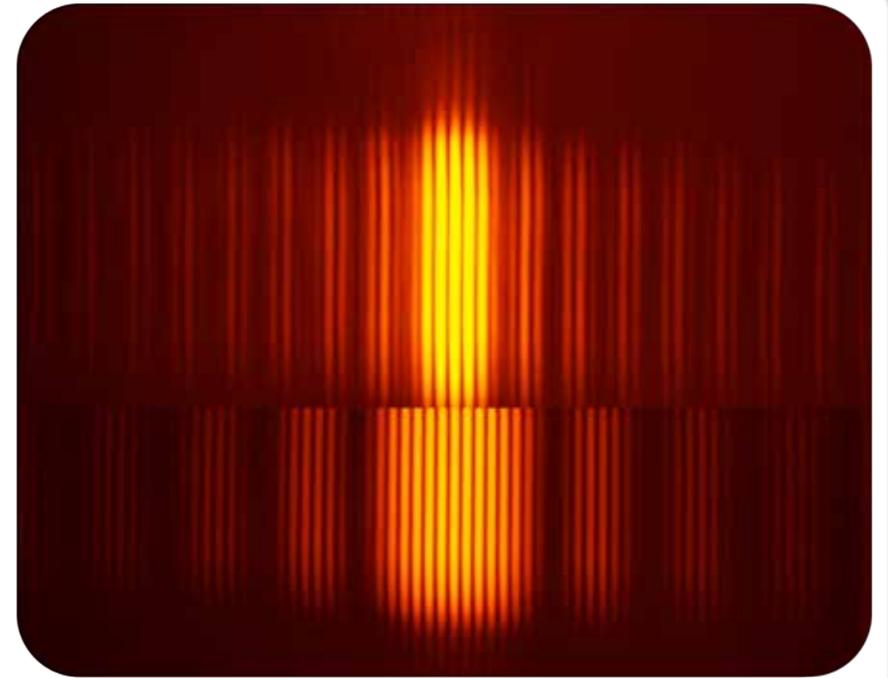
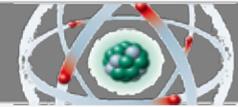


Atome, Moleküle & Kerne

Sommersemester 2024
Vorlesung # 6, 02.05.24



Thomas Müller, Institut für Experimentelle Teilchenphysik, Fakultät für Physik



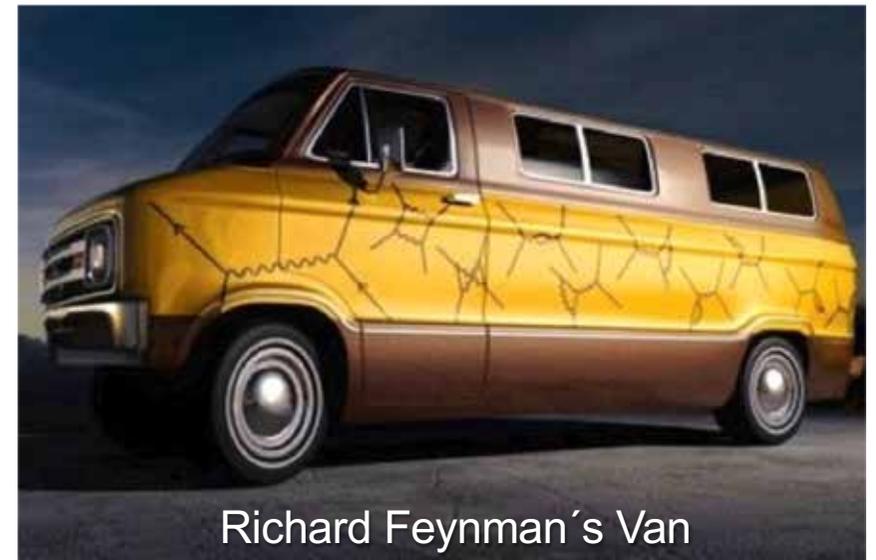
3.1 Photonen und ihre Wechselwirkung

c) Paarbildung

d) Wechselwirkung von Quanten,
Feynman-Graphen (Grundlagen)

3.2 Elektronen & Materiewellen

- Elektronen & Neutronen am Doppelspalt
- de Broglie Materiewellen



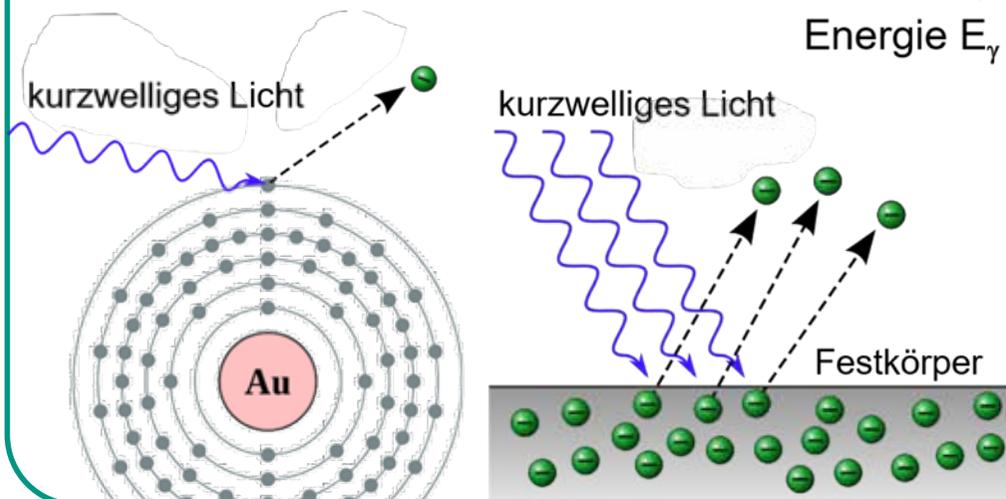
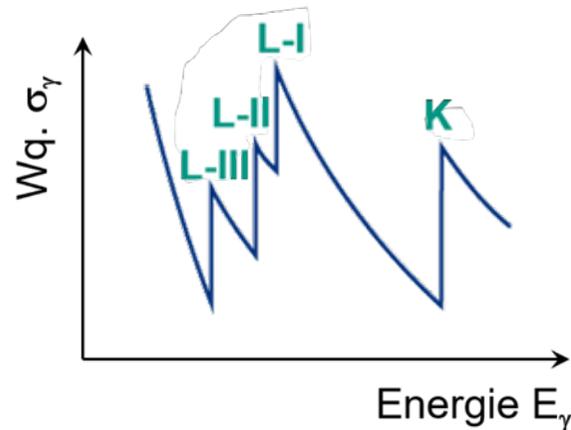
Richard Feynman's Van

Wh. a. Photoeffekt und Comptoneffekt

■ Wechselwirkung von Gammas bei verschiedenen γ -Energien

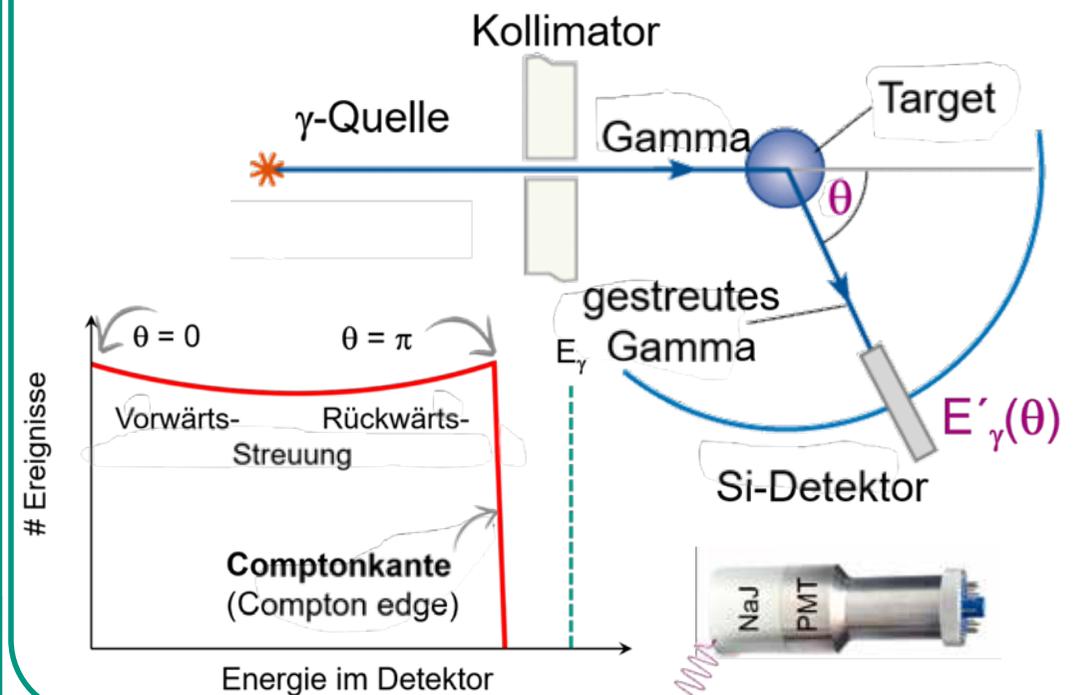
■ Photo-Effekt: γ -Absorption

- Festkörper: Austrittsarbeit W_K



■ Compton-Effekt: γ -Streuung

- **Streuwinkel** θ legt Energieübertrag auf Rückstoß-Elektron & Restenergie des Gammaquants fest



