

37

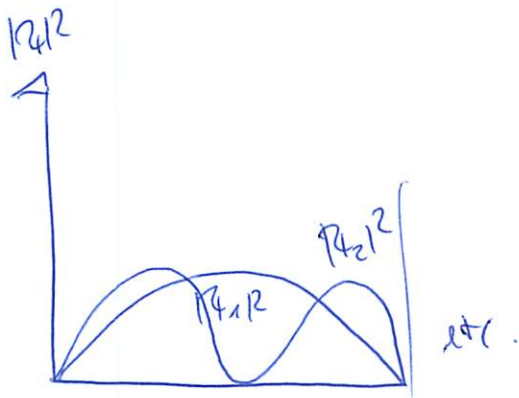
bedeut zu überprüfen ist

$$\langle \varphi_n | \varphi_m \rangle = \delta_{nm}$$

Oder in der Basis der φ_n stellt sich $\hat{H}$ dar als

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} \xi_{12} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \xi_{22} & & \\ \vdots & \xi_{32} & \ddots & \\ 0 & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Wir haben $\hat{H}$ diagonalisiert

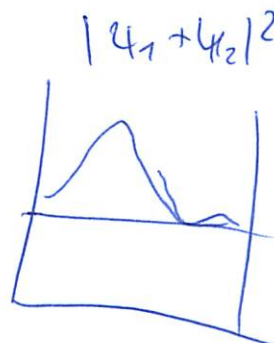
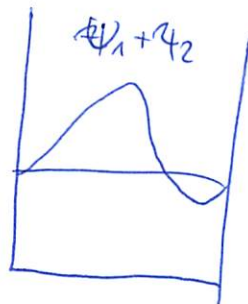
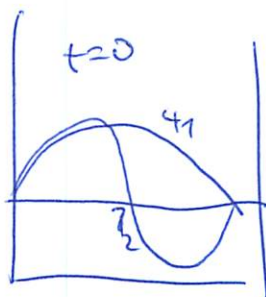


sind zeitunabhängig

$$\text{also } \psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi_1(x) e^{-\frac{i E_1}{\hbar} t} + \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi_2(x) e^{-\frac{i E_2}{\hbar} t}$$

hier wir

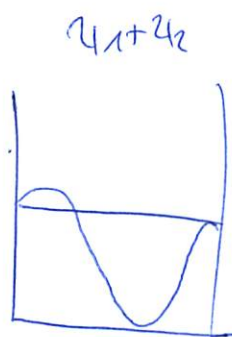
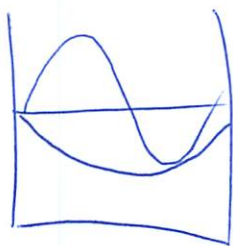
38



~~ADD~~

$1/2$ periode
von ψ_1

entspricht $1/2 = 2$ perioden von ψ_2



Position ~~des~~ des Maximums (oder des Minimums)
oszilliert mit $\Omega = \omega_2 - \omega_1$

hier gibt es eine Zerstreuung, da

$\psi(x,t)$ nicht als einfaches Produkt von

$f(x) \psi(x)$ geschrieben
ist!

39

Ganz allgemein

$$\psi(r,t) = \sum_n a_n e^{-i \frac{E_n}{\hbar} t} \psi_n(r)$$

aus $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(r,t)|^2 = 1$ folgt

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_n a_n^* e^{+i \frac{E_n}{\hbar} t} \psi_n^*(r) \right) \left(\sum_m a_m e^{-i \frac{E_m}{\hbar} t} \psi_m(r) \right) d^3r$$

$$= \sum_{nm} e^{+i \frac{E_n - E_m}{\hbar} t} a_n^* a_m \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^*(r) \psi_m(r) d^3r}_{\delta_{n,m}}$$

$$= \sum_n |a_n|^2 = 1$$

$\Rightarrow |a_n|^2$ ist die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen im Zustand ψ_n zu finden. Dies ist entweder anschaulich!?

Wird aber $|\psi(r,t)|^2 = \psi^*(r,t) \psi(r,t)$. Hier geht es um eine eindeutige Entscheidung!

