

Atome & Kerne

Sommersemester 2019

Vorlesung # 7, 14.05.19



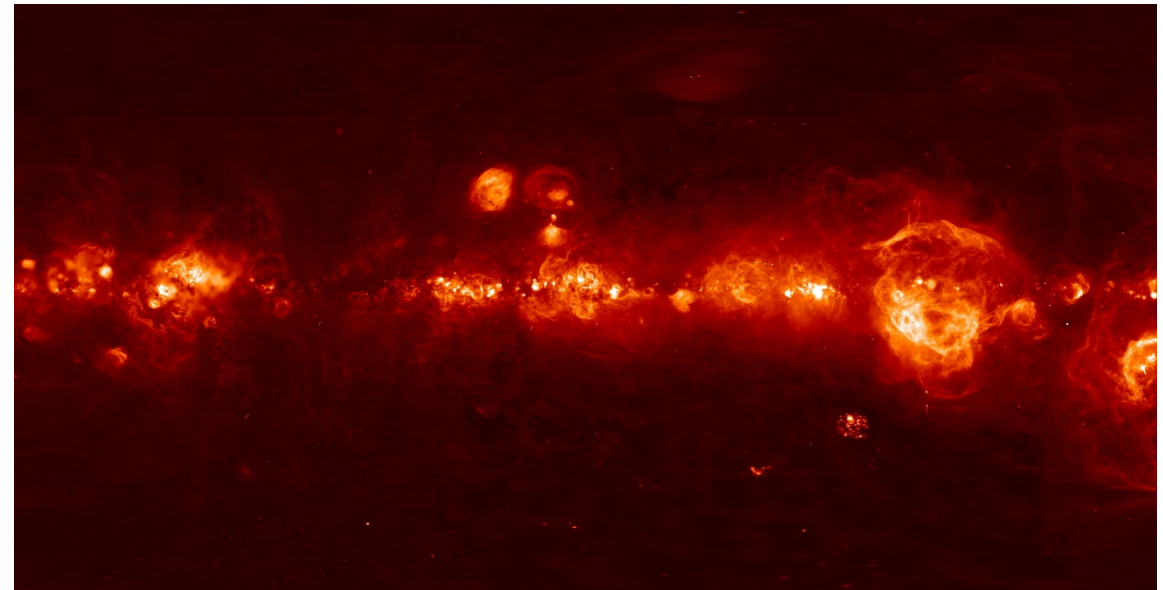
Guido Drexlin (ETP) und Kathrin Valerius (IKP)

Teilchen-Welle Dualismus

- Unschärferelation
- Atominterferometer

Bohrsches Atommodell

- Spektroskopie
- Bohrsche Postulate
- Stoßanregung: Franck-Hertz
- Sommerfeld-Modell



Gammas und Feynman-Diagramme

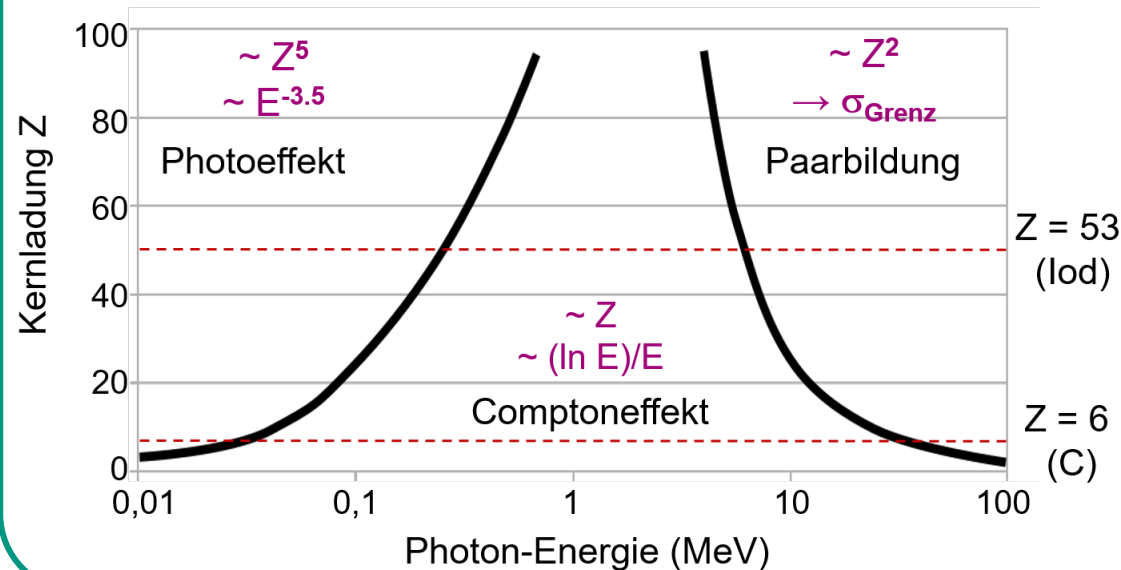
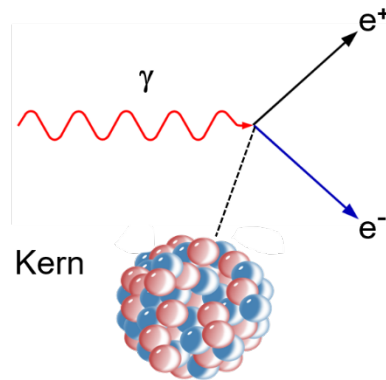


Wechselwirkung von reellen und virtuellen Photonen

■ Paarbildung und Wirkungsquerschnitte

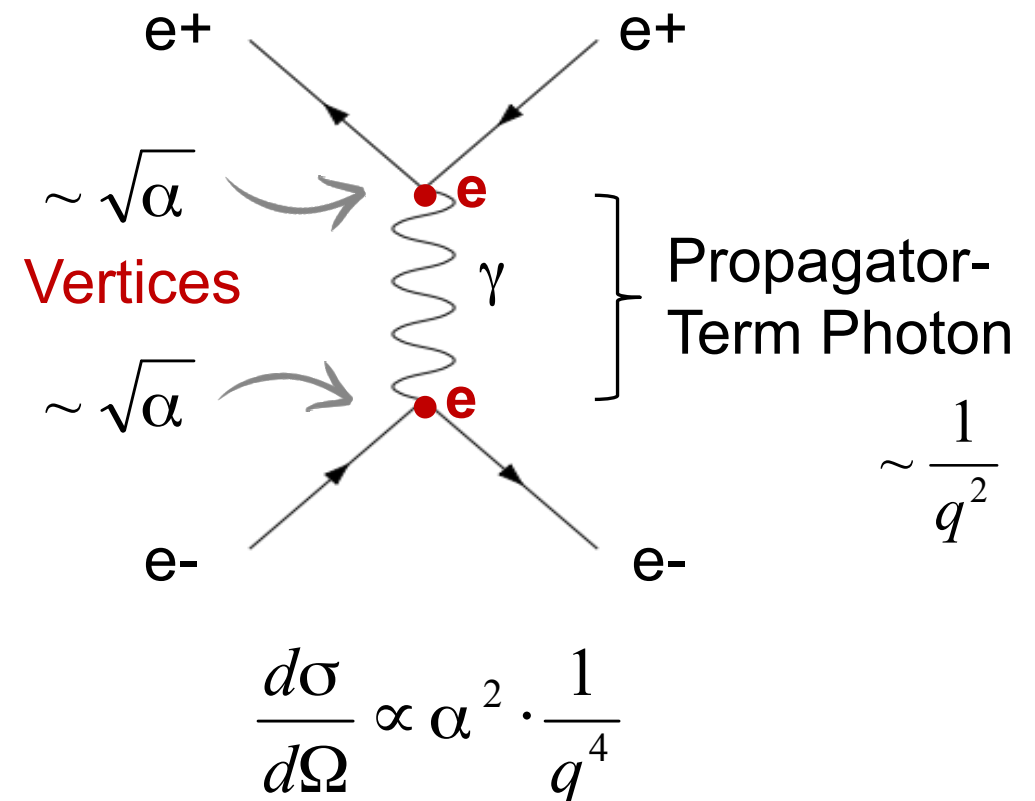
Paarbildung am Kern
ab $E = 1,02 \text{ MeV}$

$$E_{\text{thres}} = 2m_e c^2 \left(1 + \frac{m_e}{m_K} \right)$$



■ Feynman-Diagramme

„Visualisierung“ von Quantenprozessen (real: Rechentools)



Elektronen-Interferenz & Materiewellen

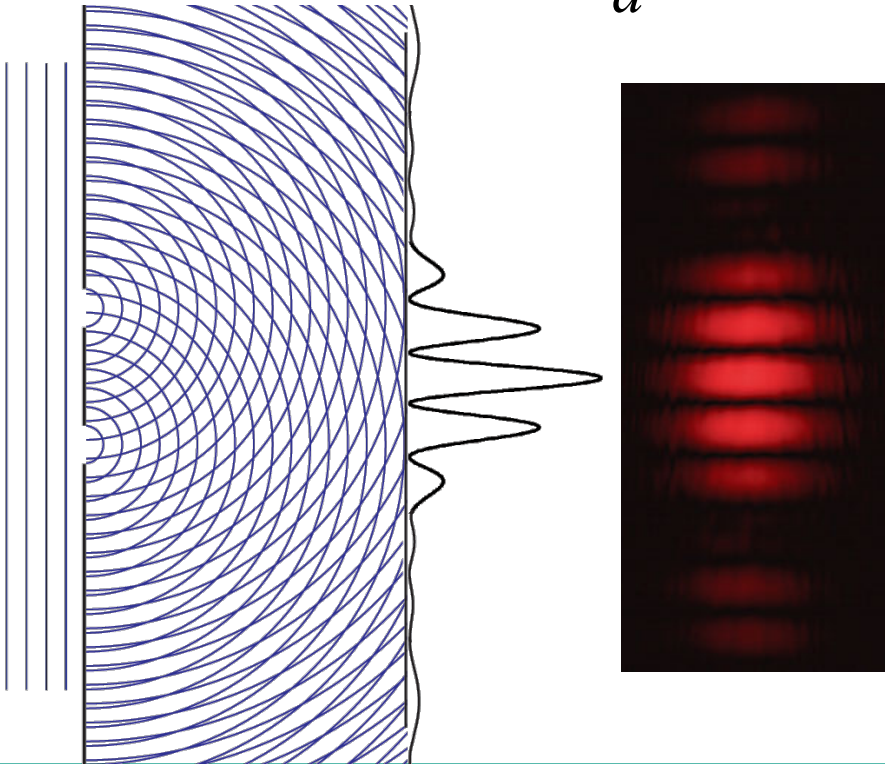


Teilchen- / Welle- Dualismus

■ Elektronen als Wellen:

- Elektronen zeigen ihre Wellennatur durch Interferenz

destruktiv: $\Delta s = \frac{x}{d} \cdot a = \pm n \cdot \frac{\lambda}{2}$



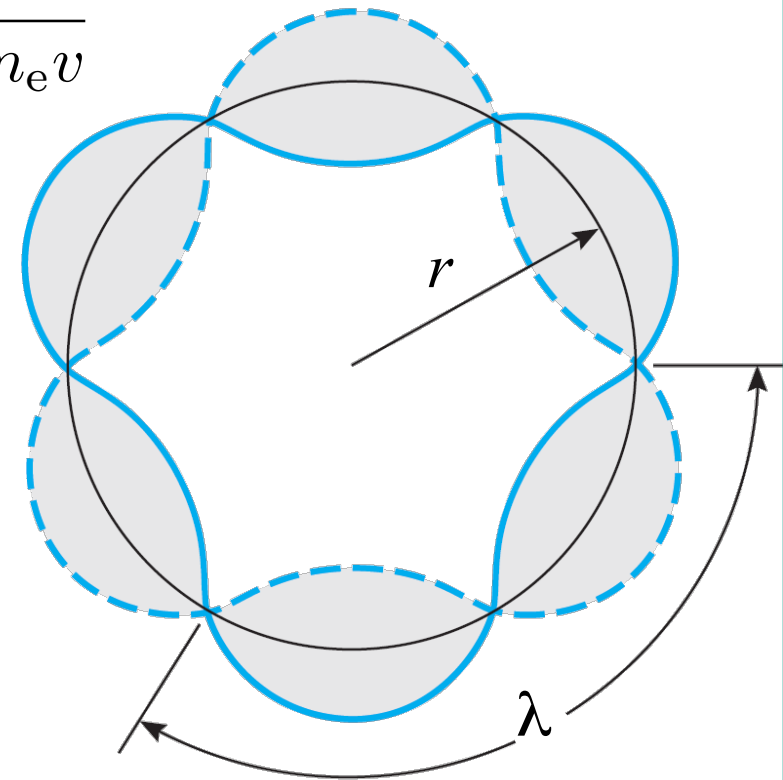
■ de Broglie Wellenlänge:

- Materiewelle mit Wellenlänge λ die abhängig ist vom Impuls p

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m_e v}$$

$$n \lambda = 2\pi r$$

$$L = n\hbar$$



Unschärferelation bei Ortsmessung

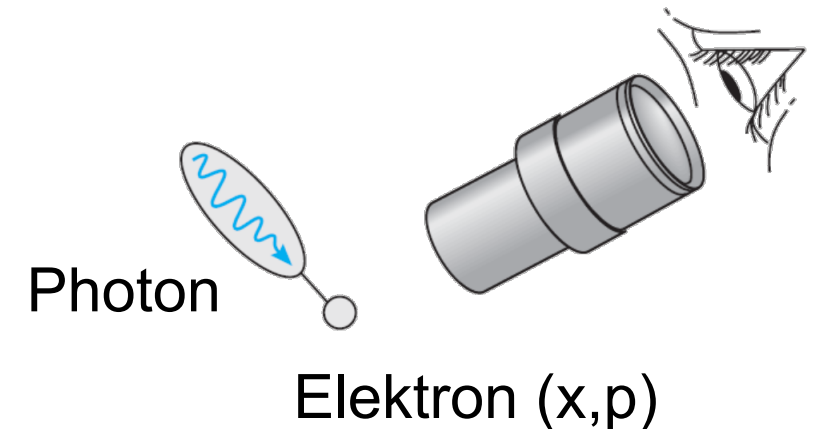
- 1927: W. Heisenberg formuliert seine **Unschärfe-Relation** zur Komplementarität von Paaren von Teilcheneigenschaften als **inhärente Manifestation des Wellencharakters der Materie**

- Ort **x** und Impuls **p**
- Zeit **t** und Energie **E**

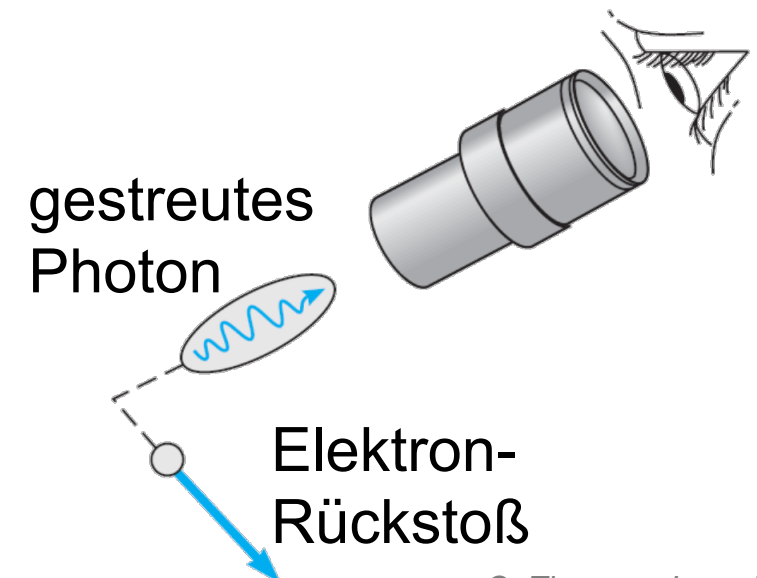
- Unschärferelation am Beispiel der **Ortmessung eines Elektrons** über lichtoptische Methoden:

- Photon überträgt bei Ortsmessung Impuls:
⇒ Elektronrückstoß

vor dem Streuprozess



nach dem Streuprozess:



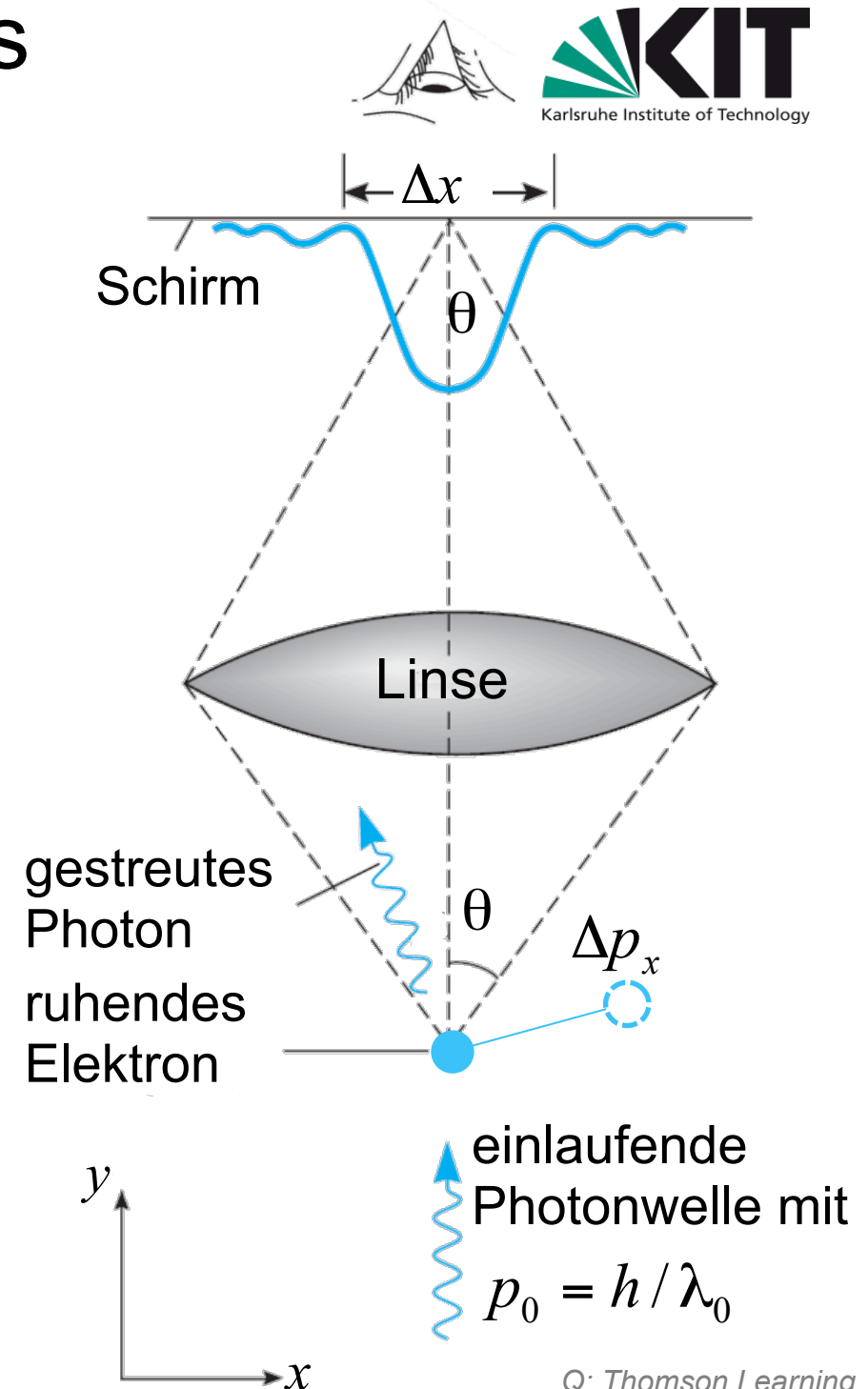
Q: Thomson Learning

Messprozess für Ort und Impuls

- Zum Nachweis des Ortes des Elektrons werde nur ein einzelnes Photon verwendet

Wie beeinflusst der optische Nachweis die Ortsrekonstruktion?