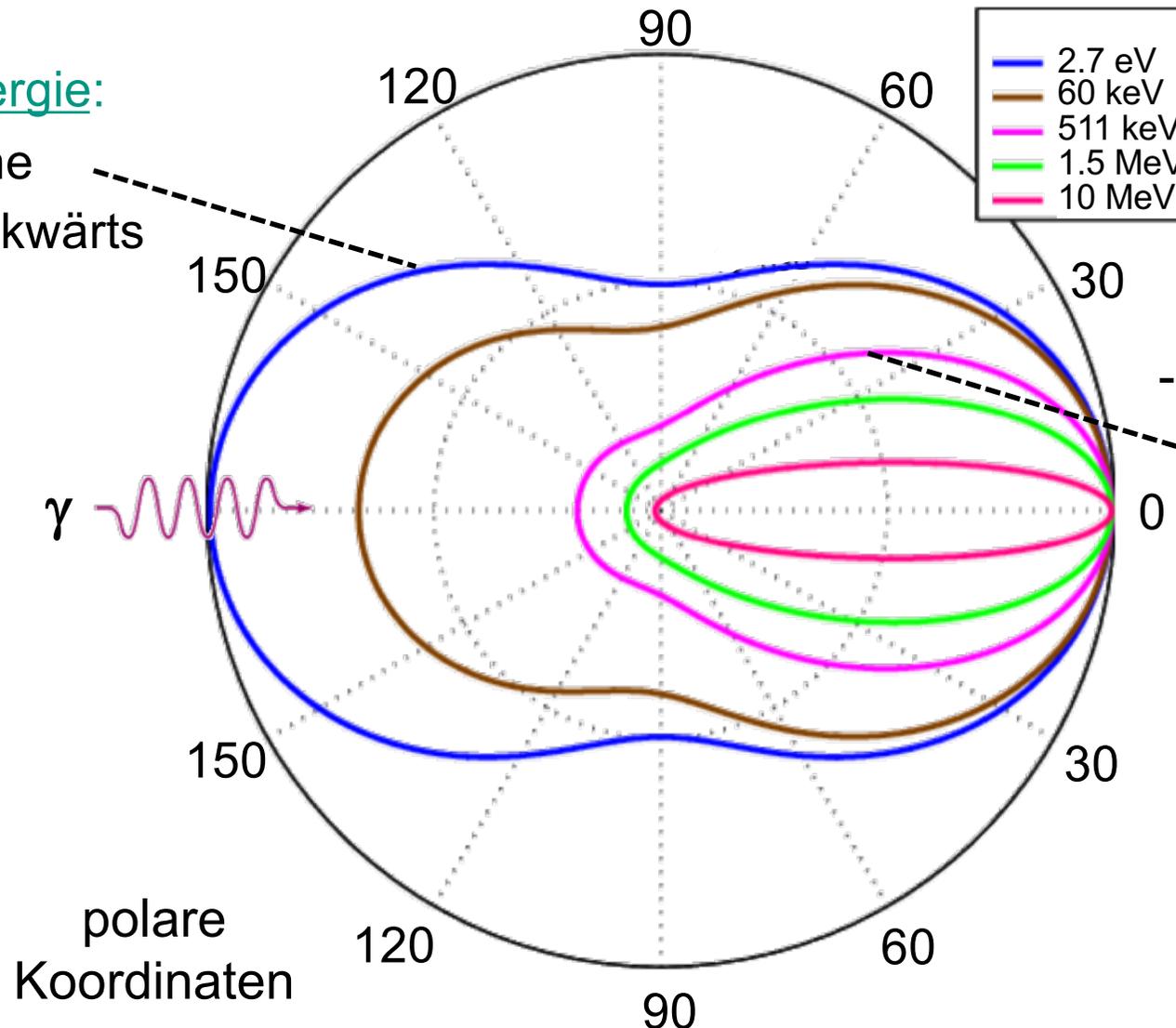
Wh. b. Comptoneffekt – Winkelverteilung

Winkelverteilung als Funktion der γ -Energie

- niedrige Energie:

symmetrische
vorwärts-rückwärts
Verteilung

**Thomson-
Streuung**



- hohe Energie:

asymmetrische,
vorwärts-gepeakte
Verteilung

**Compton-
Streuung**



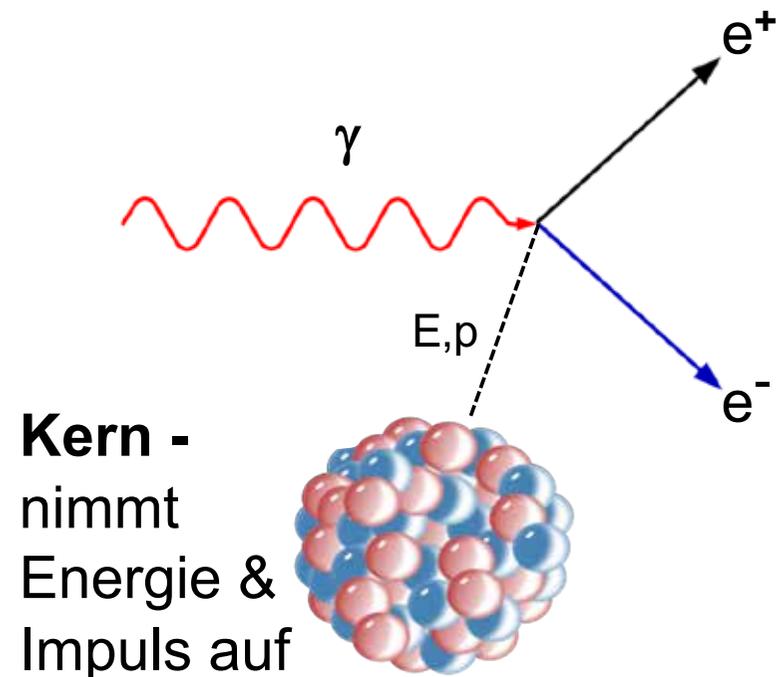
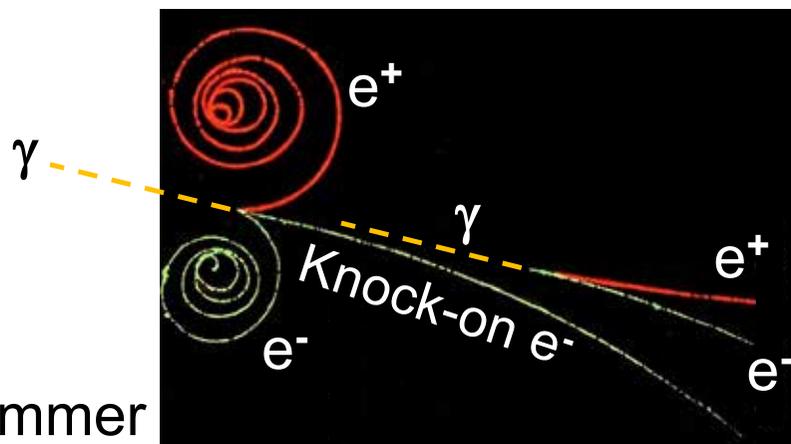
c. Paarbildung im Kern-Coulombfeld

■ Paarbildung dominant bei hohen γ -Energien

- Erzeugung eines Elektron-Positron-Paares im **Coulomb-Feld des Kerns**:
Kern nimmt **Energie-Impuls Mismatch** von Gamma und e^-/e^+ auf
 \Rightarrow Rückstoß des Kerns

- Schwellen-Energie: $E_{\text{thres}} = 2 \cdot m_e + O\left(\frac{m_e^2}{M_{\text{Kern}}}\right)$ [= 1,02 MeV]

- falls $E_\gamma > E_{\text{thres}}$:
Überschussenergie geht in kinetische Energie des e^-/e^+ Paares