Was ist die Energie des Zustands $\psi(r,t)$?

$$\langle \psi(r,t) | \hat{H} | \psi(r,t) \rangle =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_n a_n^* e^{+i \frac{E_n}{\hbar} t} \psi_n^*(r) \right) \hat{H} \left(\sum_m e^{-i \frac{E_m}{\hbar} t} \psi_m(r) \right) d^3r$$

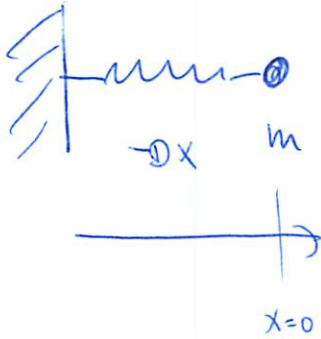
$$= \sum_{nm} e^{+i \frac{E_n - E_m}{\hbar} t} a_n^* a_m \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^*(r) \hat{H} \psi_m(r) d^3r}_{\substack{= E_m \delta_{n,m} \\ = \delta_{n,m} E_n}}$$

$$= \sum_n |a_n|^2 E_n$$

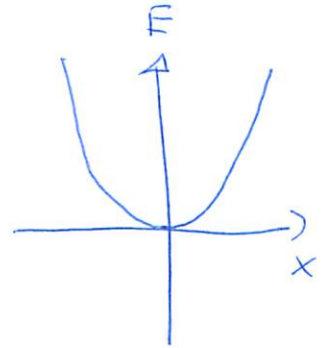
40

Energie ist also mit Betragswahrscheinlichkeit $|a_n|^2$ gewichtete Energie, fast wie in der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

2.3 Der harmonische Oszillator



$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} Dx^2$$



$V(x) = \frac{1}{2} Dx^2$ ist zeitunabhängig

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2} Dx^2 \right) \psi(x) = E \psi(x)$$

mit $\lambda = \frac{2mE}{\hbar^2}$ und $\alpha^2 = \frac{mD}{\hbar^2}$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + (\lambda - \alpha^2 x^2) \right) \psi(x) = 0$$

Wir sehen für $x \rightarrow \infty$ dominiert der Term $\alpha^2 x^2$ in der Klammer.

$\Rightarrow$ asymptotische Lösung für große x (muß gegen 0 gehen)

für $\lambda = \alpha$ ist $\psi_\infty(x) = A e^{-\frac{\alpha x^2}{2}}$ exakte Lösung

Wir wagen einen Ansatz:

$$\psi(x) = A e^{-\frac{1}{2} \alpha x^2} (a_0 x + a_1 x^2 + a_2 x^3 + \dots + a_{n-1} x^n)$$

4)

und suchen Polynome, $a_0x + a_1x^2 + \dots$ die die
Gleichung erfüllen.

Polynome müssen endlich sein, da sonst $|\psi(x)|^2$ nicht mehr
integrierbar ist

→ Hermite'sche Polynome (ohne Beweis)

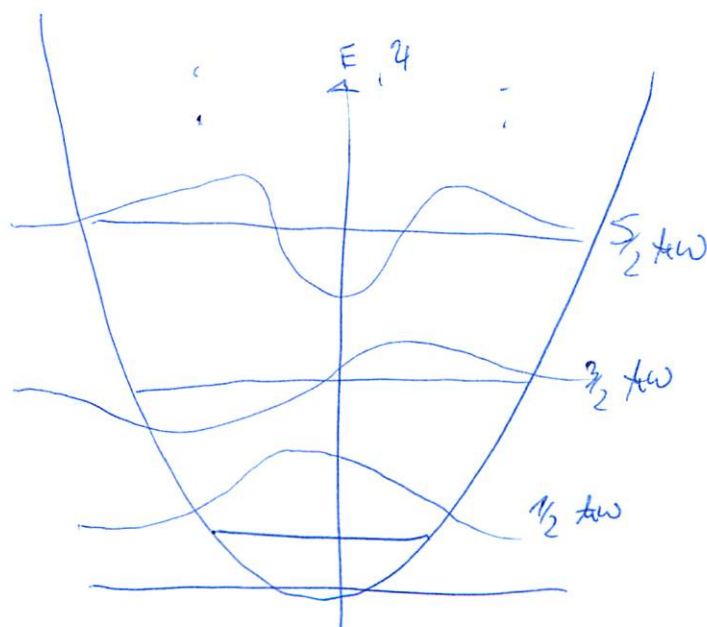
$$2n = \alpha(2n-1) \quad \text{mit} \quad 2n = 2m\hbar E_n / \hbar^2$$

folgt $E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega \quad \omega = \sqrt{\frac{D}{m}} \quad (\text{wie in der klassischen Physik})$

$$\psi_0(x) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\frac{1}{2}\alpha x^2} \quad E_0 = \frac{1}{2} \hbar\omega$$

