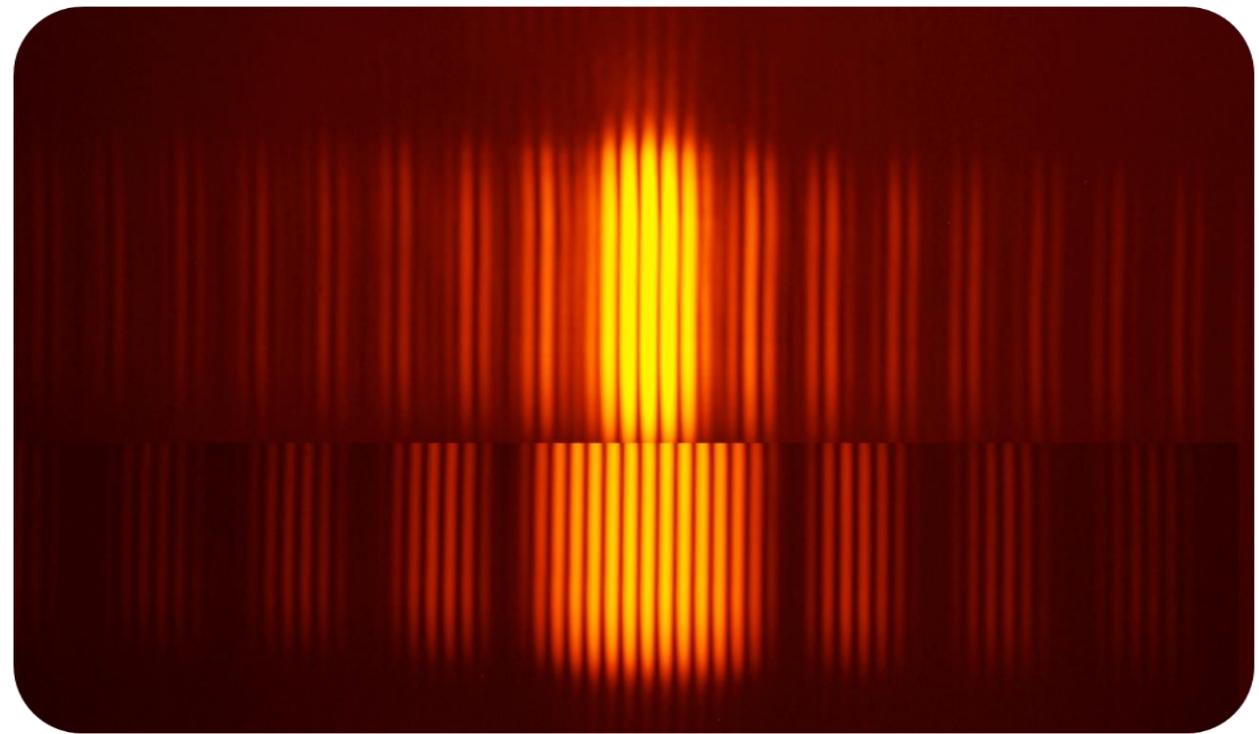
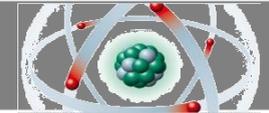


# Atome & Kerne

Sommersemester 2019  
Vorlesung # 6, 09.05.19



Guido Drexlin, Institut für Experimentelle Teilchenphysik, Fakultät für Physik

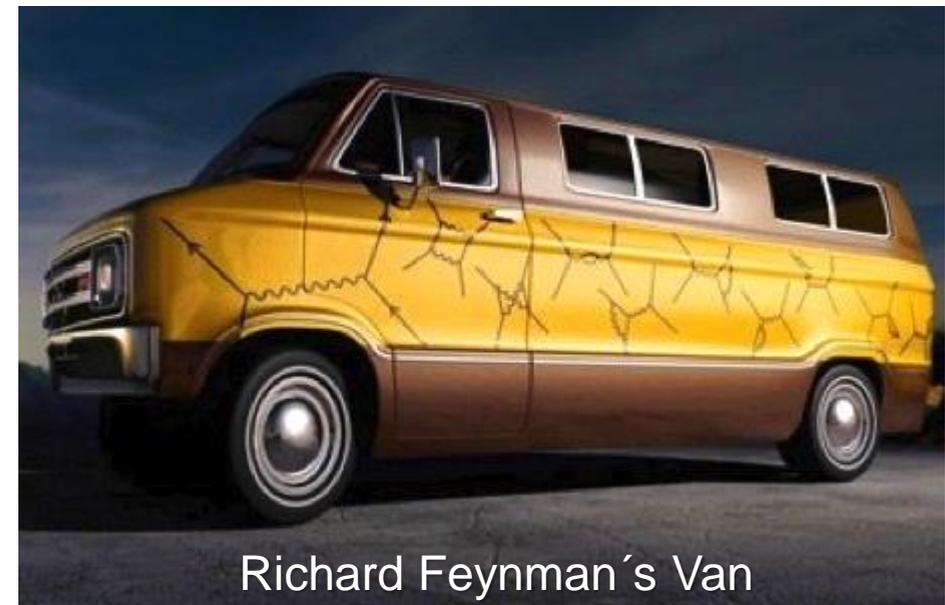


## Teilchen-Welle Dualismus

- Paarbildung
- Feynman-Diagramme (Grundlagen)

## Elektronen & Materiewellen

- Elektronen & Neutronen am Doppelspalt
- de Broglie Materiewellen
- Quantisierung des Drehimpulses



Richard Feynman's Van

# Einsteinkoeffizienten & Schwarzkörper



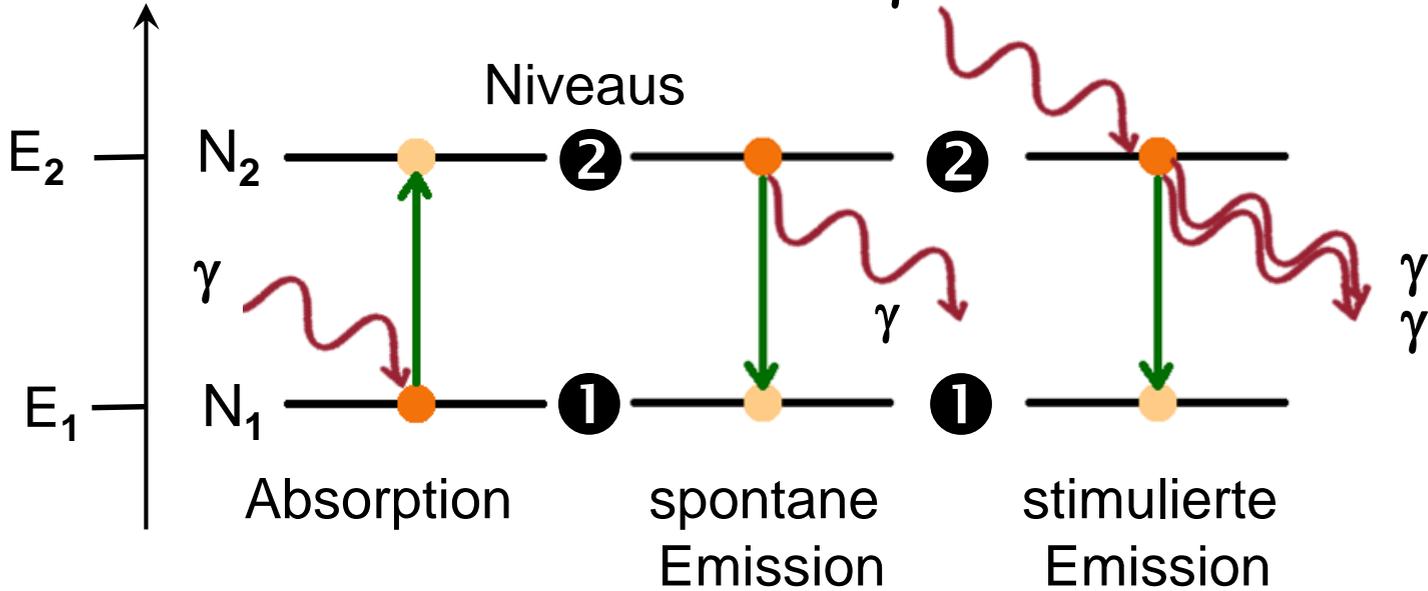
## ■ Einsteins Modell zur Ableitung des Planck-Spektrums

### ■ 2 atomare Niveaus in therm. Strahlungsfeld

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{e^{-E_2/kT}}{e^{-E_1/kT}}$$



$$\Delta E = h \cdot \nu$$



$$u(\nu) = \frac{A_{21}}{B_{12} \cdot e^{h\nu/kT} - B_{21}}$$

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi \cdot h \cdot \nu^3}{c^3} \cdot \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

$$B_{12}$$

$$A_{21} = \frac{8\pi \cdot h \cdot \nu^3}{c^3} \cdot B_{12}$$

$$A_{21}$$

$$B_{21}$$

$$B_{12} = B_{21}$$

$$T \rightarrow \infty$$



# Photoeffekt und Comptoneffekt



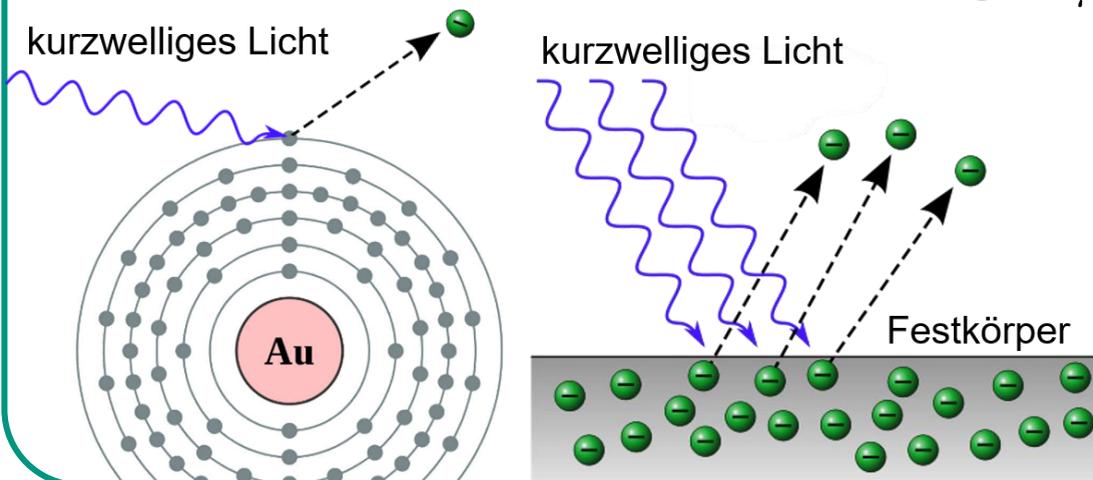
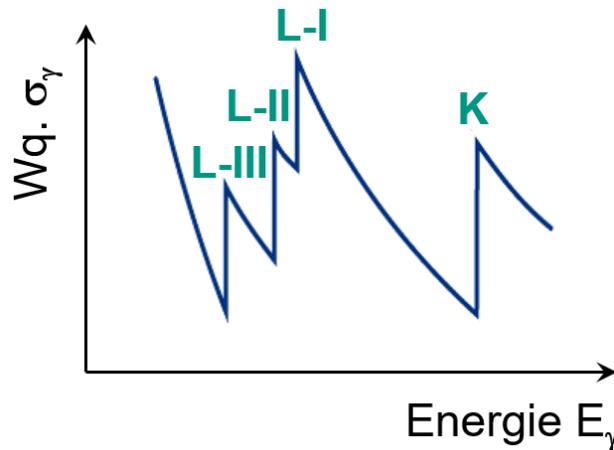
## ■ Wechselwirkung von Gammas bei verschiedenen $\gamma$ -Energien

### ■ Photo-Effekt: $\gamma$ -Absorption

- Festkörper: Austrittsarbeit  $W_K$

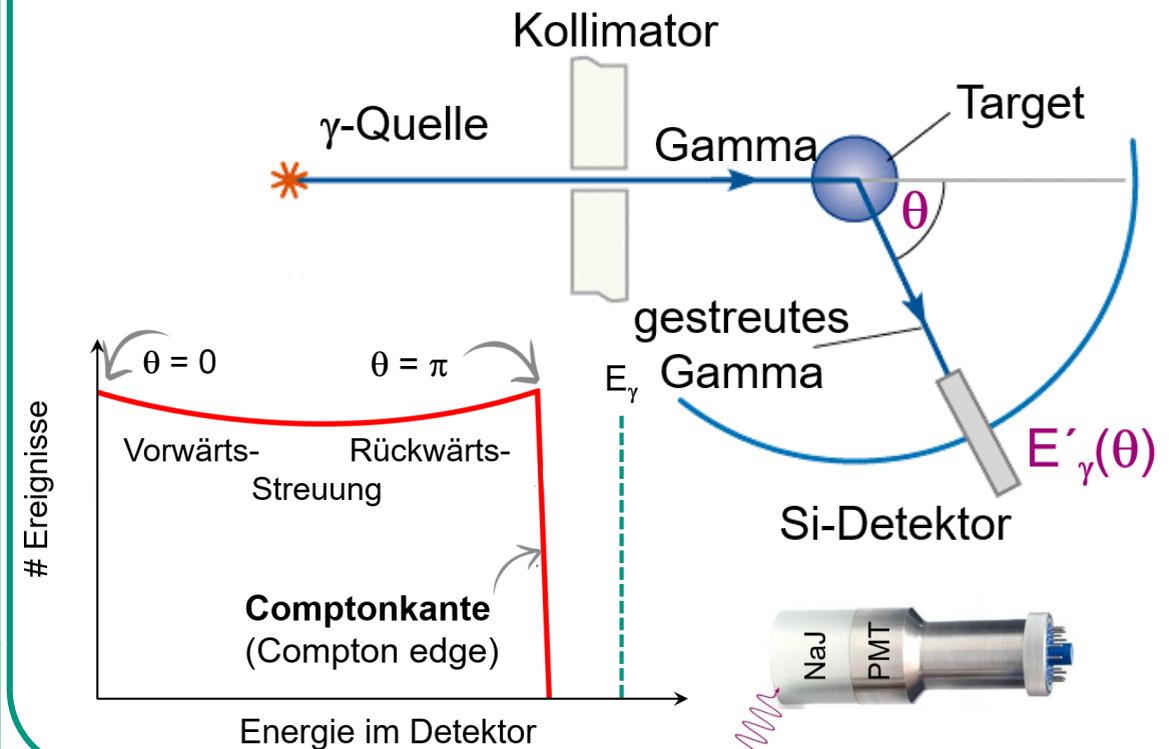
⇒ niedrige Energie  $E_\gamma$

⇒ schwere Atome



### ■ Compton-Effekt: $\gamma$ -Streuung

- **Streuwinkel**  $\theta$  legt Energieübertrag auf Rückstoß-Elektron & Restenergie des Gammaquants fest



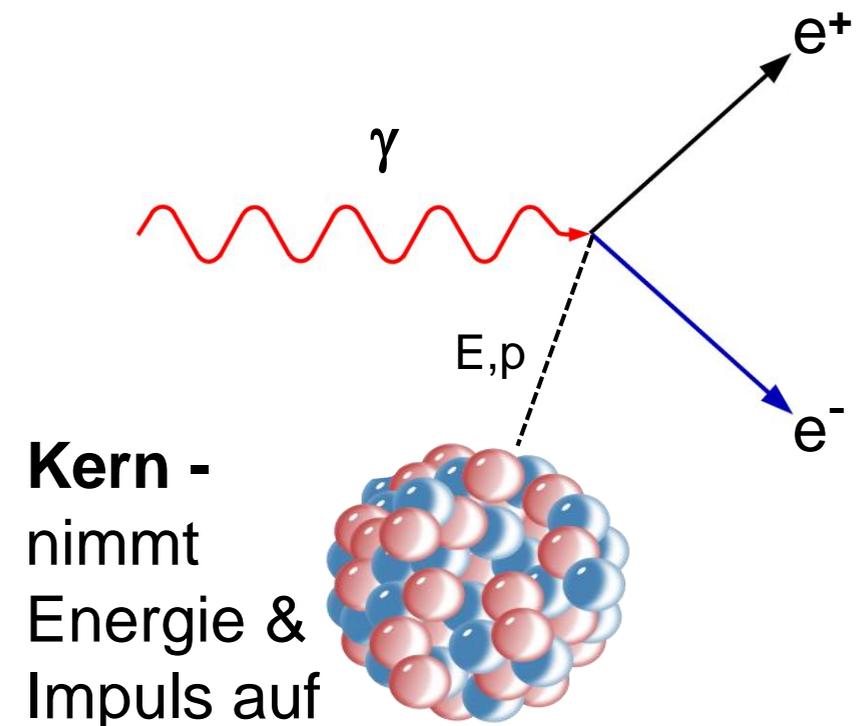
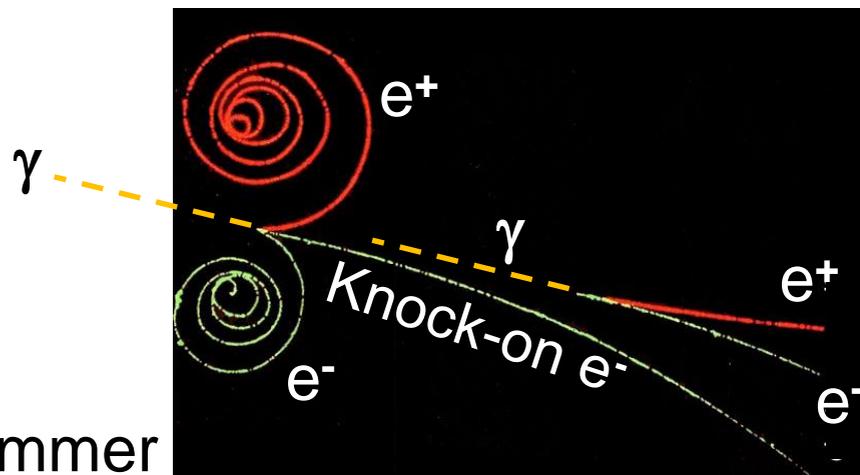
# Paarbildung im Kern-Coulombfeld