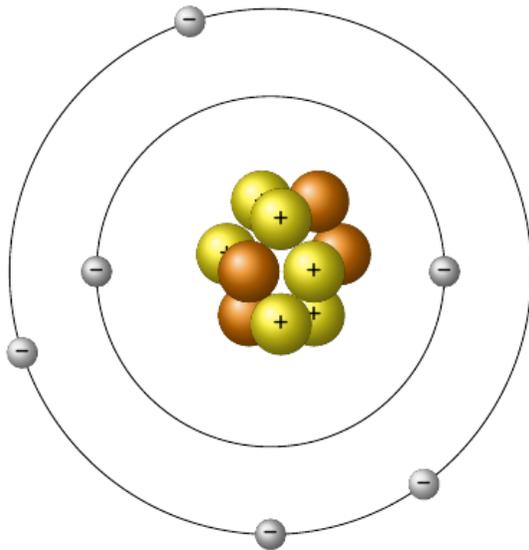
Paarbildung – Wirkungsquerschnitt

energieabhängiger Wirkungsquerschnitt

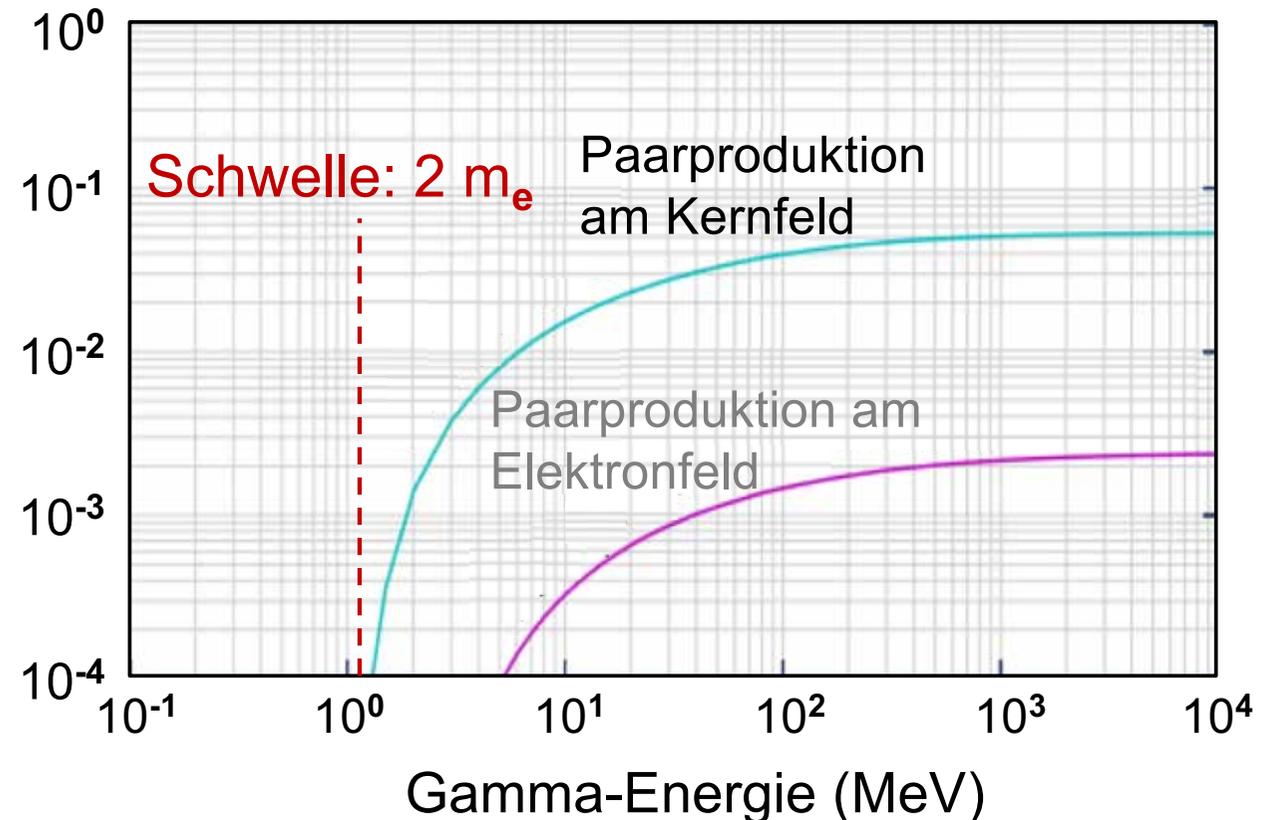
- für **niedrige Energien**:
logarithmisches Anwachsen
- für **hohe Energien**: Grenzwert

$$\sigma_{\text{paar}} \sim \frac{Z^2}{m_e^2} \cdot \left(\frac{7}{9} \cdot \ln \left(\frac{2E_\gamma}{m_e c^2} \right) - \frac{109}{54} \right)$$

- bevorzugt für
hohes Z



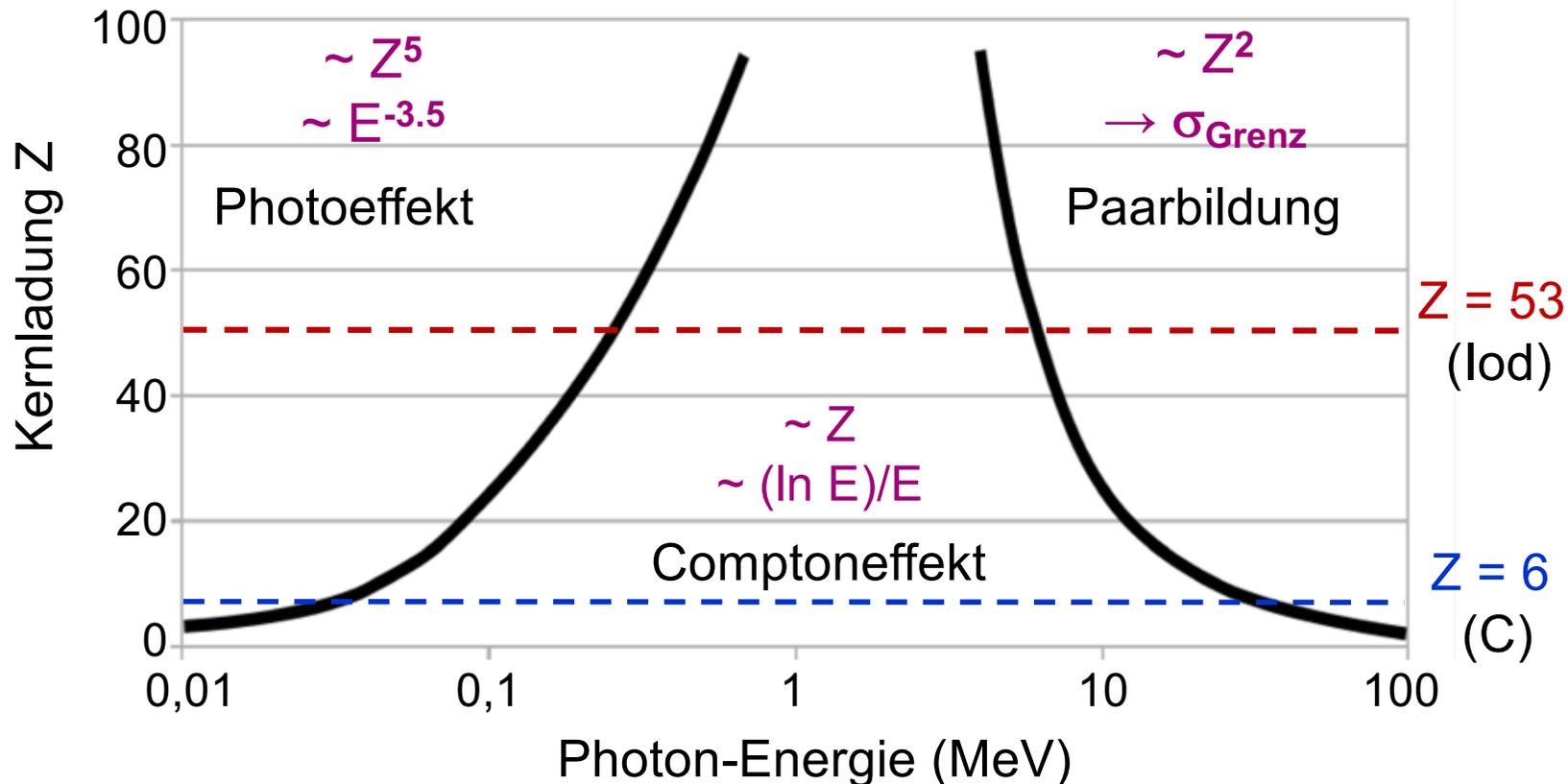
Abschwächkoeffizient
($\text{cm}^2 \text{g}^{-1}$)