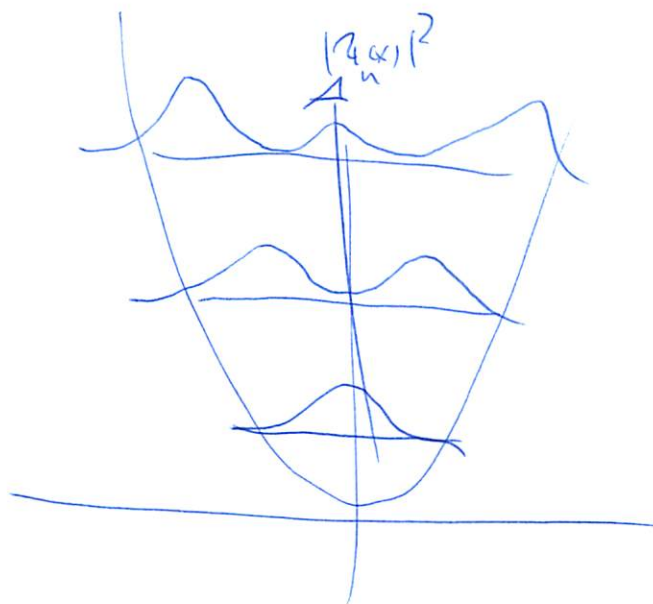
$$\psi_1(x) = \left(\frac{4\alpha^3}{\pi}\right)^{1/4} x e^{-\frac{1}{2}\alpha x^2} \quad E_1 = \frac{3}{2} \hbar\omega$$

$$\psi_2(x) = \left(\frac{\alpha}{4\pi}\right)^{1/4} (1 - 2\alpha x^2) e^{-\frac{1}{2}\alpha x^2} \quad E_2 = \frac{5}{2} \hbar\omega$$

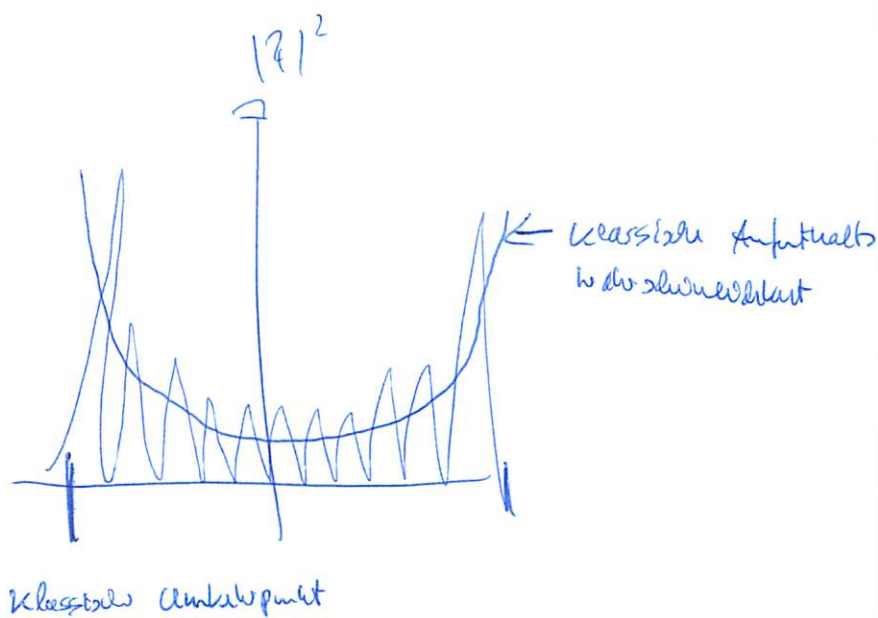


② Was gesehen wir?

1. Zustand niedrigster Energie liegt nicht bei 0 sondern $\frac{1}{2} \hbar \omega$. ~~ist~~ $|\psi_0|^2$ ist ~~nicht~~ ausgeglichen, aber bei $x=0$ zentriert. "Nullpunktsenergie"
2. Gerade u : Symmetrischer Zustand $\psi(x) = \psi(-x)$
ungerade u : Antisymmetrischer Zustand $\psi(x) = -\psi(-x)$
3. Äquidistante Zustände



für $n \gg 1$



Für große n nähert sich $|\psi_n|^2$ der klassischen Aufenthaltswahrscheinlichkeit innerhalb der Umlaufperiode an.

"Korrespondenzprinzip" : Für große Quantenzahlen konvergiert die quantenmechanische