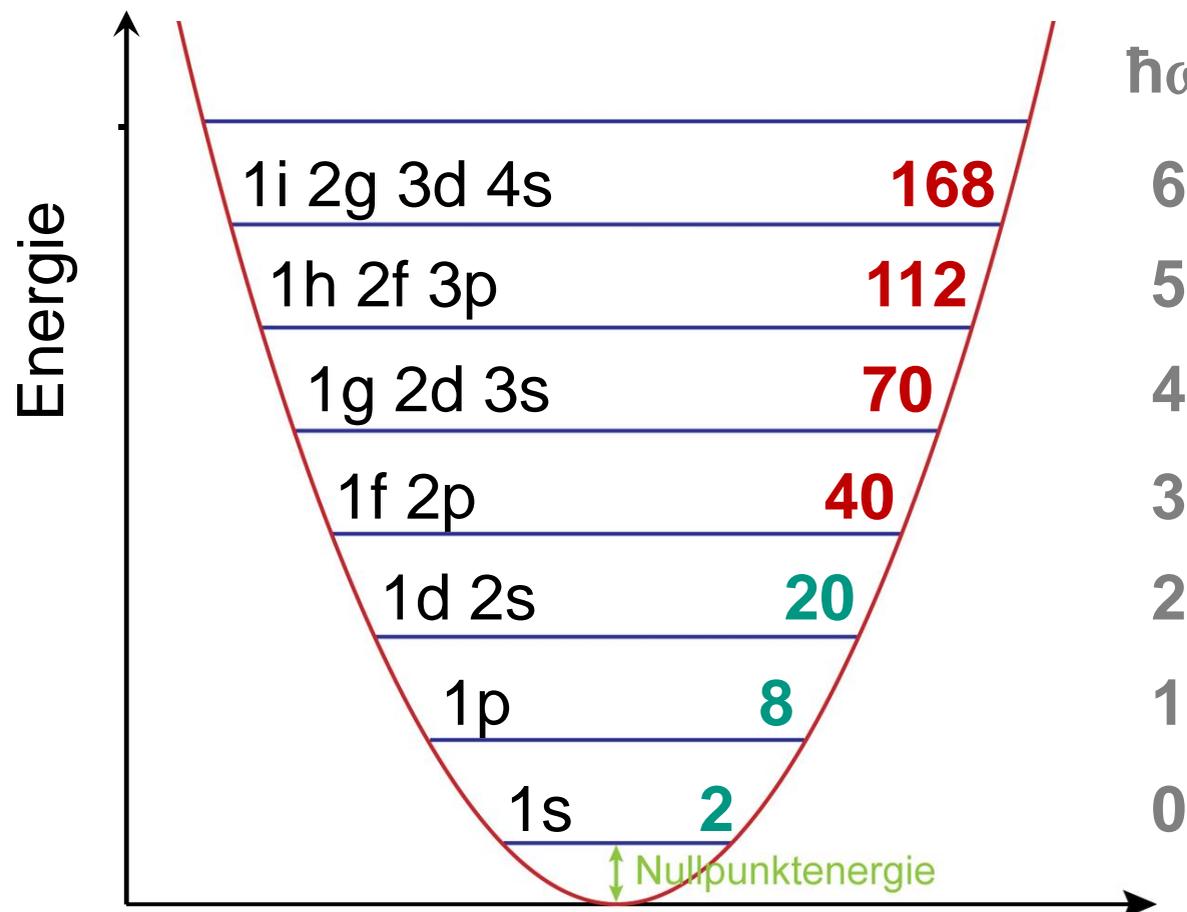


Kernpotenzial – harmonischer Oszillator

■ Fallstudie # 2 – ein harmonischer Oszillator als Potenzial

■ Kernphysik: magische Zahlen 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126

- Nukleonen in einem Oszillatorpotenzial mit Tiefe $V_0 = 40 \text{ MeV}$



$\hbar\omega$

Oszillatorpotenzial

$$V(r) = \frac{1}{2} M_N \cdot \omega^2 \cdot r^2 - V_0$$

$$\hbar\omega - \text{Schale: } 2 \cdot (n - 1) + \ell$$

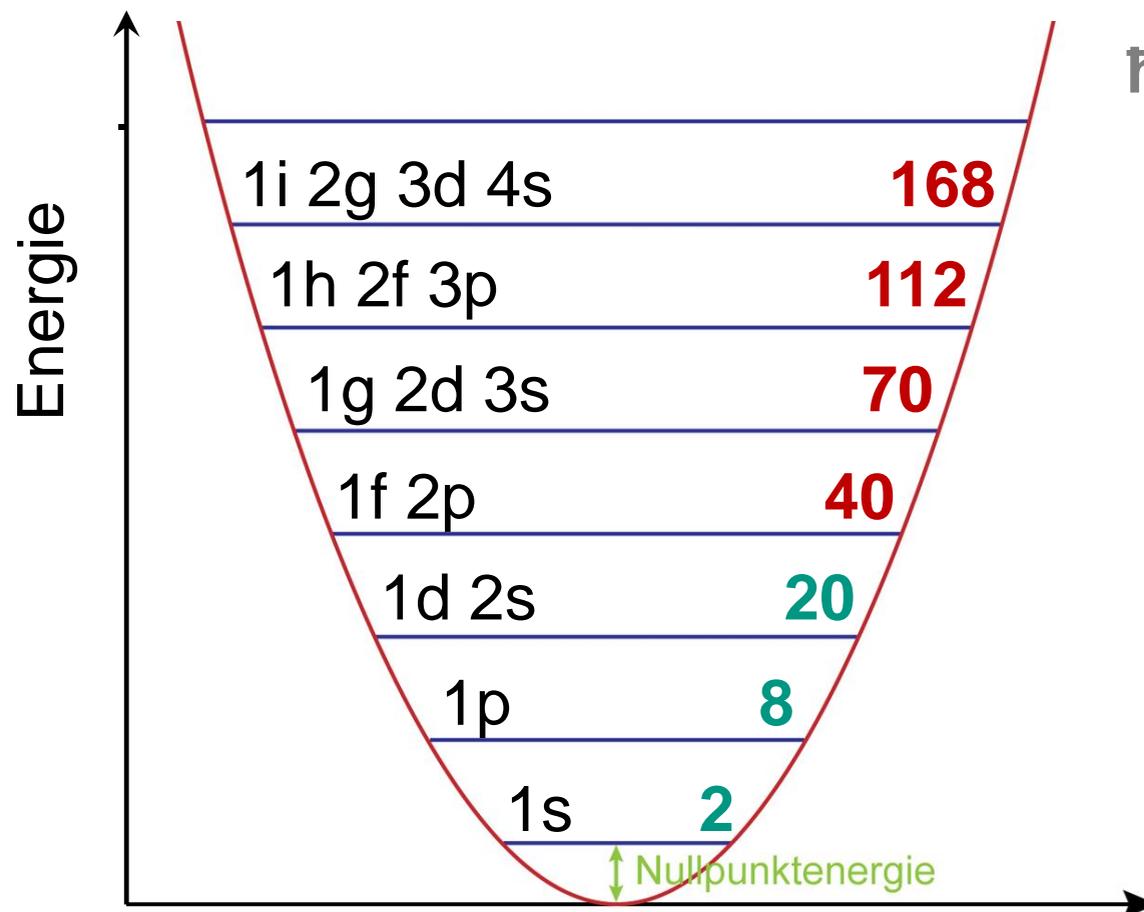
$$E_{n\ell} = -V_0 + (2n + \ell + \frac{1}{2}) \hbar\omega$$

Kernpotenzial – harmonischer Oszillator

■ Fallstudie # 2 – ein harmonischer Oszillator als Potenzial

■ Kernphysik: magische Zahlen 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126