- Endliche Größe der Linse (halber Öffnungswinkel θ)
→ Beugungseffekte
- Compton-Stoß: Impulstransfer vom Photon auf das Elektron
- Unsicherheit Δp_x mindestens so gross wie die des Photonimpulses



Q: Thomson Learning

Messprozess für Ort und Impuls

■ Betrachtung der Impuls- und Orts-Unschärfe des Elektrons

- **Ortsunschärfe** Δx des Elektron-Abbilds durch Beugung an der Linse:

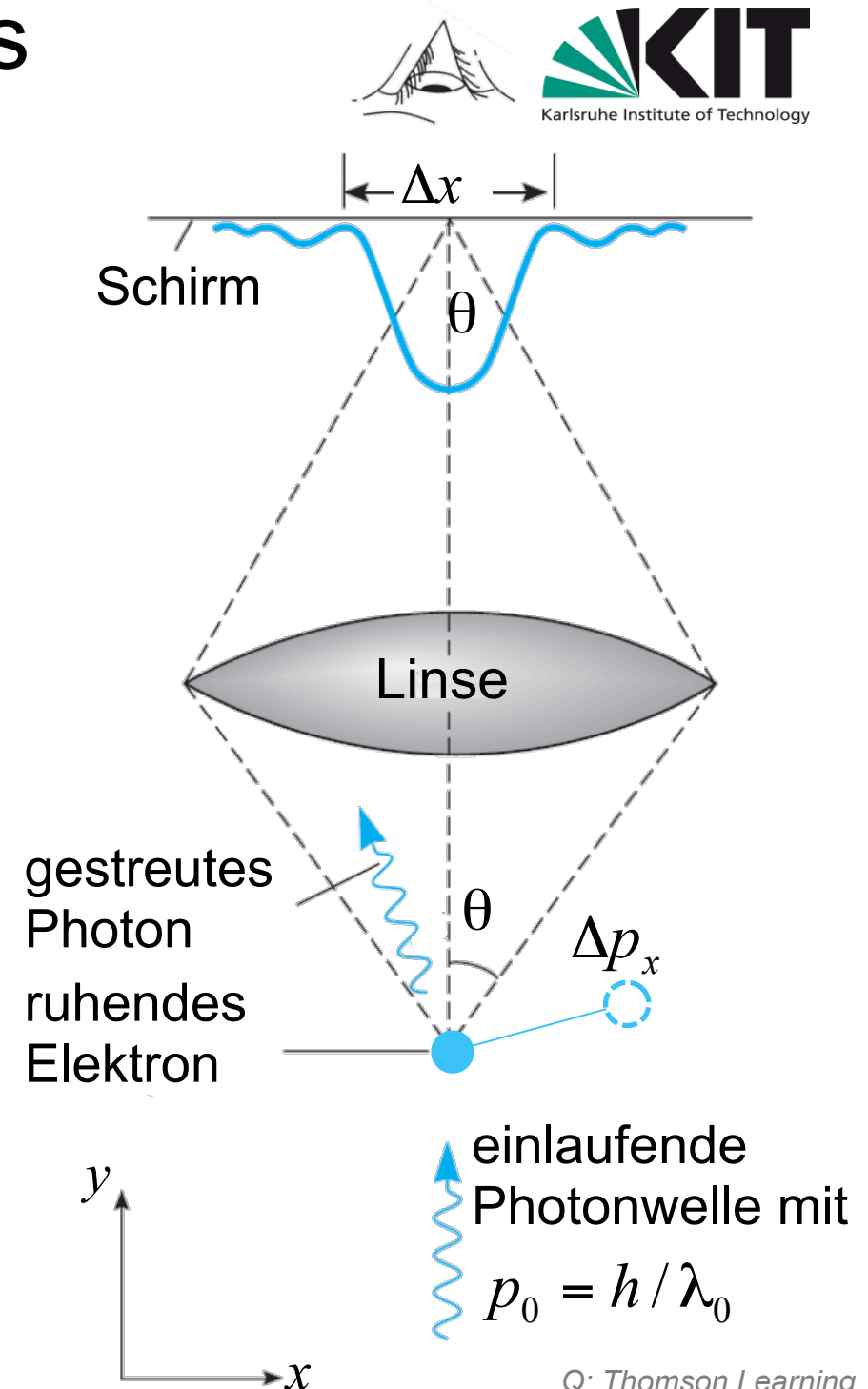
$$\Delta x = \frac{\lambda}{2 \sin \theta}$$

- **Impulsunschärfe** Δp_x des Elektrons:

$$\Delta p_x = \frac{h}{\lambda} \cdot \sin \theta$$

- kombinierte **Orts-/Impuls- Unschärfe**

$$\Delta x \cdot \Delta p_x = \left(\frac{\lambda}{2 \sin \theta} \right) \cdot \left(\frac{h}{\lambda} \cdot \sin \theta \right) = \frac{h}{2}$$



Q: Thomson Learning

Heisenbergsche Unschärferelation

- Grundlegende, fundamentale Eigenschaft von Teilchen mit **Wellencharakter** ist die **Komplementarität von Variablen**:
 - Impuls **p** und Ort **x**
 - Energie **E** und Zeit **t**

⇒ resultiert nicht aus „Messunzulänglichkeiten“!

- **Unschärferelationen:**

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

$\Delta x, \Delta p_x, \Delta E, \Delta t$
= statistische Streuung σ

- **Implikationen:**

- Erzeugung von virtuellen Teilchen, sofern $\Delta E \cdot \Delta t < \hbar/2$
- Relation nur relevant bei Quanten, nicht bei makroskopischen Objekten



W. Heisenberg



Nobelpreis 1932

Unschärferelation – Konsequenzen

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

Angeregte Zustände im Atom gehen spontan (nach endlicher Lebensdauer τ) in den Grundzustand über

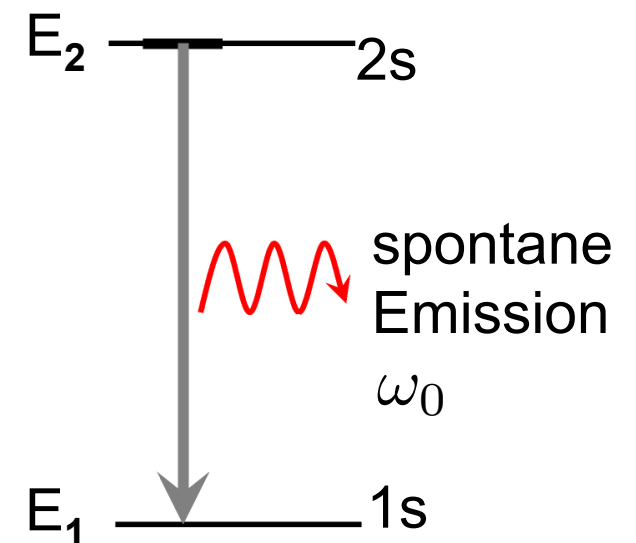
⇒ Heisenbergsche Unschärferelation verbindet endliche **Lebensdauer** τ mit der **natürlichen Linienbreite** Γ

⇒ Energieunschärfe von Zustand 2 sei $\Delta E = \Gamma/2$

$$\underbrace{\frac{\Gamma}{2}}_{\Delta E} \cdot \underbrace{\tau}_{\Delta t} \geq \frac{\hbar}{2} \quad \rightarrow \quad \boxed{\Gamma \cdot \tau \geq \hbar}$$

⇒ Unschärfe in Photonkreisfrequenz:

$$\Delta\omega \sim \frac{1}{\tau}$$

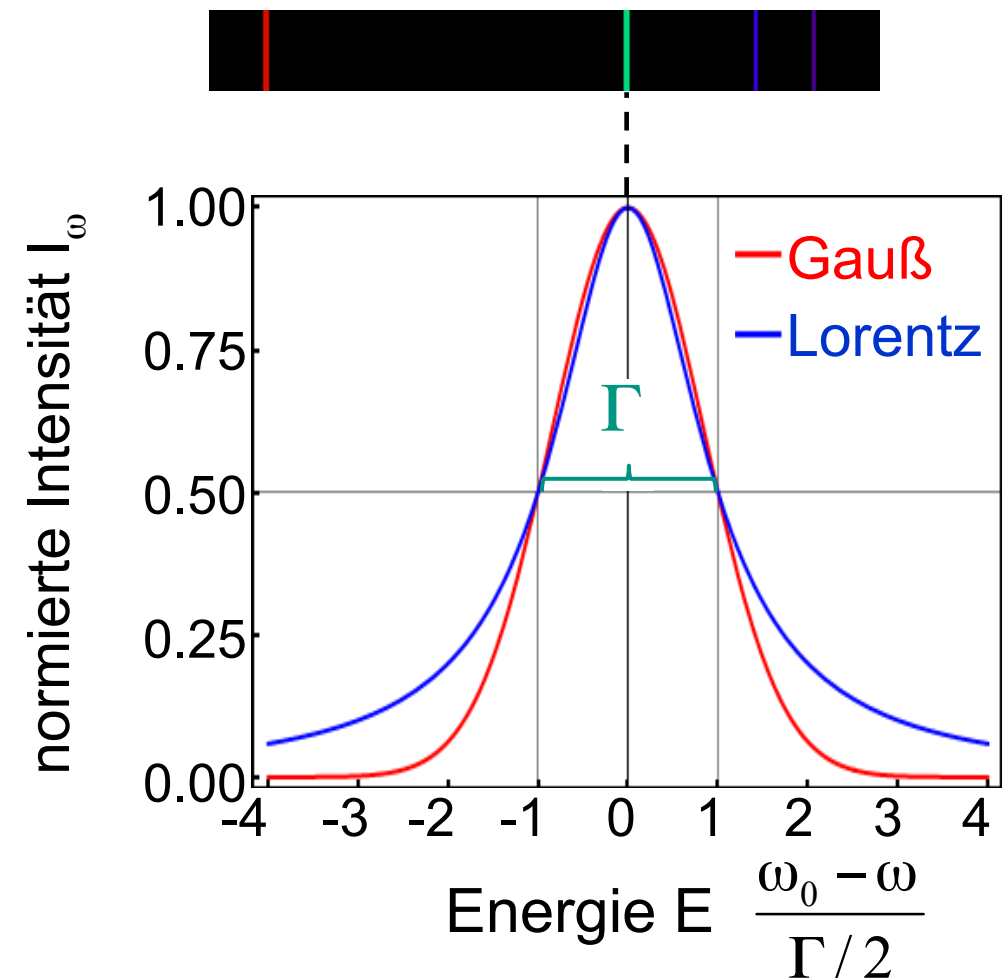


Angeregte Zustände im Atom

⇒ Energieunschärfe von Zustand 2
sei $\Delta E = \Gamma/2$

⇒ Messung eines **Lorentzprofils** mit
natürlicher Linienbreite Γ

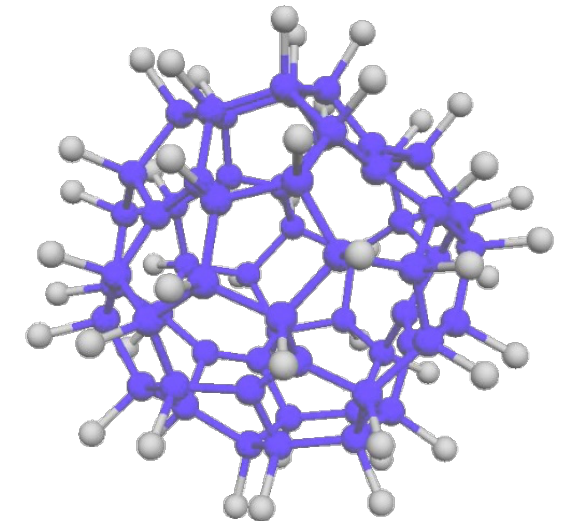
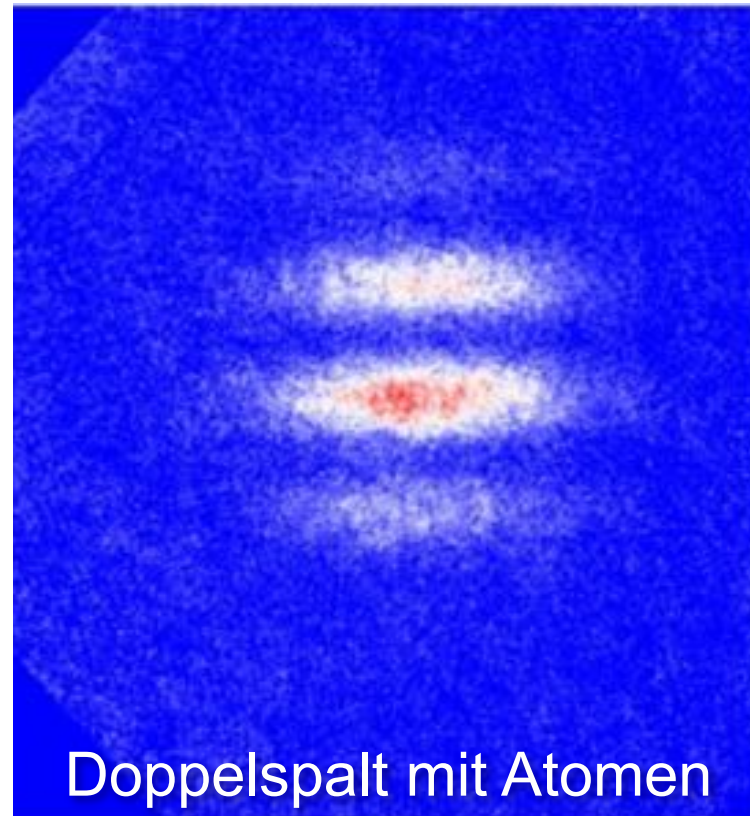
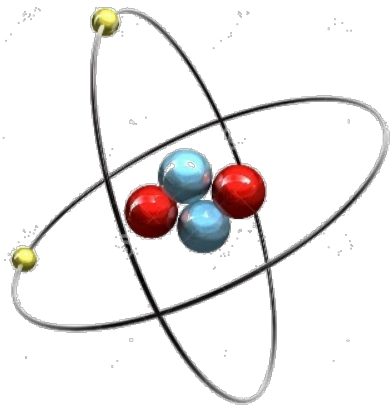
$$I_{\omega} \sim \frac{\Gamma}{(\omega - \omega_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}$$



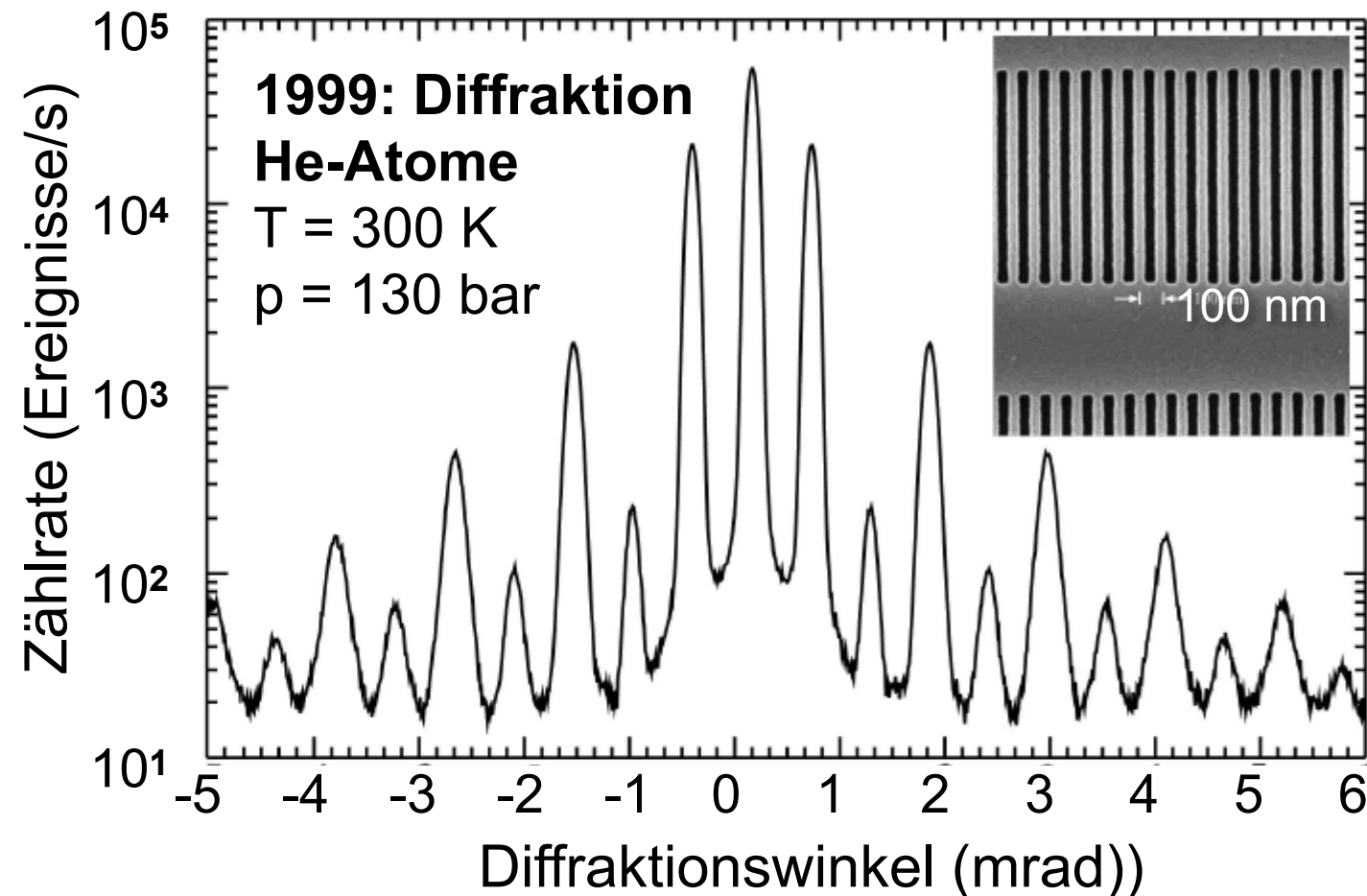
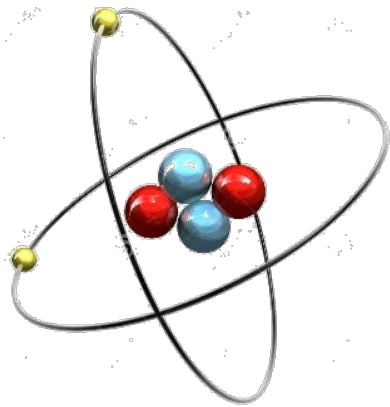
3.3 Atominterferometrie