## ■ Paarbildung dominant bei hohen $\gamma$ -Energien

- Erzeugung eines Elektron-Positron-Paares im **Coulomb-Feld des Kerns**:  
Kern nimmt **Energie-Impuls Mismatch** von Gamma und  $e^-/e^+$  auf  
 $\Rightarrow$  Rückstoß des Kerns

- Schwellen-Energie:  $E_{\text{thres}} = 2 \cdot m_e + O\left(\frac{m_e^2}{M_{\text{Kern}}}\right)$  [ = 1,02 MeV]

- falls  $E_\gamma > E_{\text{thres}}$ :  
Überschussenergie geht in kinetische Energie des  $e^-/e^+$  Paares

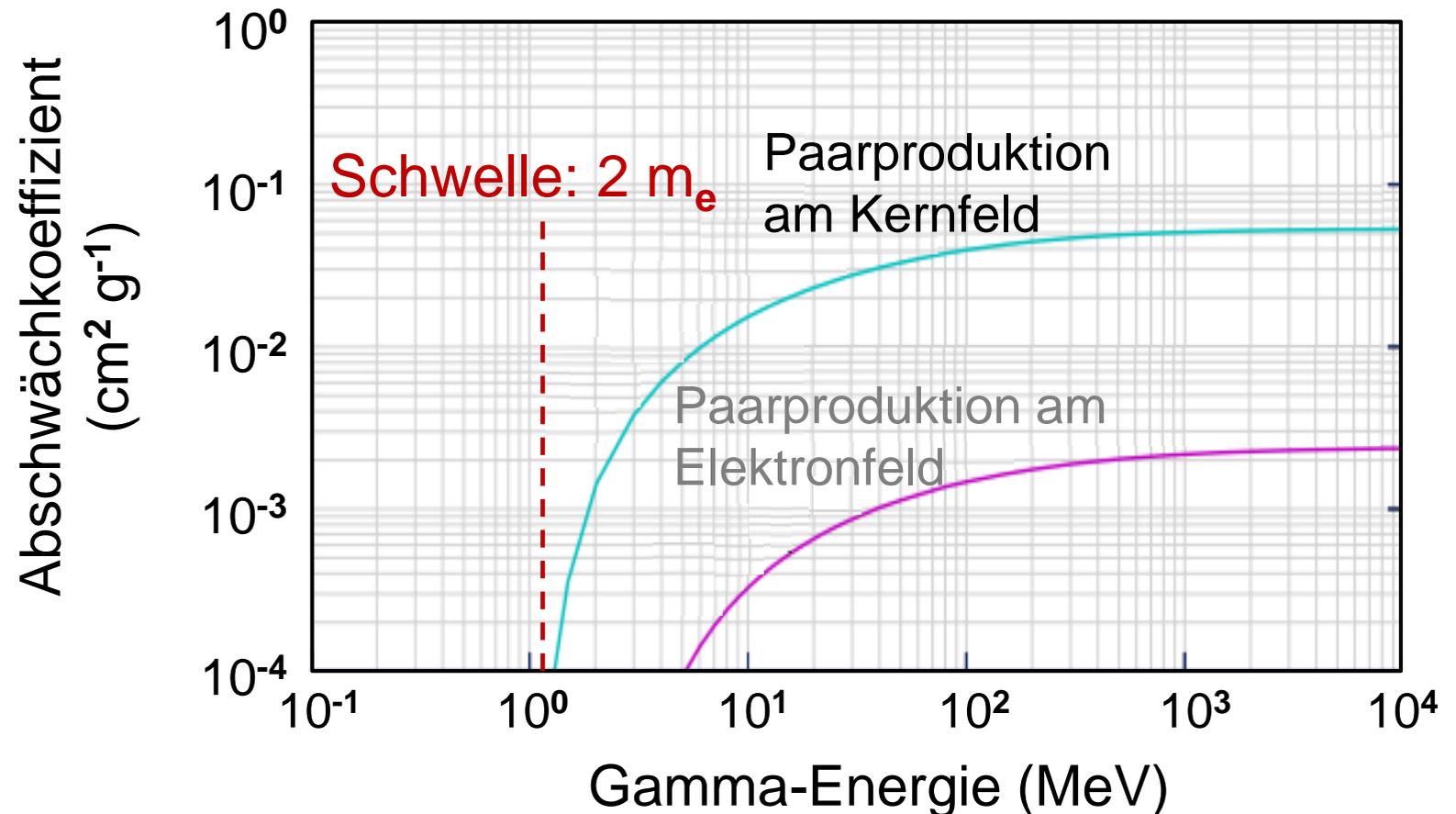
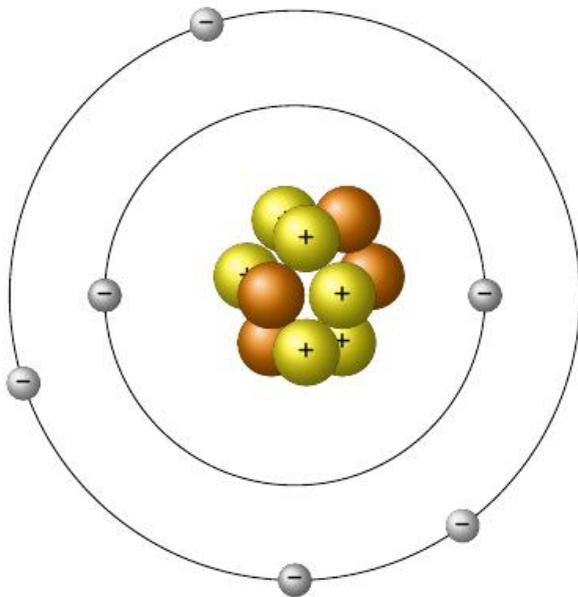


## energieabhängiger Wirkungsquerschnitt

- für **niedrige Energien**:  
logarithmisches Anwachsen
- für **hohe Energien**: Grenzwert

$$\sigma_{\text{paar}} \sim \frac{Z^2}{m_e^2} \cdot \left( \frac{7}{9} \cdot \ln \left( \frac{2E_\gamma}{m_e c^2} \right) - \frac{109}{54} \right)$$

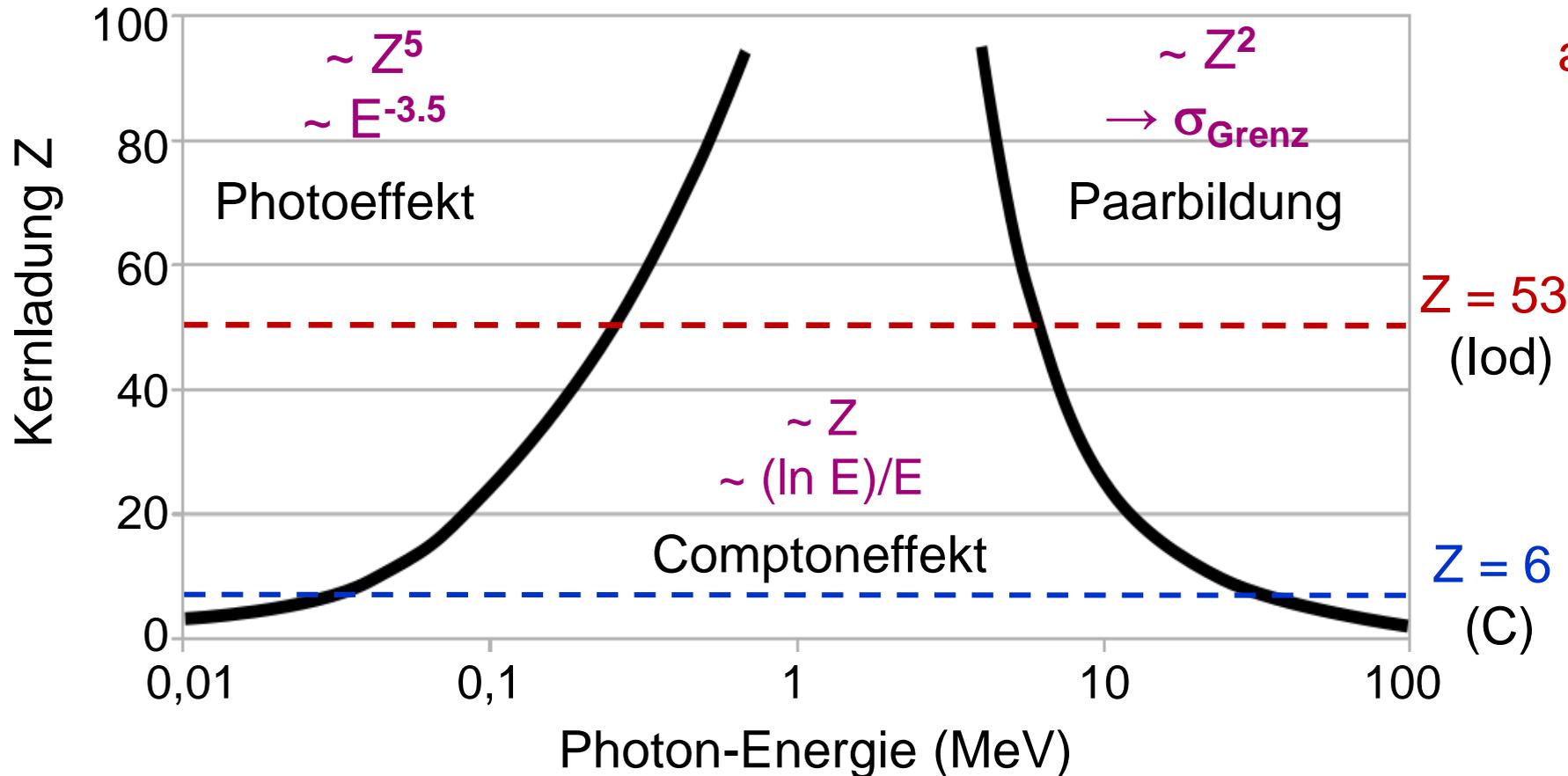
- **bevorzugt für hohes Z**



# Wechselwirkung von Gammas & X-rays

■ die **Wechselwirkung** von  $\gamma$ 's erfolgt über 3 fundamentale Prozesse:

- **Photoeffekt:** kleines  $E_\gamma$ , große Kernladung  $Z$
- **Comptoneffekt:** mittleres  $E_\gamma$ , kleine Kernladung  $Z$
- **Paarbildung:** hohes  $E_\gamma$ , große Kernladung  $Z$

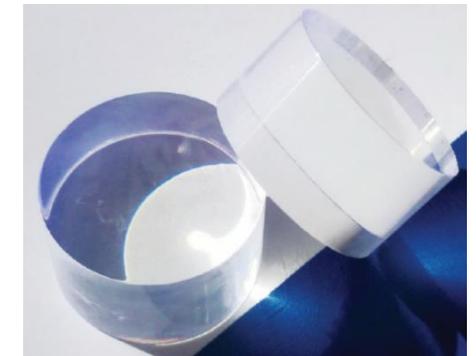


anorganischer NaI

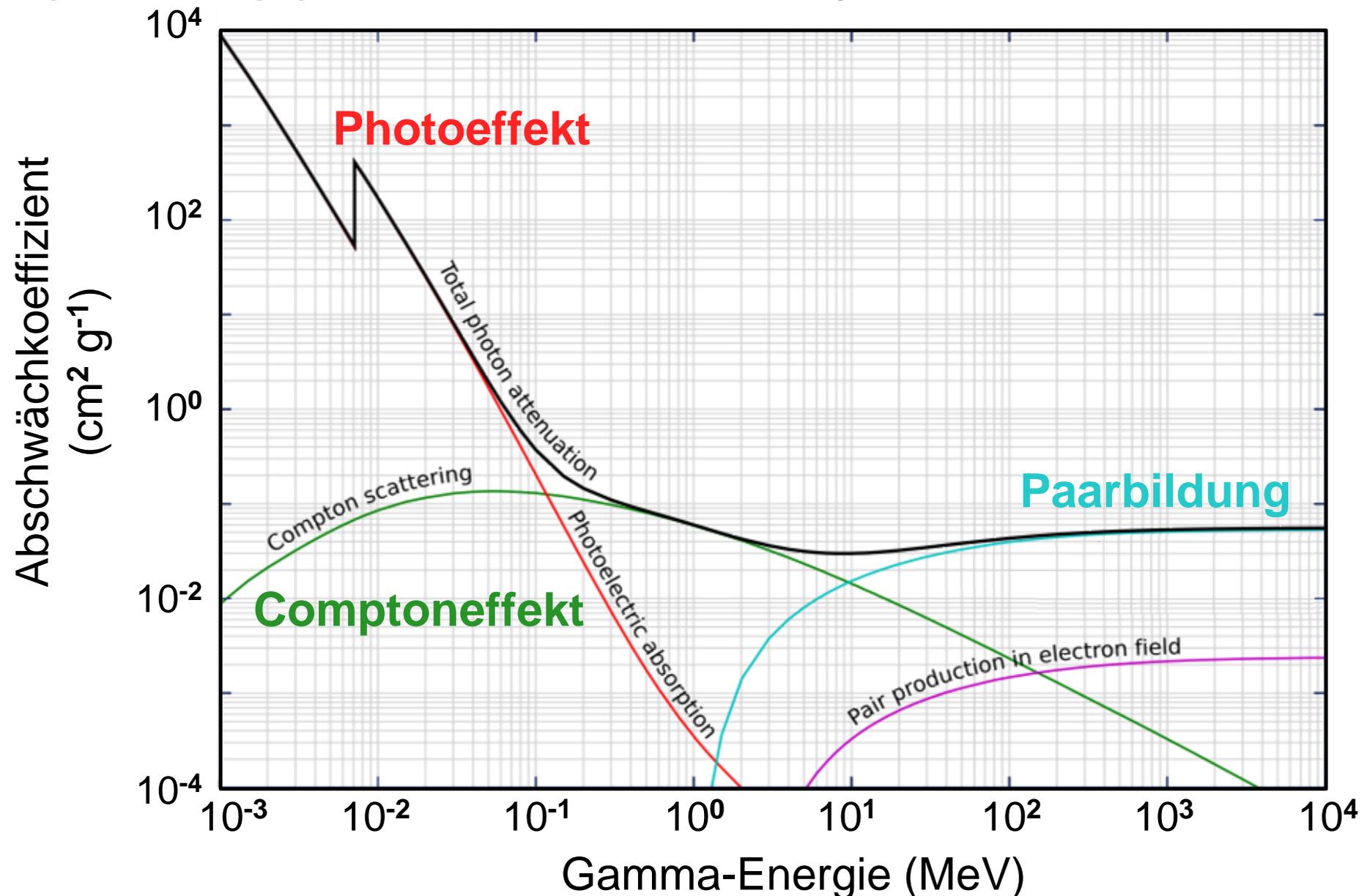


$Z = 53$   
(Iod)

organischer  $\text{CH}_2$



## ■ Energieabhängigkeit von Gamma-Wirkungsquerschnitten



# Wechselwirkung von Quanten

- Wechselwirkungsprozesse von Quanten ( $e^-$ ,  $e^+$ ,  $\gamma$ ) in der Atom-, Kern- & Teilchenphysik werden charakterisiert durch **Feynman-Diagramme**
  - Teilchen (Antiteilchen) propagieren vorwärts (rückwärts) in Zeit