Wechselwirkung von Gammas & X-rays

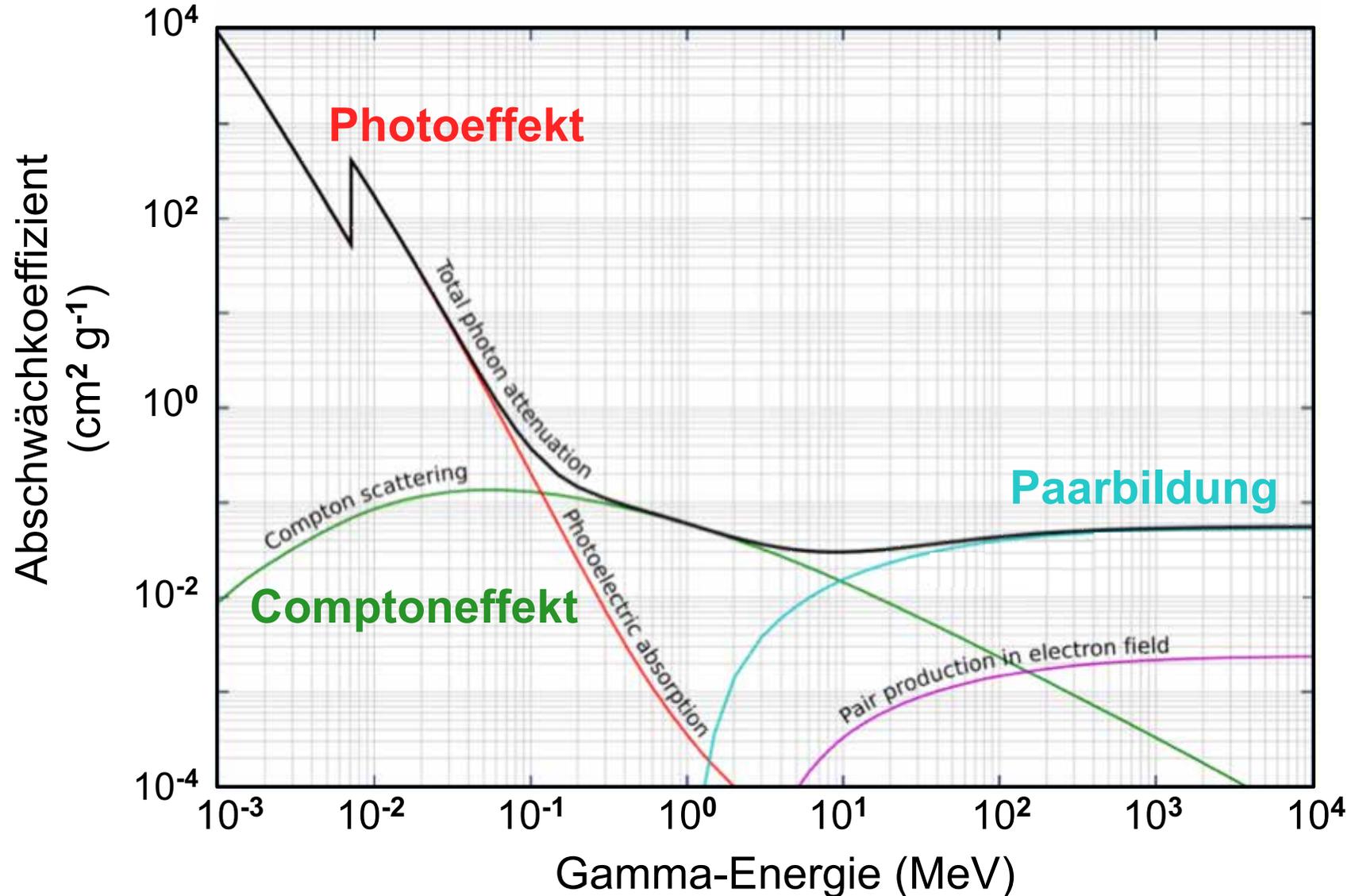
■ die **Wechselwirkung** von γ 's erfolgt über 3 fundamentale Prozesse:

- **Photoeffekt:** kleines E_γ , große Kernladung Z
- **Comptoneffekt:** mittleres E_γ , kleine Kernladung Z
- **Paarbildung:** hohes E_γ , große Kernladung Z



Wechselwirkung von Gammas & X-rays

■ Energieabhängigkeit von Gamma-Wirkungsquerschnitten



d. Wechselwirkung von Quanten, Feynman-Graphen

- Wechselwirkungsprozesse von Quanten (e^- , e^+ , γ) in der Atom-, Kern- & Teilchenphysik werden charakterisiert durch **Feynman-Diagramme**
 - Teilchen (Antiteilchen) propagieren vorwärts (rückwärts) in Zeit

- Propagation von Teilchen: $e^- \longrightarrow$

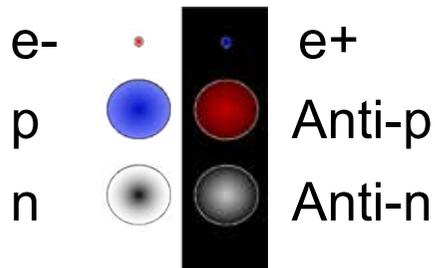


Anti-Teilchen: $\longleftarrow e^+$

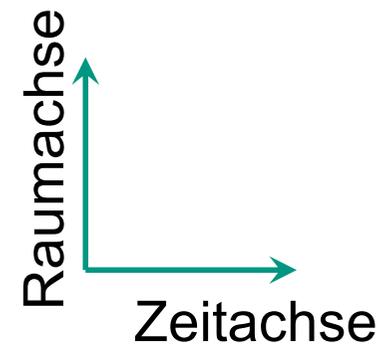
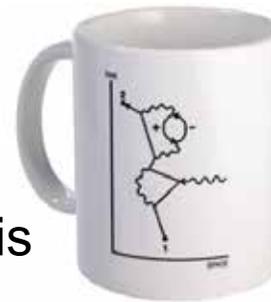
(e^+ : rückwärts in der Zeit laufendes e^-)

e^- , e^+ , ... : gerade Linien (Teilchen/Antiteilchen)

Photonen: Wellen



Nobelpreis
1965

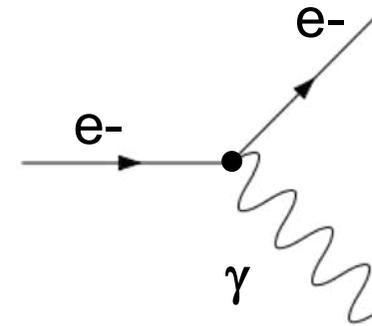


Wechselwirkung von Elektronen & Photonen

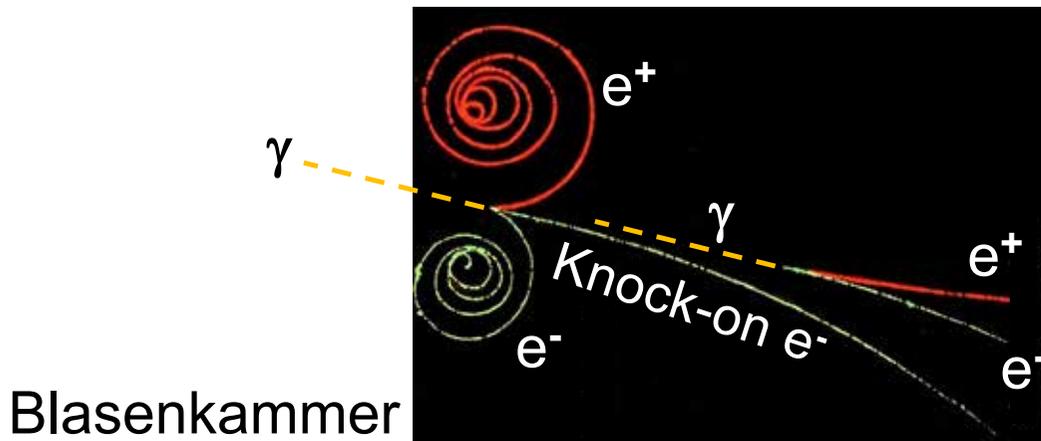
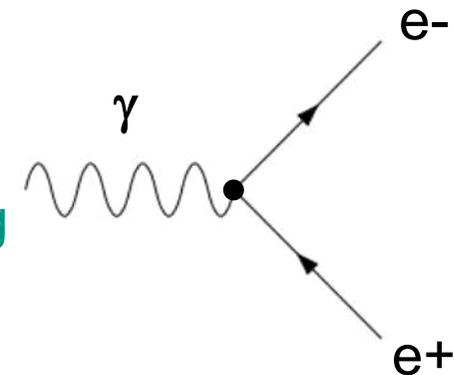
- gute „Visualisierung“ zum Verständnis
 - konkrete Rechenregeln (Störungstheorie) für Wechselwirkungen (Impulse q , ...)

- Erzeugung/Vernichtung von Teilchen an einem **Vertex**: •
- Diagramm zur Paarbildung hier ohne das Coulombfeld des Kerns

Emission
eines
Photons



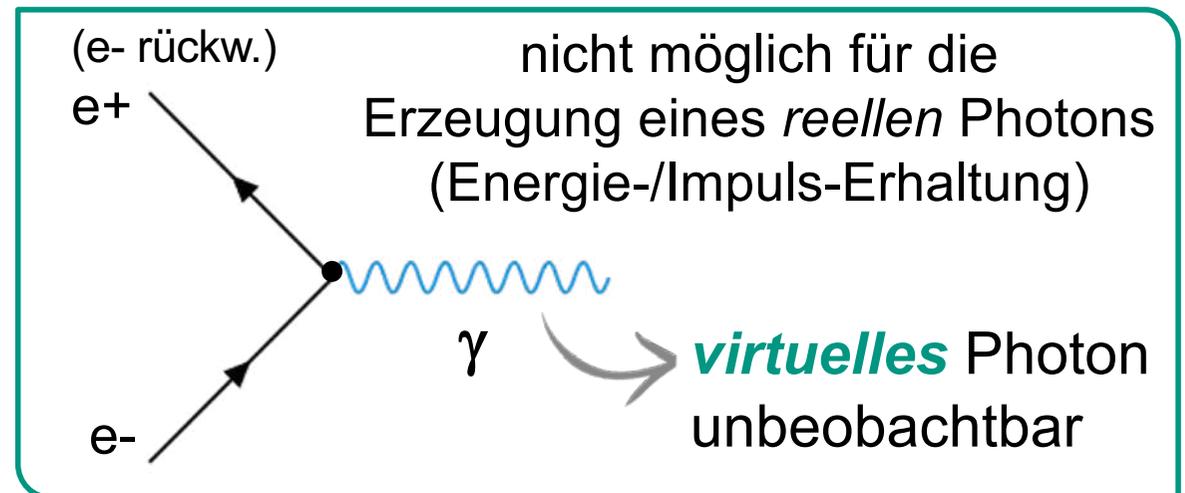
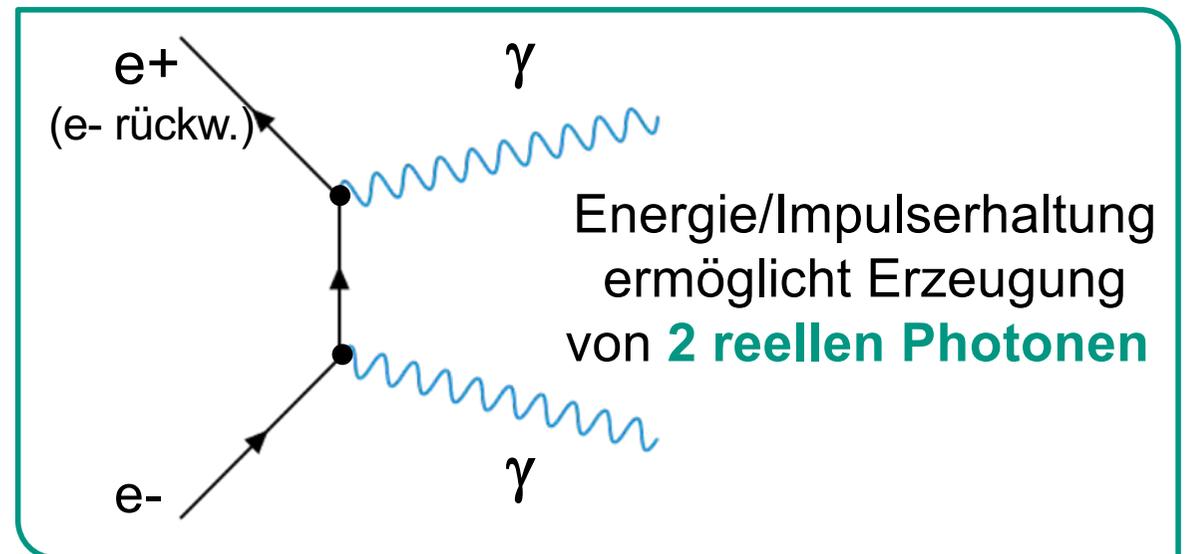
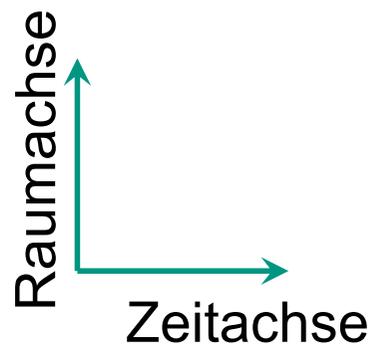
Paar-
bildung