■ Atome & Moleküle besitzen Wellencharakter

- klassisch: Interferenz am Doppelspalt
- Nanostrukturierung zur Erzeugung von Gittern
- Experimente mit He-Atomen & großen Molekülen wie $C_{60}F_{48}$



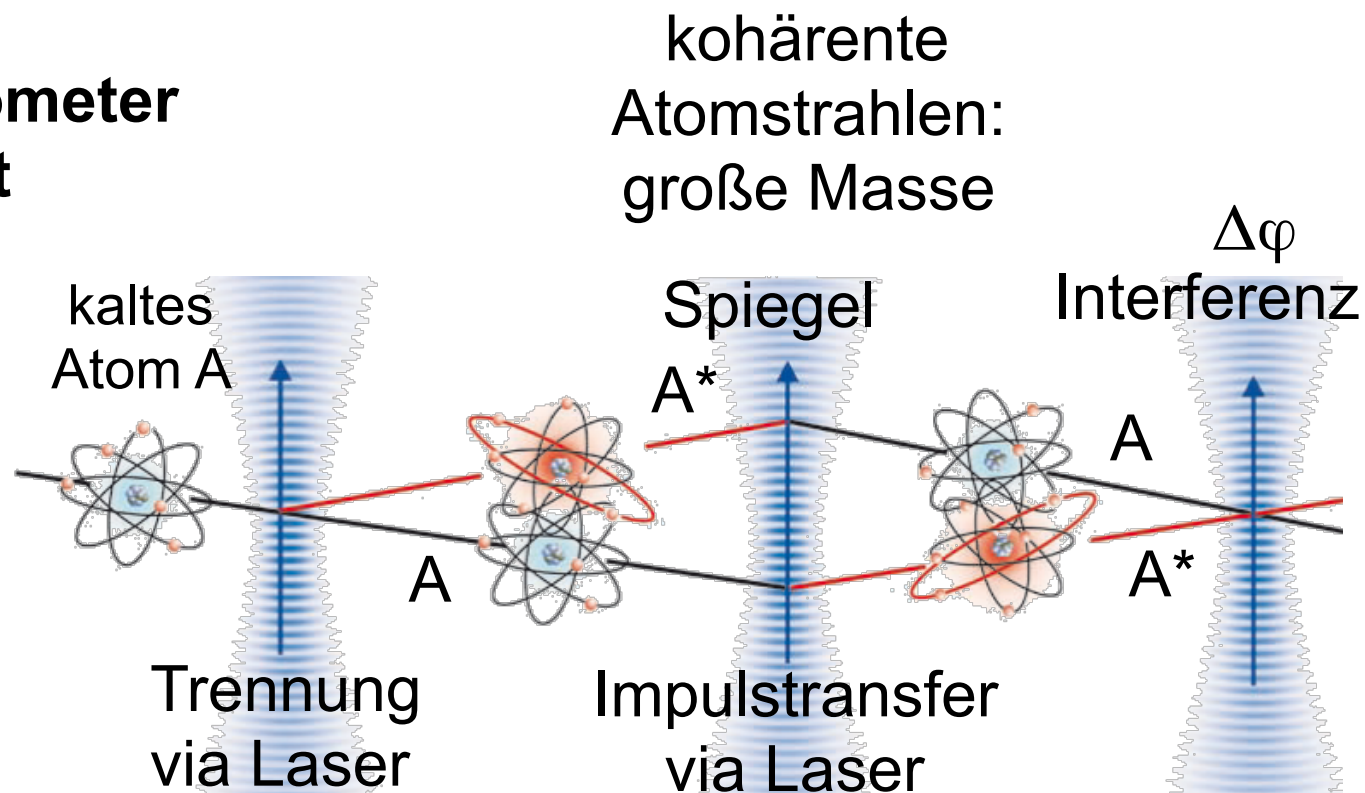
- **Atome & Moleküle besitzen Wellencharakter**
 - klassisch: Interferenz am Doppelspalt
 - Nanostrukturierung zur Erzeugung von Gittern



■ Atom- (Molekül-) Interferometrie heute

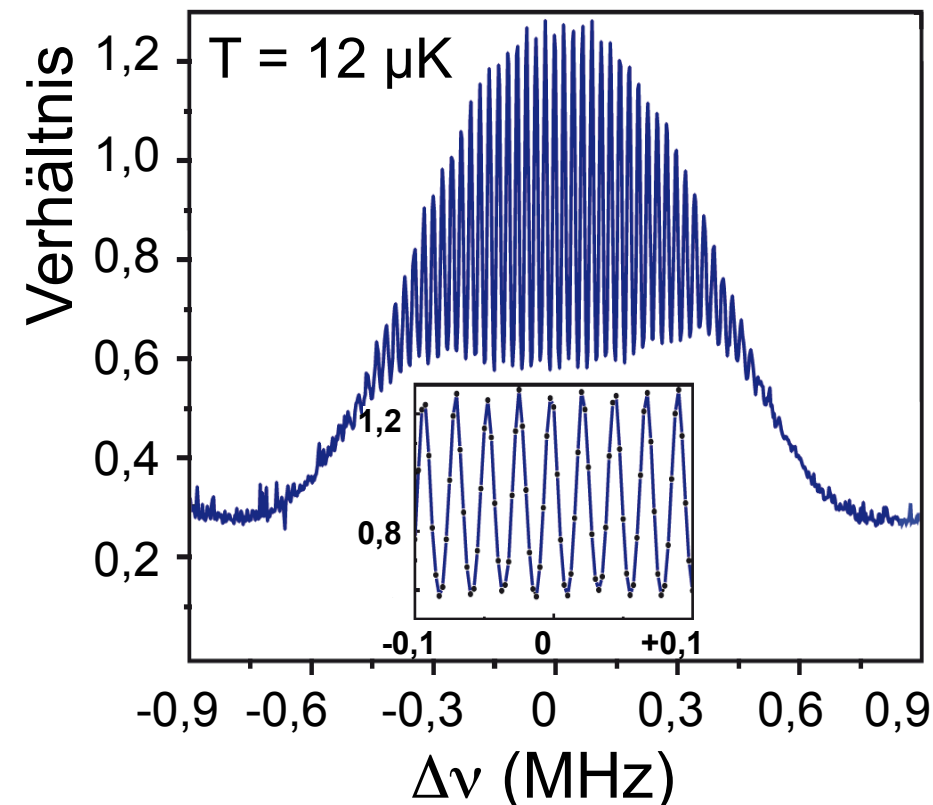
- Benutzung von Laserlicht statt Spalten/Gittern
- Prinzip: Messung des Phasenunterschieds von geführten Atomen
- wichtig: **große Kohärenzlänge des Atomstrahls, daher ultrakalte Atome**
 $\lambda \sim 10 \text{ pm}$ (thermische Atome) $\lambda \sim 100 \text{ nm}$ (ultrakalte Atome, $20 \text{ }\mu\text{K}$)

Atom- Interferometer mit Licht



■ Atom- (Molekül-) Interferometrie heute

- Benutzung von Laserlicht statt Spalten/Gittern
- Prinzip: Messung des Phasenunterschieds von geführten Atomen
- wichtig: **große Kohärenzlänge des Atomstrahls, daher ultrakalte Atome**
 $\lambda \sim 10 \text{ pm}$ (thermische Atome) $\lambda \sim 100 \text{ nm}$ (ultrakalte Atome, $20 \text{ }\mu\text{K}$)

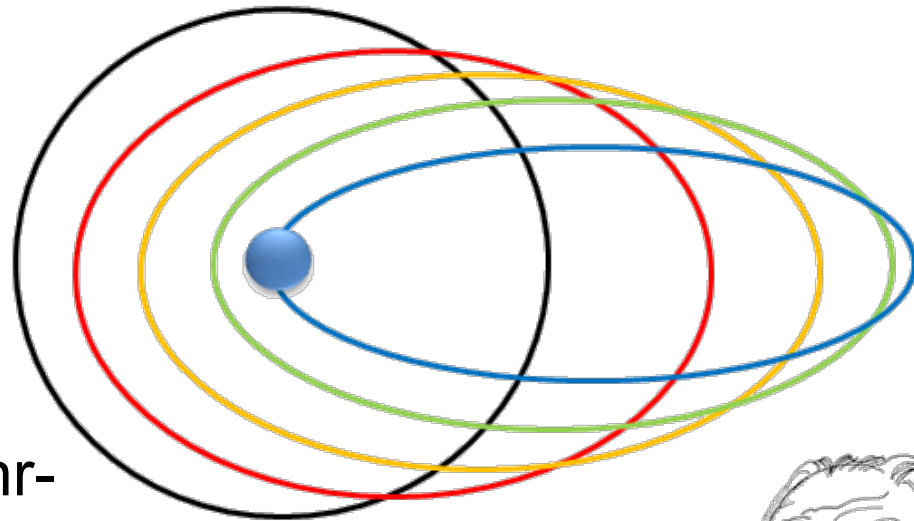


Teilchen-Welle-Dualismus



4. Bohrsches Atommodell

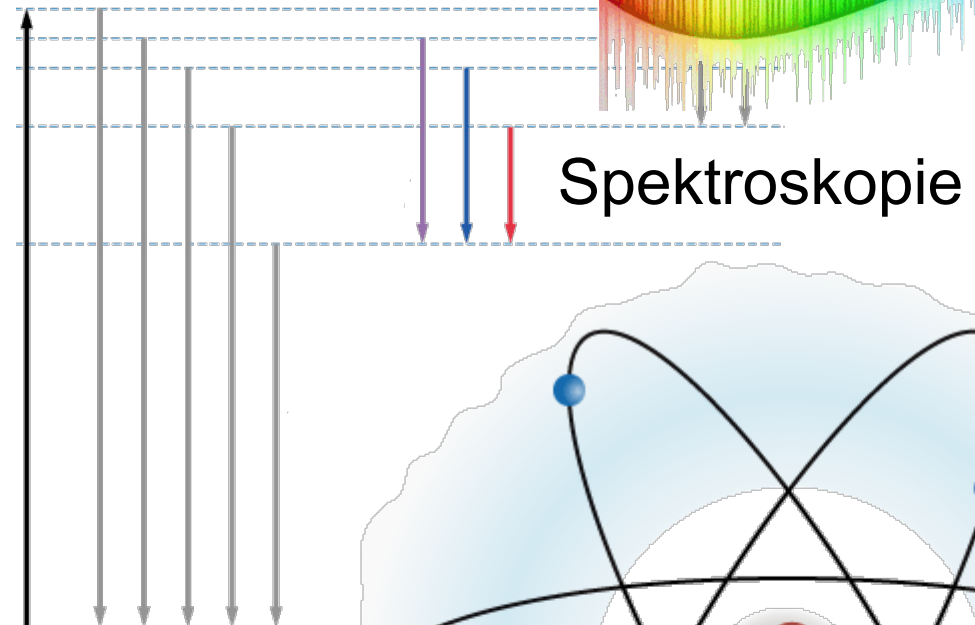
- **Atommodell von Niels Bohr** [1913, semi-klassisch]
 - von der klassischen Mechanik zur Quantenmechanik



Bohr-Sommerfeld

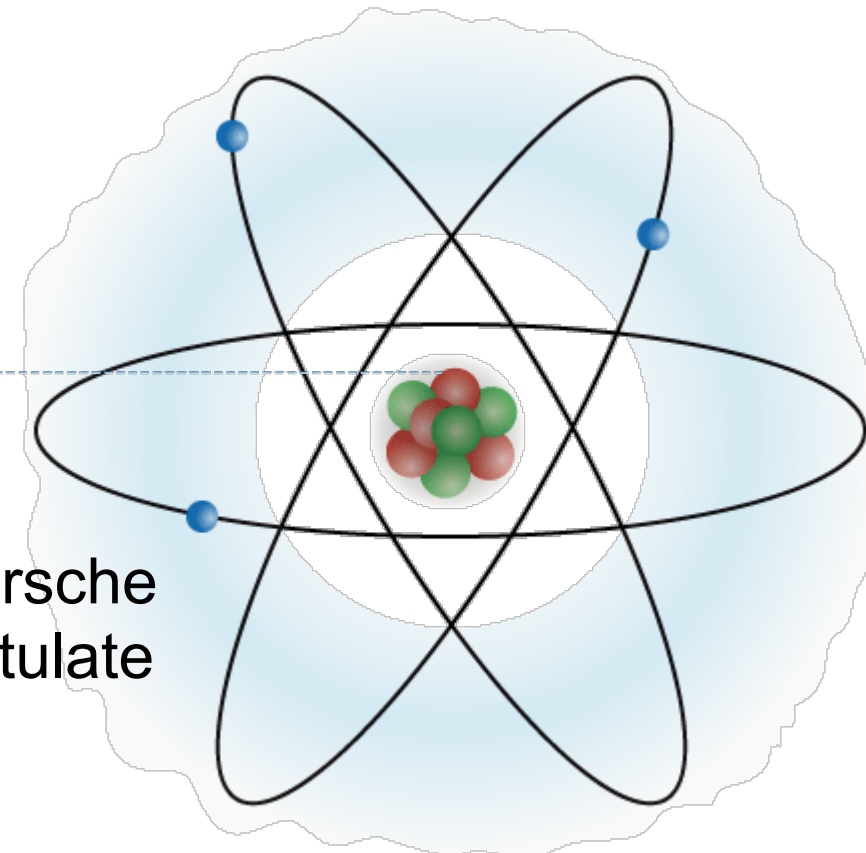


exotische
Atome



Spektroskopie

Bohrsche
Postulate



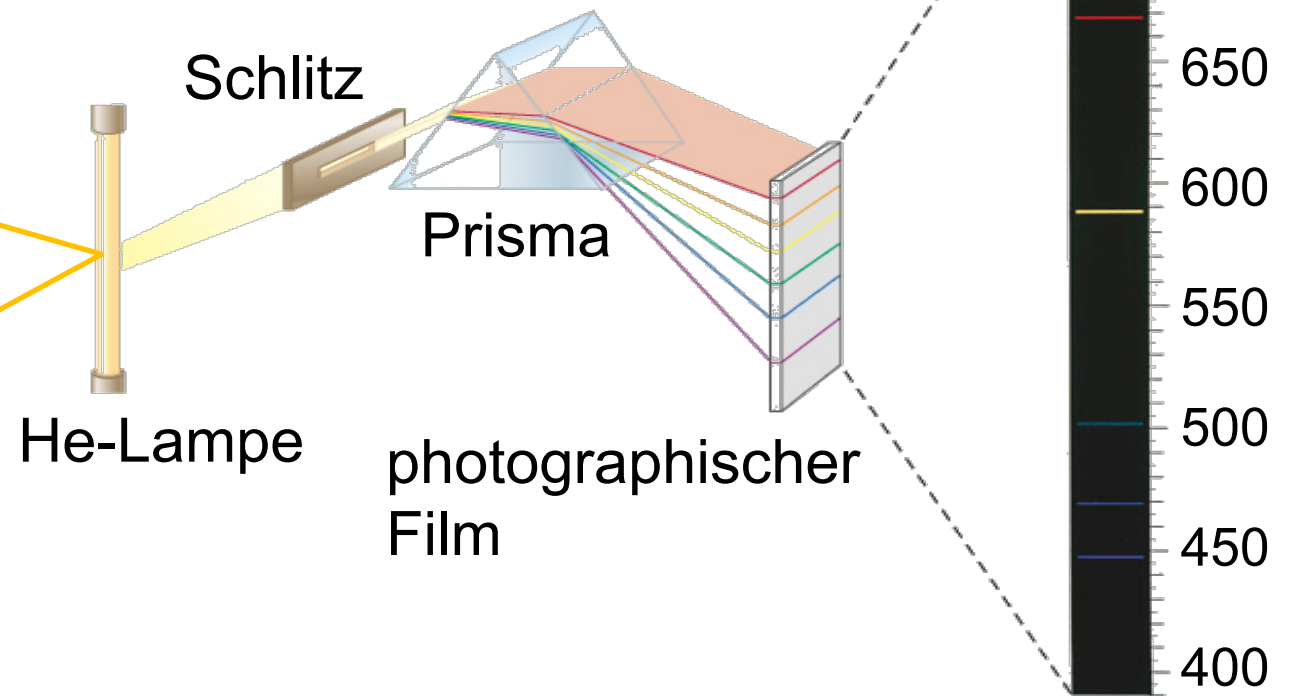
4.1 Spektroskopie

- **spektroskopische Untersuchungen von Atomen** (Einheiten: λ , k, E)
 - Spektraluntersuchungen des H-Atoms (He,...): grundlegende Bedeutung

Größe	Einheit	Umrechnung
Wellenlänge λ	1 Å (0,1 nm)	1.000.014 cm ⁻¹
Wellenzahl k ($\tilde{\nu}$)	1 cm ⁻¹ (1 Kayser)	123,984 μeV
Energie E	1 eV	8 066 cm ⁻¹