- Nukleonen in einem Oszillatorpotenzial mit Tiefe $V_0 = 40$ MeV



$\hbar\omega \quad \Sigma 2(2\ell + 1) =$ Summe der Nukleonen bis zu einzelnen Schalen

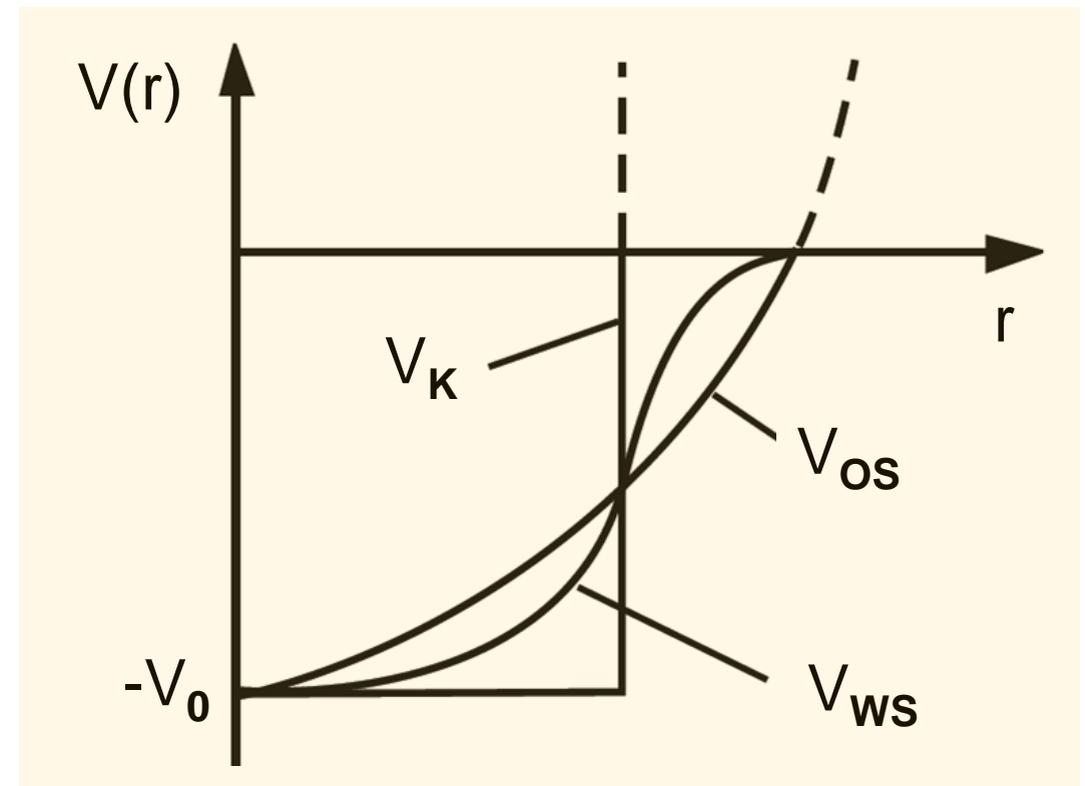
$\hbar\omega$	n	ℓ	Zustand	$\Sigma 2(2\ell+1)$
6				
5				
4	2	1	2p	40
	1	3	1f	
3				
2	2	0	2s	20
	1	2	1d	
1	1	1	1p	8
0	1	0	1s	2

Kernpotenzial – Woods-Saxon Ansatz

■ Lösungsansatz – Nukleonen in Potenzial, welches die beobachtete Ladungsverteilung $\rho(r)$ nachbildet

- weder harmonischer Oszillator noch Kastenpotenzial liefern die korrekte Abfolge der experimentellen „magischen Zahlen“
- Woods-Saxon-Potenzial liegt zwischen dem harmonischen Oszillator und dem Kasten-Potenzial

$$V(r) = \frac{V_0}{1 + e^{(r-a)/d}}$$

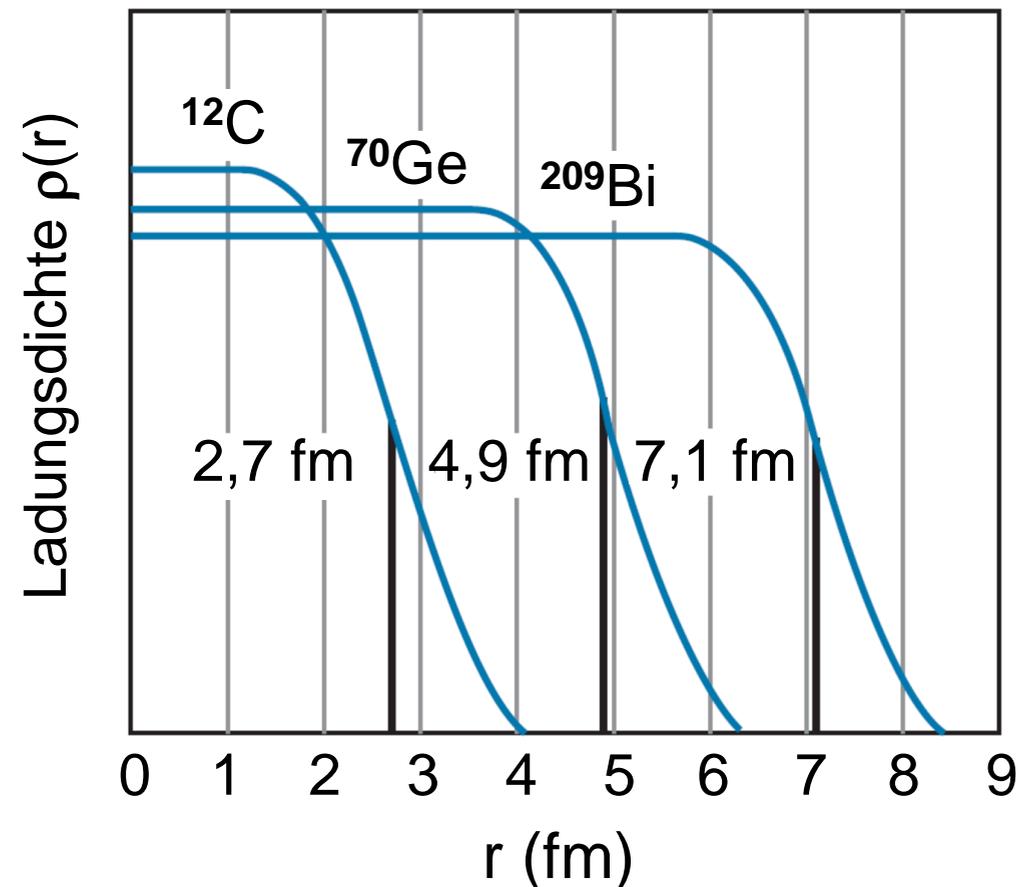


Kernpotenzial – Woods-Saxon Ansatz

- Lösungsansatz – Nukleonen in Potenzial, welches die beobachtete Ladungsverteilung $\rho(r)$ nachbildet