- Propagation von Teilchen:  $e^- \longrightarrow$

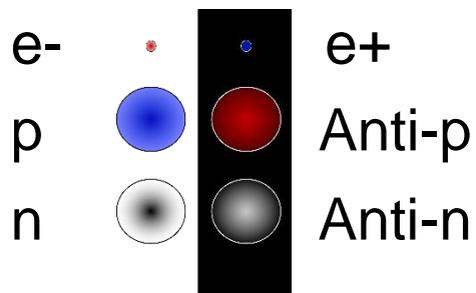
$\gamma$

Anti-Teilchen:  $\longleftarrow e^+$

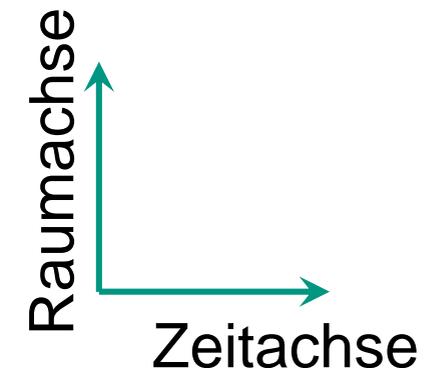
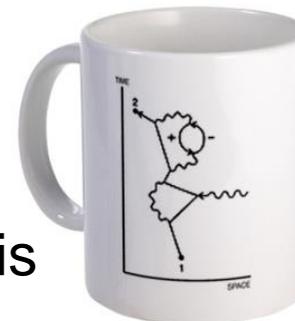
( $e^+$  : rückwärts in der Zeit laufendes  $e^-$ )

$e^-$ ,  $e^+$ , ... : gerade Linien (Teilchen/Antiteilchen)

Photonen: Wellen



Nobelpreis  
1965

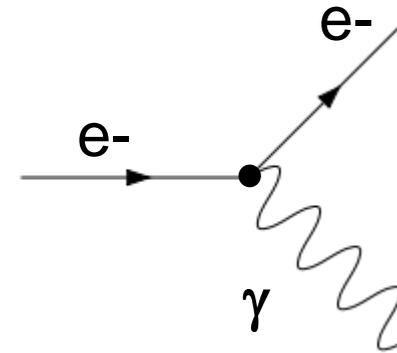


- gute „Visualisierung“ zum Verständnis
  - konkrete Rechenregeln (Störungstheorie) für Wechselwirkungen (Impulse  $q$ , ...)

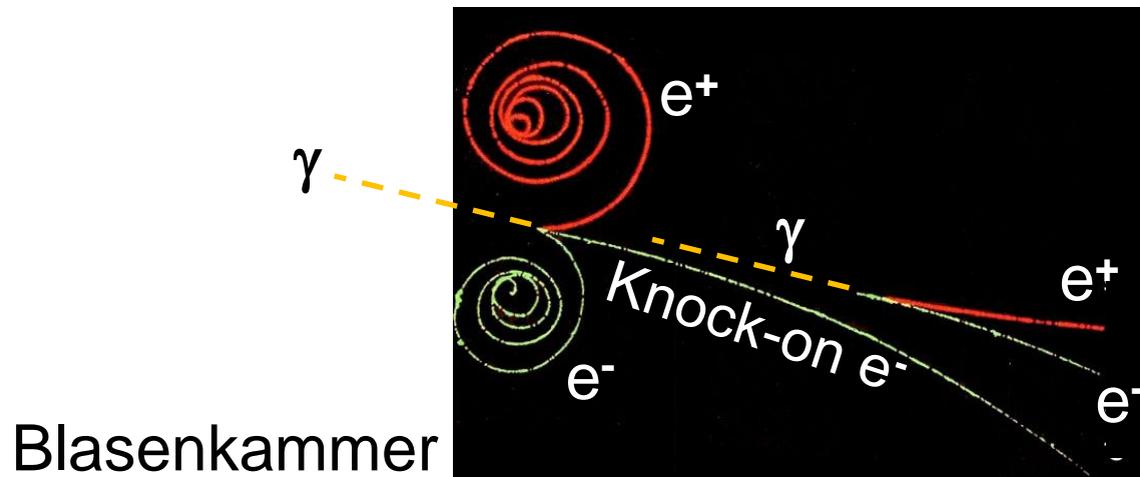
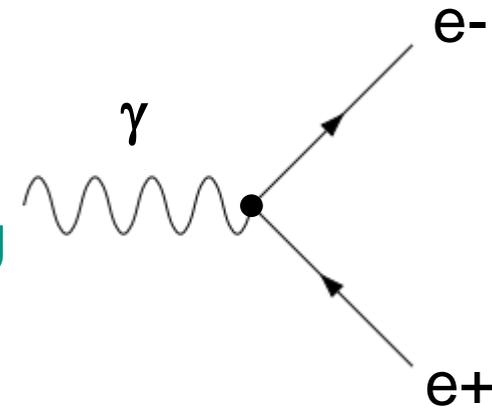


- Erzeugung/Vernichtung von Teilchen an einem **Vertex**: •
- Diagramm zur Paarbildung hier ohne das Coulombfeld des Kerns

Emission eines Photons

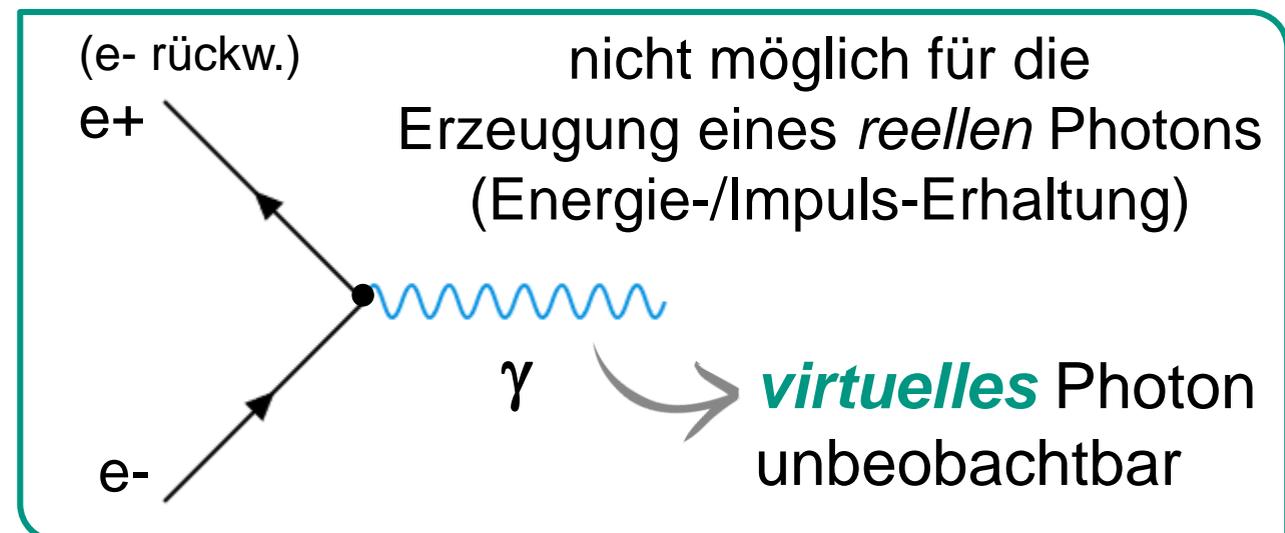
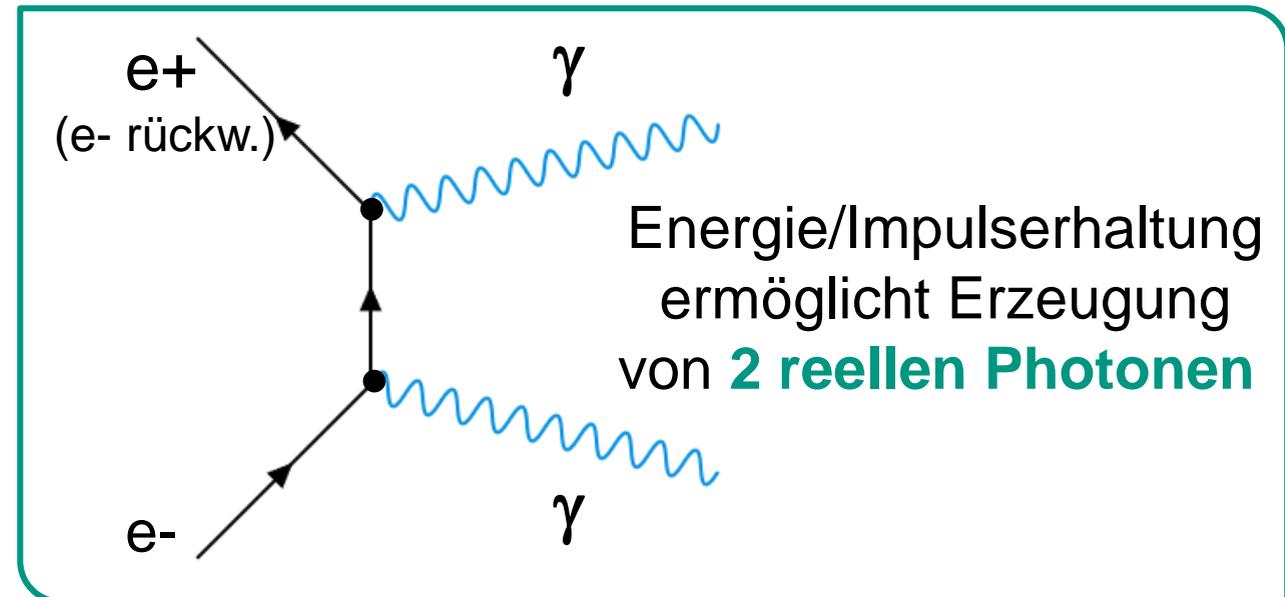
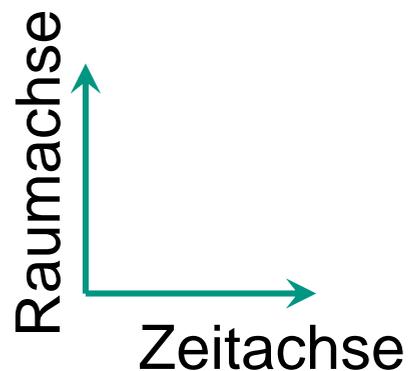


Paarbildung



## ■ Beispiel: **Annihilation von $e^-$ & $e^+$ (inverser Prozess zu Paarerzeugung)**

- physikalische Prozesse können oft durch **mehrere Feynman-Diagramme** beschrieben werden
- Energie- und Impulserhaltung verbieten Produktion eines einzelnen (reellen) Photons



## ■ Virtuelle Photonen sind Träger des elektromagnetischen Felds

- Wechselwirkungen vermittelt durch Austausch **virtueller Teilchen**

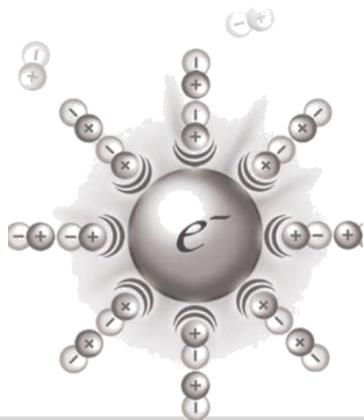
**Photon:** Austauschteilchen der **elektromagnetischen Wechselwirkung**

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$
$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

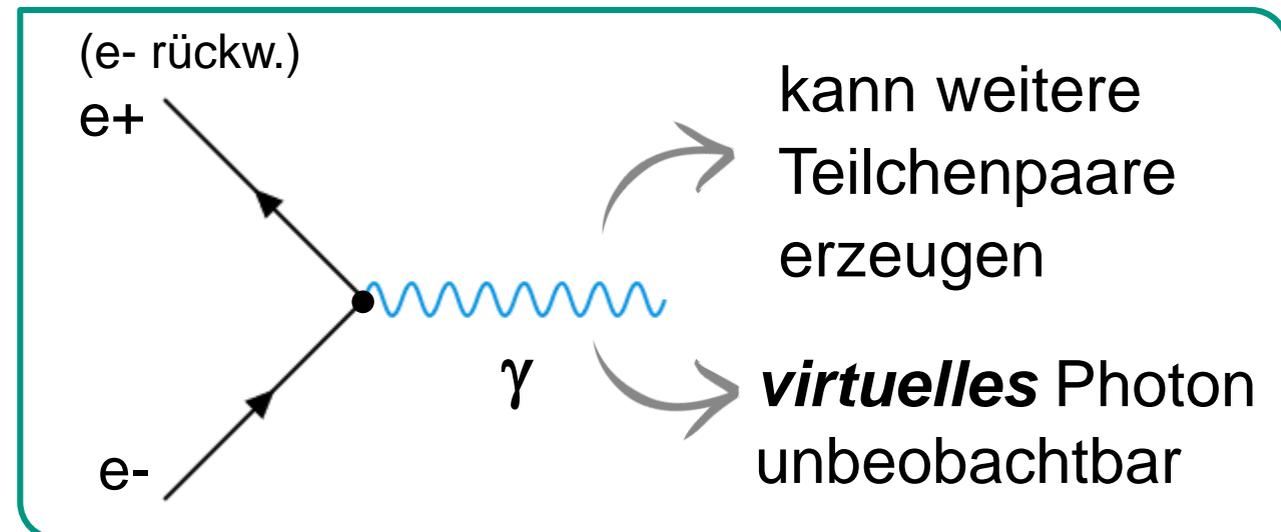


Heisenbergsche Unschärferelation

virtuelle Teilchen - extrem kurze Lebensdauer  
- endliche Reichweite



- virtuelle Teilchen (**Vakuumfluktuationen**) beeinflussen reelle Teilchen

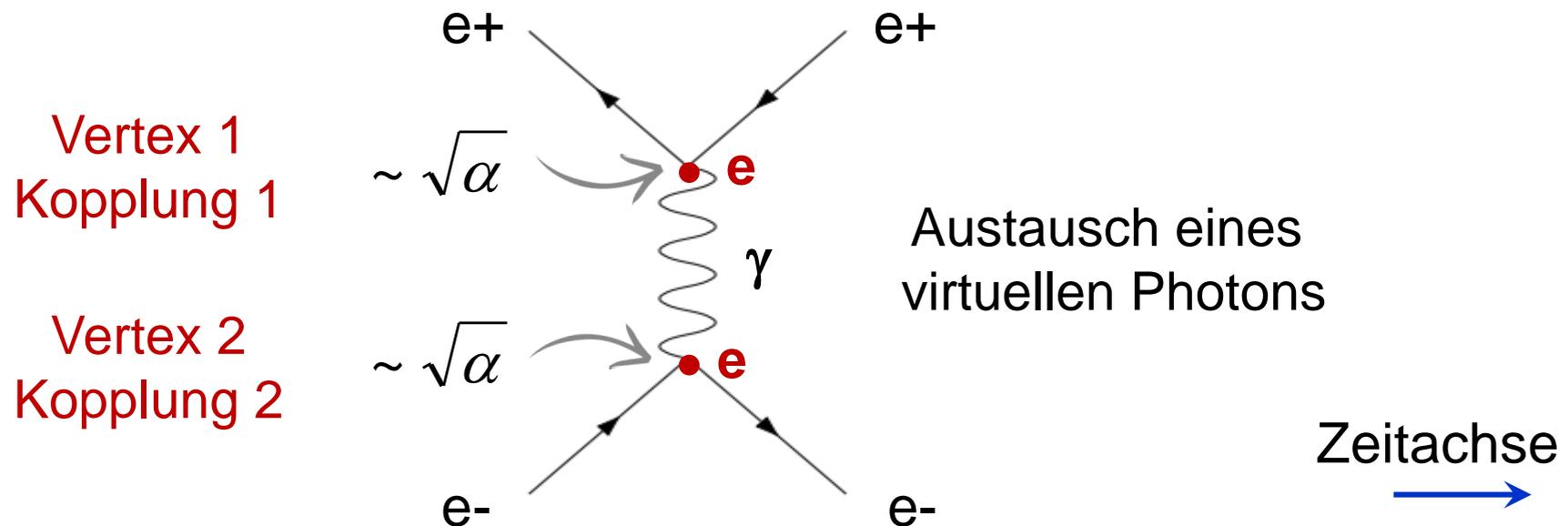


# Feynman Diagramme – Grundlagen

- Kopplungsstärke der elektromagnetischen Wechselwirkung - **Feinstrukturkonstante**  $\alpha$