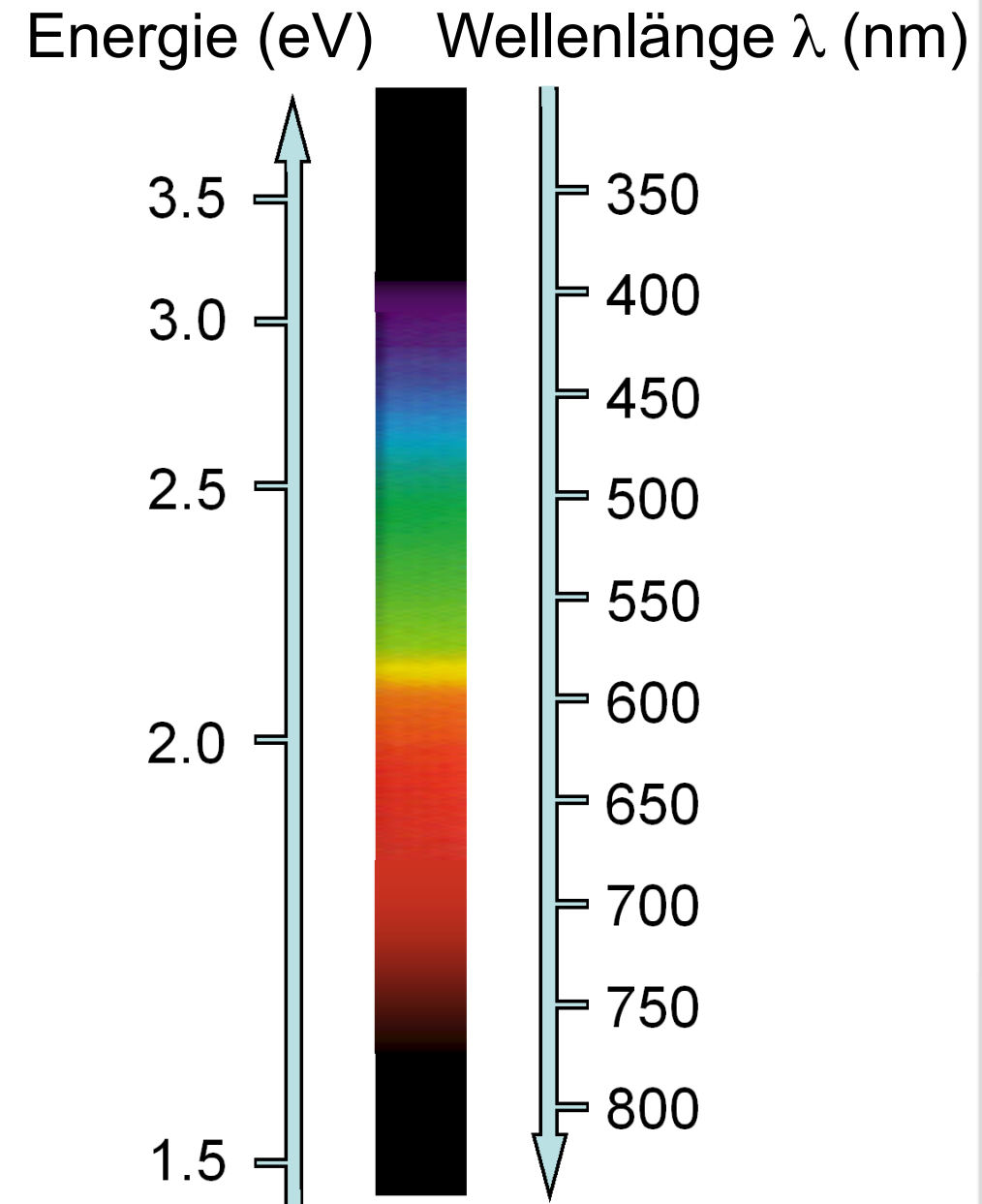
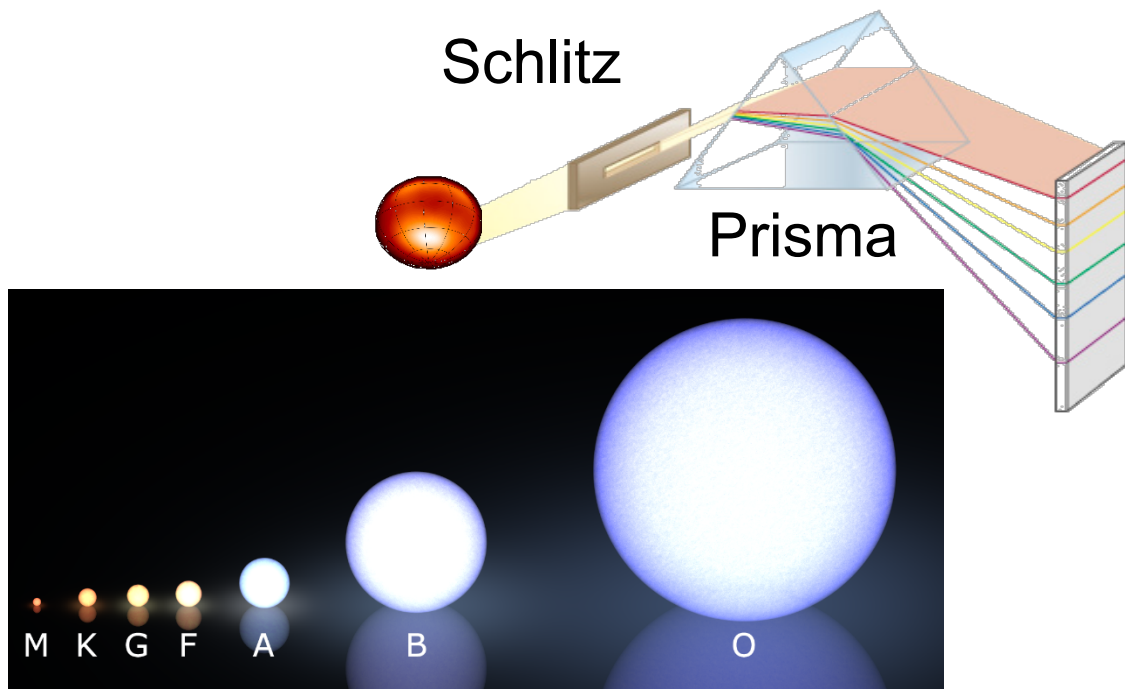
He-Gasentladung



Spektroskopische Untersuchungen

■ spektroskopische Untersuchungen

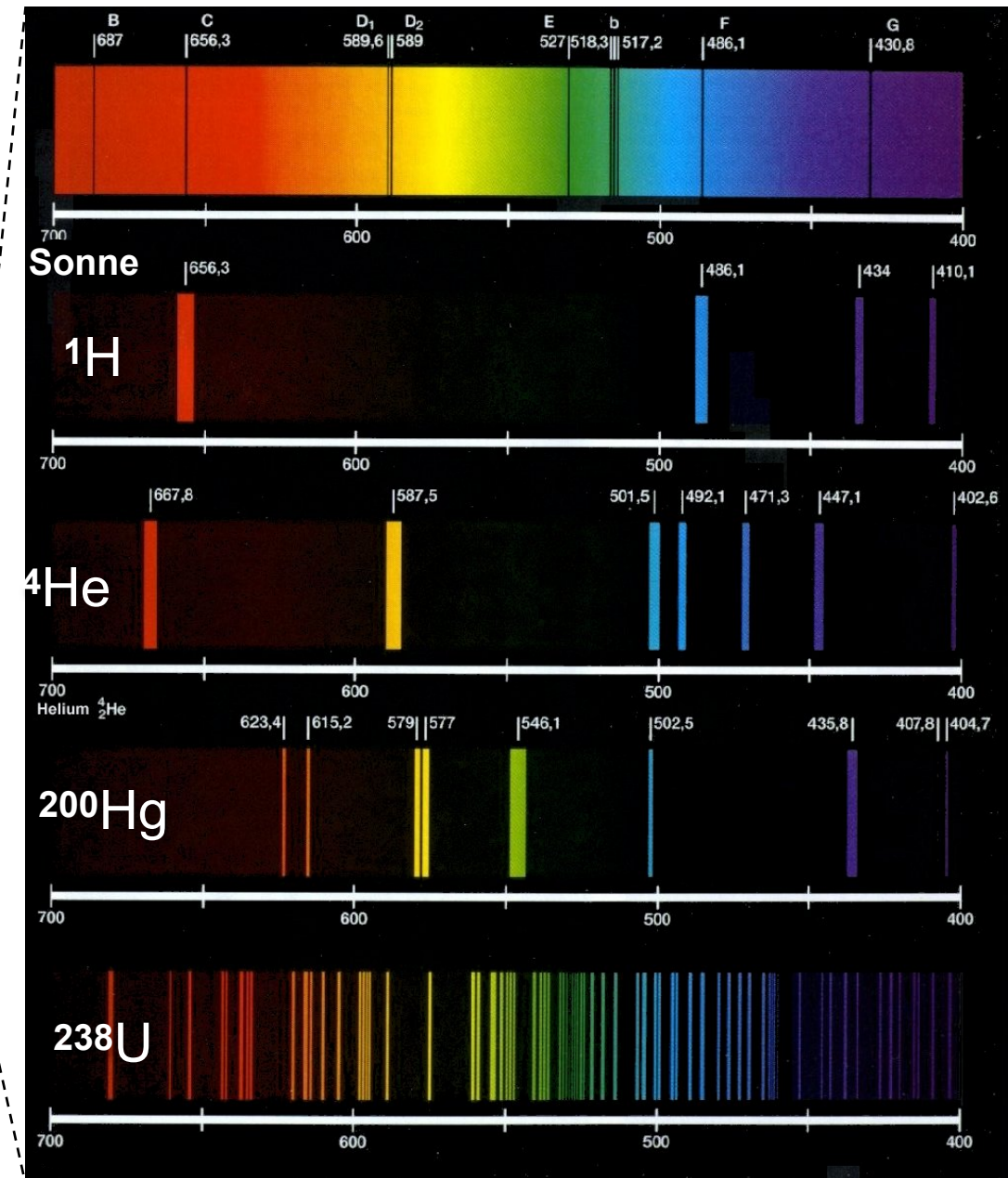
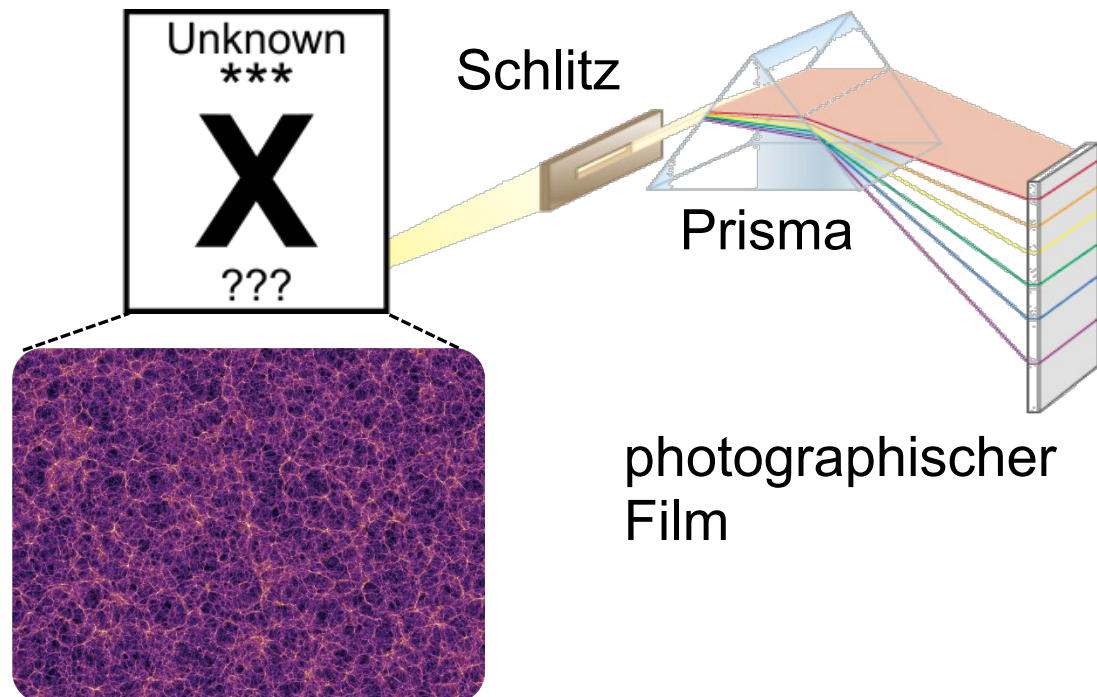
- wichtig in Astrophysik, z.B. für Analysen von Sternoberflächen
- Zuordnung von $\lambda(\text{nm}) \leftrightarrow E(\text{eV})$



Spektroskopische Untersuchungen

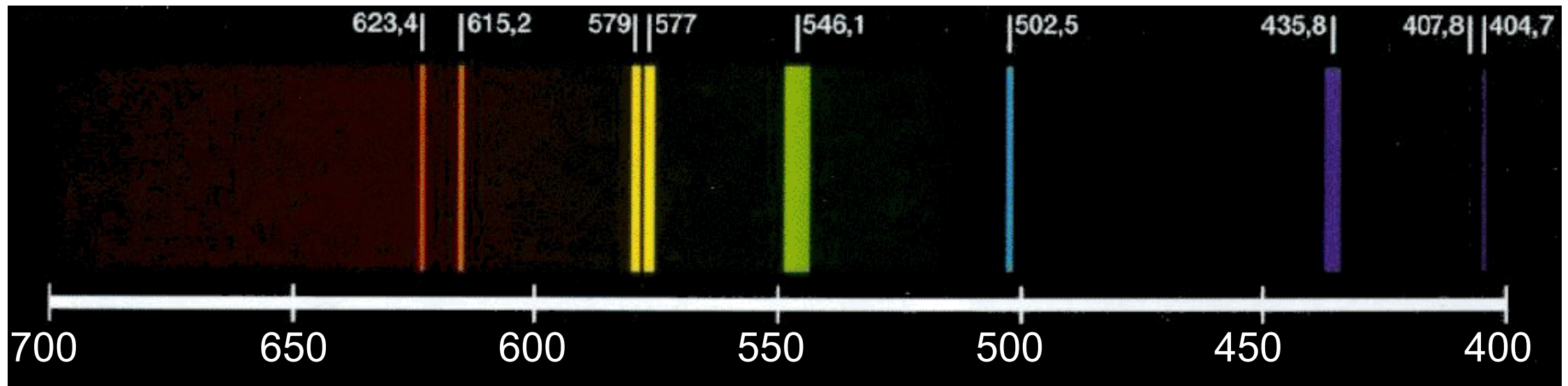
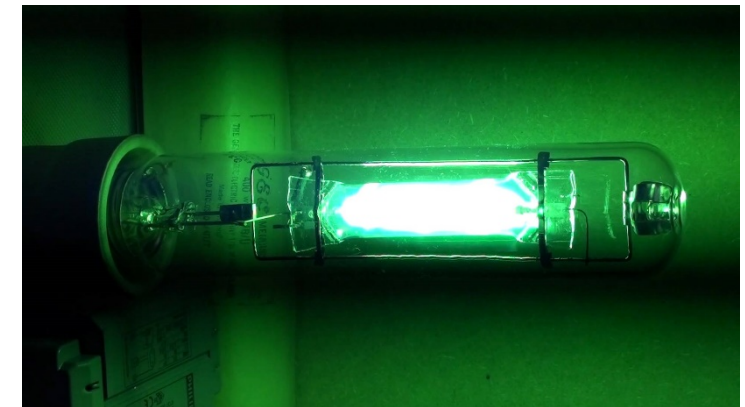
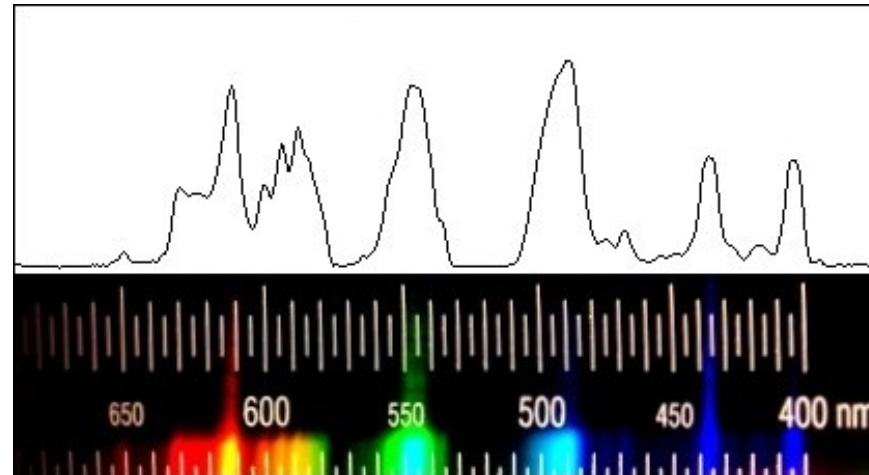
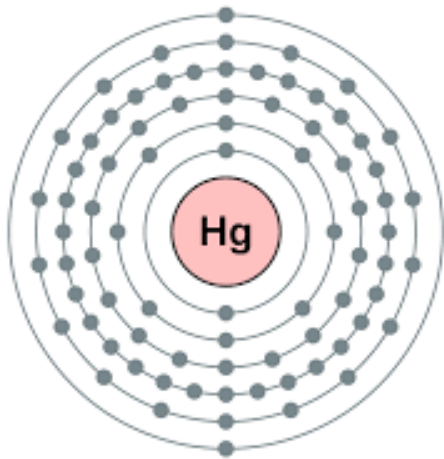
■ spektroskopische Untersuchungen

- Elementzusammensetzung anhand charakteristischer Emissions-/Absorptions- Linien
- wichtig in Kosmologie für Elementhäufigkeiten im Universum



Versuch: Spektrum Quecksilberdampf Lampe

- **spektroskopische Untersuchungen mit Hg**
- Linienspektrum einer Hg-Lampe



Emissionslinien des H-Atoms

■ Spektroskopie des H-Atoms:

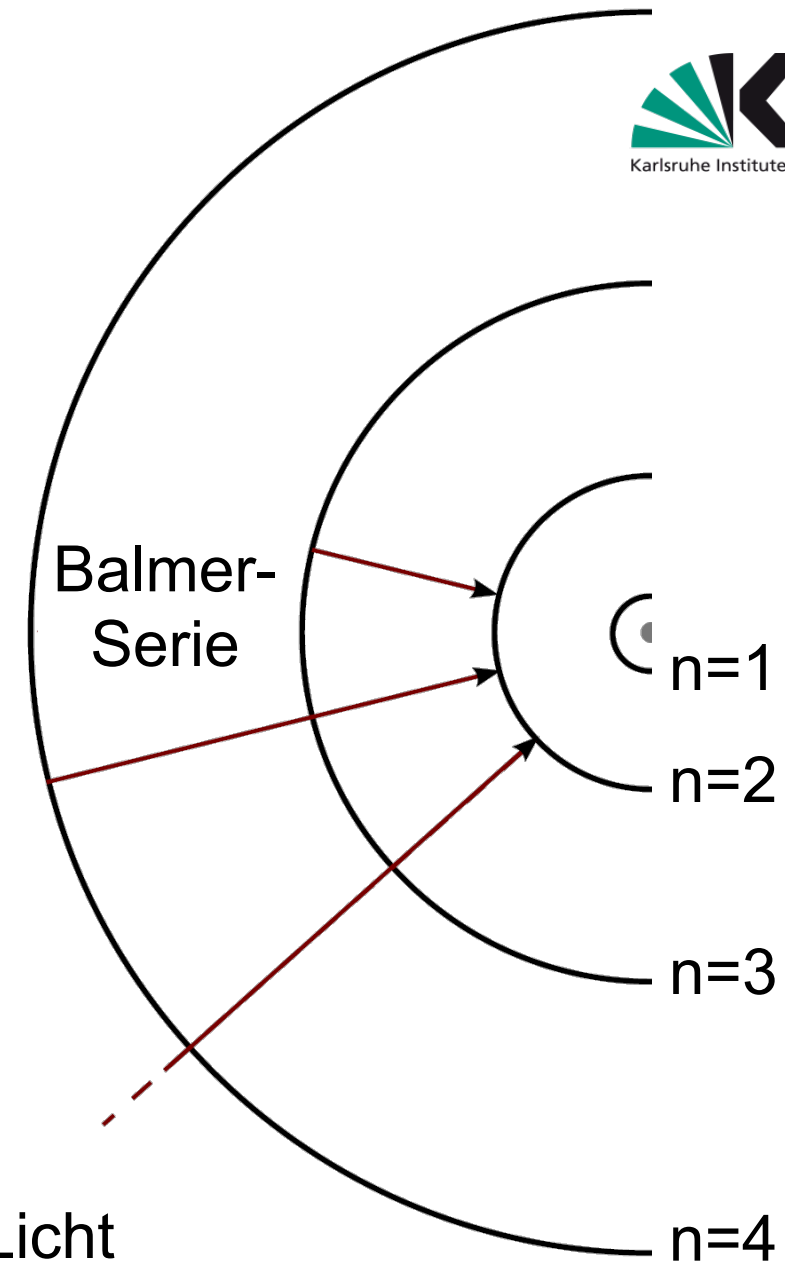
- entscheidend für Verständnis des Aufbaus von Atomen