Wechselwirkung von Elektronen & Positronen

■ Beispiel: Annihilation von e^- & e^+ (inverser Prozess zu Paarerzeugung)

- physikalische Prozesse können oft durch **mehrere Feynman-Diagramme** beschrieben werden
- Energie- und Impulserhaltung verbieten Produktion eines einzelnen (reellen) Photons



■ Virtuelle Photonen sind Träger des elektromagnetischen Felds

- Wechselwirkungen vermittelt durch Austausch **virtueller Teilchen**

Photon: Austauschteilchen der **elektromagnetischen Wechselwirkung**

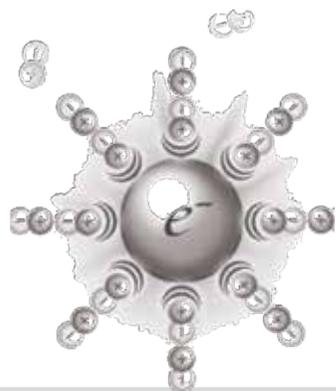
$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

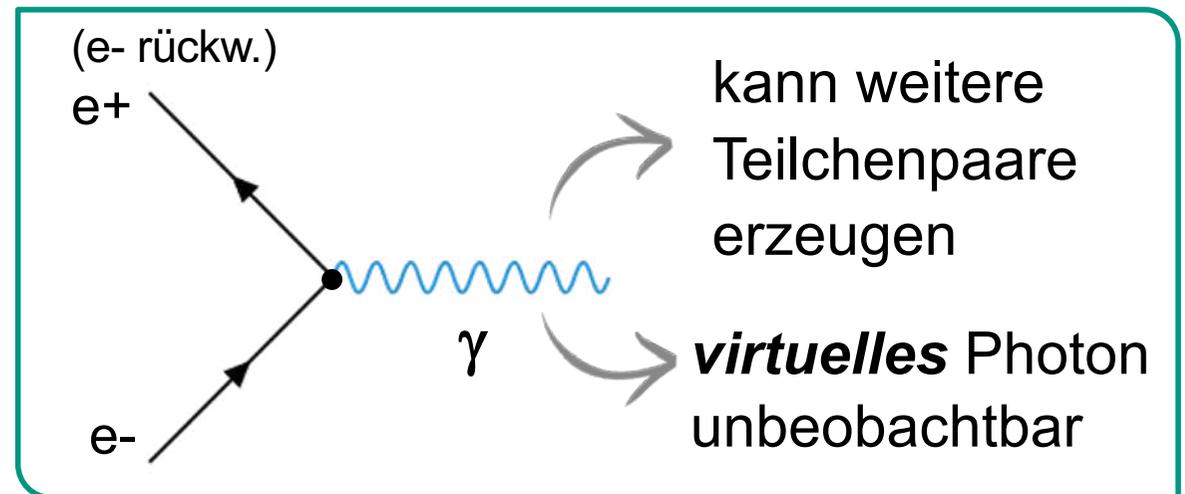


Heisenbergsche Unschärferelation

virtuelle Teilchen - extrem kurze Lebensdauer
- endliche Reichweite



- virtuelle Teilchen
**(Vakuum-
fluktuationen)**
beeinflussen
reelle Teilchen

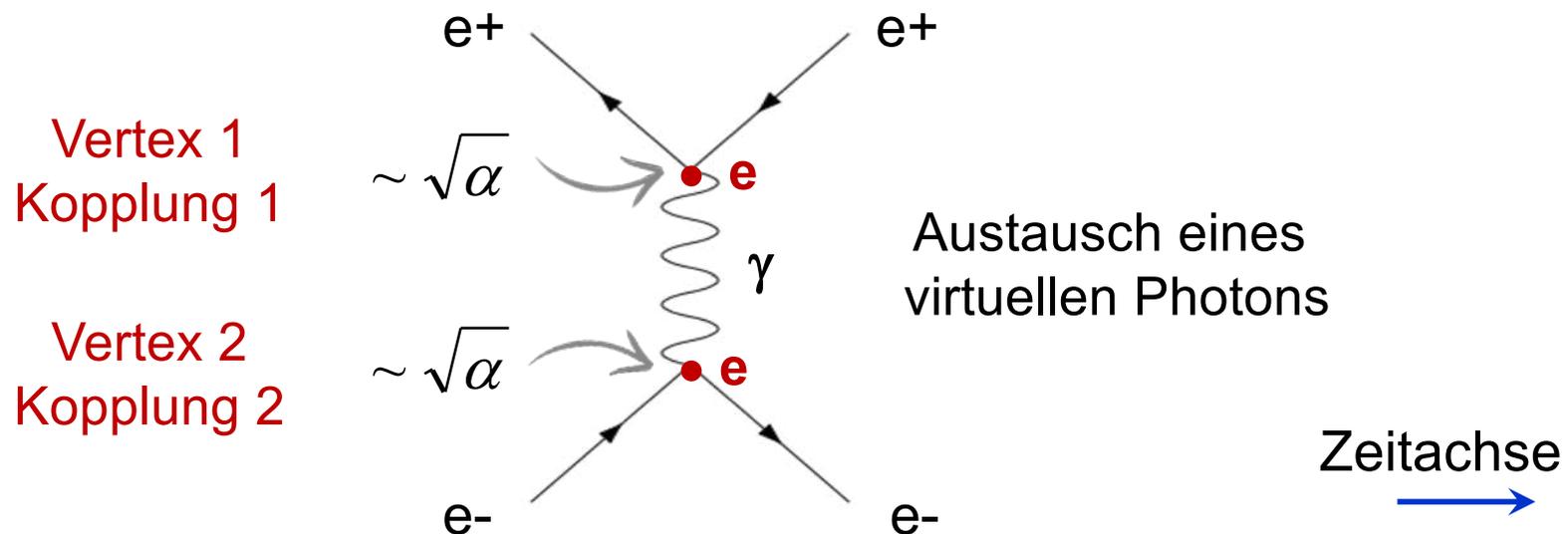


Feynman Diagramme – Grundlagen

- Kopplungsstärke der elektromagnetischen Wechselwirkung - **Feinstrukturkonstante α**

$$\alpha = \frac{e^2}{2\varepsilon_0 \cdot hc} \approx \frac{1}{137}$$

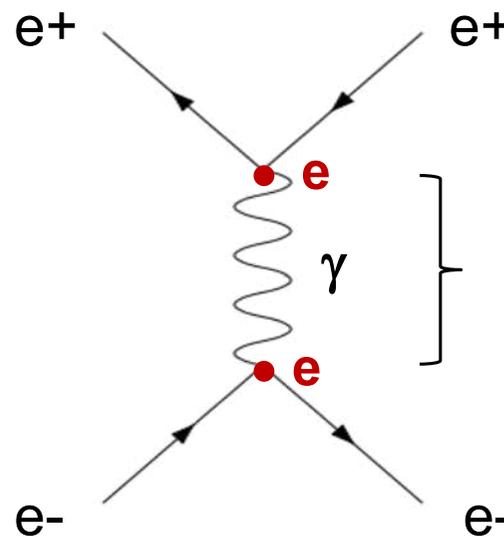
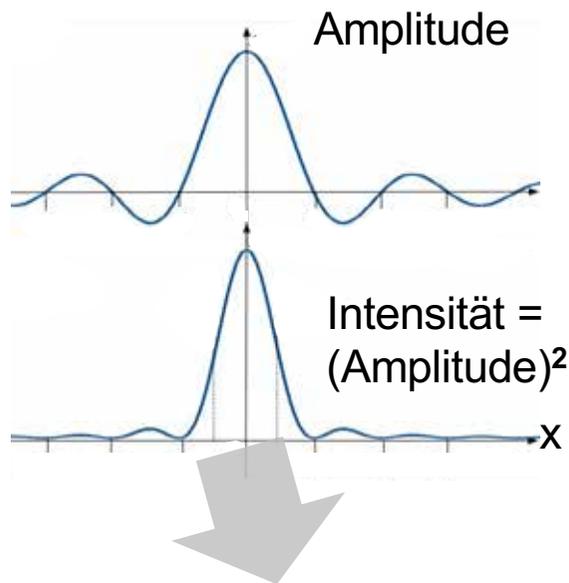
- Beispiel: Elektron-Positron Streuung vermittelt via virtuellem Photon