$$\alpha = \frac{e^2}{2\varepsilon_0 \cdot hc} \approx \frac{1}{137}$$

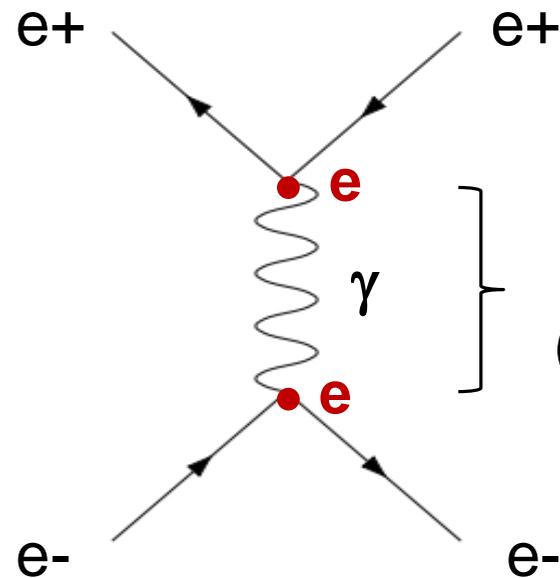
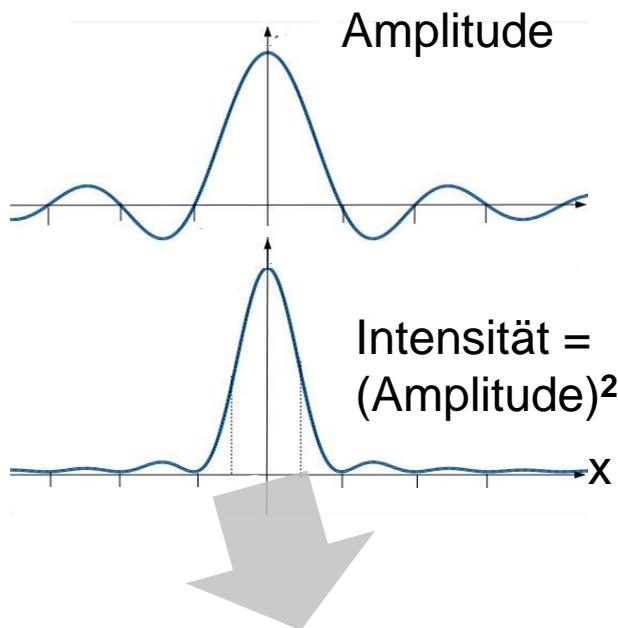
- Beispiel: Elektron-Positron Streuung vermittelt via virtuellem Photon



- **virtuelles Photon koppelt an die elektrische Ladung  $e$  ( $\sim \sqrt{\alpha}$ )** eines geladenen Teilchens

# Feynman Diagramme – Grundlagen

- Beim Streuprozess kommt es durch das virtuelle Photon zu einem **Impulstransfer** ( $\gamma$  überträgt Impuls  $q$ )
- **Propagator**: Wahrscheinlichkeitsamplitude, dass virtuelles Photon von Vertex 1 zu Vertex 2 propagiert (bzw. den Impuls  $q$  trägt)



masselose  
Photonen

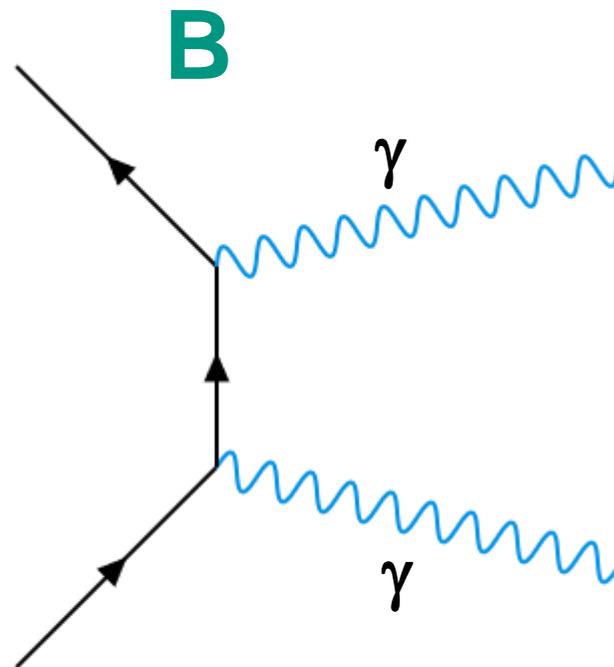
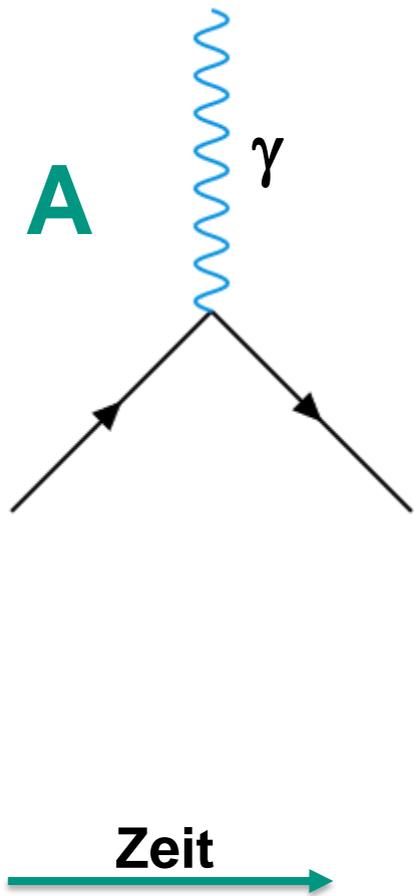
Propagatorterm  
(im Impulsraum)  $\sim \frac{1}{q^2}$

- Rutherford-Streuung: differentieller Wq.  
 $d\sigma/d\Omega \sim |\text{Wahrscheinlichkeitsamplitude}|^2$

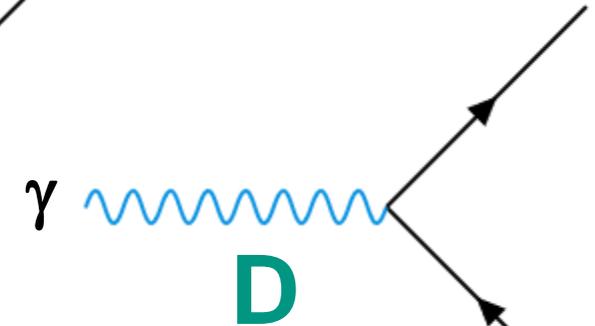
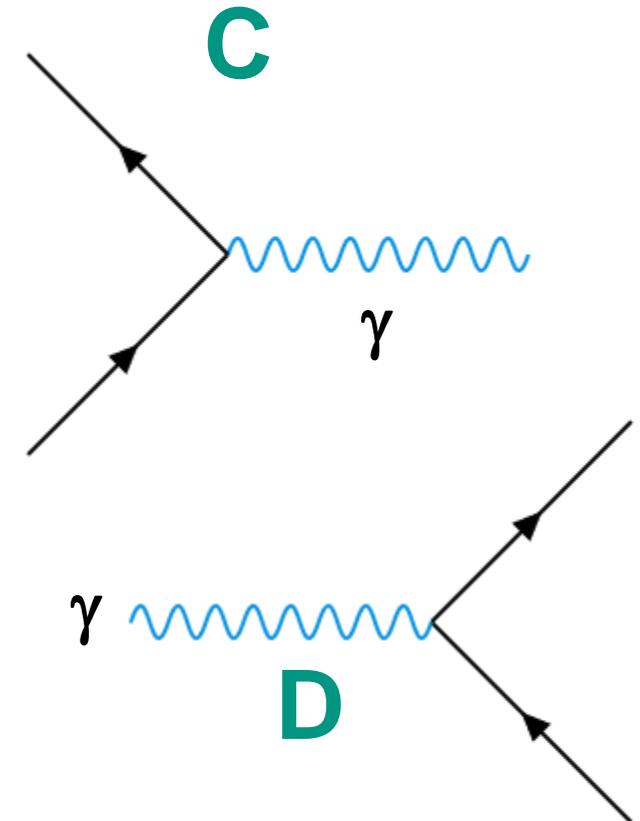
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \propto \alpha^2 \cdot \frac{1}{q^4}$$

# Fun with Facts: Feynman-Diagramme

■ Frage: Welches Feynman-Diagramm steht für die Vernichtung eines Elektron-Positron-Paares?

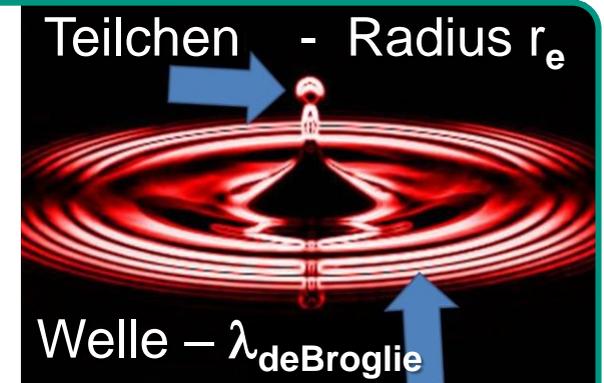


SHELDON COOPER  
presents  
FUN WITH FLAGS  
Feynman



# 3.2 Elektronen & Materiewellen

- **alle Teilchen** (Licht, Elektronen, Kerne, Atome, Moleküle, Molekül-Cluster, ...) **besitzen auch Wellencharakter: Teilchen-Welle Dualismus**
  - von grundlegender Bedeutung für Quantenmechanik



## ■ Teilchen- & Wellen-Eigenschaften von Elektronen

- Definition - **klassischer Elektronenradius  $r_e$**  über Kugelkondensator mit  $E_{\text{pot}} = m_e \cdot c^2$

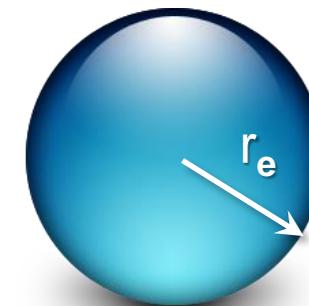
$$r_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{m_e c^2} = 2,8179403227(19) \times 10^{-15} \text{ m}$$

- Streuung von Röntgen-Photonen an Elektronen gibt:

$$\sigma_{\text{tot}} \approx \pi \cdot r_e^2$$

**klassisches Bild:**

Ladung  $-e$  verteilt über  
Volumen  $V$   
Fläche  $A$



## ■ Teilchen-Eigenschaften von Elektronen

- aber: Elektron-Elektron Streuexperimente bei hohen Energien  
⇒ **punktförmige, strukturlose Elementarteilchen:  $r < 10^{-18}$  m**  
d.h. e- hat keine Substruktur messbarer Größe

## ■ Wellen-Eigenschaften von Elektronen

- Elektron besitzt eine **Compton-Wellenlänge  $\lambda_e$** :  
fundamentale Grenze bei Bestimmung des Teilchenortes (vgl. Kap. 5.3)

$$\lambda_e = \frac{h}{m_e c} = 2,4263102367(11) \times 10^{-12} \text{ m}$$

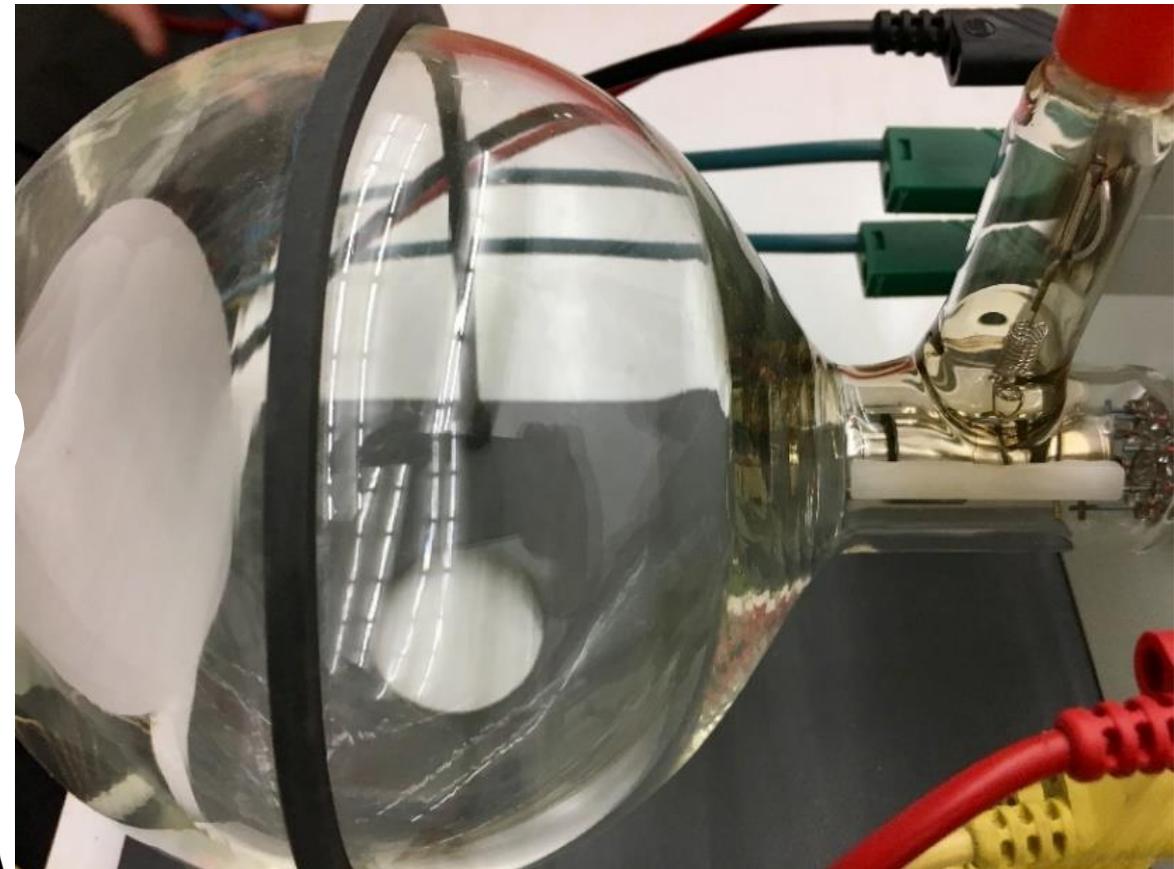
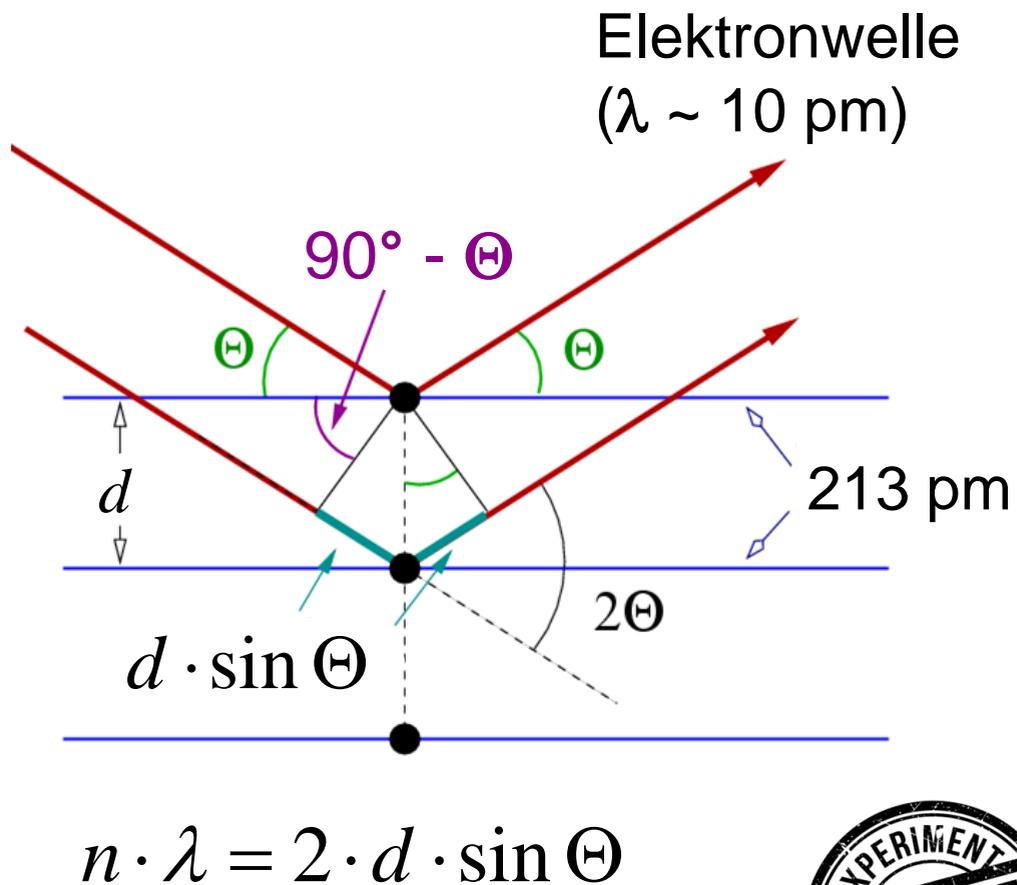
= Wellenlänge eines  
Photons mit  $E_\gamma = m_e \cdot c^2$