- optische Übergänge der **Balmer-Serie**: H- α , H- β , H- γ , ...

$$\lambda \sim \frac{n^2}{n^2 - 4} \quad n = 3, 4, \dots$$

- in spektroskopischer Schreibweise:

$$\tilde{\nu} \sim \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad n \geq 3$$

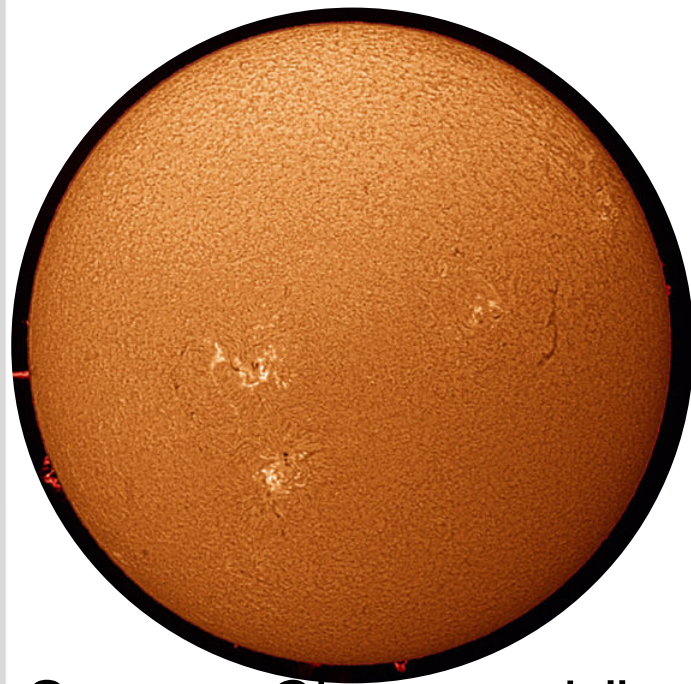


Balmer-Serie von Wasserstoff im sichtbaren Licht

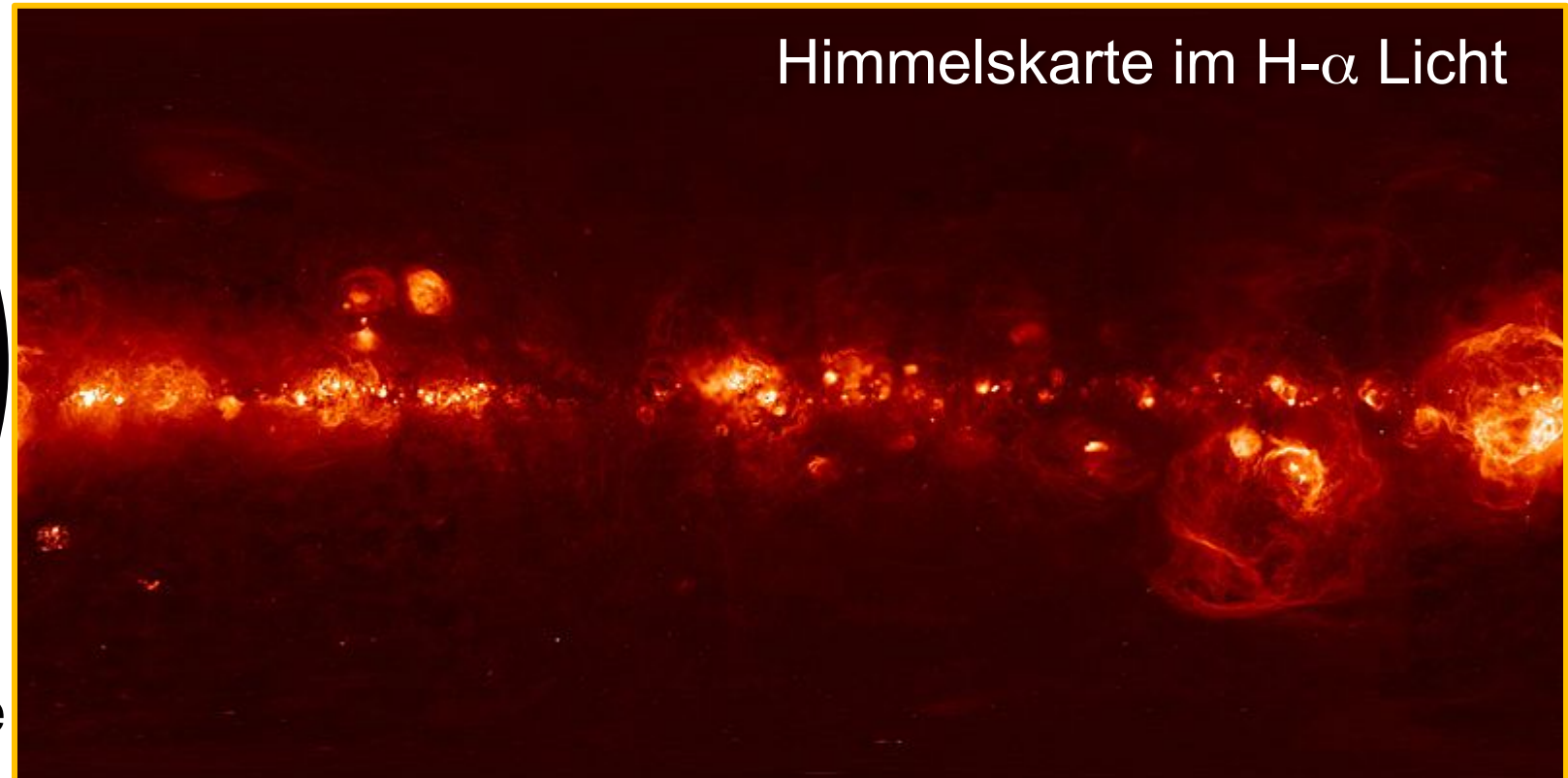


Emissionslinien des H-Atoms: H- α

- **Astronomie:** H- α -Linie ist hellste Spektrallinie von H im sichtbaren Licht
- wichtig für Sonnenbeobachtung & galaktische H-Regionen



Sonnen-Chromosphäre
im H- α Licht



Himmelskarte im H- α Licht

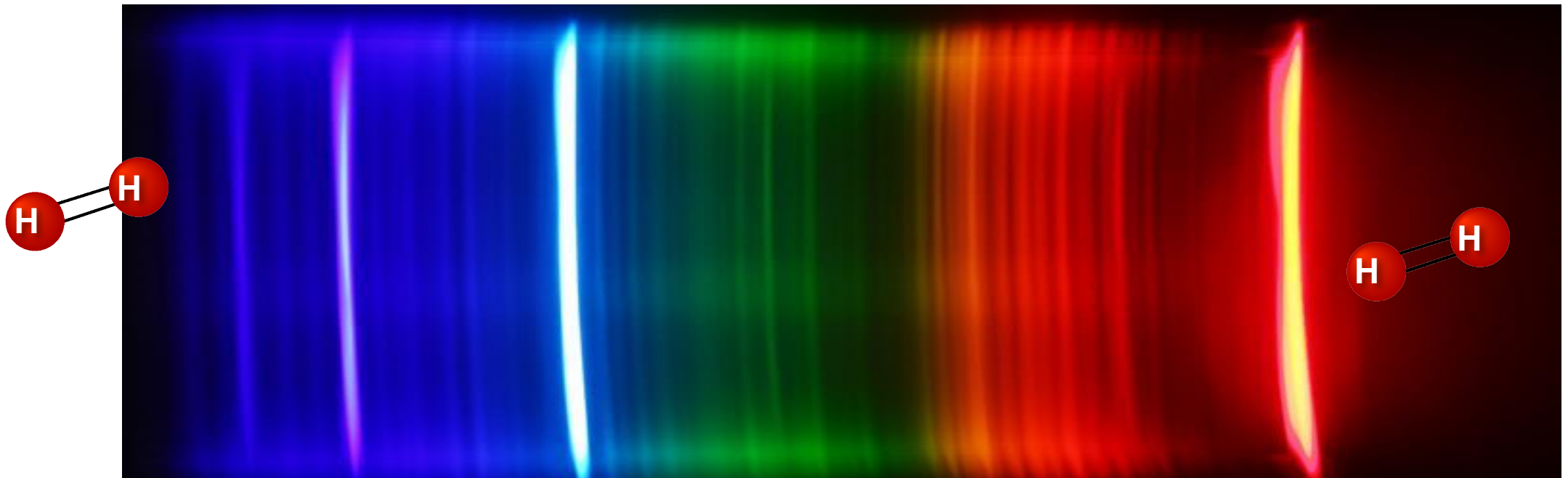


Emissionslinien des H-Atoms

■ Spektroskopie des H-Atoms:

- in der Spektroskopie ist es entscheidend, Verunreinigungen zu minimieren

Balmer-Serie von **atomarem** Wasserstoff mit **molekularen** „Verunreinigungen“



Science Photo Library

Balmer-Serie von **atomarem** Wasserstoff im sichtbaren Licht



Übergänge des H-Atoms

- **H-Spektrallinien**: Nachweis weiterer Serien vom UV bis IR

Lyman Serie (zu $n = 1$) **UV**



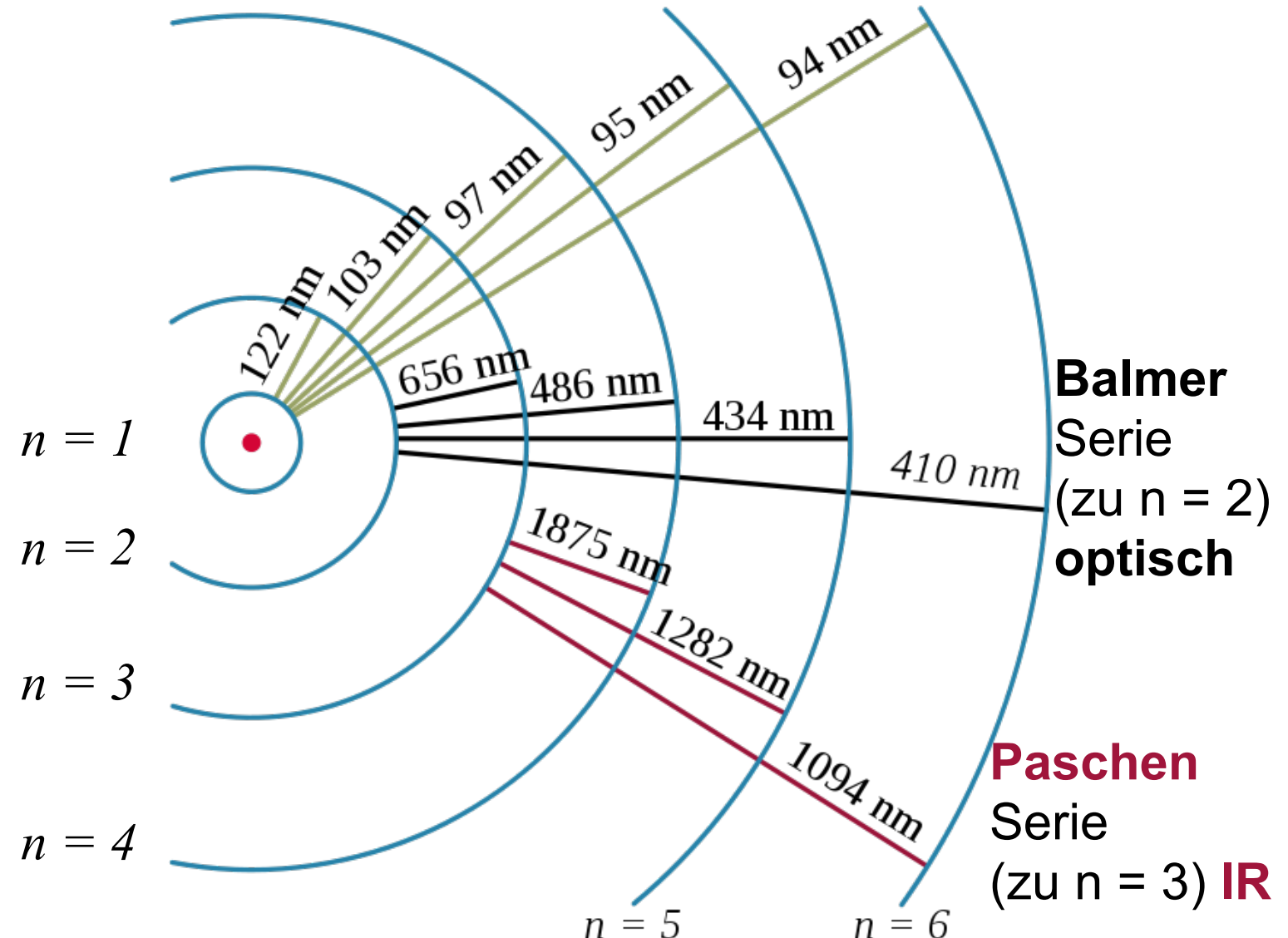
Theodore
Lyman
(1906)



Johann
Balmer
(1885)



Friedrich
Paschen
(1908)



Übergänge des H-Atoms

- **H-Spektrallinien:** Einbezug aller Serien durch Johannes Rydberg

$$\tilde{\nu} \sim R_H \cdot \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \quad n_1 = 1, 2, \dots; \quad n_2 > n_1$$

Differenz von
zwei Termen $\sim 1/n^2$

Rydberg-Konstante
 $R_H = 109677,581 \text{ cm}^{-1}$

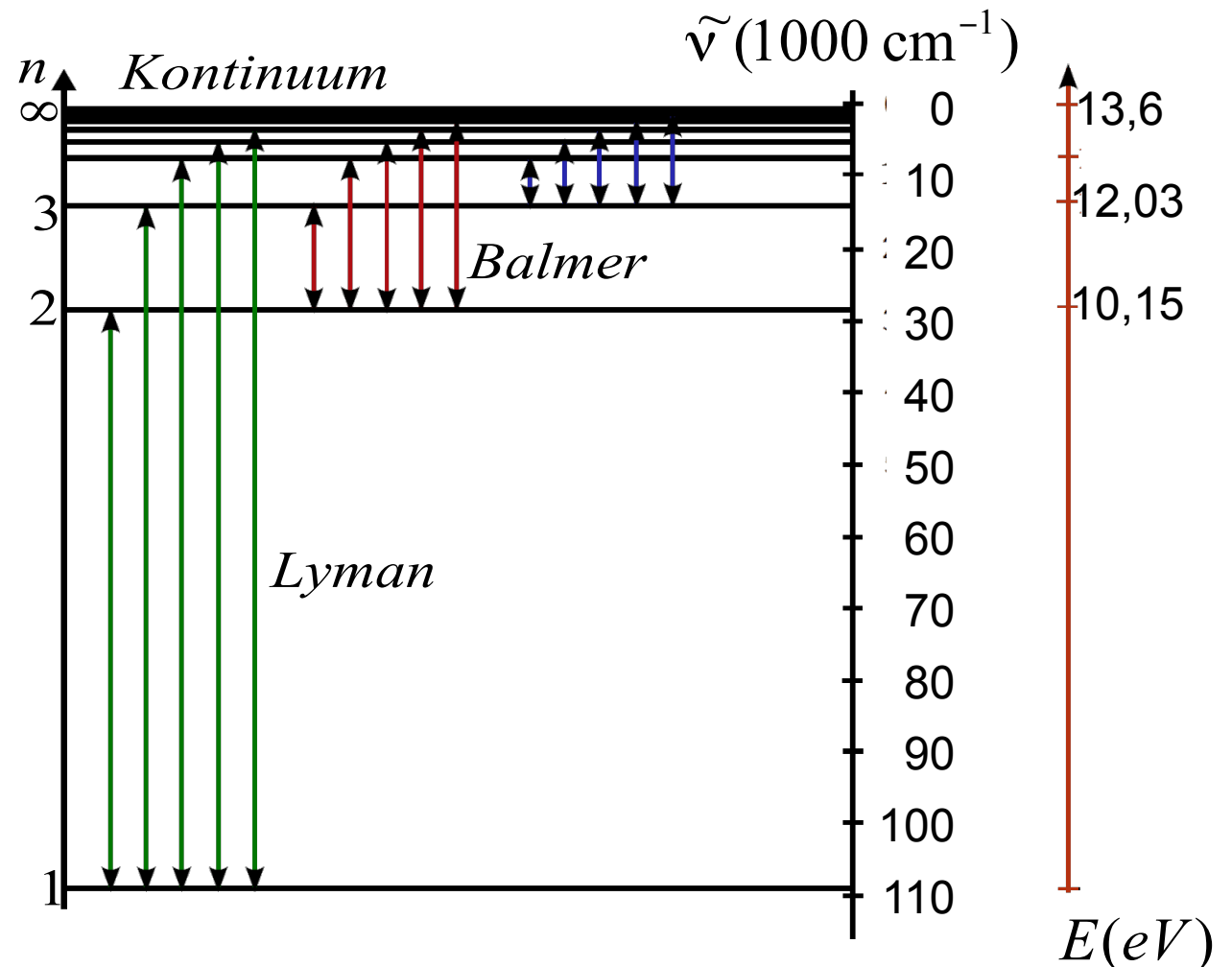


Johannes
Rydberg

$$R_H = \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \cdot \frac{m_e}{2\hbar^2}$$

$$R_H = \frac{1}{2} \cdot m_e c^2 \cdot \alpha^2$$

Termschema H-Atom:



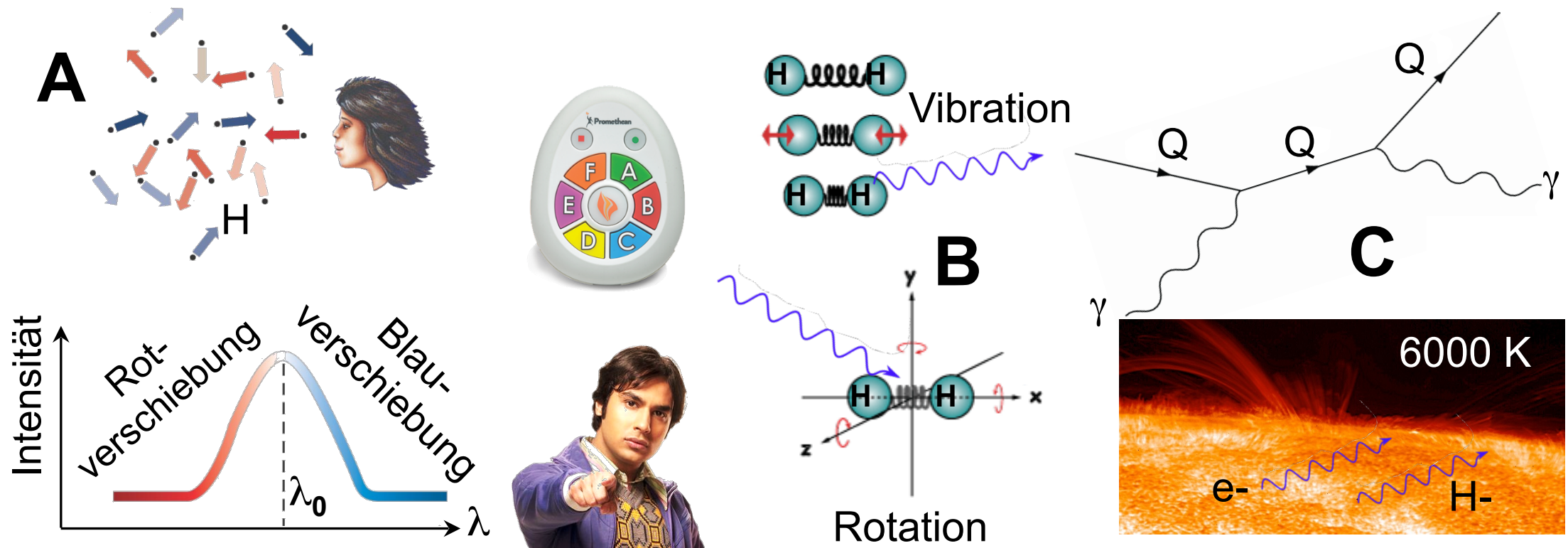
■ weshalb ist das Sonnenspektrum nicht diskret, nur Linien H- α , - β , - γ ... ?