- benutze $\rho(r)$ mit Kernradius $a \sim A^{1/3}$ und Skindicke d

$$V(r) = \frac{V_0}{1 + e^{(r-a)/d}}$$



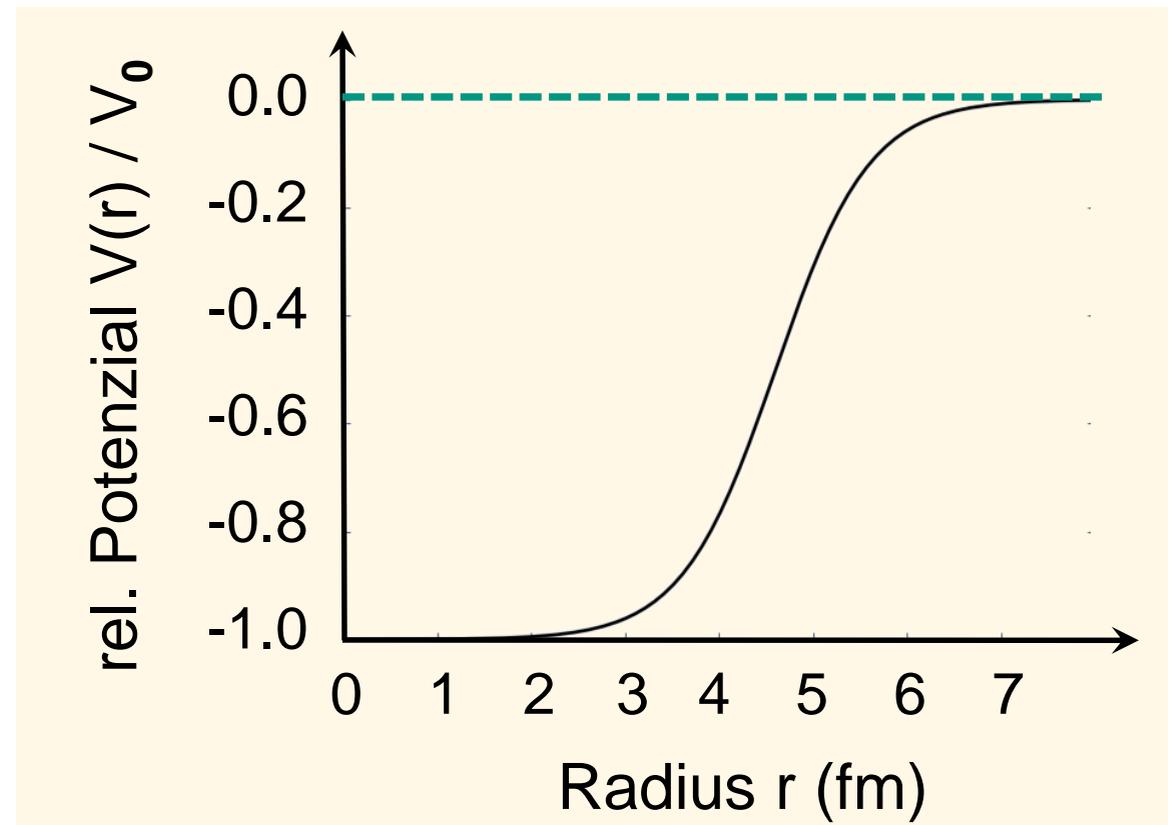
Kernpotenzial – Woods-Saxon Ansatz

■ Lösungsansatz – Nukleonen in Potenzial, welches die beobachtete Ladungsverteilung $\rho(r)$ nachbildet

- benutze $\rho(r)$ mit Kernradius $a \sim A^{1/3}$ und Skindicke d

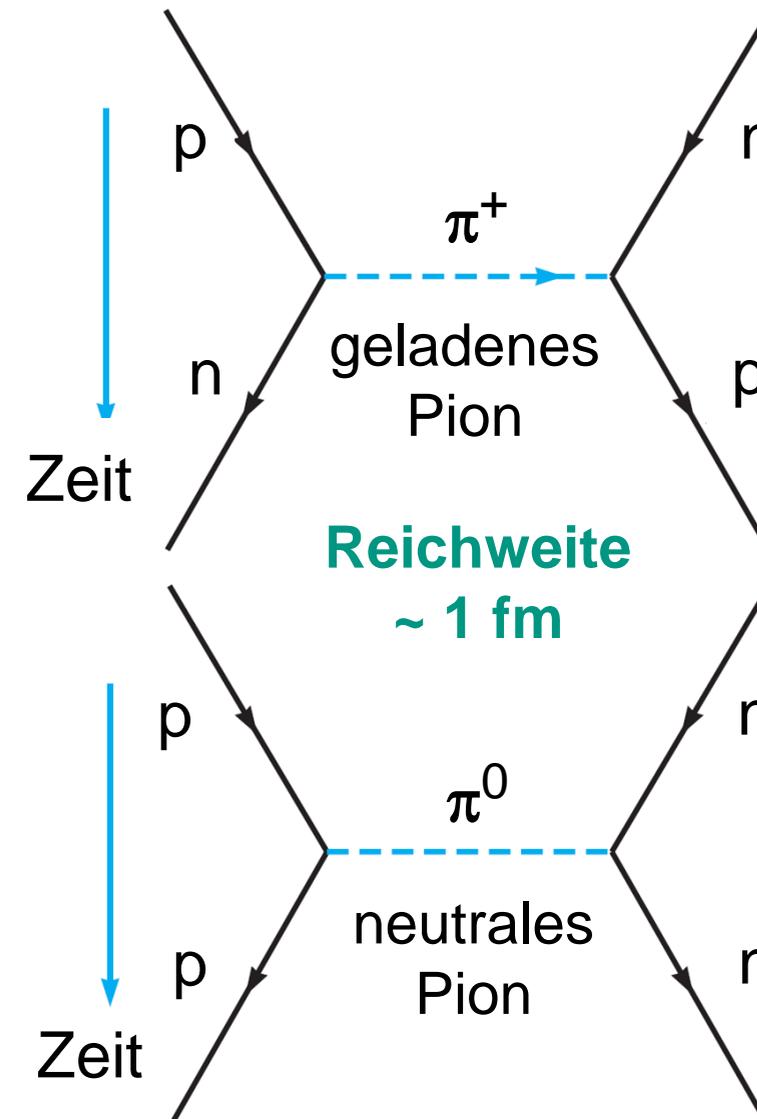
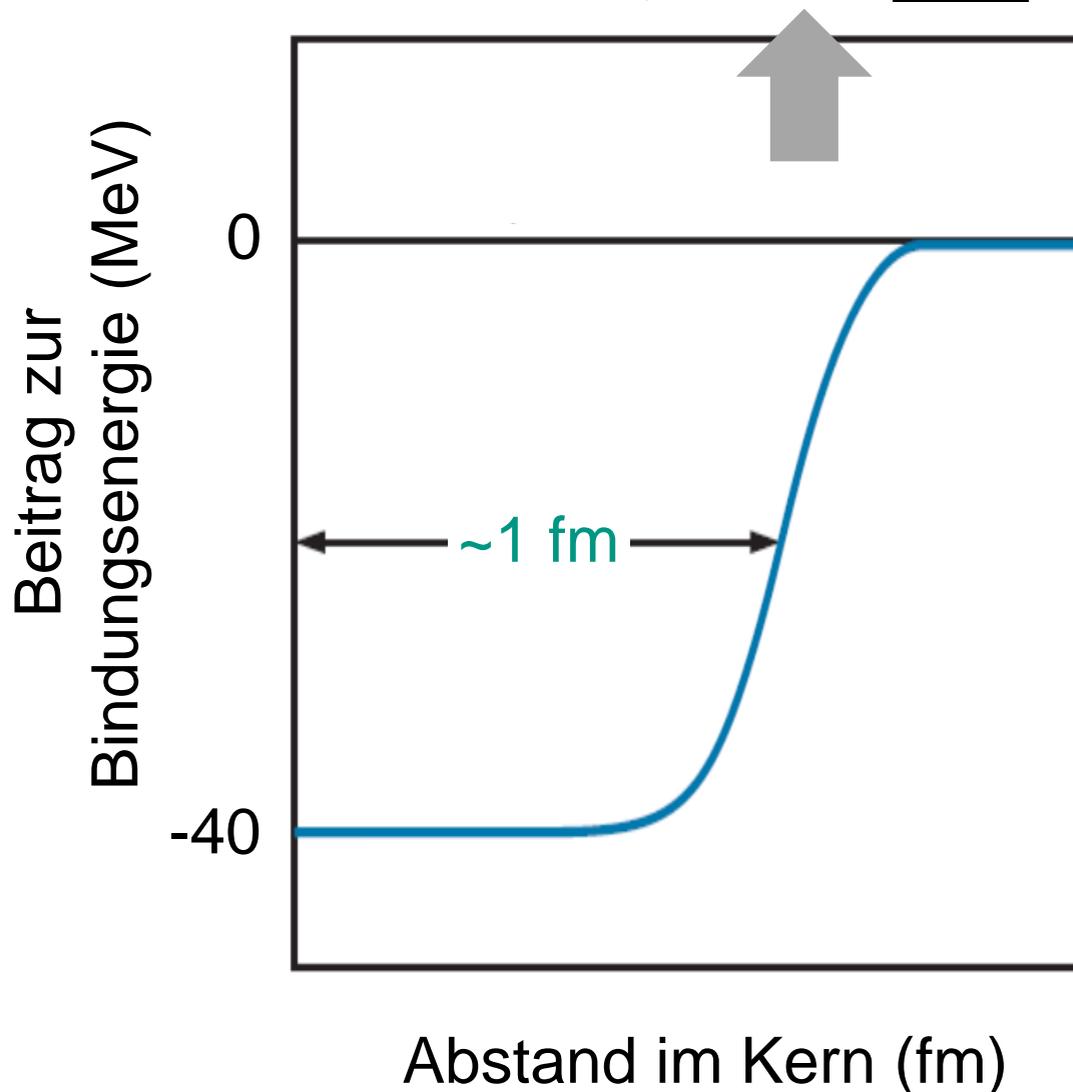
$$V(r) = \frac{V_0}{1 + e^{(r-a)/d}}$$