- **virtuelles Photon koppelt an die elektrische Ladung e ($\sim \sqrt{\alpha}$)**
eines geladenen Teilchens

Feynman Diagramme – Grundlagen

- Beim Streuprozess kommt es durch das virtuelle Photon zu einem **Impulstransfer** (γ überträgt Impuls q)
- **Propagator**: Wahrscheinlichkeitsamplitude, dass virtuelles Photon von Vertex 1 zu Vertex 2 propagiert (bzw. den Impuls q trägt)



masselose
Photonen

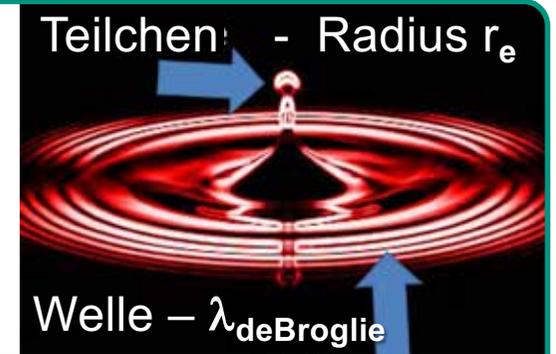
Propagatorterm
(im Impulsraum) $\sim \frac{1}{q^2}$

- Rutherford-Streuung: differentieller Wq.
 $d\sigma/d\Omega \sim |\text{Wahrscheinlichkeitsamplitude}|^2$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \propto \alpha^2 \cdot \frac{1}{q^4}$$

3.2 Elektronen & Materiewellen

- **Alle Teilchen** (Licht, Elektronen, Kerne, Atome, Moleküle, Molekül-Cluster, ...) **besitzen auch Wellencharakter: Teilchen-Welle Dualismus**
 - von grundlegender Bedeutung für Quantenmechanik



■ Teilchen- & Wellen-Eigenschaften von Elektronen

- Definition - **klassischer Elektronenradius r_e** über Kugelkondensator mit $E_{\text{pot}} = m_e \cdot c^2$

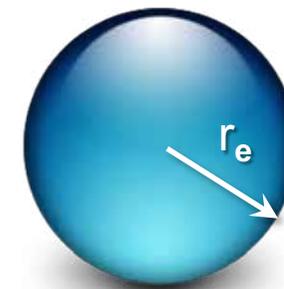
$$r_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{m_e c^2} = 2,8179403227(19) \times 10^{-15} \text{ m}$$

- Streuung von Röntgen-Photonen an Elektronen gibt:

$$\sigma_{\text{tot}} \approx \pi \cdot r_e^2$$

Klassisches Bild:

Ladung $-e$ verteilt über
Volumen V
Fläche A



■ Teilchen-Eigenschaften von Elektronen

- aber: Elektron-Elektron Streuexperimente bei hohen Energien
⇒ **punktförmige, strukturlose Elementarteilchen**: $r < 10^{-19}$ m
d.h. e- hat keine Substruktur messbarer Größe

■ Wellen-Eigenschaften von Elektronen

- Elektron besitzt eine **Compton-Wellenlänge** λ_e :
fundamentale Grenze bei Bestimmung des Teilchenortes

$$\lambda_e = \frac{h}{m_e c} = 2,4263102367(11) \times 10^{-12} \text{ m}$$

= Wellenlänge eines
Photons mit $E_\gamma = m_e \cdot c^2$

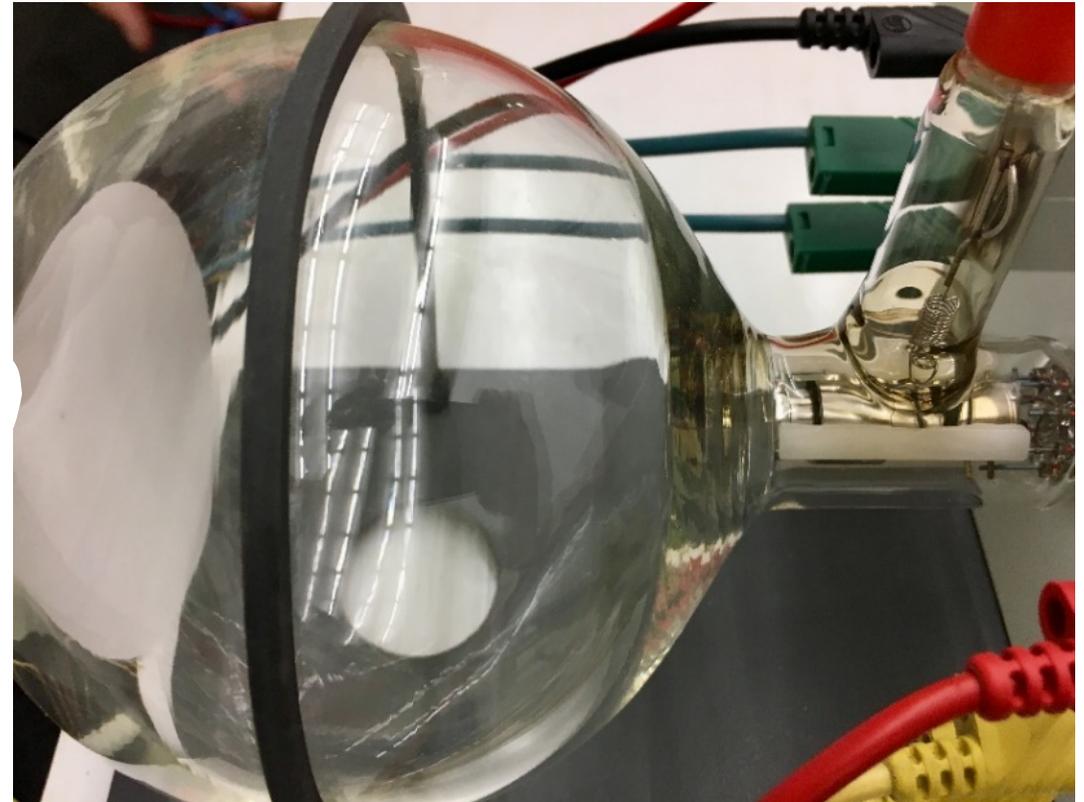
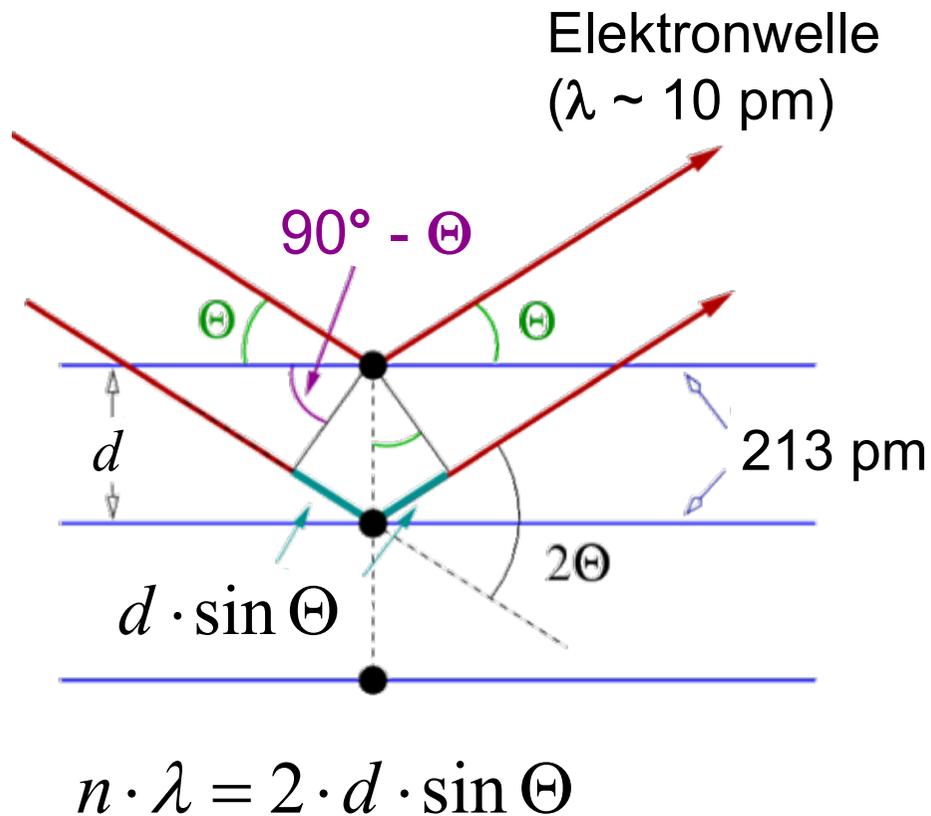
- Relation klassischer Elektronenradius r_e
zur Comptonwellenlänge λ_e :

$$r_e = \alpha \cdot \frac{\lambda_e}{2\pi}$$

Experiment: Elektronen als Materiewellen

■ Beugung schneller Elektronen an polykristalliner Graphitschicht

- mit Anodenspannung nachbeschleunigte 10 keV-Elektronen werden gebeugt an Netzebenen der Graphitfolie ($\lambda_{\text{Elektron}} < d_{\text{Netzebene}}$)