A) thermische Bewegung Atome $\rightarrow$ große Dopplerverbreiterung

B) Einfluss der H₂-Moleküle an Sonnenoberfläche (Banden)

C) Spektrum durch Thomson-Streuung von γ 's an Ladungen Q

SHELDON COOPER
presents
FUN WITH ~~FACTS~~
Facts



4.2 Bohrsche Postulate

- **N. Bohr** (1913): dynamisches Gleichgewicht für umlaufendes Elektron

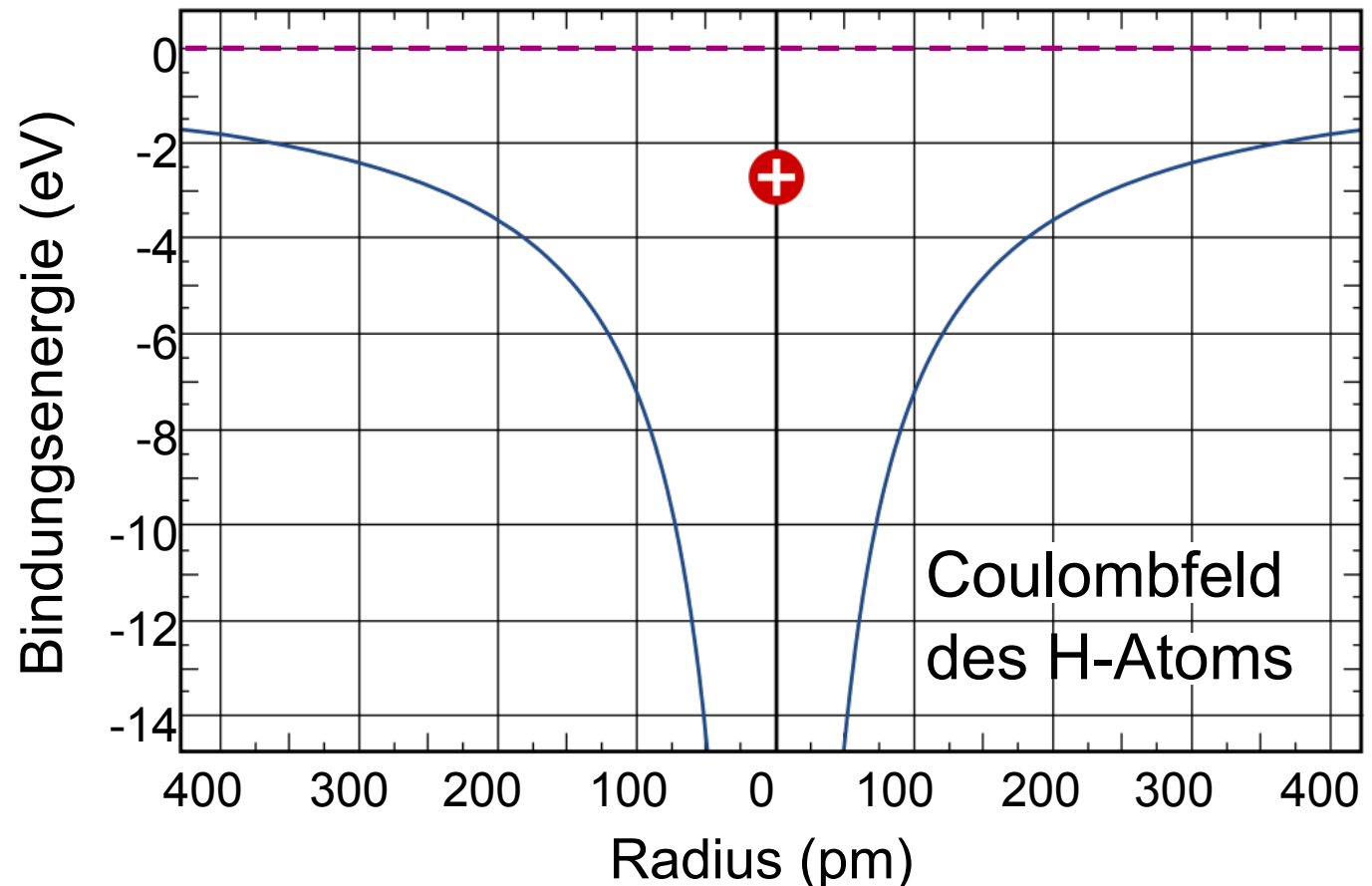
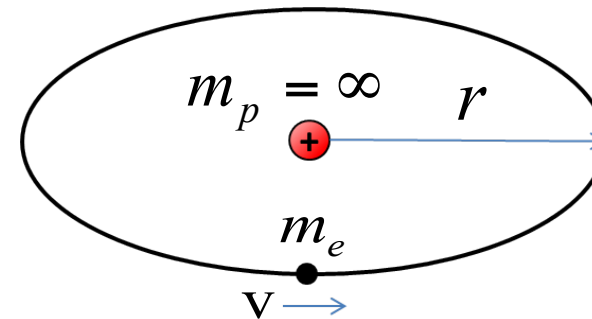
$$\vec{F}_{\text{Coulomb}} = \vec{F}_{\text{Zentripetal}}$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r^2} = m_e \cdot \frac{v_e^2}{r} \quad | \cdot r$$

- **potenzielle Energie** eines Elektrons im Feld eines H-Atoms

Energien: ~ - 10 eV

Radien: ~ 100 pm



■ klassische Energie-Betrachtung

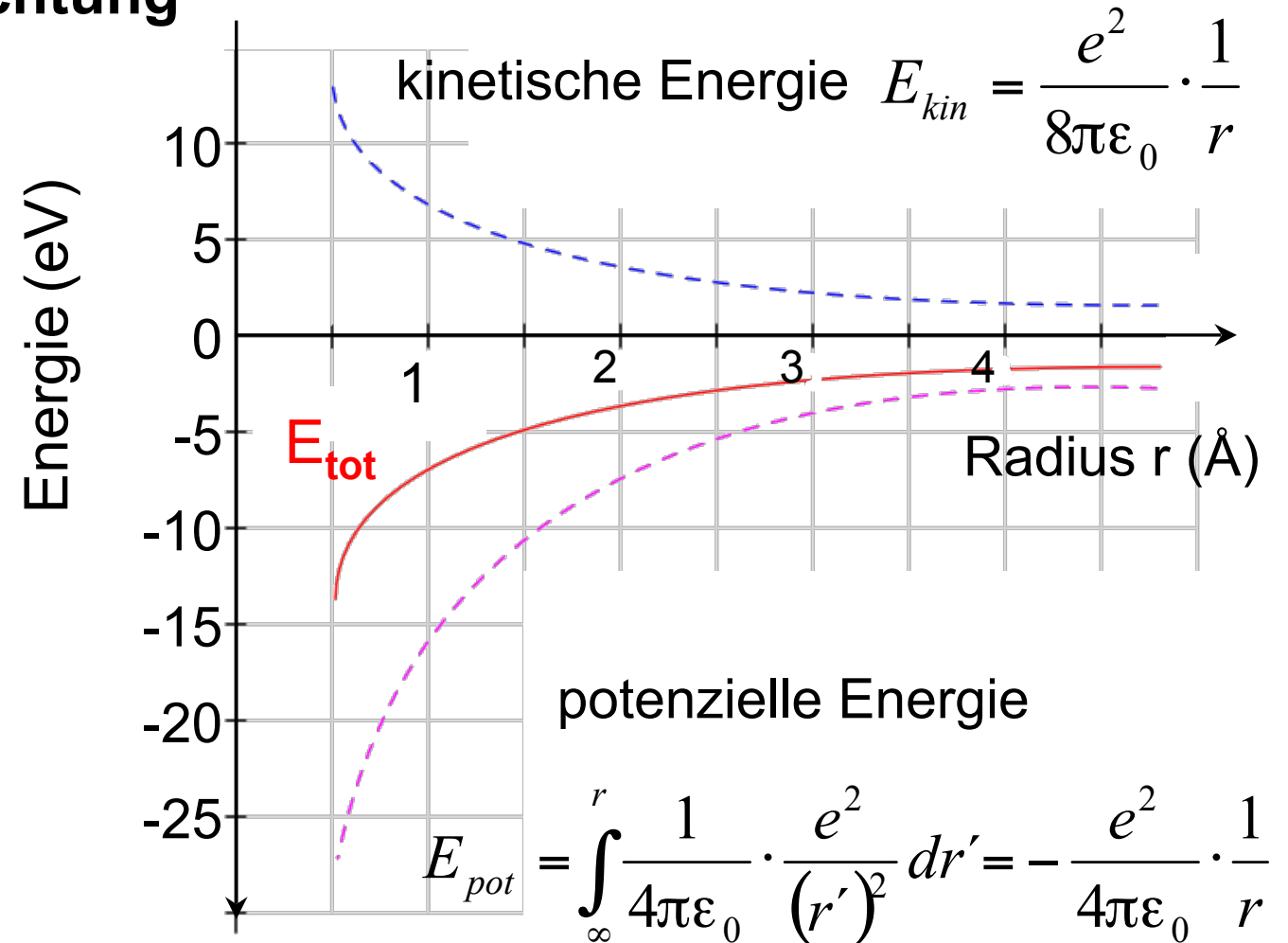
$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r} = m_e \cdot v_e^2$$

Virialtheorem:

$$-E_{pot} = 2 \cdot E_{kin}$$

$$E_{tot} = E_{kin} + E_{pot}$$

$$E_{tot} = -\frac{1}{8\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r}$$



- **klassisch:** Bahnen mit beliebigen Radien, kein Minimum!
 $\Rightarrow$ instabile Bahn, da Elektronen kontinuierlich abstrahlen!

■ 3 Postulate mit nicht-klassischen Quantisierungs-Forderungen:

- Elektronen-Orbits nur auf **diskreten** Bahnen
- auf den diskreten Bahnen bewegen sich die Elektronen **strahlungslos**, nur bei einem Wechsel der Bahn
 - ⇒ Emission eines Photons mit $E = h \cdot \nu$
- **Korrespondenzprinzip**: quantisierte Theorie muss im Grenzfall $n \rightarrow \infty$ gegen klassische Theorie konvergieren



- Aufgabe des klassischen Bahnbegriffs, Bahn des Elektrons wird ersetzt durch (stationären) Zustand des Elektrons

Bohrsche Postulate: H-Atom

- Bindungsenergie E_b eines gebundenen Elektronen-Zustands:

$$E_b = -\tilde{\nu} \cdot hc = -\frac{R_H}{n^2} \cdot hc \quad n: \text{Hauptquantenzahl} \quad R_H \cdot hc = 13,59 \text{ eV}$$

- **Grundzustand** $n = 1$ im H-Atom:

$$E_b \approx -13,6 \text{ eV}$$



N. Bohr, Philos. Mag. 26, 1

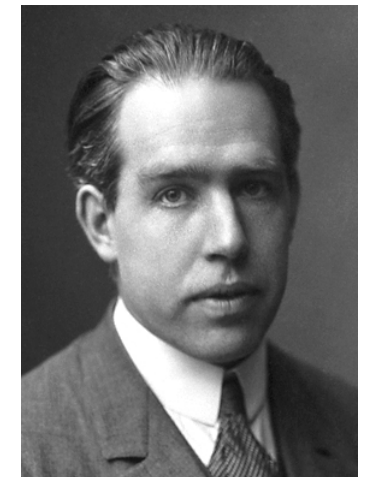
1913

On the Constitution of Atoms and Molecules

N. Bohr,
Dr. phil. Copenhagen
(Received July 1913)



Nobelpreis 1922



Niels H. D. Bohr
(1885-1962)

"for his services in the investigation of the structure of atoms and of the radiation emanating from them".

H-Atom ähnliche Systeme

■ Ein-Elektron Systeme (Ionen):

He⁺, Li⁺⁺, ..., U(91⁺)

- Coulombfeld des Kerns $Z \cdot e$:

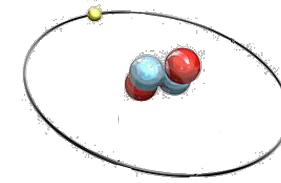
$$\vec{F}_{\text{Coulomb}} = \vec{F}_{\text{Zentripetal}}$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Z \cdot e^2}{r^2} = m_e \cdot \frac{v_e^2}{r}$$

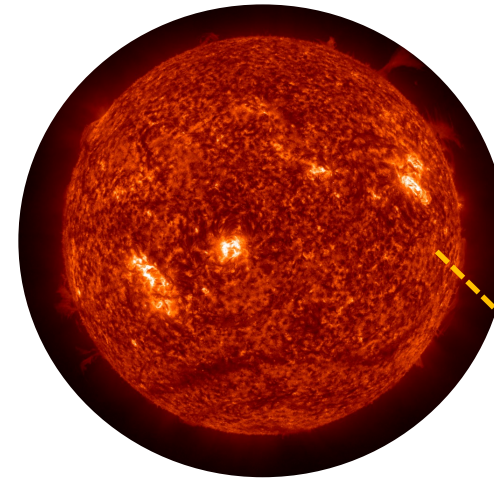
- **Bindungsenergie** des Elektrons:

$$E_b = -13,59 \text{ eV} \cdot \underbrace{Z^2} \cdot \frac{1}{n^2}$$

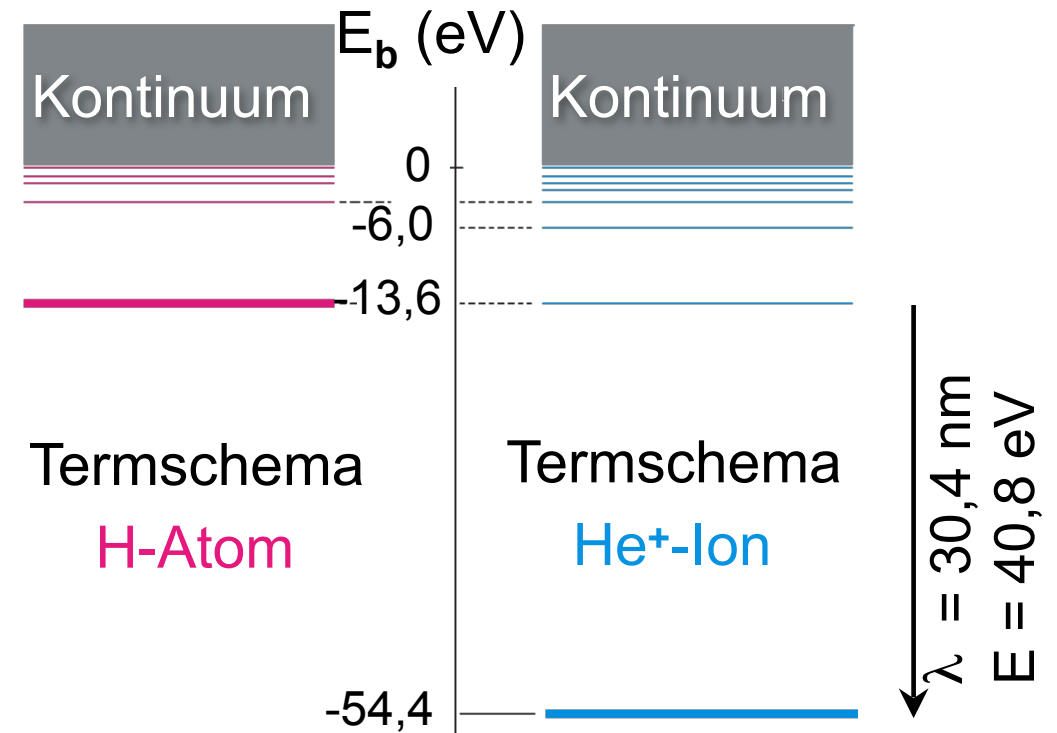
sehr hohe Bindungsenergien im
multi-keV-Bereich für $Z > 10$



He⁺



Sonne im Licht von
He⁺ ($\lambda = 30,4 \text{ nm}$)
 $n = 2 \rightarrow n = 1$



- bisher Berechnung von Elektronenzuständen in unendlich schwerem Kern
 - Mechanik: Bewegung von 2 Massen (Mitbewegung des Kerns m_K) beschrieben durch **reduzierte Masse μ**

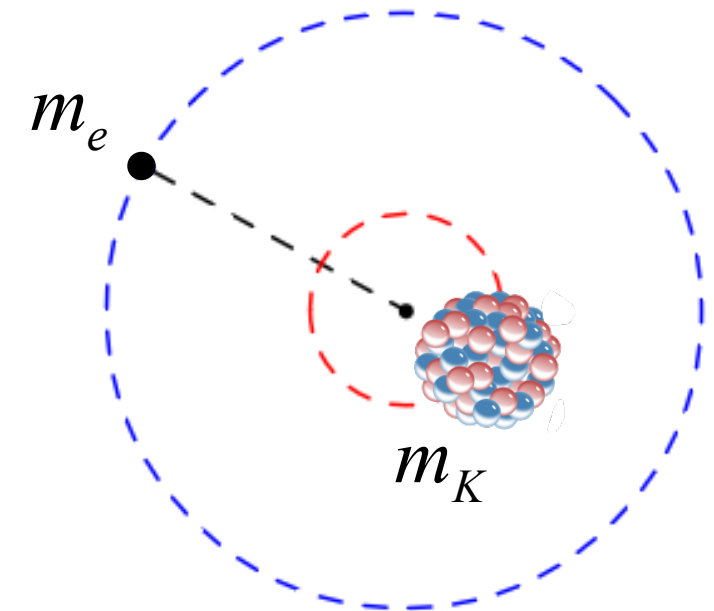
$$\mu = \frac{m_e \cdot m_K}{m_e + m_K}$$

- ersetze in allen bisherigen Rechnungen mit Rydberg-Konstante R_H die Masse m_e mit μ

$$R_H = \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \cdot \frac{m_e}{2\hbar^2} \longrightarrow \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \cdot \frac{\mu}{2\hbar^2}$$

- relative Änderung („Isotopieverschiebung“) am größten für H-Atom:

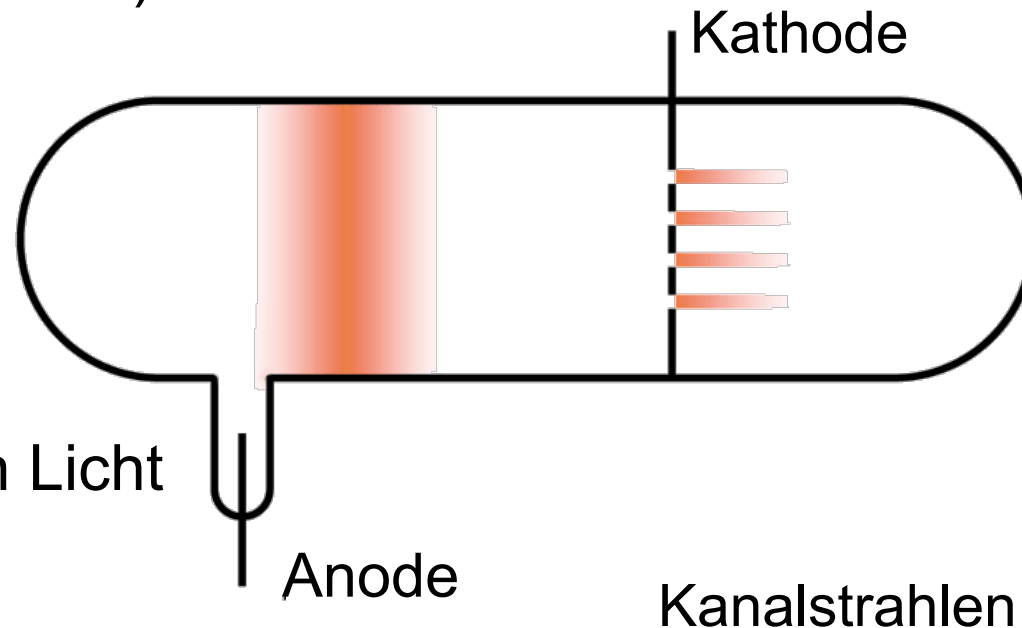
$$\Delta E/E = -5,45 \cdot 10^{-4} \quad \text{da } m_p : m_e = 1836,15$$



Urey (1931): Entdeckung des Deuteriums als “schwere” Form des Wasserstoffs

4.3 Anregung durch Stöße

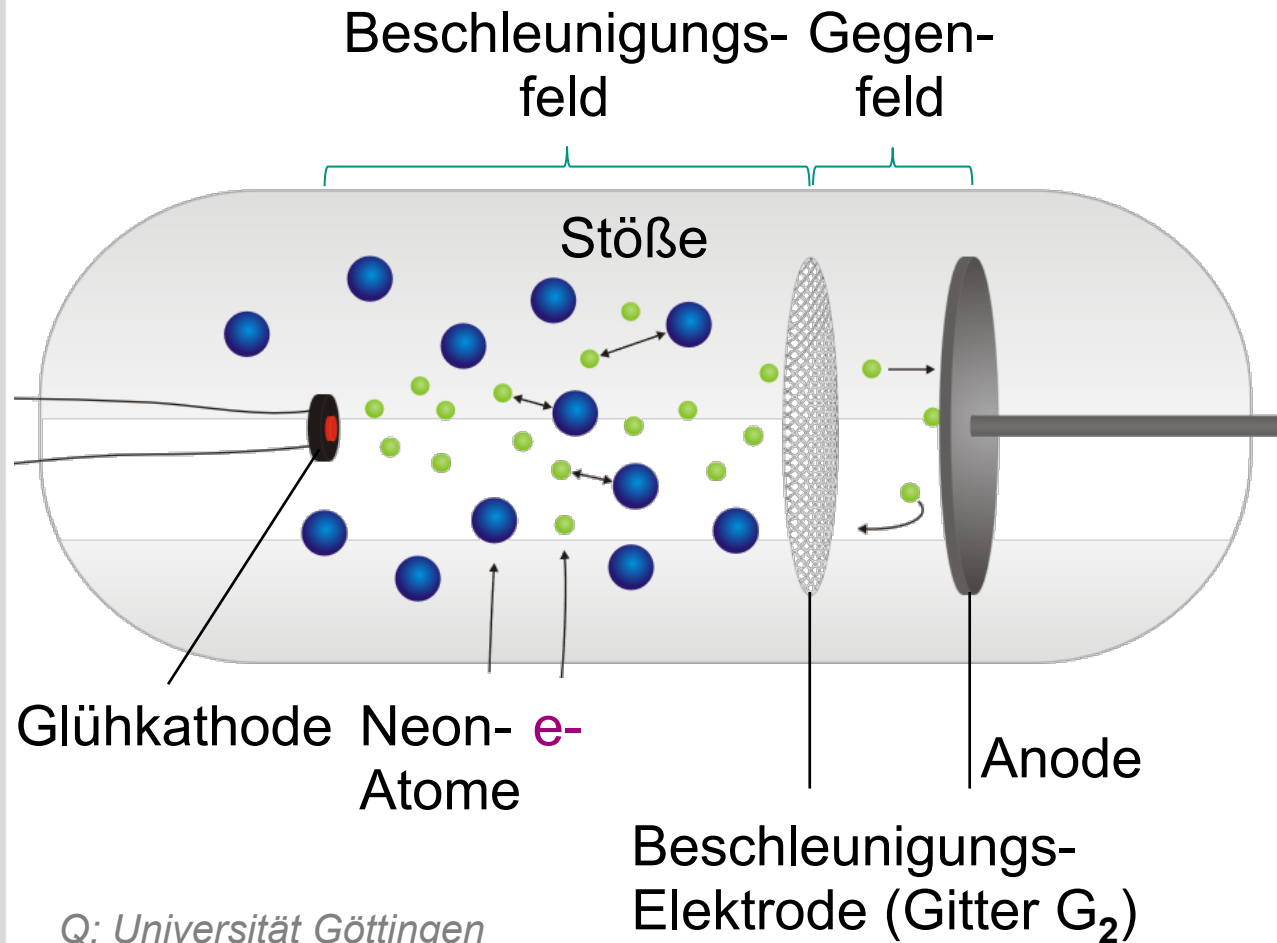
- Atome können durch **Stöße** ionisiert / angeregt werden
 - Kathodenstrahlen (Elektronen)
 - Kanalstrahlen (Ionen)
 - 1902 untersucht Lenard die Ionisation von Atomen mit Elektronen
 - Stoß: Elektron verliert Energie, Aussendung von Licht



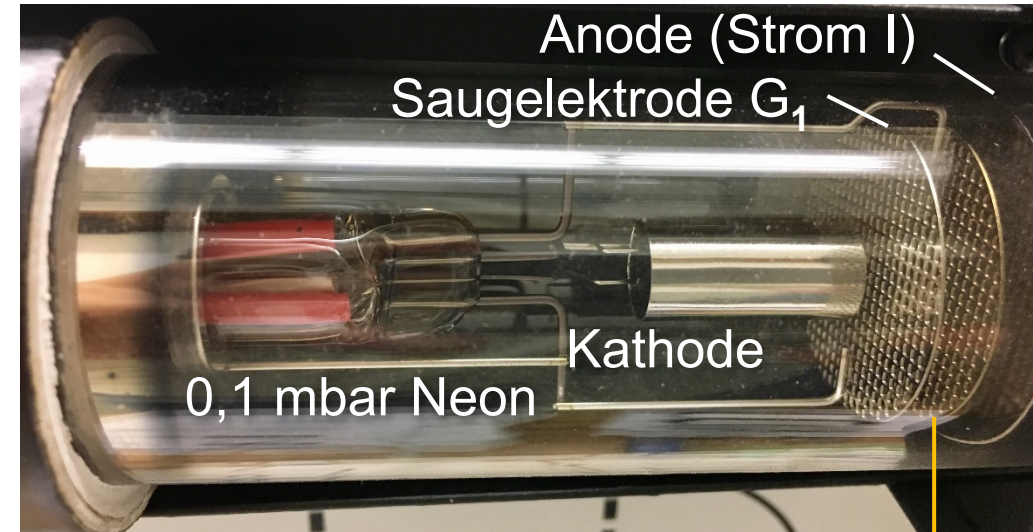
1892: Teilchennatur der Kathodenstrahlen
Apparatur mit Lenard-Fenster aus 3 μm Aluminium-
Folie zum Austritt von Elektronen aus Glasvolumen

Experiment: Franck-Hertz Versuch

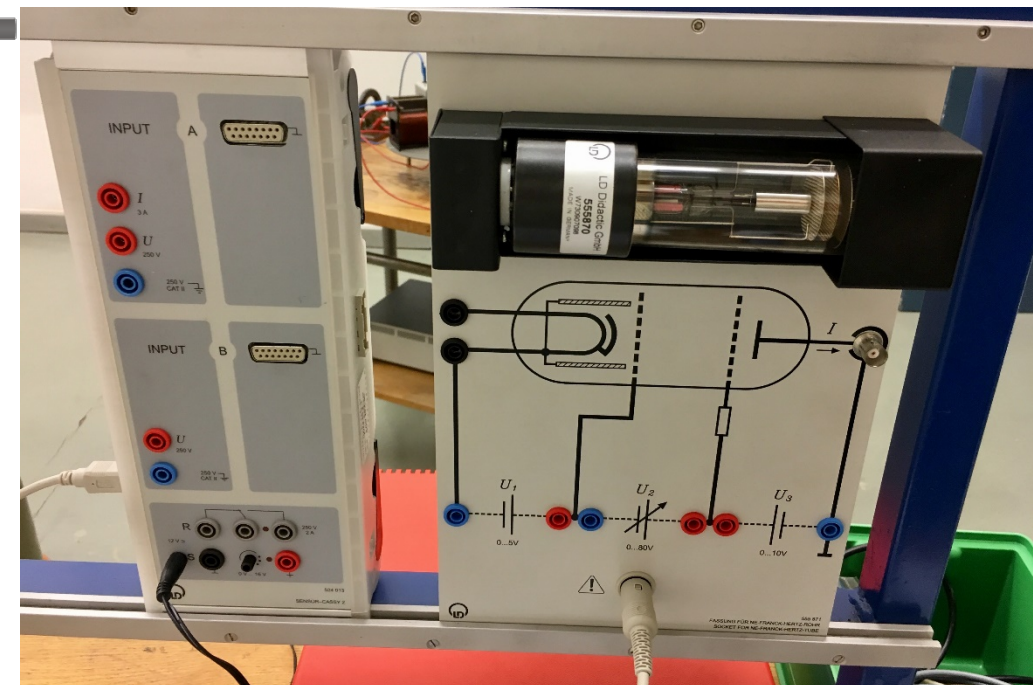
- Beschleunigte Elektronen erfahren **inelastische Stoßprozesse** an Neon



Q: Universität Göttingen

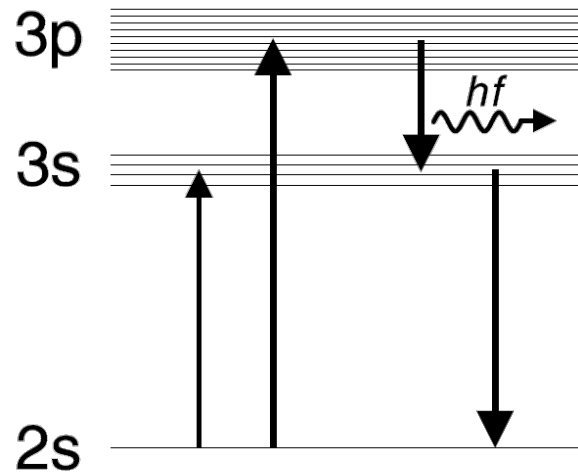


Beschleunigungselektrode G_2 (U)

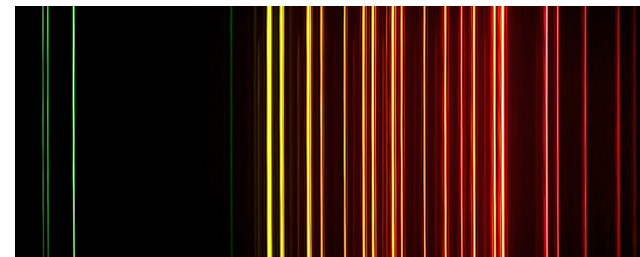


Experiment: Franck-Hertz Versuch

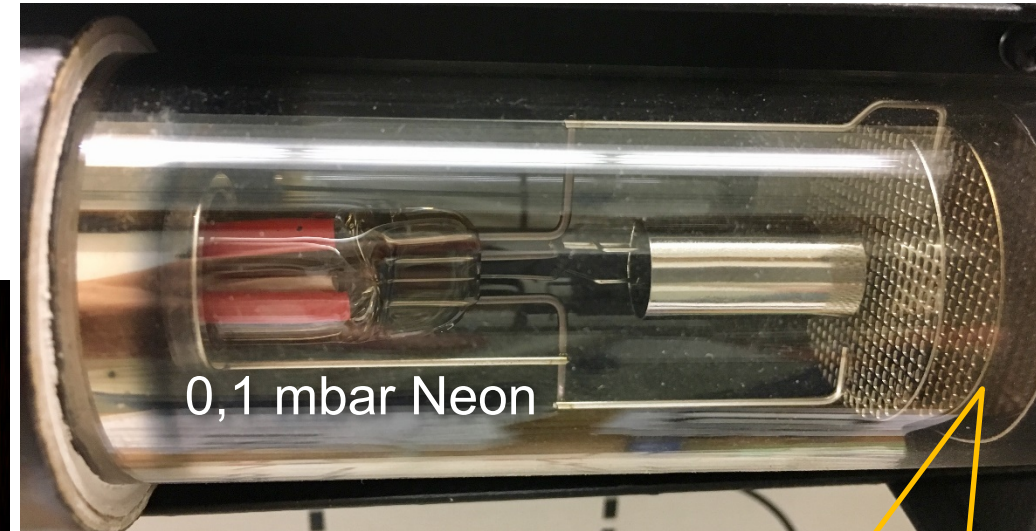
- Beschleunigte Elektronen erfahren **inelastische Stoßprozesse** an Neon



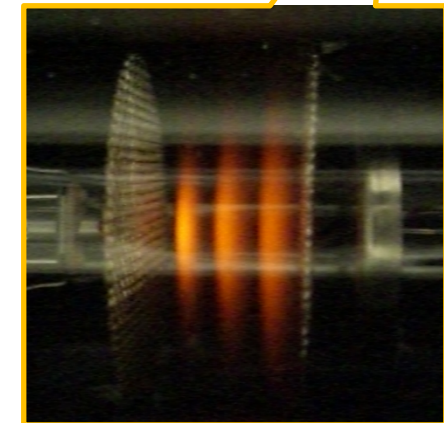
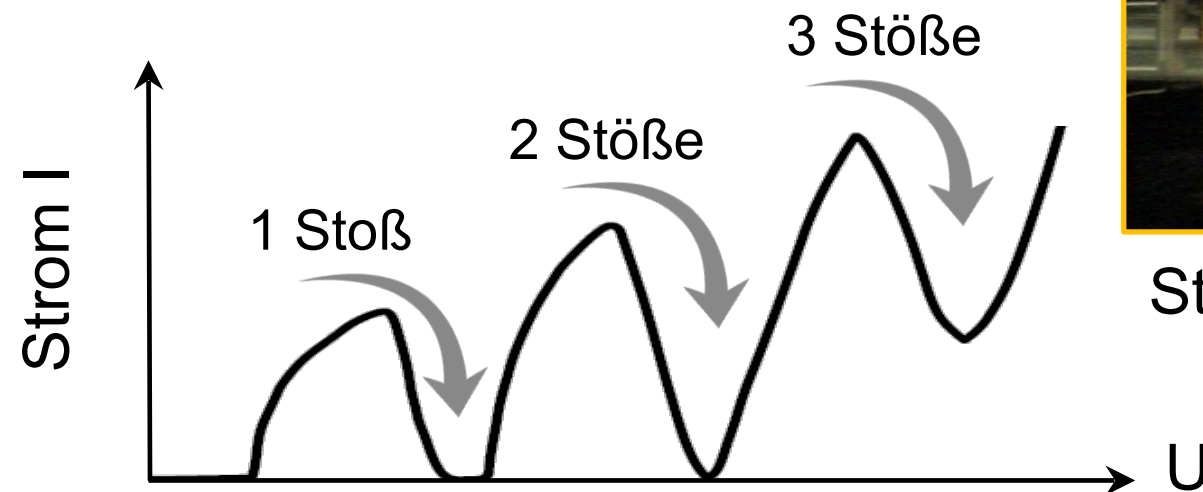
Neon-Termschema



Neon-Emissionslinien



Frank-Hertz-Kurve



Stoßfronten

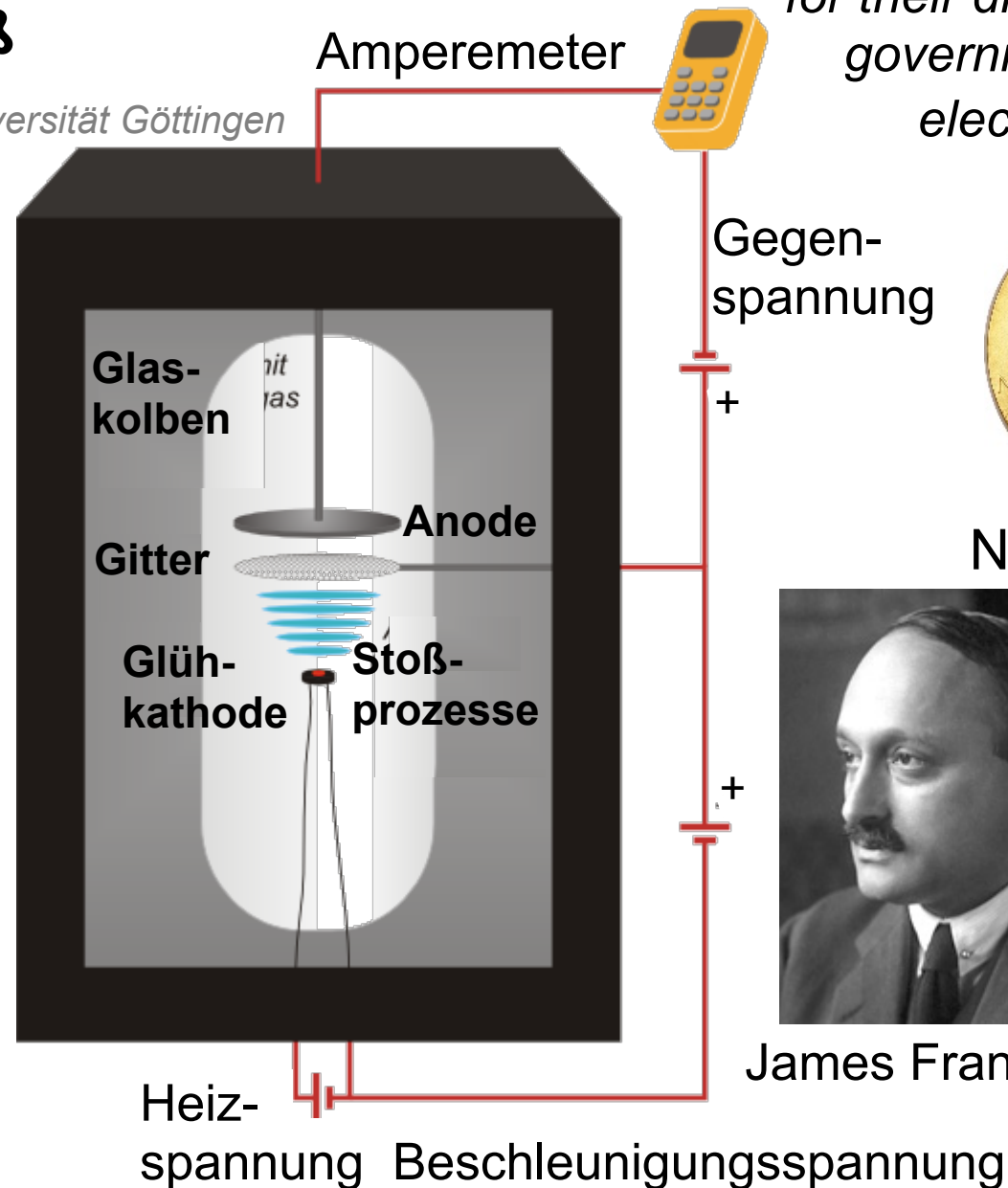
Franck-Hertz Versuch

■ 1913: Elektronen-Stoß

Versuche von
James **Franck**
Gustav **Hertz**

- Elektronen aus heißer Glühkathode werden über Gitter mit U_G beschleunigt
- Kolben gefüllt mit Hg-Dampf unter niedrigem Druck
- Inelastische Stöße von Elektronen mit Hg-Atomen führen zu Energieverlusten