- magische Zahlen **2, 8, 20** werden korrekt vorhergesagt
- magische Zahlen **ab 28** werden nicht korrekt abgebildet



Woods-Saxon Ansatz & Pionen

- kurzreichweitiger (~ 1 fm) Charakter der anziehende Kernkräfte \Rightarrow bilde ein mittleres Potenzial, Verlauf nicht identisch mit Nukleon-Nukleon-Potenzial



Pionen und starke Kernkraft

- Pionen (π^+ , π^0 , π^-) sind kurzlebige Quark-Antiquark Systeme und die Austausch-Teilchen der starken Wechselwirkung (Yukawa Hideeki)

- Austausch **virtueller Pionen** über Heisenbergsche Unschärferelation

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

140 MeV/c² Weg $c \cdot \Delta t \sim 1 \text{ fm}$

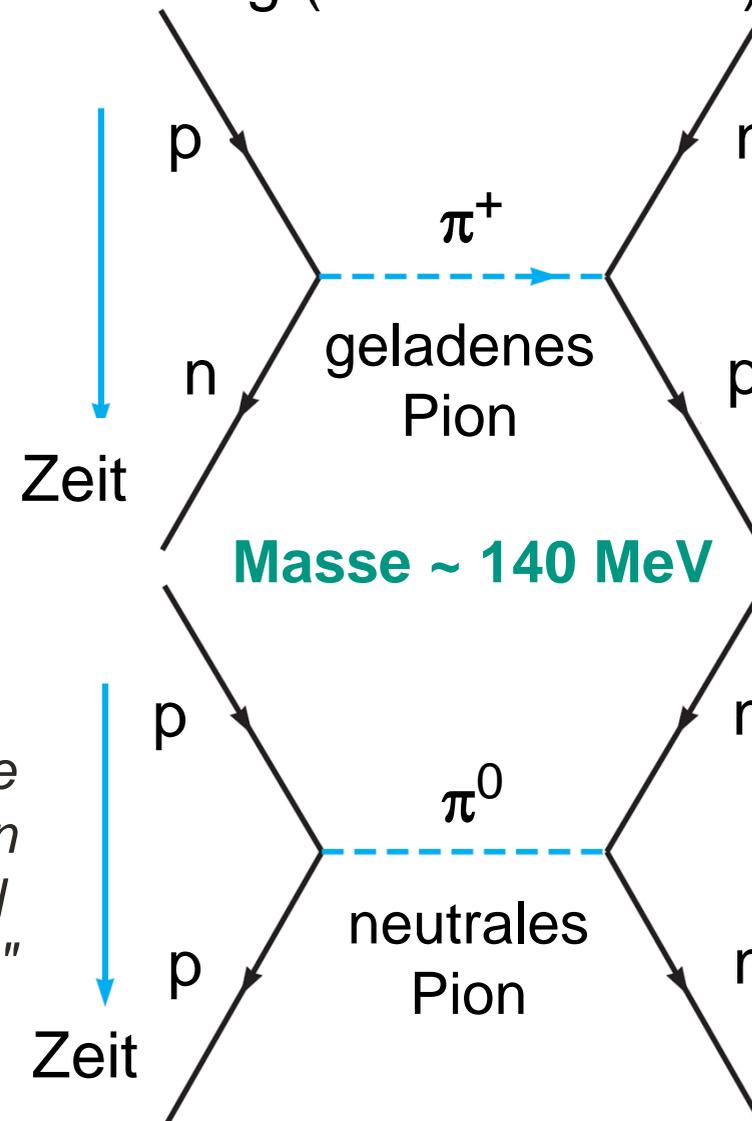


湯川 秀樹



Nobel-
preis 1949

"for his prediction of the existence of mesons on the basis of theoretical work on nuclear forces"



Fun with Facts: Austauschteilchen Pion

■ Kann man feststellen, ob ein π^+ oder π^- oder π^0 ausgetauscht wurde ?

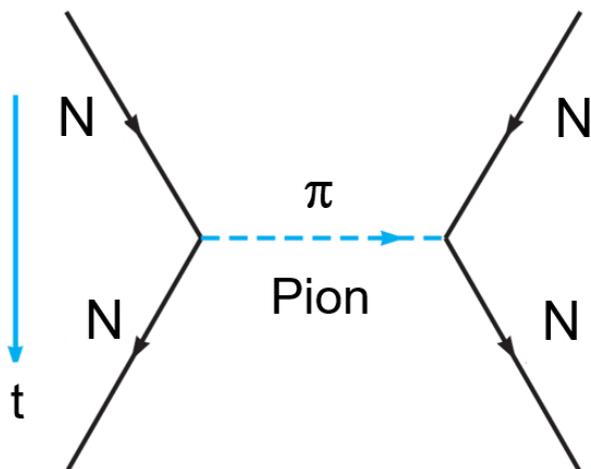
- A) Man kann π^+ π^- π^0 nicht unterscheiden !
- B) Man kann alle trennen über Nukleon-Ladung !
- C) Man kann π^\pm und π^0 via Masse unterscheiden !