- Relation klassischer Elektronenradius  $r_e$   
zur Comptonwellenlänge  $\lambda_e$  :

$$r_e = \alpha \cdot \frac{\lambda_e}{2\pi}$$

## ■ Beugung schneller Elektronen an polykristalliner Graphitschicht

- mit Anodenspannung nachbeschleunigte 10 keV-Elektronen werden gebeugt an Netzebenen der Graphitfolie ( $\lambda_{\text{Elektron}} < d_{\text{Netzebene}}$ )

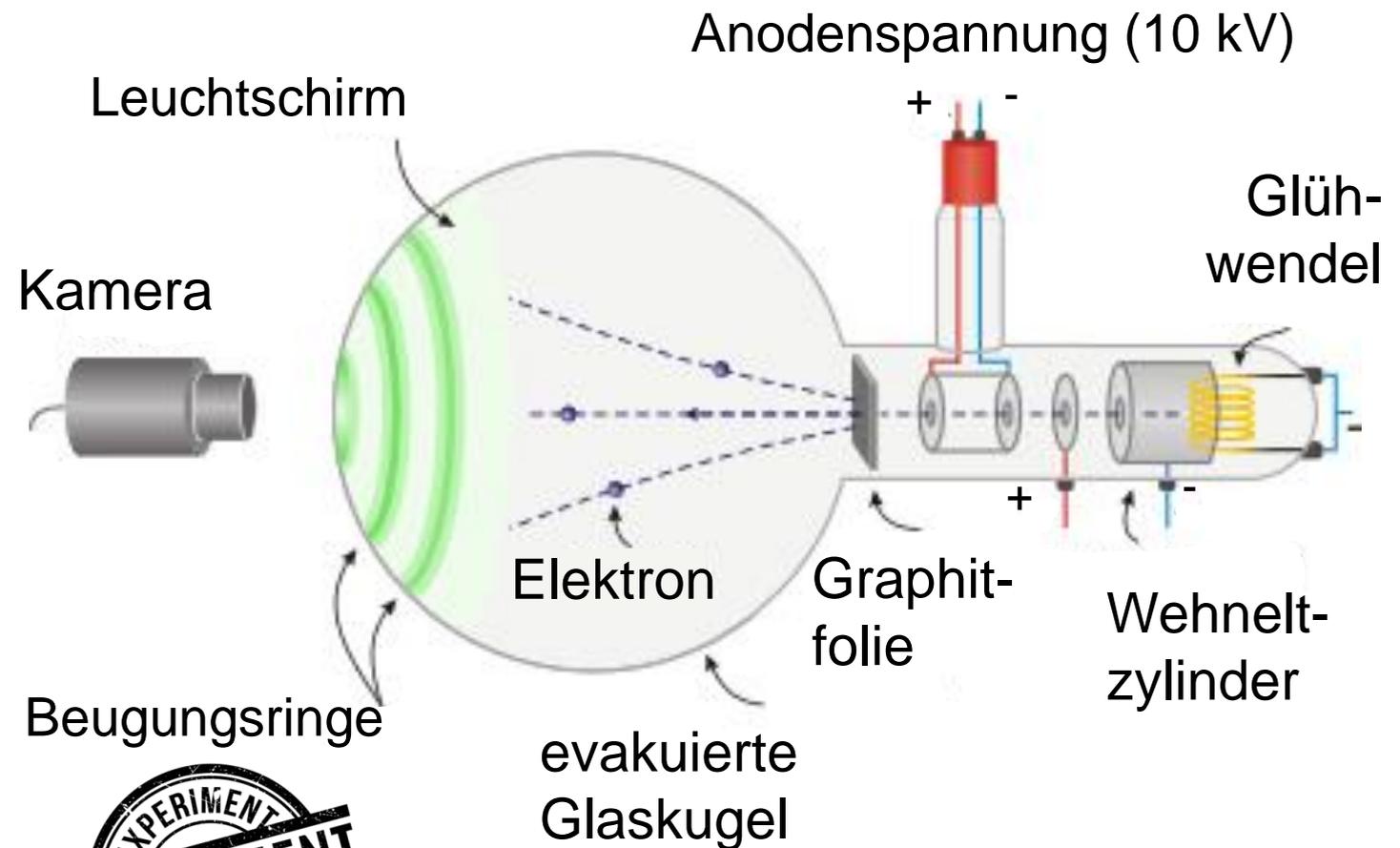
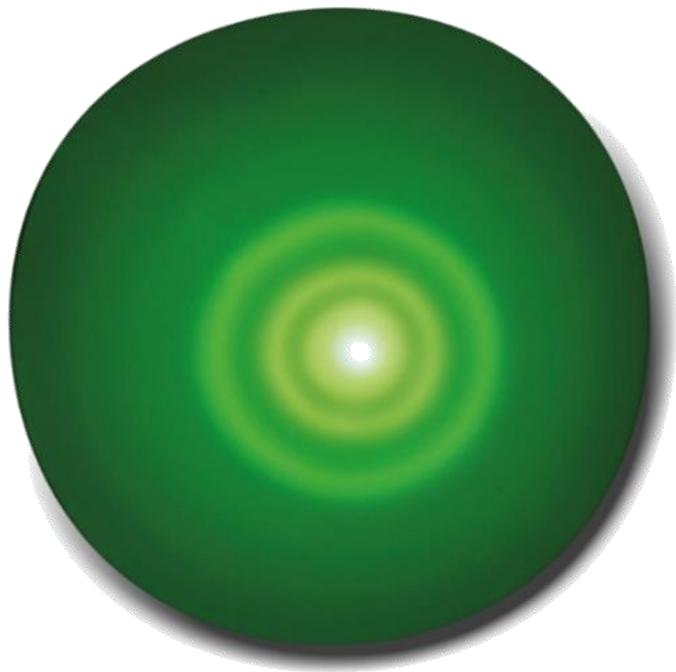


# Experiment: Elektronen als Materiewellen

## ■ Beugung schneller Elektronen an polykristalliner Graphitschicht

- Beobachtung von Interferenzringen der gestreuten Elektronen

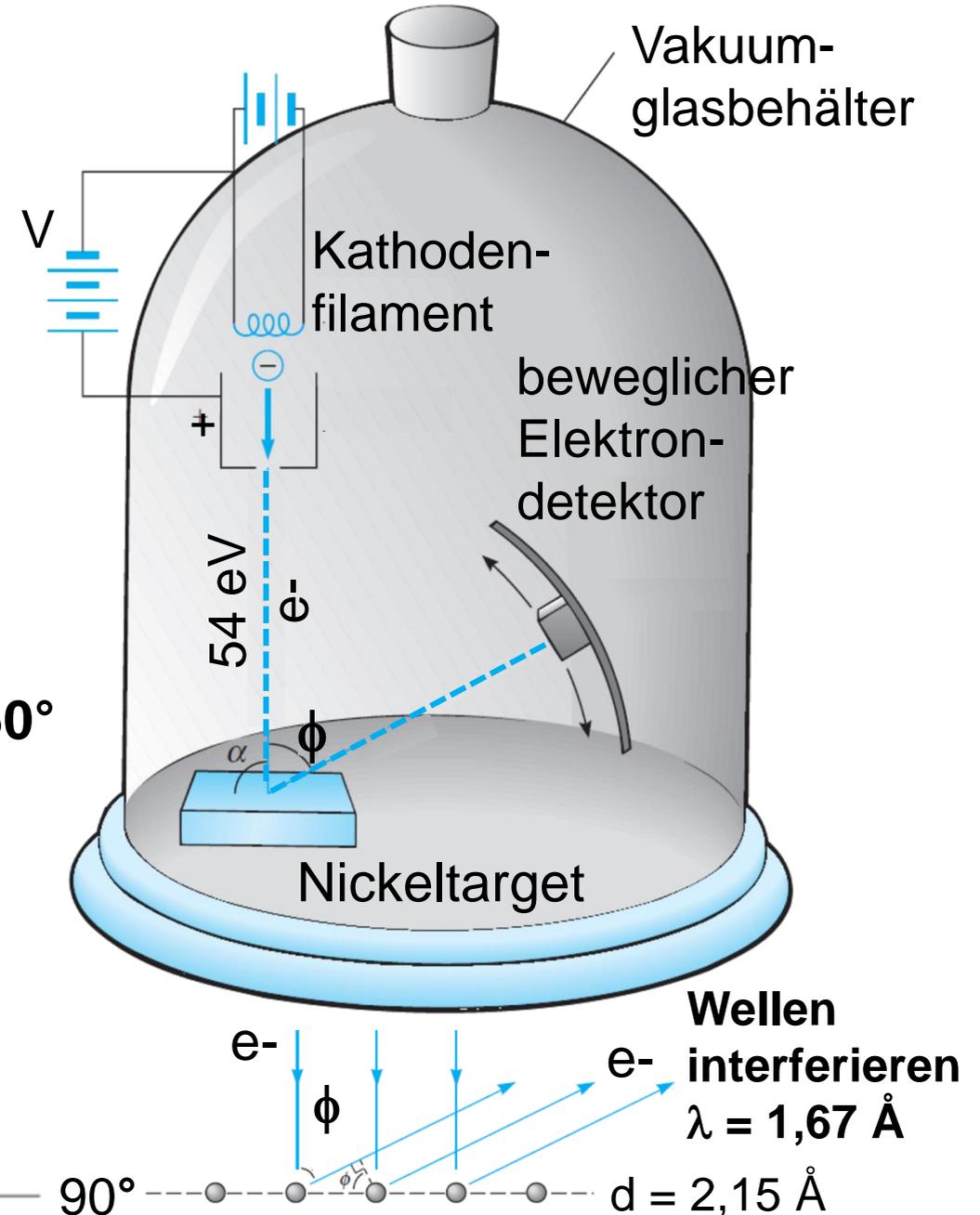
→ **Wellencharakter der Elektronen**



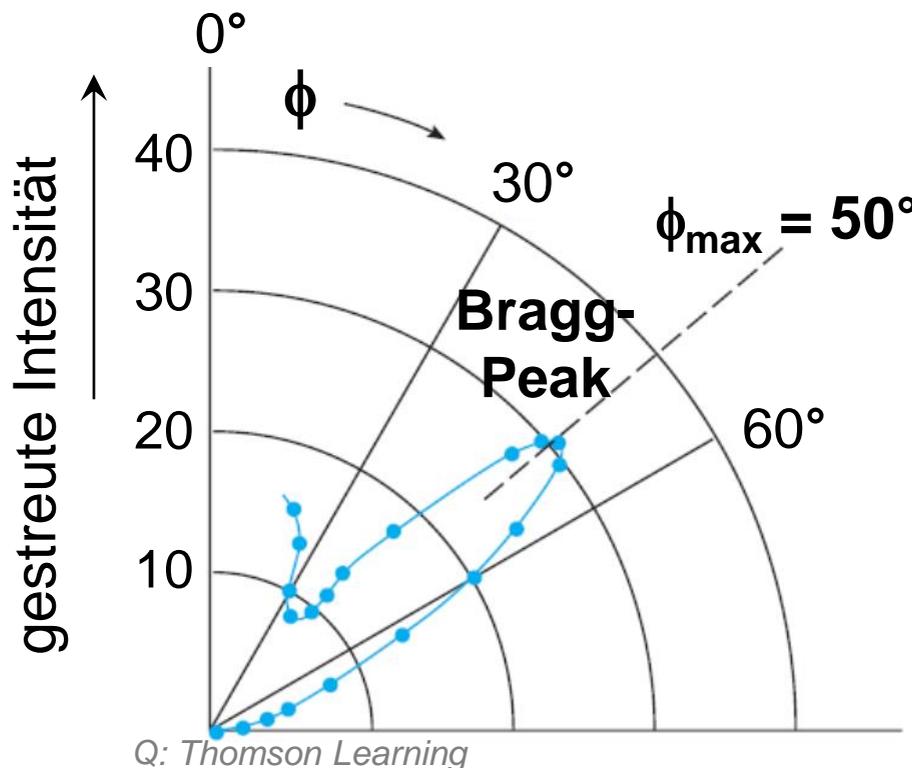
# Elektronen als Materiewellen

## Wellencharakter von Elektronen

- Messung der Winkelverteilung von elastisch gestreuten Elektronen an einem Ni-Target (**Einkristall**)
- Elektronen zeigen **Interferenz**: Maxima/Minima als Funktion von  $\phi$



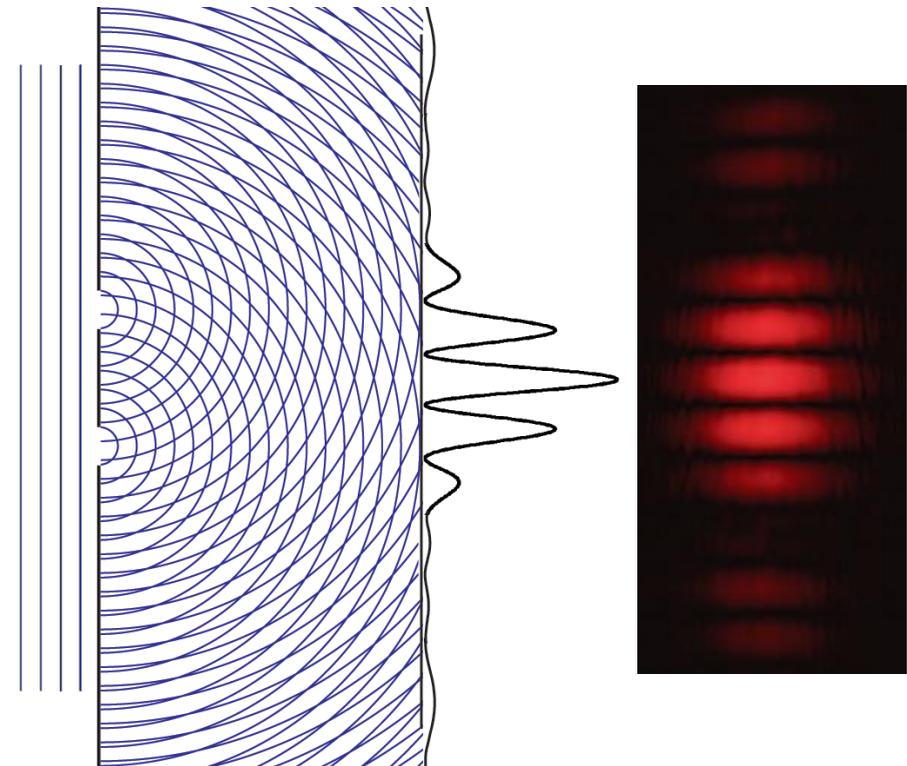
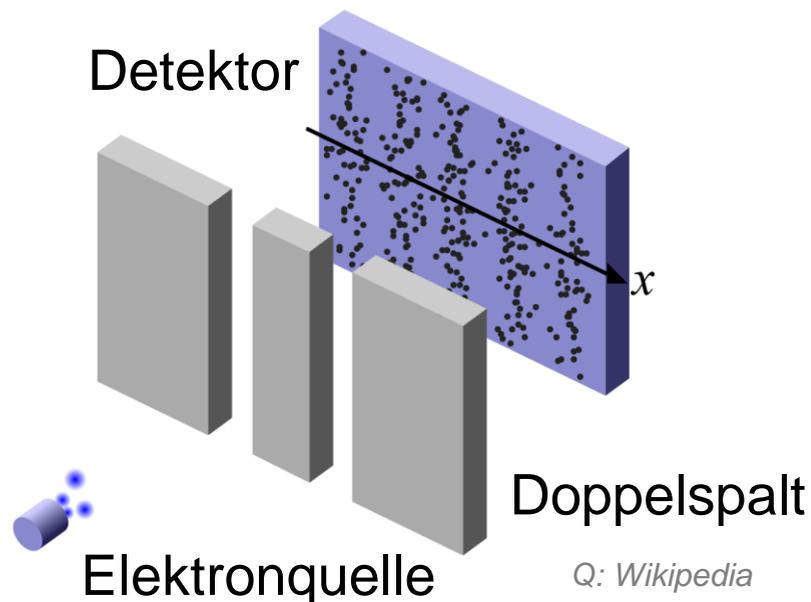
1927:  
C. Davisson &  
L.H. Germer