Q: Universität Göttingen



"for their discovery of the laws governing the impact of an electron upon an atom"



Nobelpreis 1925



James Franck



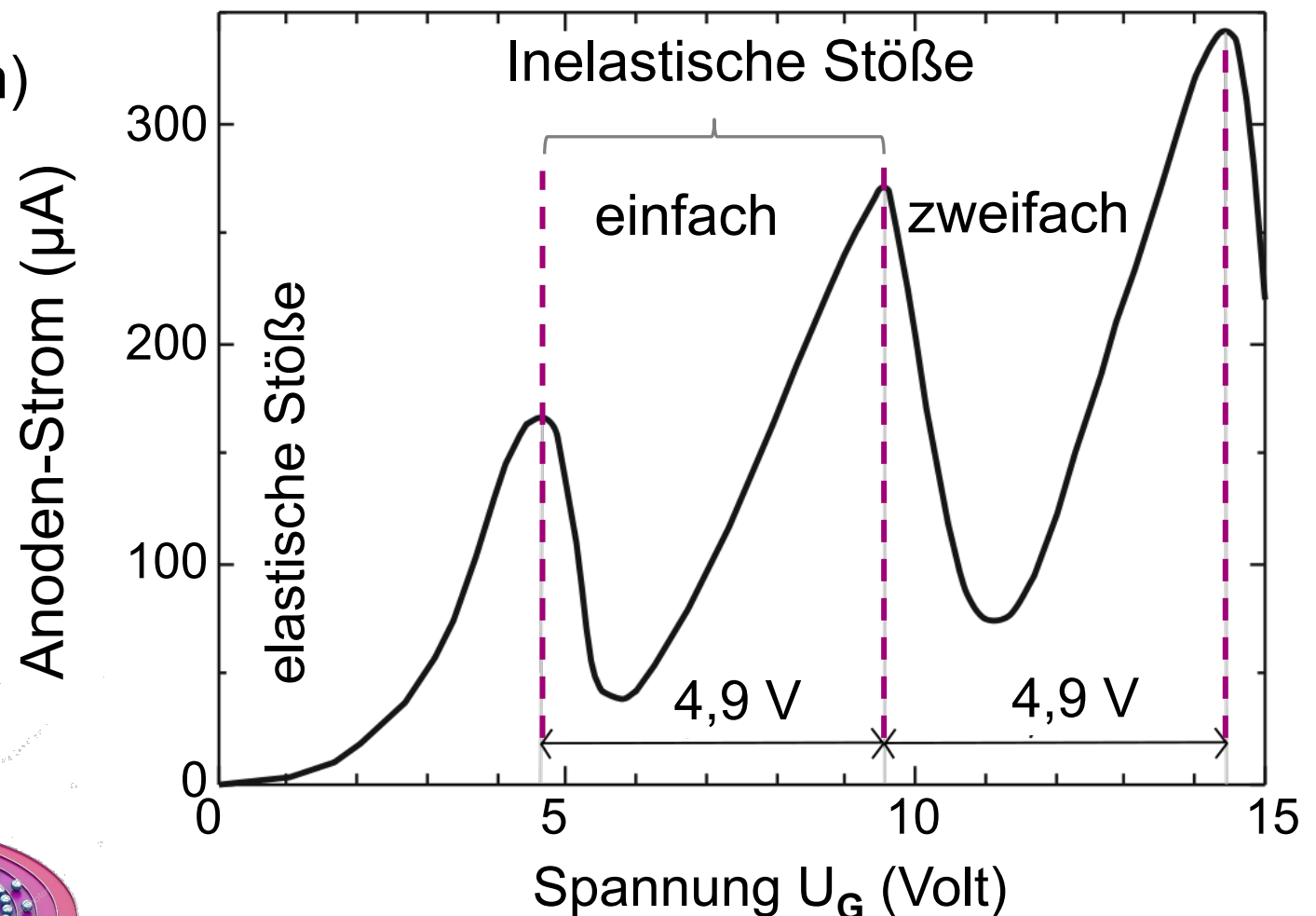
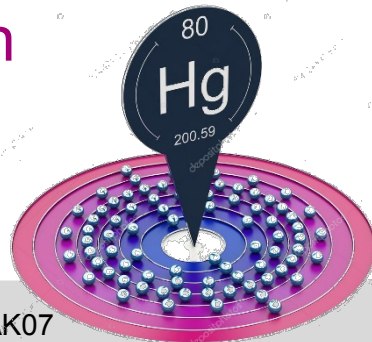
Gustav Hertz

Franck-Hertz Versuch: Implikationen

- Resultate: diskrete Energieverluste der Elektronen durch **atomare Niveaus** in inelastischen Stoßprozessen: $e^- + \text{Hg} \rightarrow \text{Hg}^*(E_\alpha) + e^- - \Delta E_{\text{kin}}$

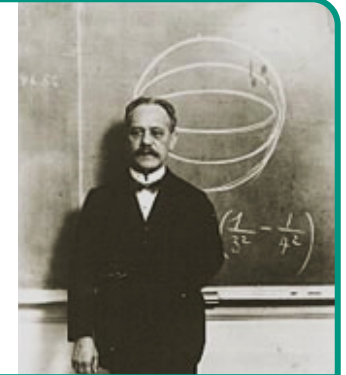
- Anregung von diskreten Hg^* Niveaus (Resonanzen)
- an Hg^* -Resonanzen: großer Energieverlust der $e^- \Rightarrow$ Reduktion der Rate an Anode

$\Rightarrow$ Beweis der Anregung atomarer Niveaus mit Elektronen



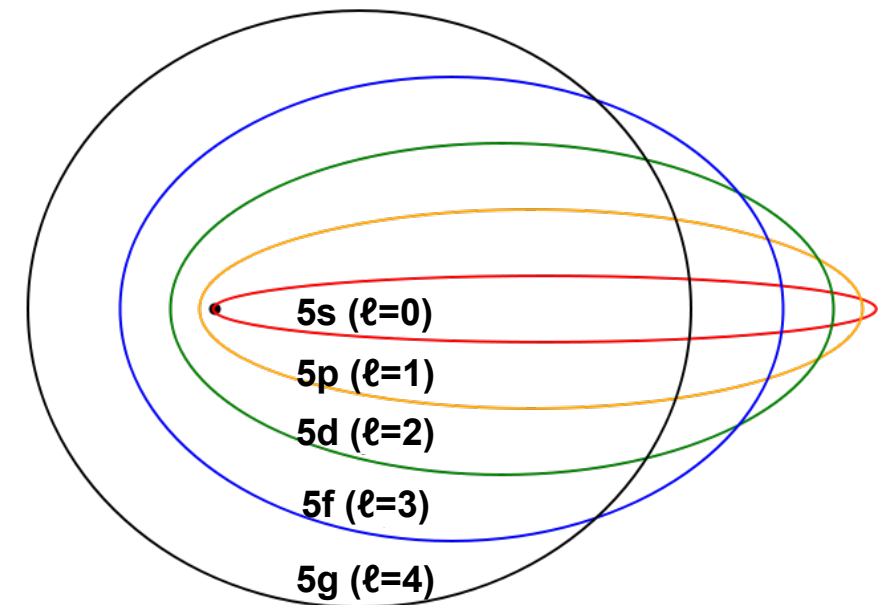
4.4 Bohr-Sommerfeld Theorie

- 1916: A. Sommerfeld erweitert das Bohrsche Atom-Modell durch Einführung von allgem. **Ellipsenbahnen** (analog zu Keplers Planetensystem)
 - Modell ist weiterhin eine semi-klassische Theorie



- Elektronen bewegen sich strahlungslos auf **Ellipsenbahnen**
- Bahndrehimpulszahl ℓ (Nebenquantenzahl, **azimutale Quantenzahl**) ist gequantelt und legt Form der Bahn fest (Halbachse)
- Quantenmechanik (QM, ab 1925) legt **mögliche Werte von ℓ** fest:

$$\ell = 0, 1, 2, \dots, n-1$$



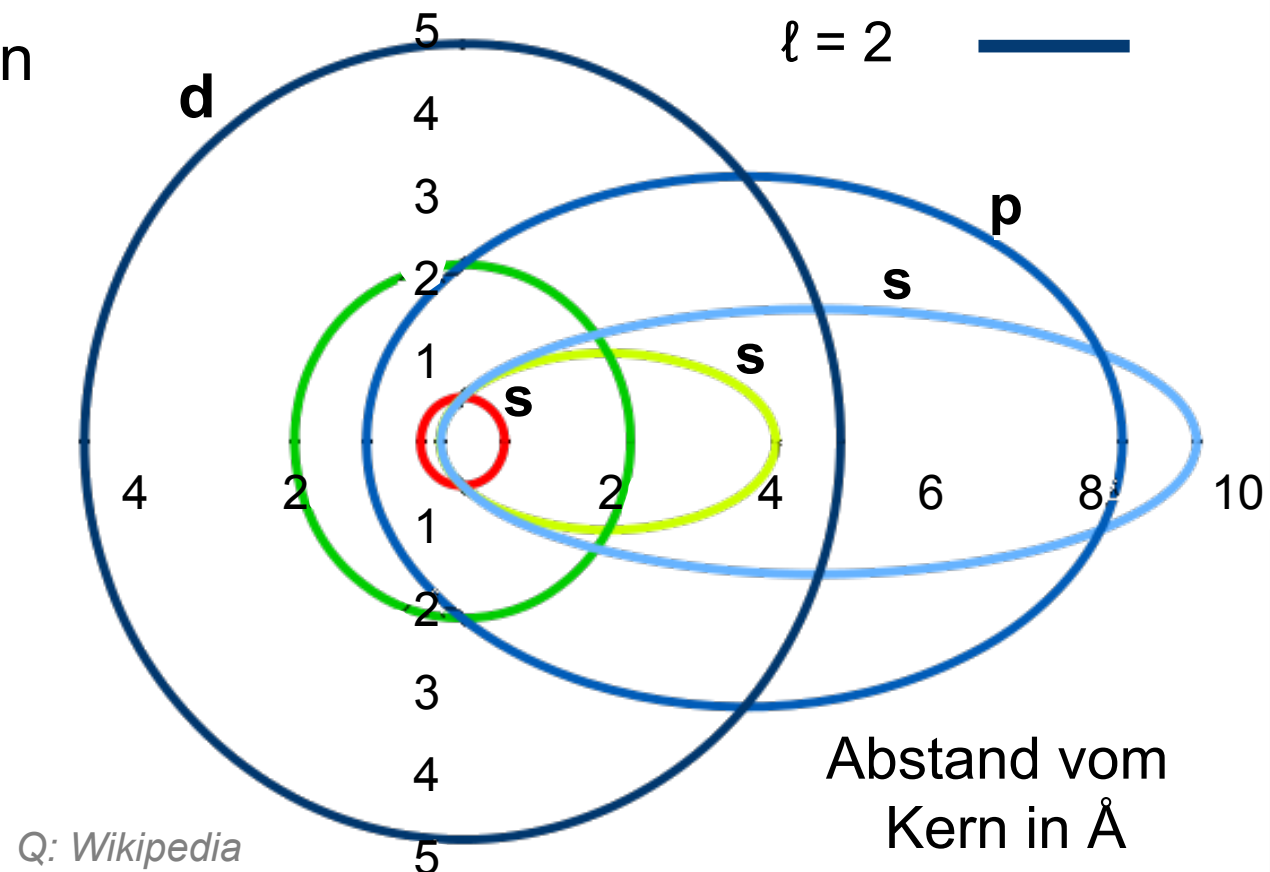
Sommerfeld-Modell

- neue **Quantenzahl ℓ** hat wichtige Konsequenzen:

- jeder Energieterm n ist **n -fach entartet**
- für größtmögliches $\ell = n-1 \Rightarrow$ Bohrsche Kreisbahn
- Bahn mit $\ell = 0$ ist quantenmechanisch möglich!
- Bohrsche Theorie liefert falschen Grundzustand, der korrekte Wert $\ell = 0$ der QM wurde experimentell bestätigt

$n = 1$	$\ell = 0$	
$n = 2$	$\ell = 0$	
	$\ell = 1$	
$n = 3$	$\ell = 0$	
	$\ell = 1$	
	$\ell = 2$	

Drehimpuls ℓ	Name	
$\ell = 0$	s	sharp
$\ell = 1$	p	principal
$\ell = 2$	d	diffuse
$\ell = 3$	f	fundamental



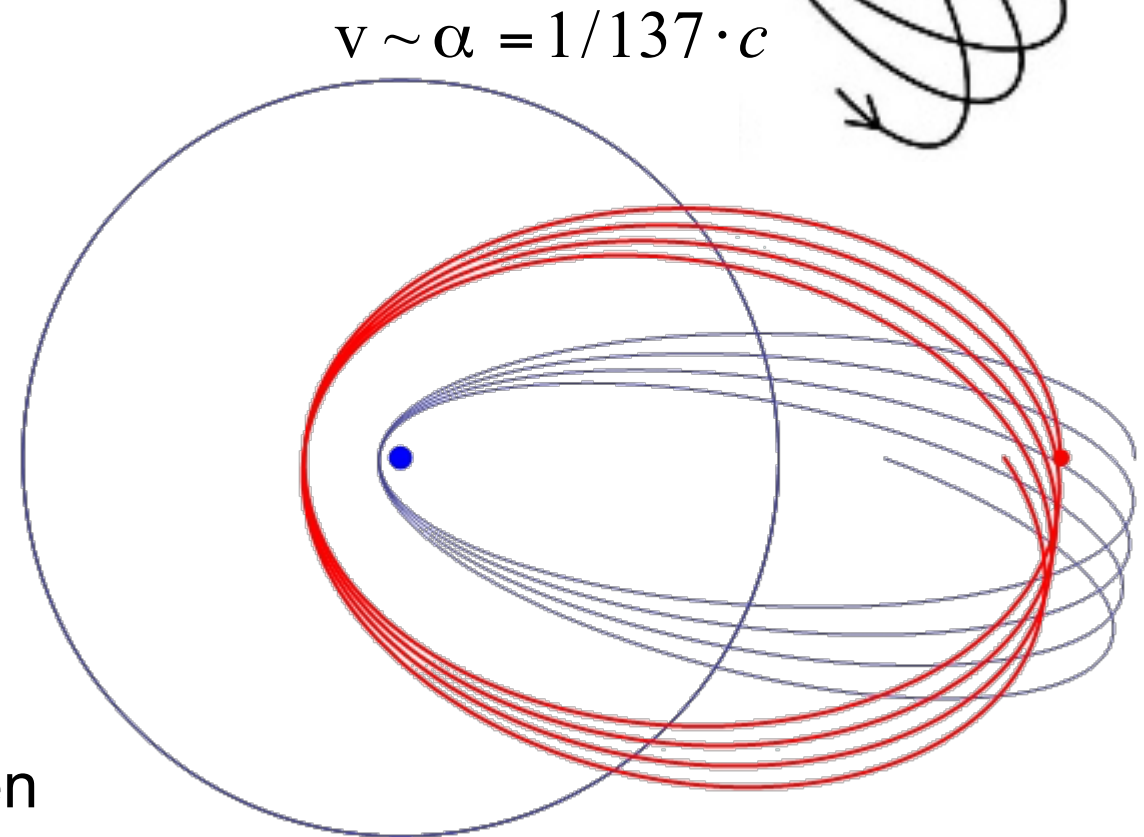
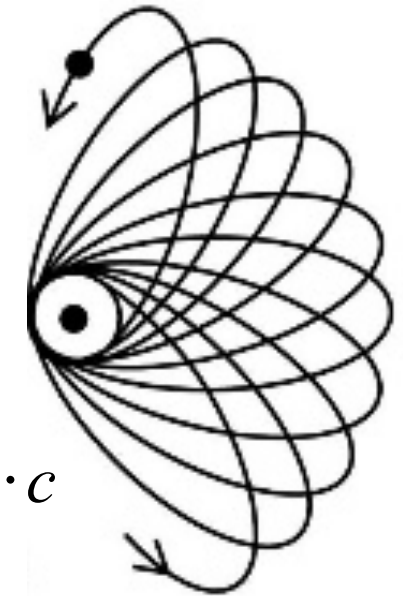
Relativistisches Sommerfeld-Modell

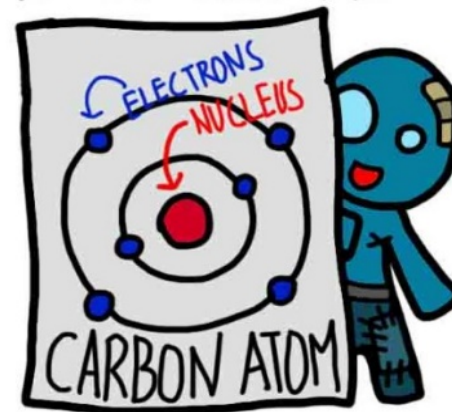
- bisher sind Zustände mit Hauptquantenzahl n nach Berücksichtigung des Bahndrehimpulses L entartet:
 n -fache Energie-Entartung da $\ell = 0, 1, 2, \dots, n-1$

- **relativistische Effekte** heben die Energie-entartung auf, da $m_e = m_e(\gamma)$

$$m = m_e \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}$$

- Größe: $\Delta E \sim \alpha^2 = 10^{-5}$
- relativistische Effekte führen zu einer **Drehung des Perihels** (vgl. Effekte beim Merkur)
⇒ keine geschlossenen Ellipsen





ACCORDING TO THE QUANTUM MECHANICAL
MODEL... YOU'RE WRONG.