SHELDON COOPER
Ch presents
FUN WITH ~~FLAGS~~

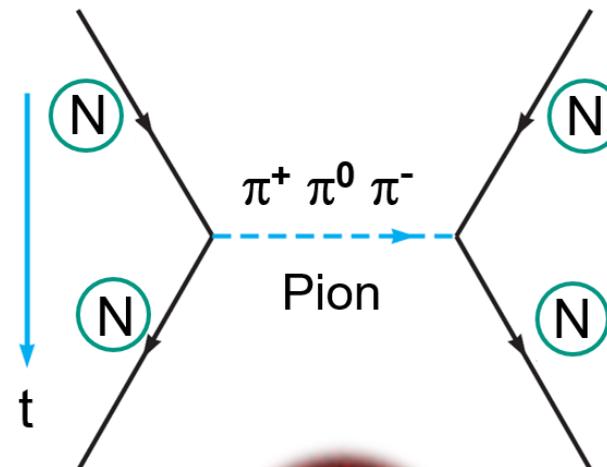


Facts

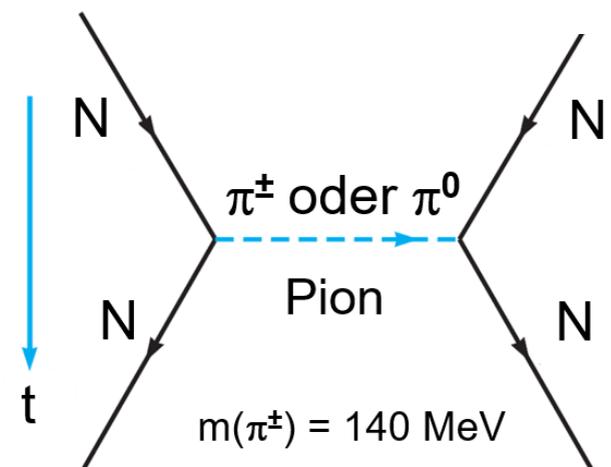
A



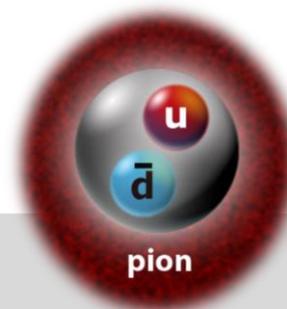
B



C



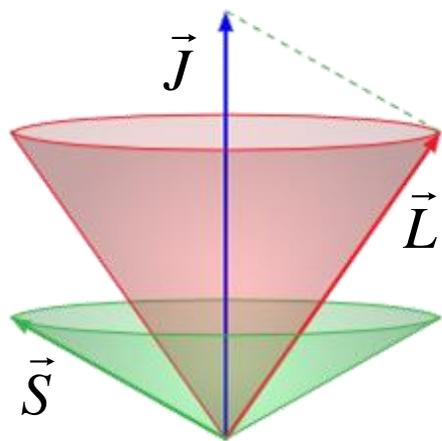
$m(\pi^\pm) = 140 \text{ MeV}$
 $m(\pi^0) = 135 \text{ MeV}$



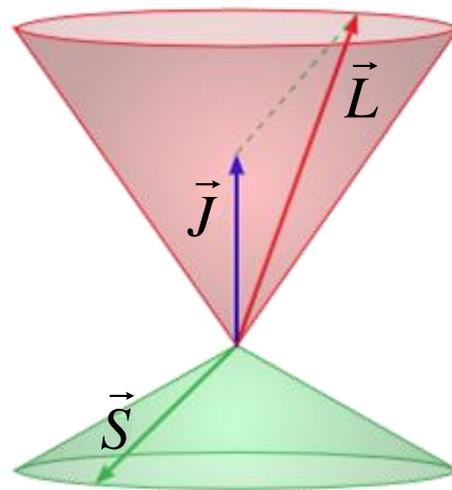
Kernpotenzial – erweiterter Ansatz

■ Lösungsansatz – nicht nur radial abhängiges Potenzial, vgl. mit Beobachtungen in der Atomphysik (LS-Kopplung)

- Atomphysik: Spin-Bahn-Kopplung erzeugt **Feinstruktur-Aufspaltung** mit neuer Quantenzahl Gesamtdrehimpuls J (s. Kap. 6.5 in Vorlesung 11)



parallel ($\uparrow\uparrow$)



anti-parallel ($\uparrow\downarrow$)

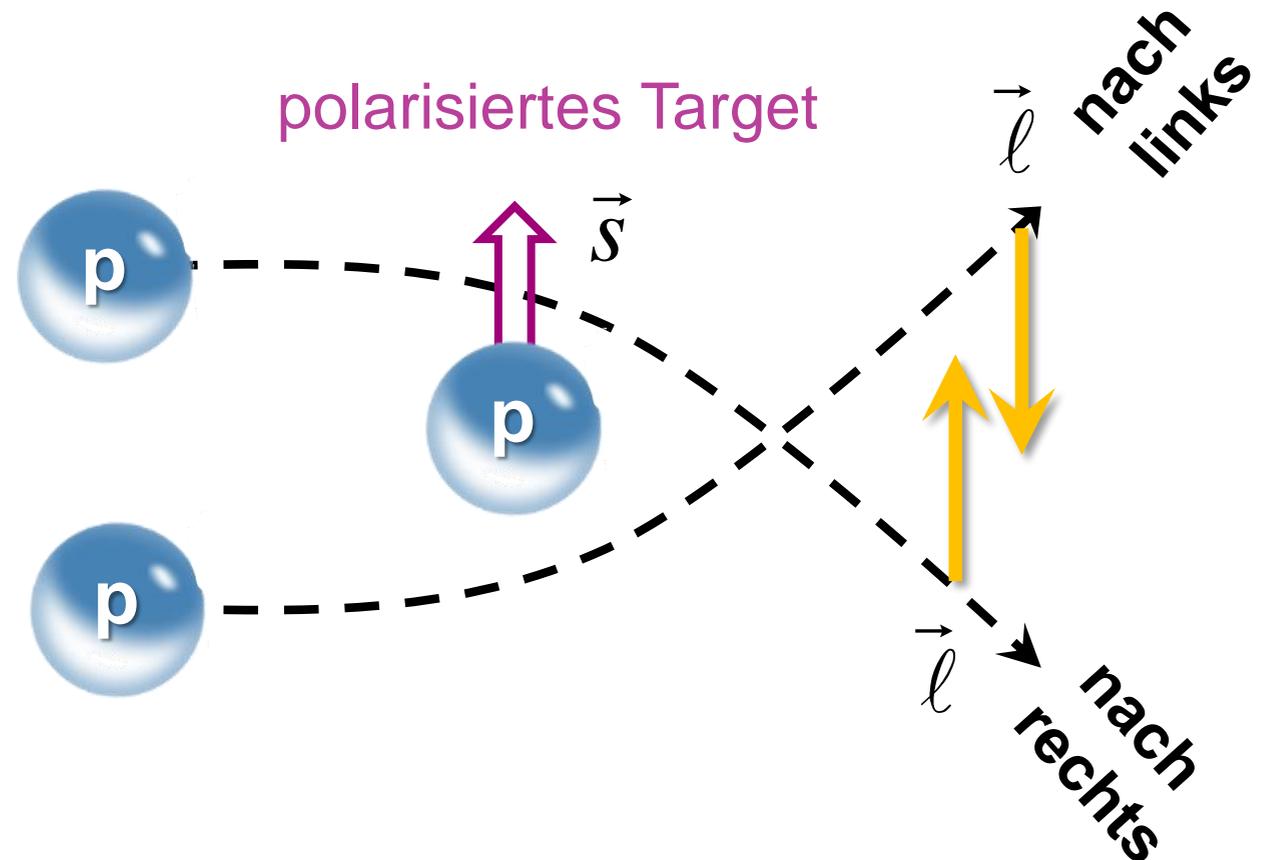


Maria Goeppert-Mayer

■ Experimenteller Überprüfung der LS-Kopplung bei Kernen

- Spin-Bahn-Kopplung bei der starken Kernkraft tritt auch auf bei **Streuung von Protonen an polarisierten Protonen-Targets (polarisierter atomarer Wasserstoff)**

- man beobachtet eine links-rechts **Asymmetrie** in den Streuraten durch LS-Kopplung