## ■ Doppelspalt-Experiment mit Elektronen

1961: Nachweis der Interferenz von Elektronen an einem Doppelspalt durch C. Jönsson (analog zu Licht, Thomas Young 1802/03)

- Bedingung für destruktive Interferenz von  $e^-$  :



## ■ Doppelspalt-Experiment mit Elektronen

1961: Nachweis der Interferenz von Elektronen an einem Doppelspalt durch C. Jönsson (analog zu Licht, Thomas Young 1802/03)

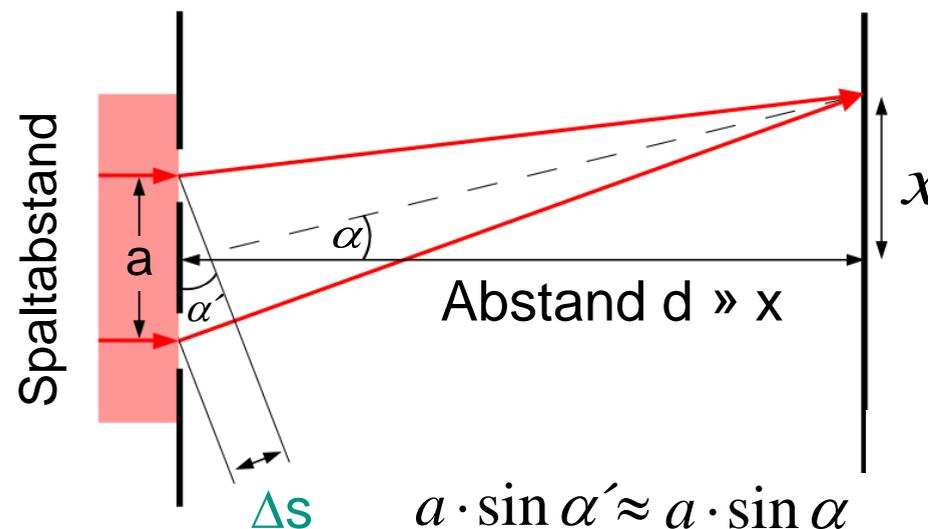
- Bedingung für **destruktive Interferenz** von e<sup>-</sup> :

Gangunterschied  $\Delta s =$  
$$\Delta s = \frac{x}{d} \cdot a = \pm n \cdot \frac{\lambda}{2}$$

Geometrie

für kleine  $\alpha$  :

$$\frac{\Delta s}{a} = \frac{x}{d}$$



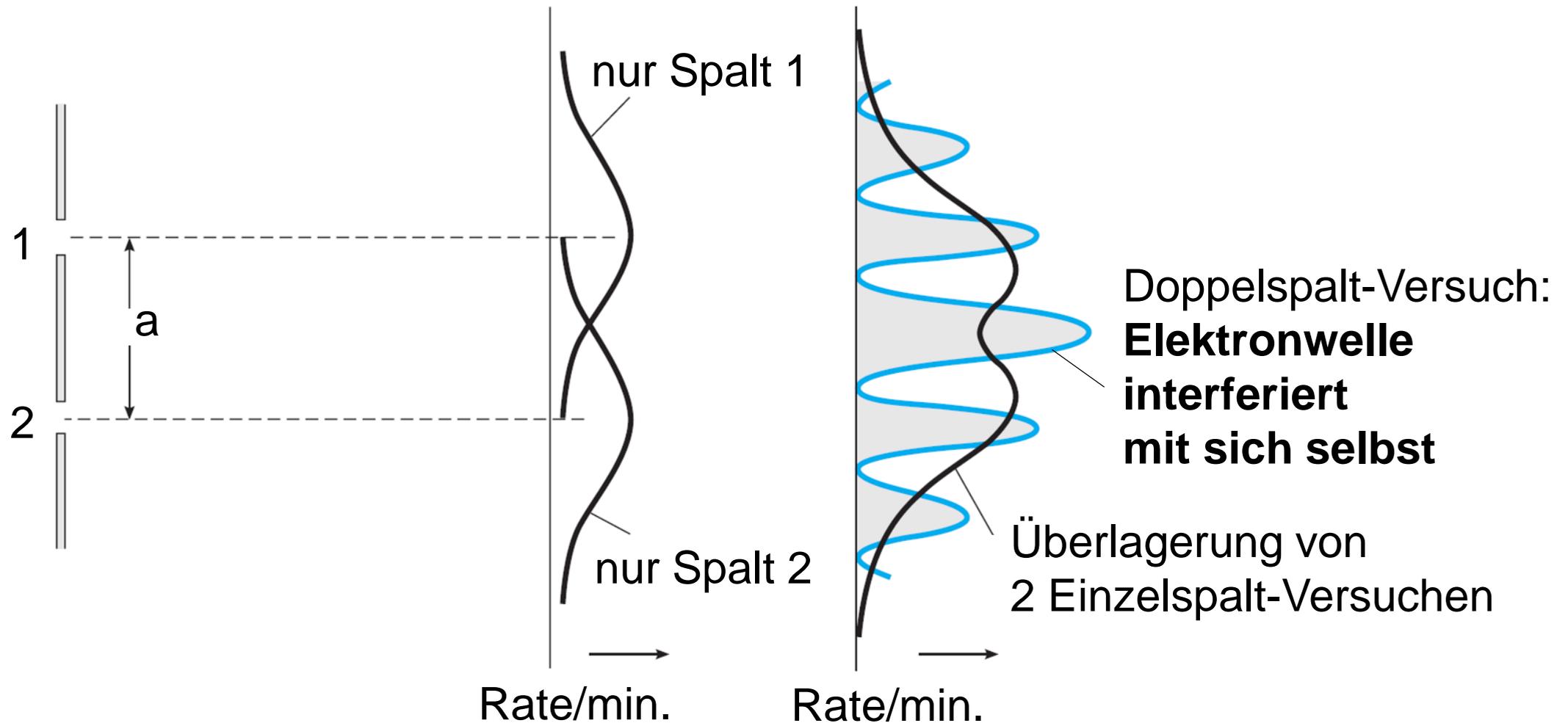
$$\tan \alpha \approx \sin \alpha \approx x / d$$

$$a \cdot \sin \alpha' \approx a \cdot \sin \alpha$$

Q: Wikipedia

## ■ Doppelspalt-Experiment mit Elektronen

- Interferenz von Elektronen tritt nur auf, wenn beide Spalte offen sind
- Interferenz auch bei geringer Intensität (nur 1 e- pro Zeiteinheit)



Q: Thomson Learning

# Elektronen als Materiewellen

## ■ Doppelspalt-Experiment mit Elektronen

- am Doppelspalt: Wellencharakter
- beim Nachweis: Teilchencharakter
- einzelnes Elektron demonstriert

### Teilchen-Welle-Dualismus

- Ursache für Interferenz von e<sup>-</sup> :

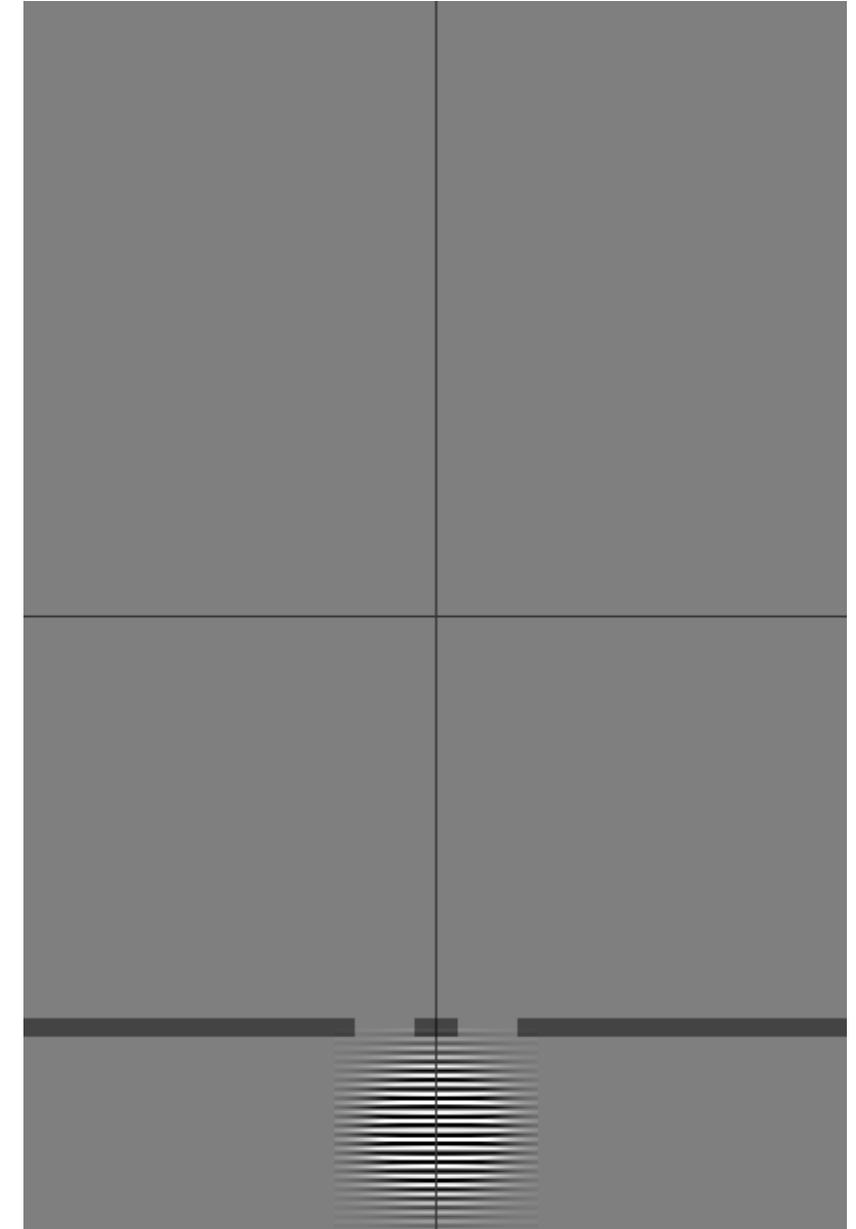


$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

Q: Wikipedia

Heisenbergsche  
Unschärferelation

Q: Wikipedia



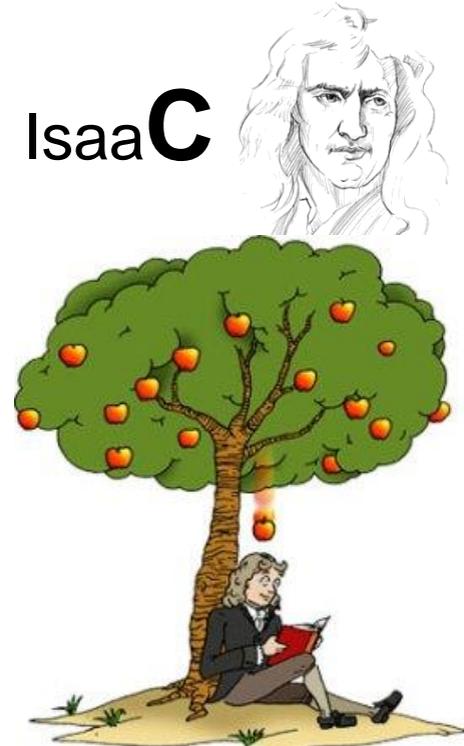
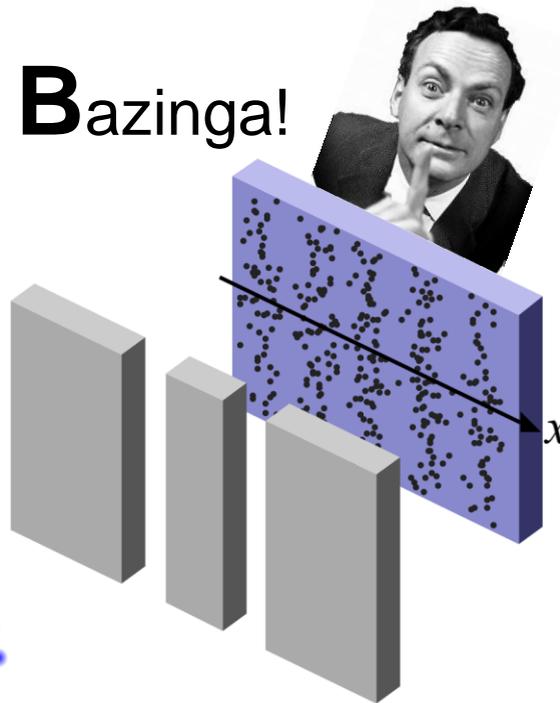
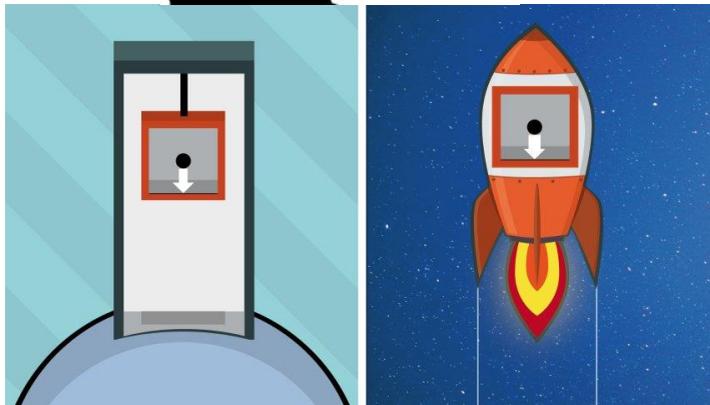
Elektron trifft auf Doppelspalt

# Fun with Facts: ~~gute~~ Experimente ! *geniale*

■ Frage: **welches Experiment gefällt mir am besten?**

- A) Gedankenexperiment zur schweren/trägen Masse (ART)
- B) Doppelspalt-Experiment mit Elektronen (Materiewellen)
- C) Fallender Apfel (universelle Gravitation)

SHELDON COOPER  
presents  
~~FUN~~ WITH ~~FACTS~~



# Elektronen als Materiewellen

## ■ Doppelspalt-Experiment mit Elektronen

- Ursache für Interferenz von e<sup>-</sup> :



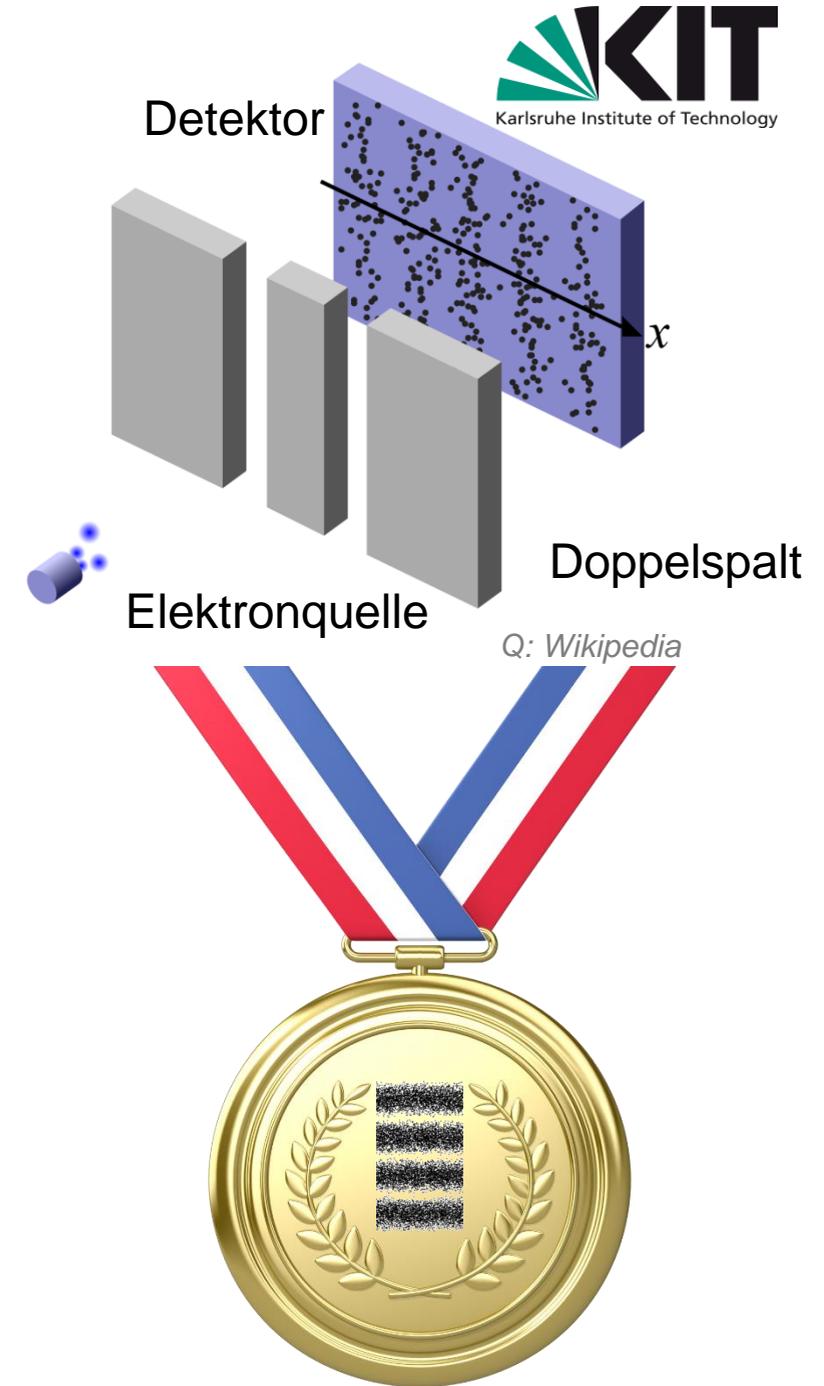
$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