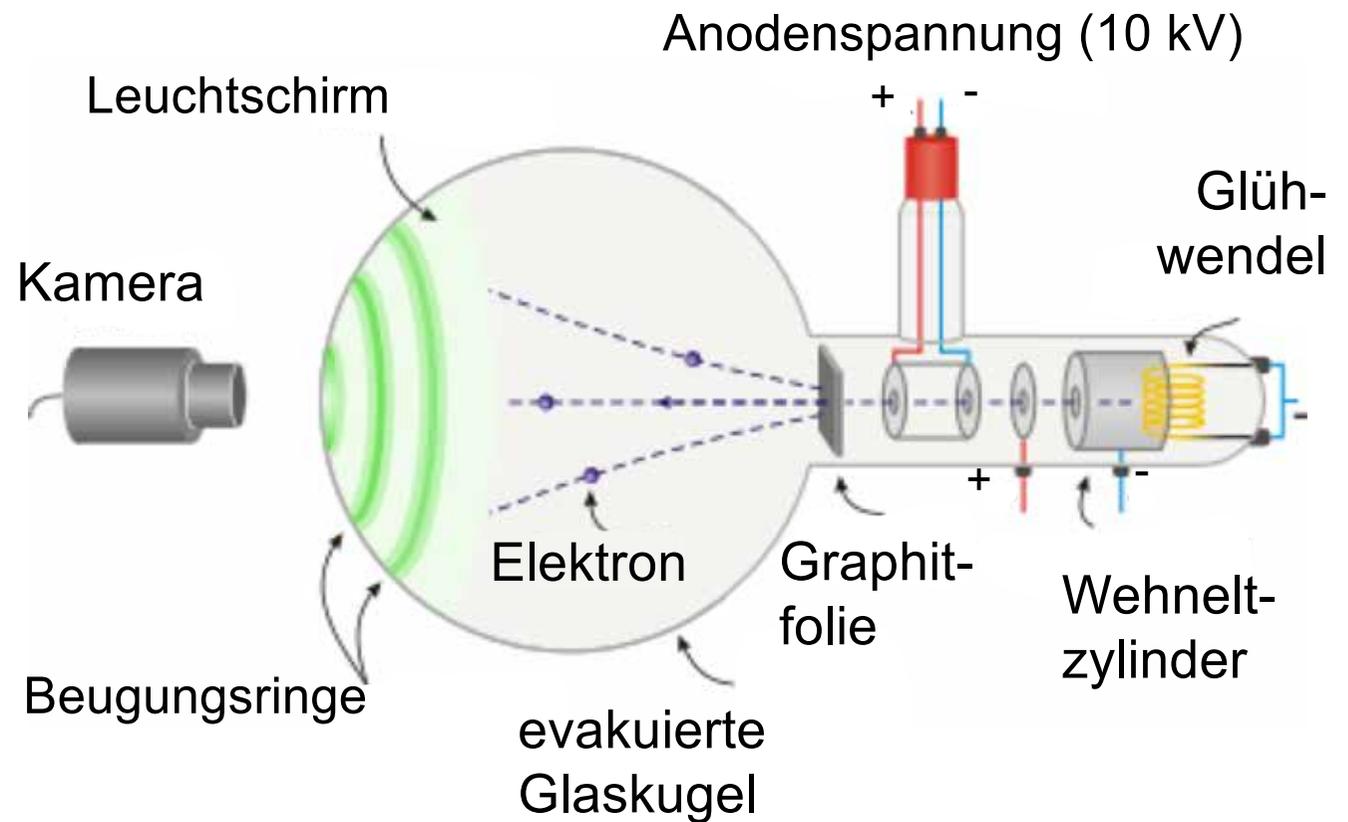
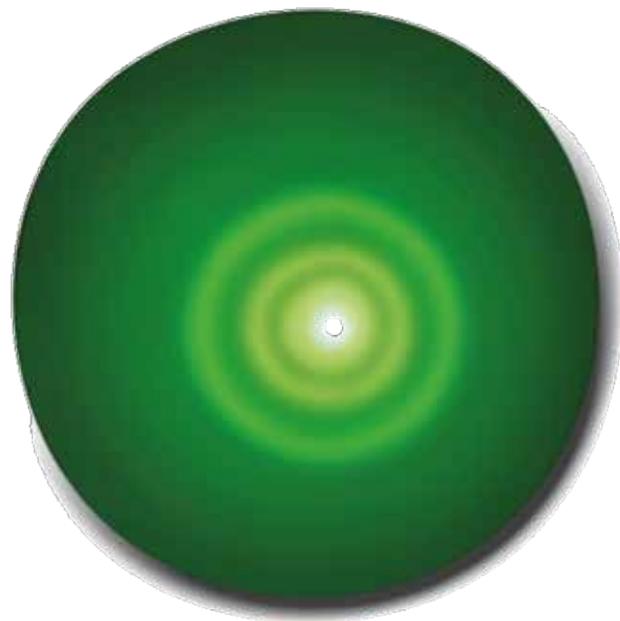


Experiment: Elektronen als Materiewellen

■ Beugung schneller Elektronen an polykristalliner Graphitschicht

- Beobachtung von Interferenzringen der gestreuten Elektronen

→ **Wellencharakter der Elektronen**



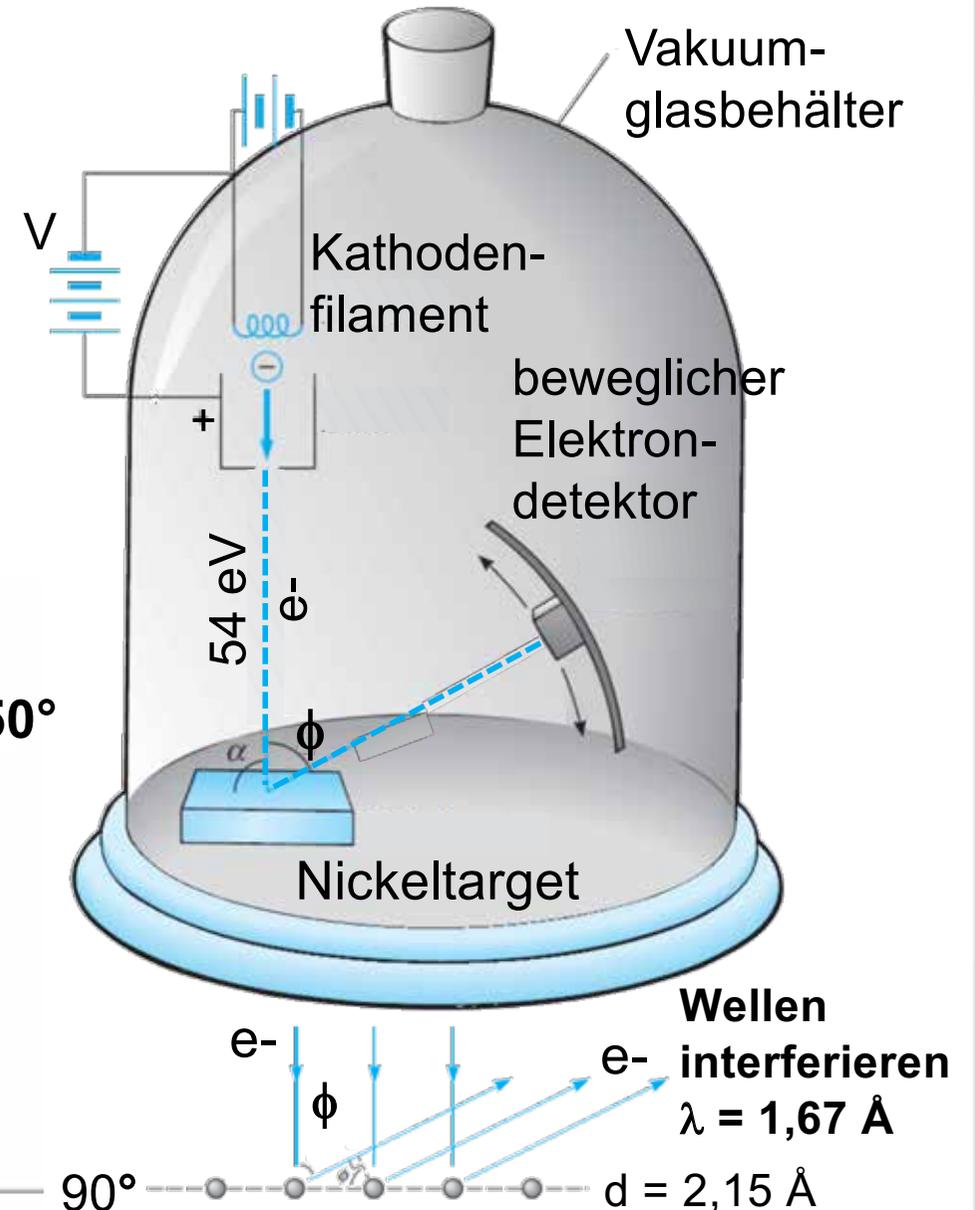
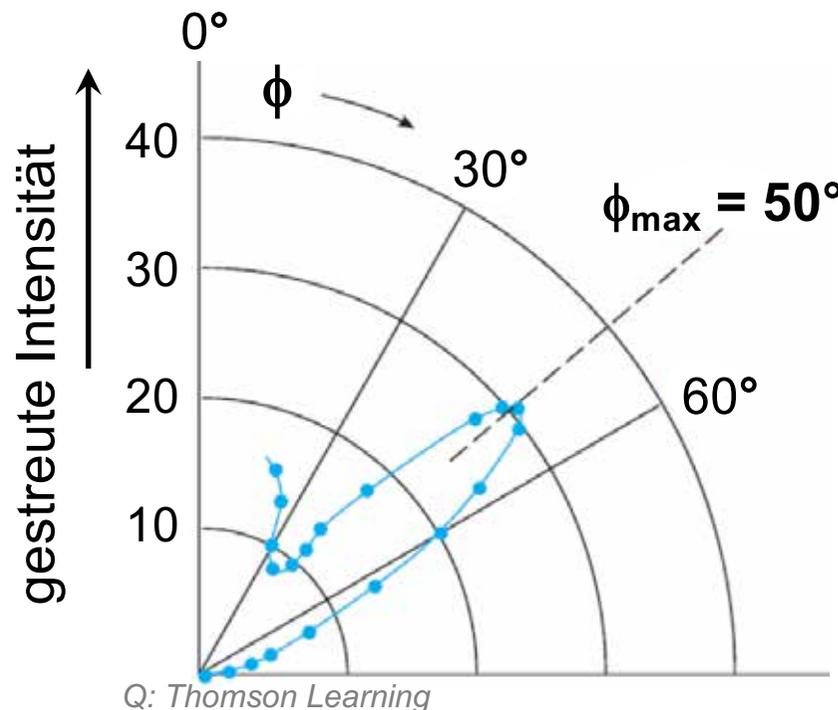
Elektronen als Materiewellen