Kernpotenzial – erweiterter Ansatz

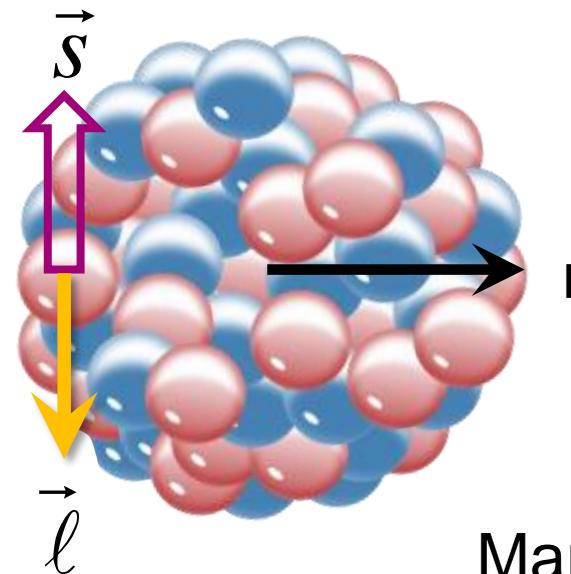
■ Lösungsansatz – radial abhängiges Woods-Saxon Potenzial mit Zusatzterm durch Spin-Bahn-Kopplung

- Kernphysik: Spin-Bahn-Kopplung bei der starken Kernkraft führt zu **wesentlich größeren Niveau-Aufspaltungen**

$$\sim V_{ls}(r) \cdot (\vec{\ell} \cdot \vec{s})$$

LS-Kopplung ist radialabhängig

Spin und Bahndrehimpuls eines Nukleons koppeln



Maria Goeppert-Mayer

■ LS-Wechselwirkung(en) von Nukleonen im Kern

- Testnukleon wechselwirkt mit anderen Nukleonen im Kern via LS-Kopplung:

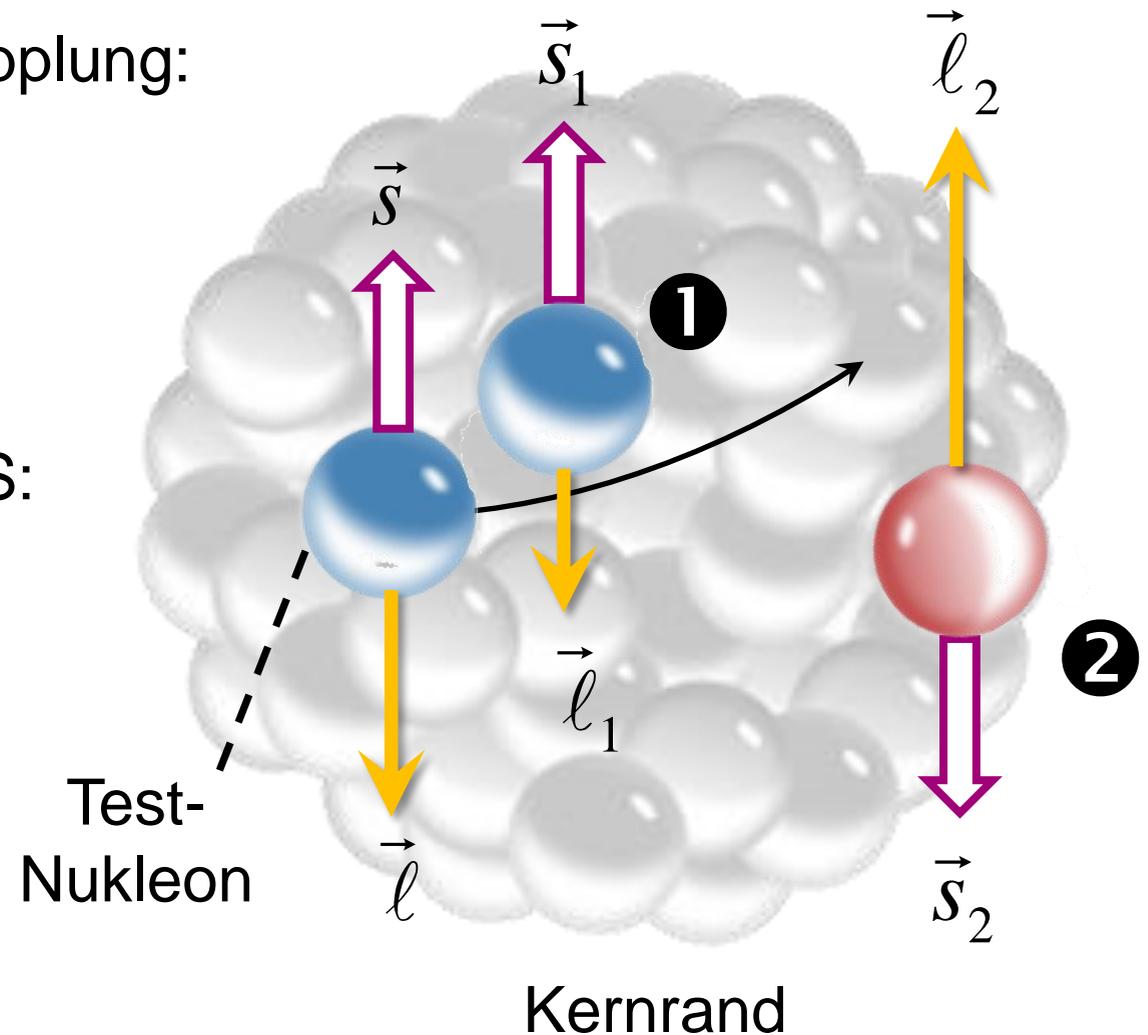
- ❶ Nukleon im Kerninnern
- ❷ Nukleon am Kernrand

- Wechselwirkung (hier mit Nukleon ❶) abhängig von L, S:

$$\vec{L} = \vec{\ell} + \vec{\ell}_1 \quad \vec{S} = \vec{s} + \vec{s}_1$$

parallel $\uparrow\uparrow$ $+ \vec{L} \cdot \vec{S}$

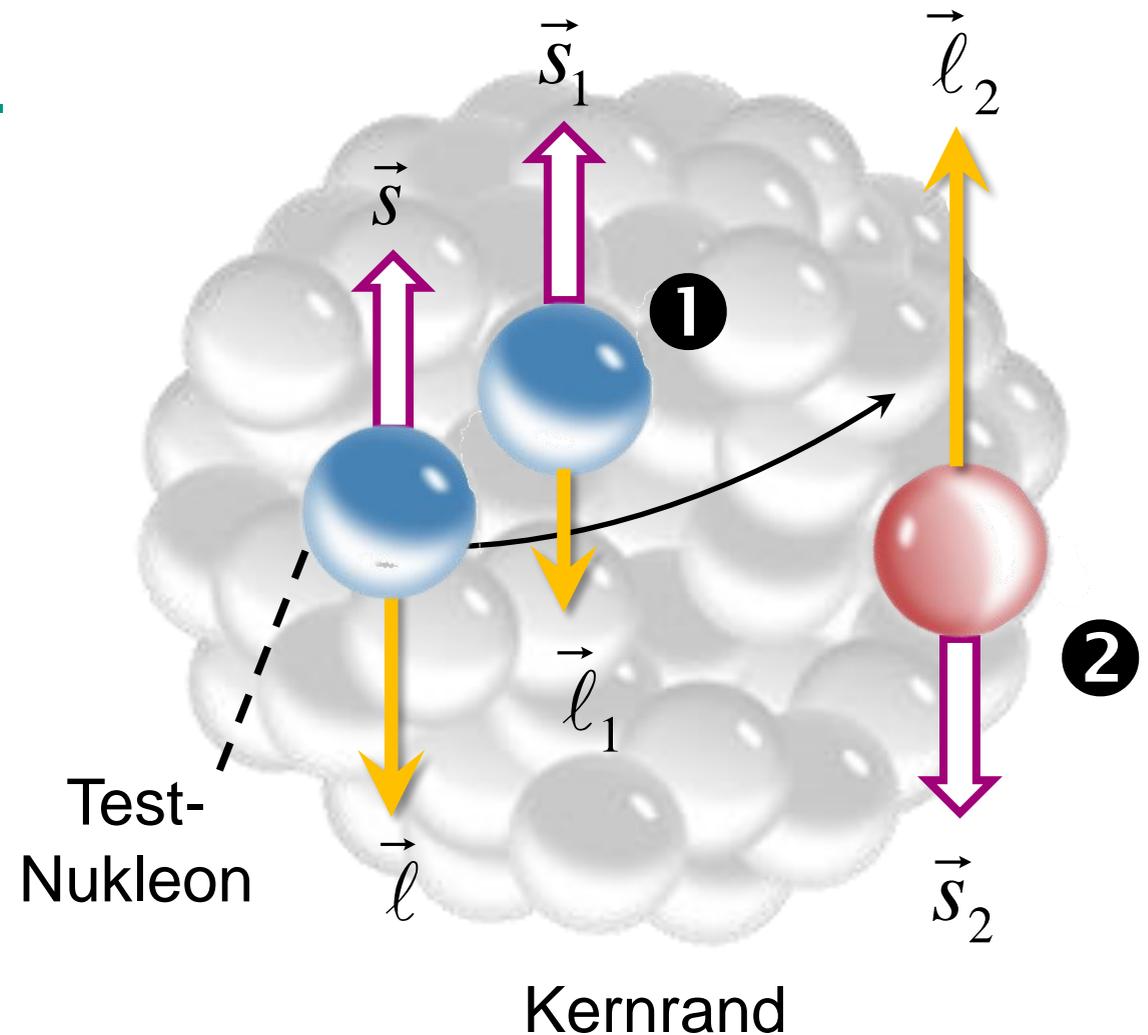
anti-parallel $\uparrow\downarrow$ $- \vec{L} \cdot \vec{S}$



■ LS-Wechselwirkung(en) von Nukleonen im Kern

- Wechselwirkungen mitteln sich
⇒ **Reduktion auf Einteilchen-Zustand** mit Quantenzahl Bahndrehimpuls ℓ , Spin s
- da an Oberfläche mehr „innere“ Nukleonen & im Innern sich alles mittelt:
⇒ **radiale Abhängigkeit des LS-Potenzials**

$$V_{ls}(r) \propto \frac{1}{r} \cdot \frac{d\rho}{dr}$$



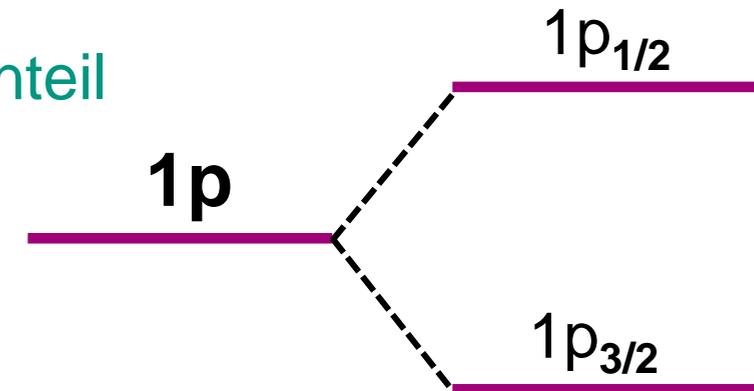
■ Eigenschaften der LS-Kopplung bei Kernen

- Kernpotenzial mit radial-abhängigem LS-Anteil

$$\sim V_{\ell s}(r) \cdot (\vec{\ell} \cdot \vec{s})$$

für $j = \ell + 1/2$: $V(r) + 1/2 V_{\ell s}(r) \cdot \ell$

für $j = \ell - 1/2$: $V(r) - 1/2 V_{\ell s}(r) \cdot (\ell + 1)$



- Nukleonen-Spin $s = 1/2$ ist festgelegt & nicht variabel
- Vorzeichen von $V_{\ell s}$ ergibt für $j = \ell - 1/2$ höhere Energien
- Energie-Aufspaltung ΔE durch LS-Kopplung:

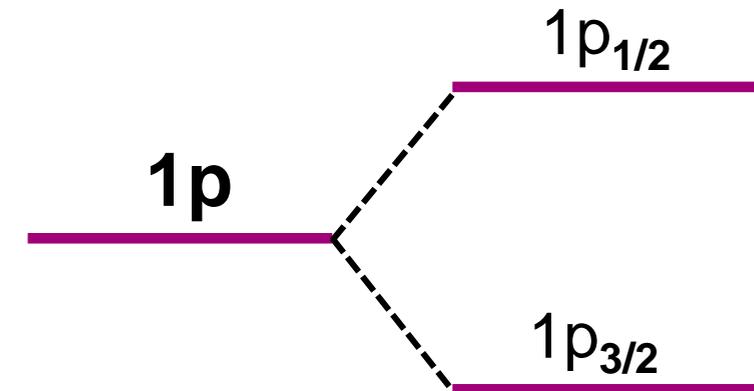
$$\Delta E \sim 2\ell + 1$$

mit wachsendem ℓ Zunahme der Aufspaltung

Kernpotenzial – Spin-Bahn-Kopplung

■ radial abhängiges Woods-Saxon Potenzial mit Zusatzterm durch Spin-Bahn-Kopplung

- Spin-Bahn-Kopplung bei der starken Kernkraft führt (überraschend für die Theorie der damaligen Zeit) zu **wesentlich größeren Niveau-Aufspaltungen**