Q: Wikipedia

Heisenbergsche Unschärferelation

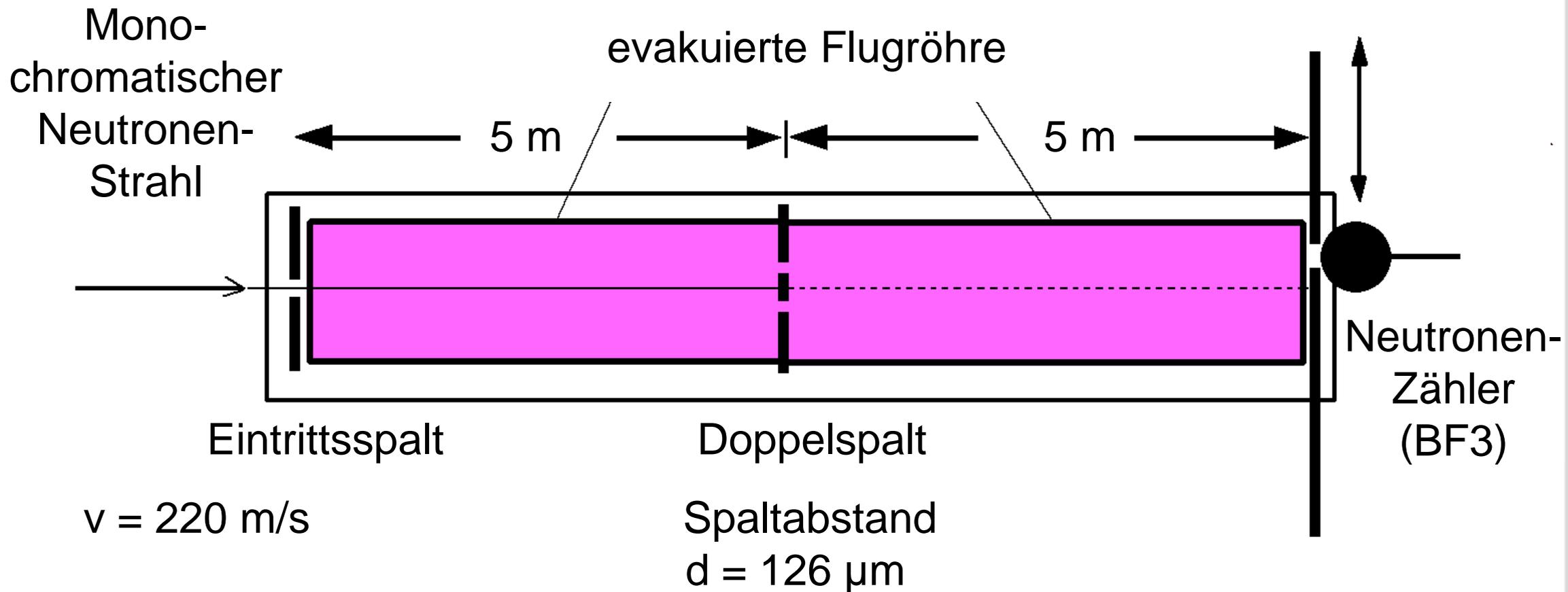
# physicsworld

The most beautiful experiment in physics, according to a poll of *Physics World* readers, is the **interference of single electrons** in a Young's double slit set-up



# Neutronen als Materiewellen

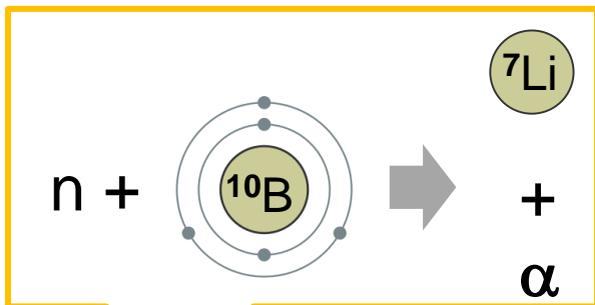
- **Doppelspalt-Experiment** mit Neutronen (Anton Zeilinger et al., 1981)
  - Nachweis der **Wellennatur von Neutronen**
  - Experiment mit kalten Neutronen ( $v = 220 \text{ m/s}$ ,  $\lambda_{\text{de Broglie}} = 2 \text{ nm}$ )



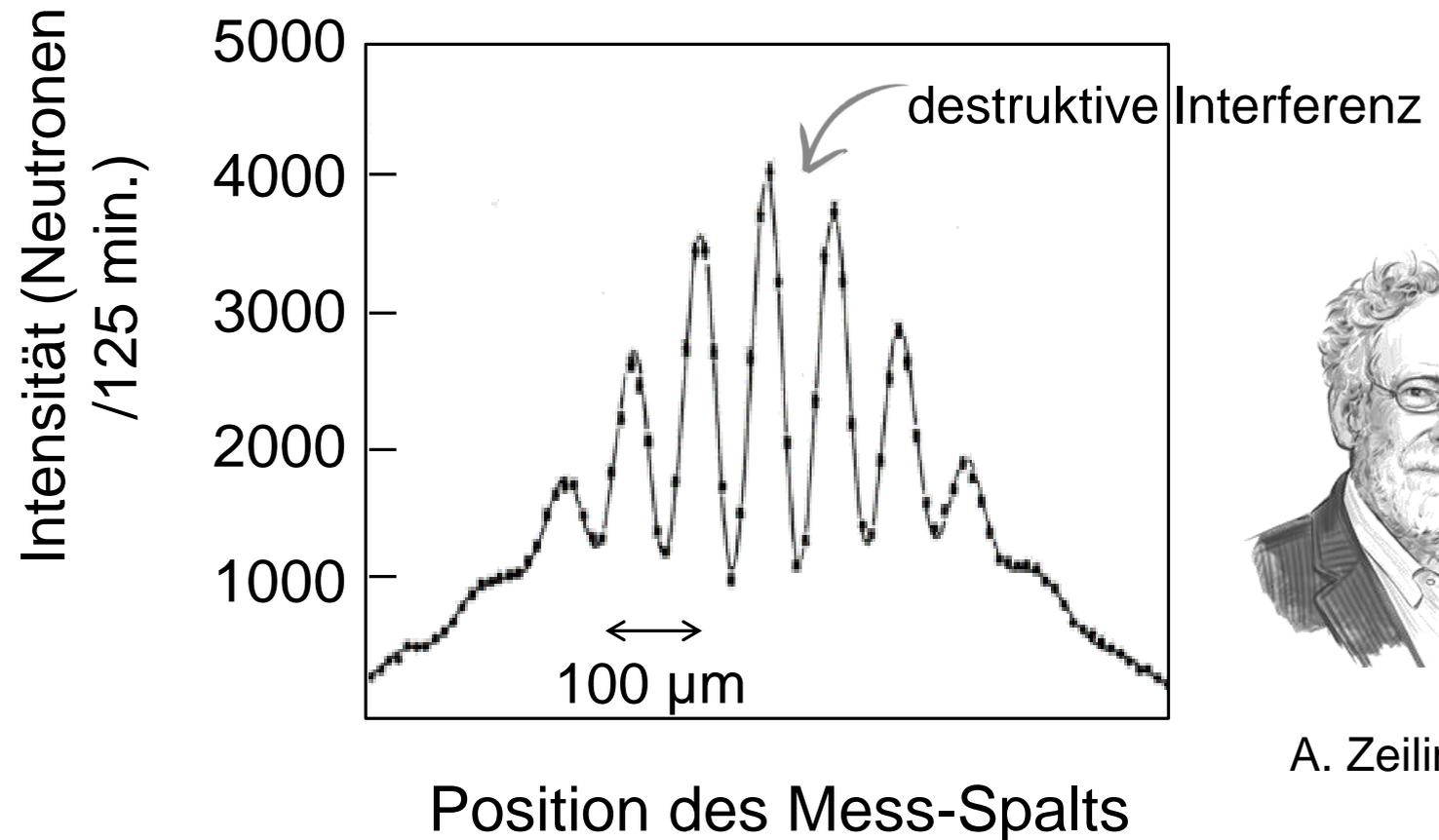
# Neutronen als Materiewellen

- **Doppelspalt-Experiment** mit Neutronen (Anton Zeilinger et al., 1981)
  - Nachweis der **Wellennatur von Neutronen**
  - Experiment mit kalten Neutronen ( $v = 200 \text{ m/s}$ ,  $\lambda_{\text{de Broglie}} = 2 \text{ nm}$ )

Nachweis von  
thermischen  
Neutronen:



Bor-Trifluorid-Proportionalrohr



A. Zeilinger

# Materiewellen – de Broglie

- Dissertation von Louis de Broglie (*Recherches sur la théorie des quanta*)  
1924 an der Sorbonne, Paris:

- alle Teilchen (Elektronen, Atome,...) besitzen Wellencharakter  
mit einer charakteristischen **de Broglie-Wellenlänge  $\lambda$**

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

**h**: Planck'sches Wirkungsquantum

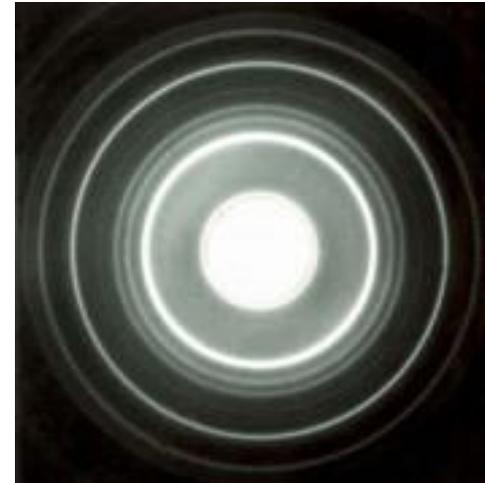
**p**: **relativistischer Impuls** des Teilchens ( $p = \gamma \cdot m \cdot v$ )



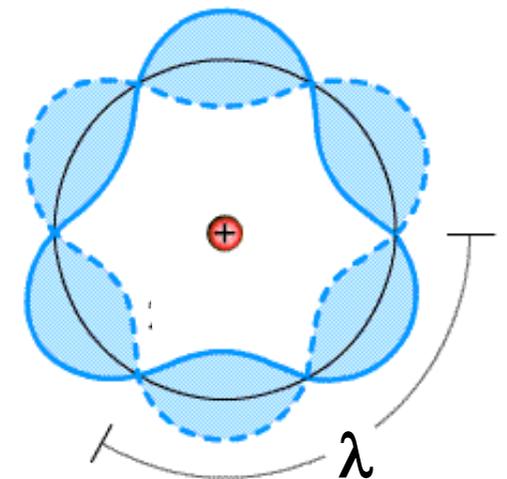
Louis  
de Broglie



Nobelpreis 1929



Experiment



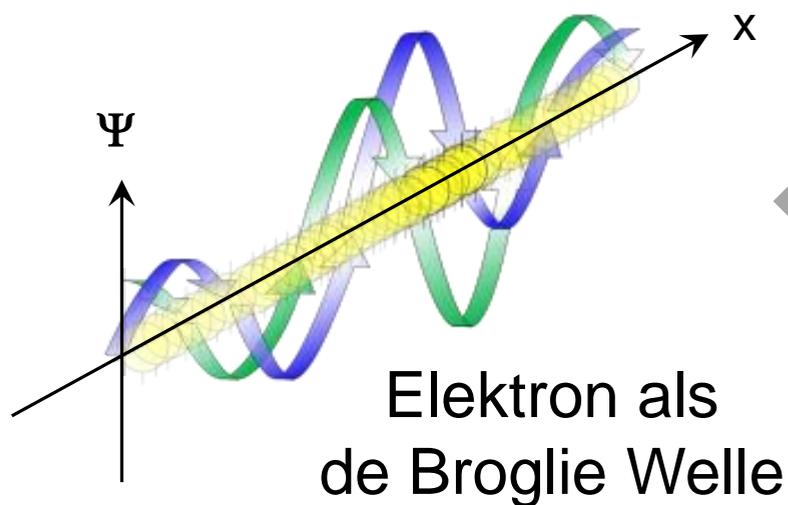
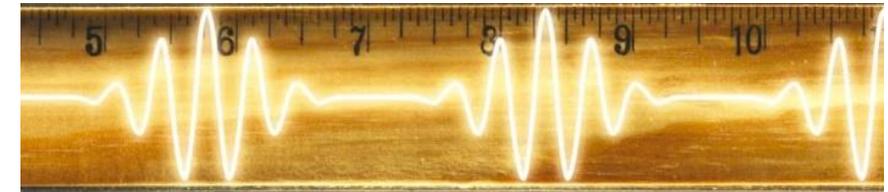
⇒ neues Atom-Modell

# Materiewellen – de Broglie

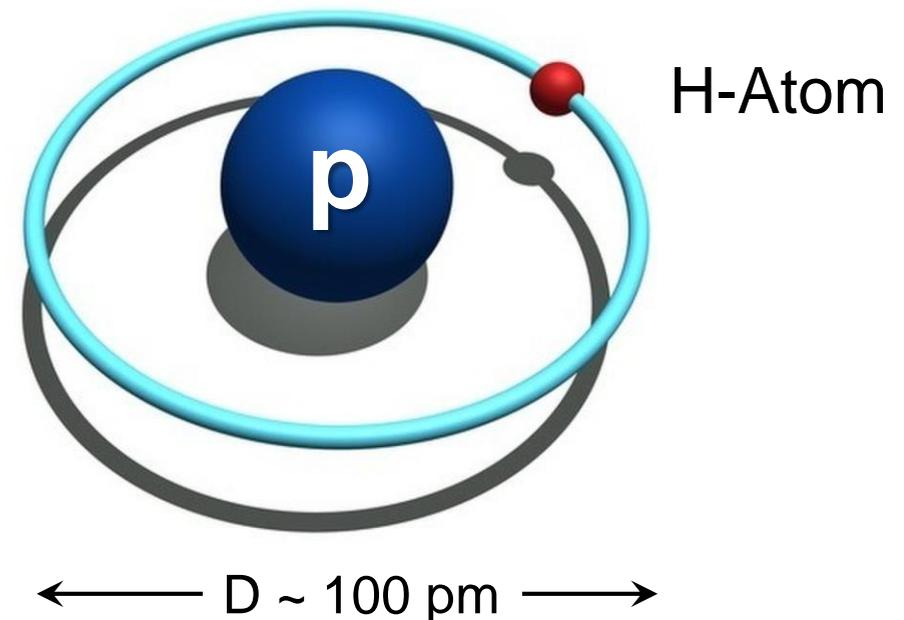
- de Broglie Wellenlänge des Probenpartikels (e,p) sollte der Größe des zu untersuchenden Objekts (Atom, Kern, Nukleon) entsprechen!
  - Beispiel der Größe der de Broglie  $\lambda$  für verschiedene Elektronen-Energien vgl. mit H-Atom ( $R_H = 53 \text{ pm}$ ) bzw. Proton ( $R_P = 0,8 \text{ fm}$ )

## charakteristische de Broglie Wellenlänge $\lambda$

$E_{\text{kin}}$ (eV)	10	100	$10^3$	$10^4$	$10^5$
$\lambda$ (pm)	390	120	39	12	3,7



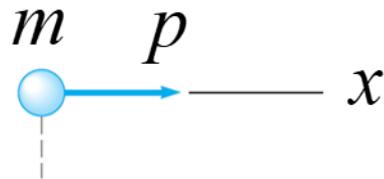
$$\lambda_{\text{de Broglie}} \leq R_{\text{Objekt}}$$



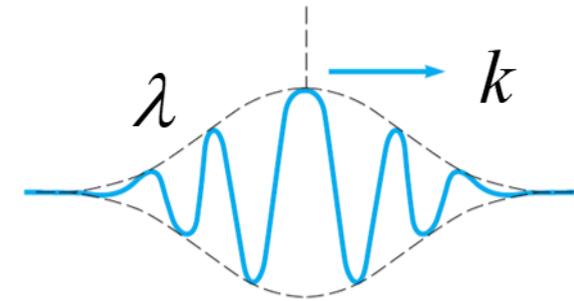
# Materiewellen – de Broglie

- Materiewelle muss als **Wahrscheinlichkeitsamplitude** interpretiert werden !