Aufspaltung > Niveauabstand

Vorzeichen umgekehrt wie bei Atomen

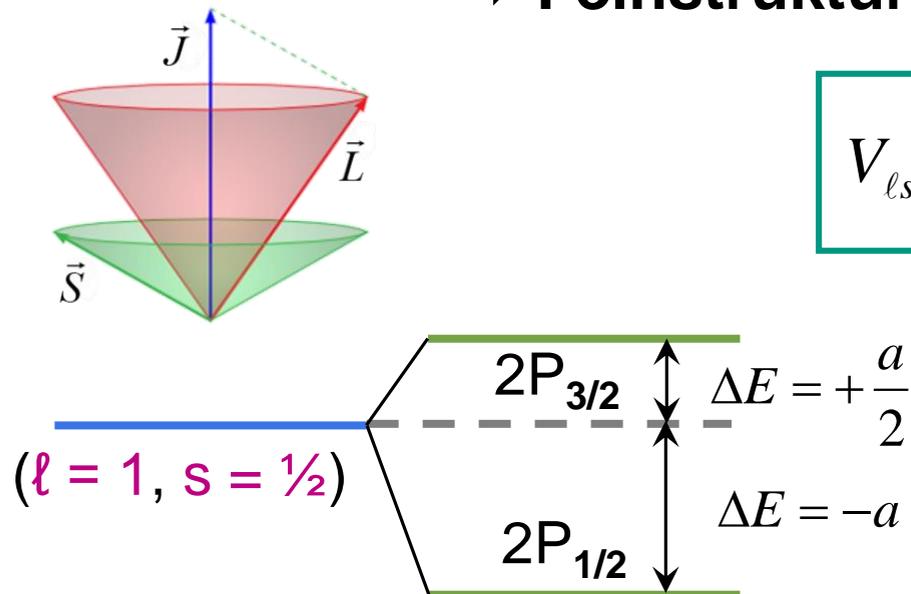


Maria Goeppert-Mayer

Recap: Feinstruktur in der Atomphysik

■ Linienaufspaltung durch Wechselwirkung des Bahn- und des Spinmagnetismus

- Atomphysik: Spin-Bahn-Kopplung über magnetische Momente
⇒ **Feinstruktur**



$$V_{ls} = \frac{a}{\hbar^2} \cdot \vec{L} \cdot \vec{S}$$



D-Linien
von Na



α

Aufspaltung \ll **Niveaubstand**

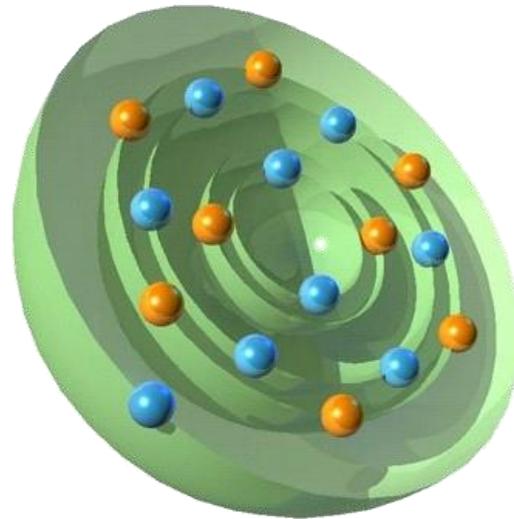
Vorzeichen **umgekehrt** wie bei Kernen



Schalenmodell der Kerne

■ Lösungsansatz – radial abhängiges Woods-Saxon Potenzial mit Zusatzterm durch Spin-Bahn-Kopplung

- Kernphysik: Spin-Bahn-Kopplung erzeugt **deutliche Aufspaltung** mit korrekt vorhergesagten magischen Zahlen **2, 8, 20, 28, 50, 82, 126**



“for her discoveries concerning nuclear shell structure.”



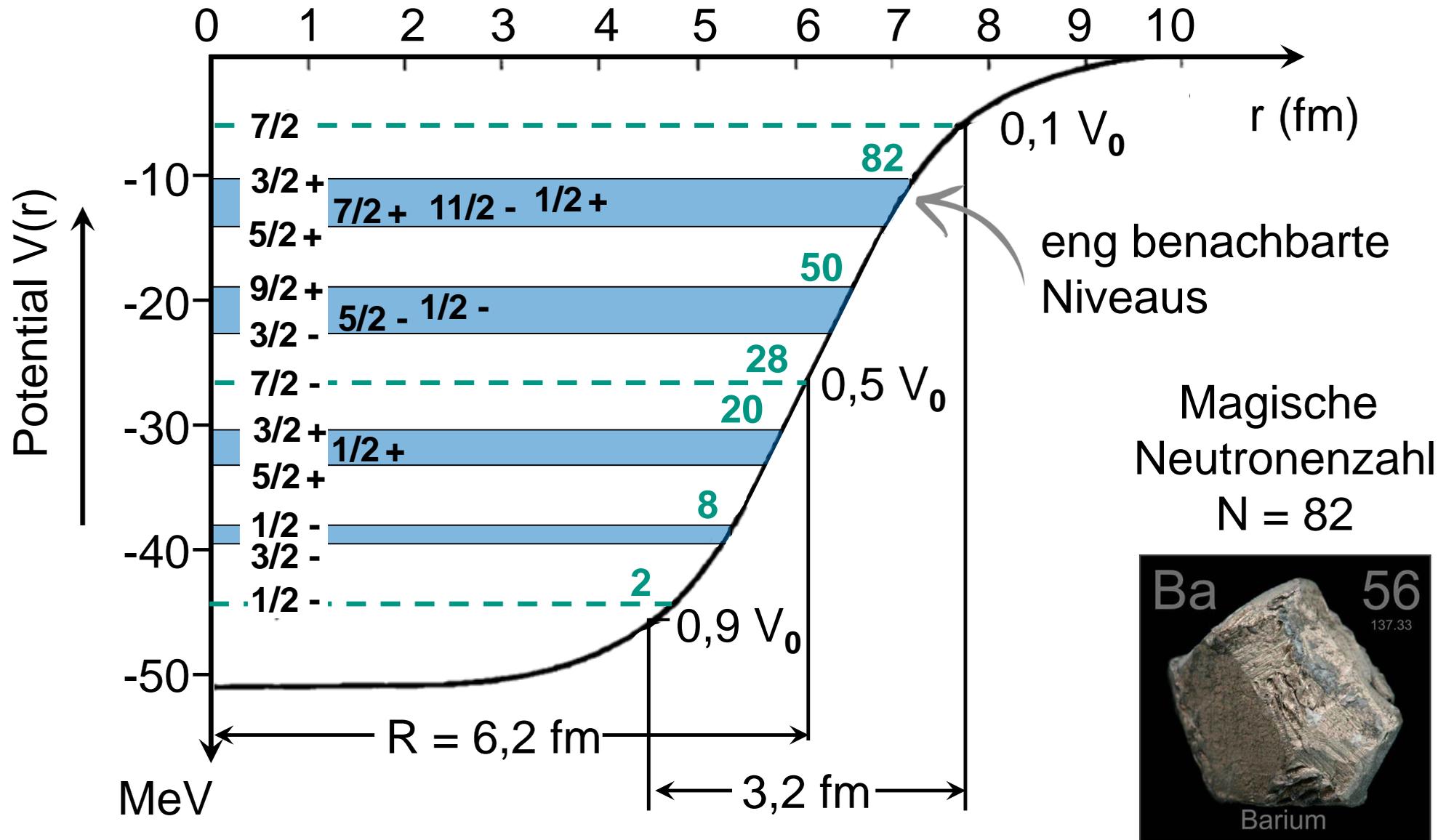
Nobel-
preis 1963



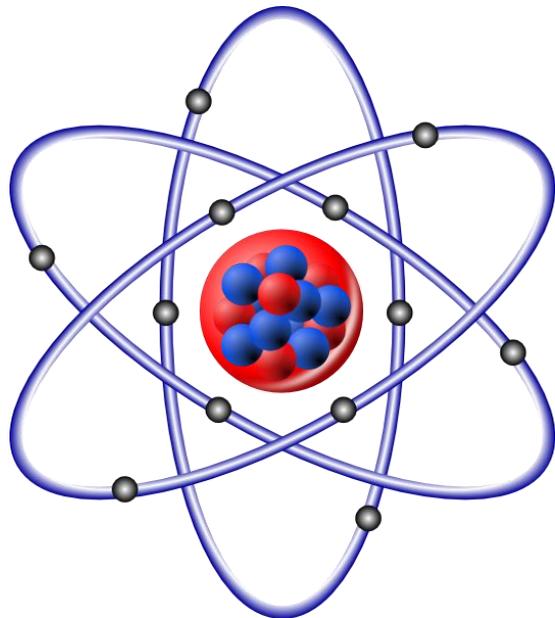
Maria Goeppert-Mayer

Schalenmodell der Kerne

■ Schalenmodell-Rechnungen für mittelschweren Kern mit $N = 82$



Challenge 2019 am Fermi-See



FACHSCHAFT.PHYSIK.KIT.EDU

PHYSIK FAKULTÄTSFEST

AM FERMISEE

05|07

- 14:00 Kaffee & Kuchen
- 15:00 **CHALLENGE:** Papierbrücken
- 16:00 Siegerehrung
- 17:00 Wein & Bier
- 19:00 Cocktails
- 19:00 **Physikerchor**
- 19:45 **Jam-Session**
- 21:00 **The Royal Backwash**
- 22:00 **Die Stühle**



THE
ROYAL BACKWASH
OFFICIAL NEPALESE NAVY MARCHING BAND

DIE STÜHLE

mit
Kinder-
betreuung

SPECIAL: Gegrilltes
Frittiertes
Flammkuchen