**Klass. Teilchen**



**Klass. Welle**



- **Beziehungen für Materie und Licht**

Materie	Licht
$E = m \cdot c^2$	$E = h \cdot \nu = \frac{h \cdot c}{\lambda}$
$E = \hbar \cdot \omega$	
$p = \hbar \cdot k$	$p = \frac{E}{c} = \frac{h}{\lambda}$

Dirac-Konstante

$$\hbar = h / 2\pi$$

Kreisfrequenz

$$\omega = 2\pi \cdot \nu$$

Wellenzahl

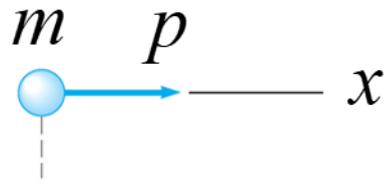
$$k = 2\pi / \lambda$$

Q: Thomson Learning

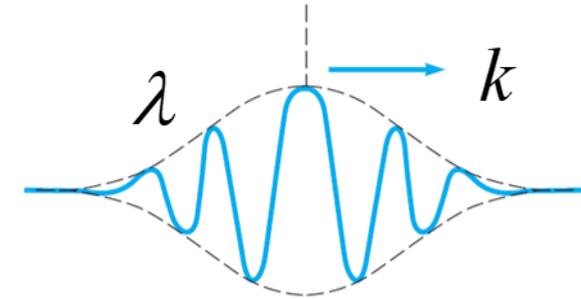
# Materiewellen – de Broglie

- Materiewelle muss als **Wahrscheinlichkeitsamplitude** interpretiert werden !

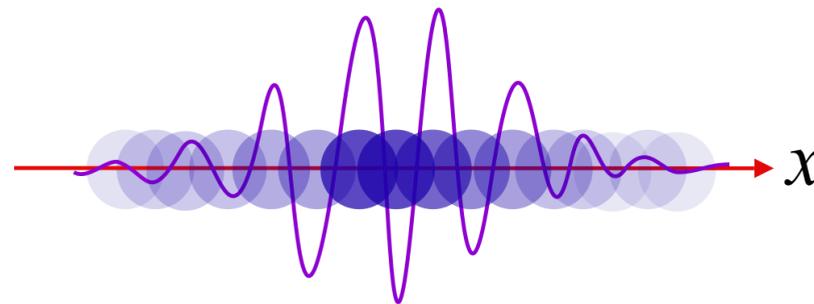
**Klass.  
Teilchen**



**Klass.  
Welle**



**punktförmiges Teilchen  
mit Wellenfunktion  $\Psi(x)$**



$$\vec{p} = \hbar \cdot \vec{k}$$

Impuls &  
Wellenzahlvektor

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

$$E = \hbar \cdot \omega \quad \nu = \frac{E}{h}$$

Energie &  
Kreisfrequenz

## ■ Elektronen in Atomorbitalen besitzen Wellencharakter

- Elektronwellen in einem Orbital interferieren
- konstruktive Interferenz nur für **stehende Welle** mit

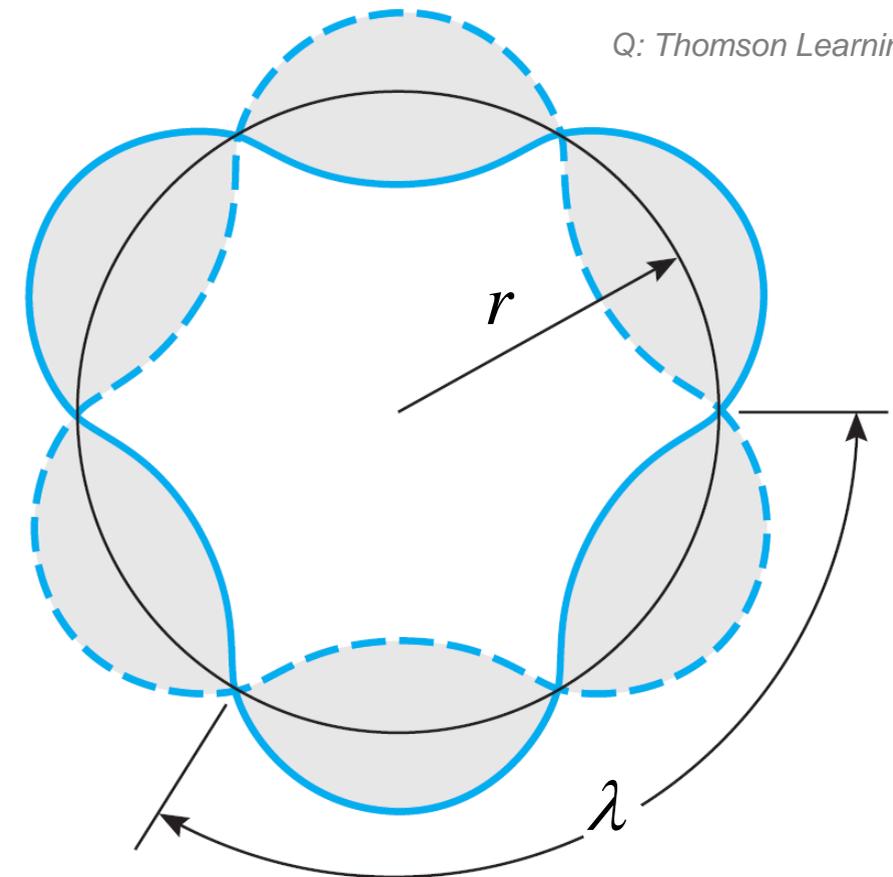
$$n \cdot \lambda = 2\pi \cdot r$$

- mit de Broglie-Gleichung

$$\lambda = \frac{h}{m_e \cdot v}$$

$$n \cdot \frac{h}{m_e \cdot v} = 2\pi \cdot r$$

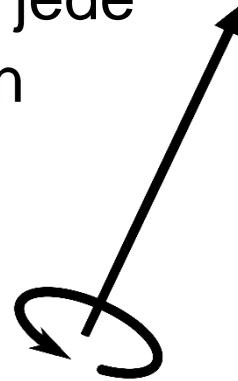
$$n \cdot \hbar = m_e \cdot v \cdot r$$



stehende Elektronwelle in einem kreisförmigen Atom-Orbital mit  $n = 3$

## ■ Quantisierung des Drehimpulses in der Quantenphysik

- **klassisch:** Drehimpuls kann jede Größe annehmen



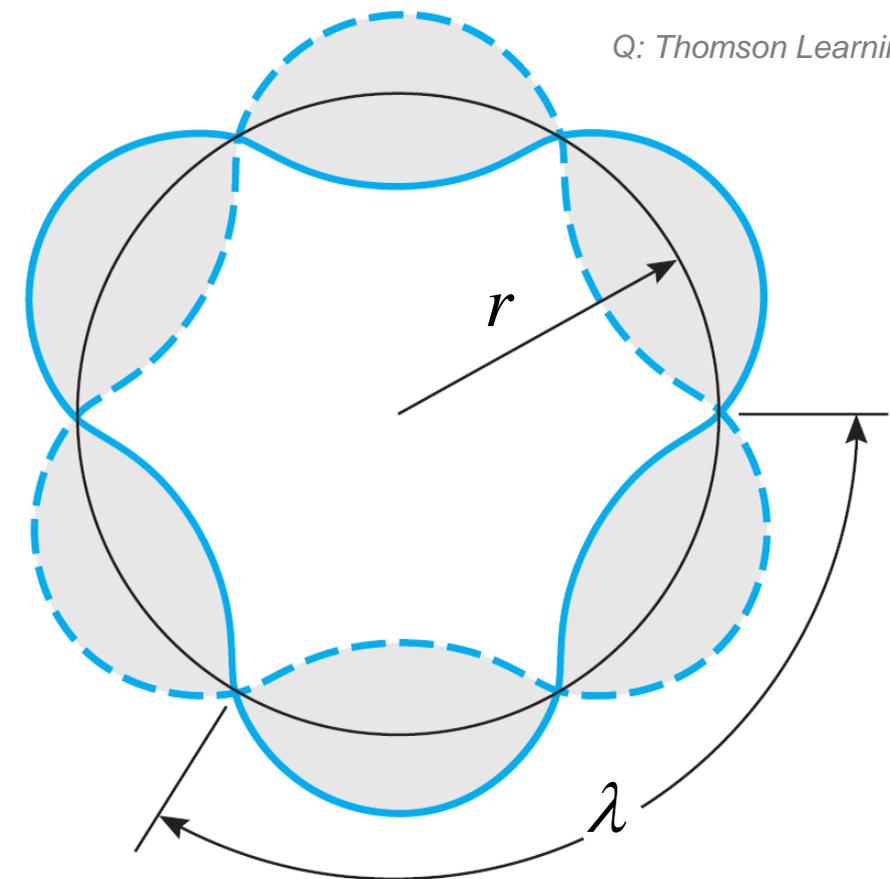
## ■ Quantisierung des Bahn-Drehimpulses $L$ von Elektronen:

$$L = m_e \cdot v_e \cdot r = n \cdot \hbar$$

- bei Übergängen  $\Delta n = 1$  zwischen 2 stationären L-Zuständen gilt daher:

$$\Delta L = 1 \hbar$$

Photon hat Eigendrehimpuls (Spin)  $S = 1 \hbar$



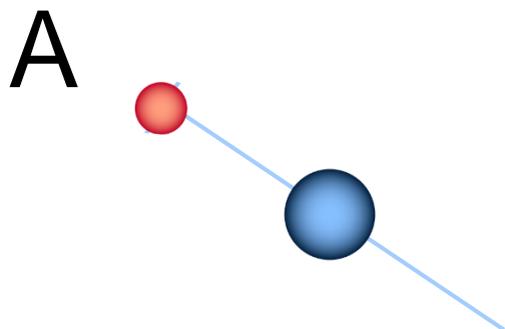
## ■ Welches minimale L kann ein e- in einem atomaren Niveau haben?

A) min. Bahndrehimpuls  $L = 0 \hbar$  !

B) min. Bahndrehimpuls  $L = 1 \hbar$  !

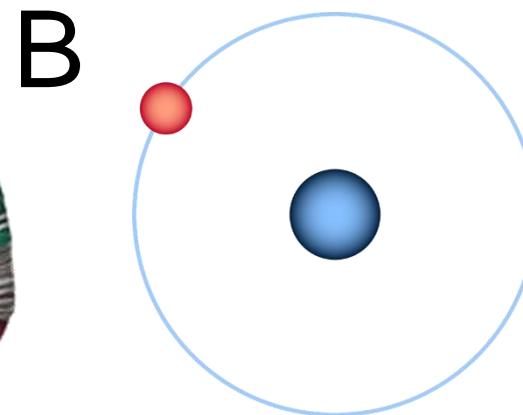
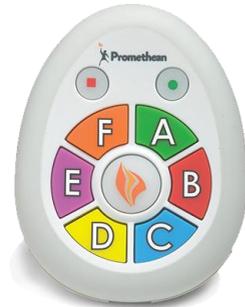
C) min. Bahndrehimpuls  $L = \frac{1}{2} \hbar$  !

SHELDON COOPER  
presents  
**FUN** WITH ~~FACTS~~  
Facts



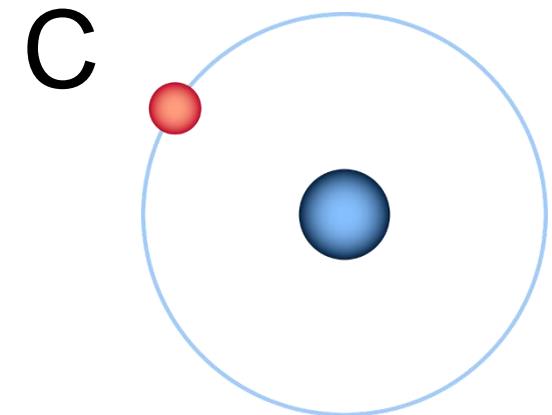
$$L = 0 \hbar$$

(geht auch ohne L)



$$L = 1 \hbar$$

(ohne L geht's nicht)

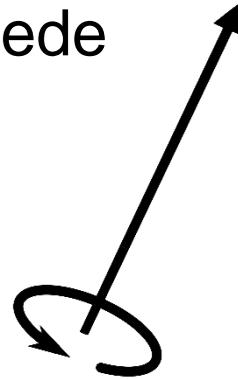


$$L = \frac{1}{2} \hbar$$

(da Spin dazu)

## ■ Quantisierung des Drehimpulses in der Quantenphysik

- **klassisch:** Drehimpuls kann jede Größe annehmen

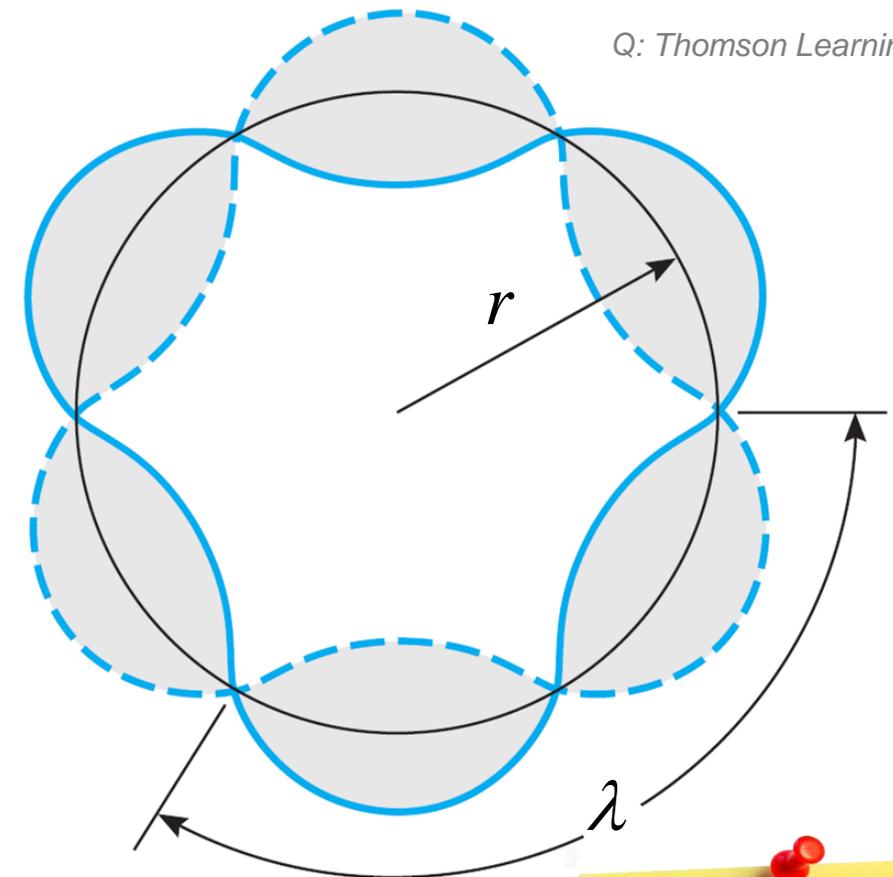


## ■ Quantisierung des Bahn-Drehimpulses $L$ von Elektronen:

$$L = m_e \cdot v_e \cdot r = n \cdot \hbar$$

- der Drehimpuls des Grundzustands muss über quantenmechanische Methoden bestimmt werden

⇒ **Bild einer „Bahn einer Elektronwelle“ ist noch immer zu einfach!**



Materiewellen  
math. Zusatz-  
Info



"IF THIS IS CORRECT, THEN EVERYTHING WE THOUGHT WAS A WAVE IS REALLY A PARTICLE, AND EVERYTHING WE THOUGHT WAS A PARTICLE IS REALLY A WAVE."