Wellencharakter von Elektronen

- Messung der Winkelverteilung von elastisch gestreuten Elektronen an einem Ni-Target (**Einkristall**)
- Elektronen zeigen **Interferenz**: Maxima/Minima als Funktion von ϕ



1927:
C. Davisson &
L.H. Germer

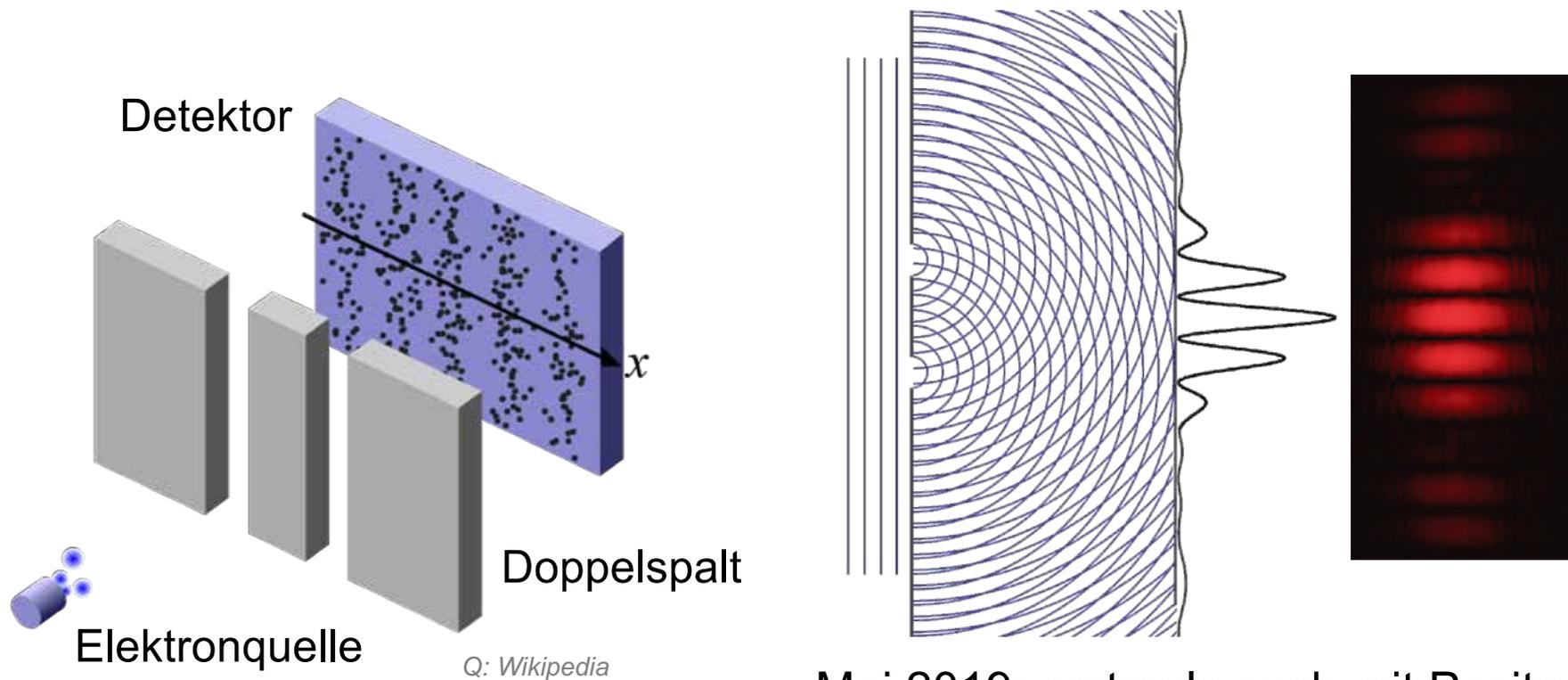


Elektronen als Materiewellen

■ Doppelspalt-Experiment mit Elektronen

1961: Nachweis der Interferenz von Elektronen an einem Doppelspalt durch C. Jönsson (analog zu Licht, Thomas Young 1802/03)

- Bedingung für destruktive Interferenz von e^- :



Mai 2019: erstmals auch mit Positronen!

■ Doppelspalt-Experiment mit Elektronen

1961: Nachweis der Interferenz von Elektronen an einem Doppelspalt durch C. Jönsson (analog zu Licht, Thomas Young 1802/03)

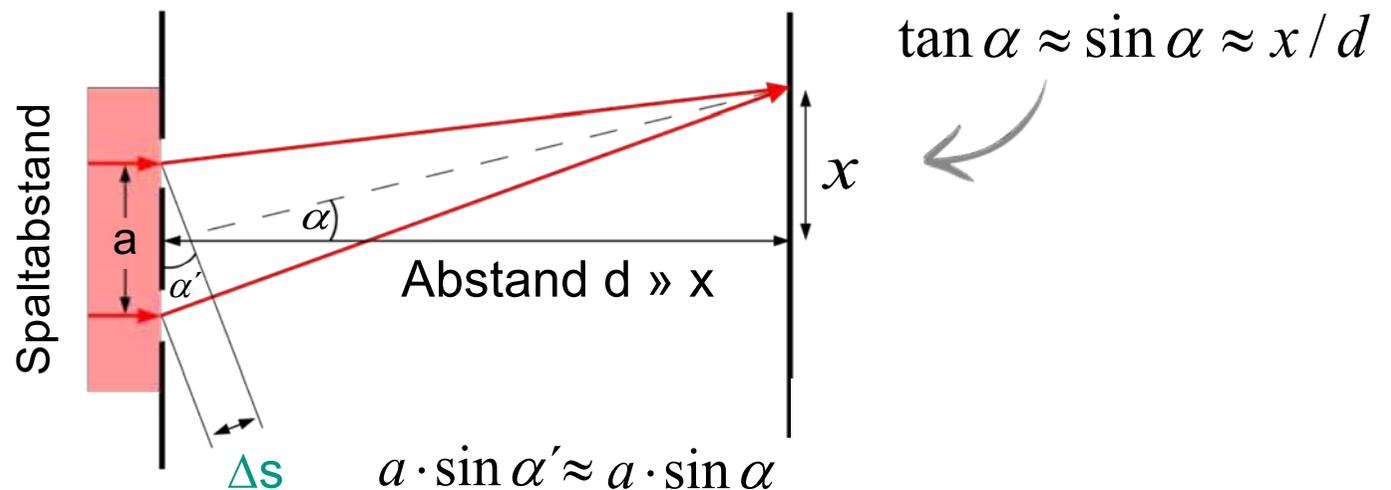
- Bedingung für **destruktive Interferenz** von e- :

Gangunterschied $\Delta s =$ $\Delta s = \frac{x}{d} \cdot a = \pm n \cdot \frac{\lambda}{2}$

Geometrie

für kleine α :

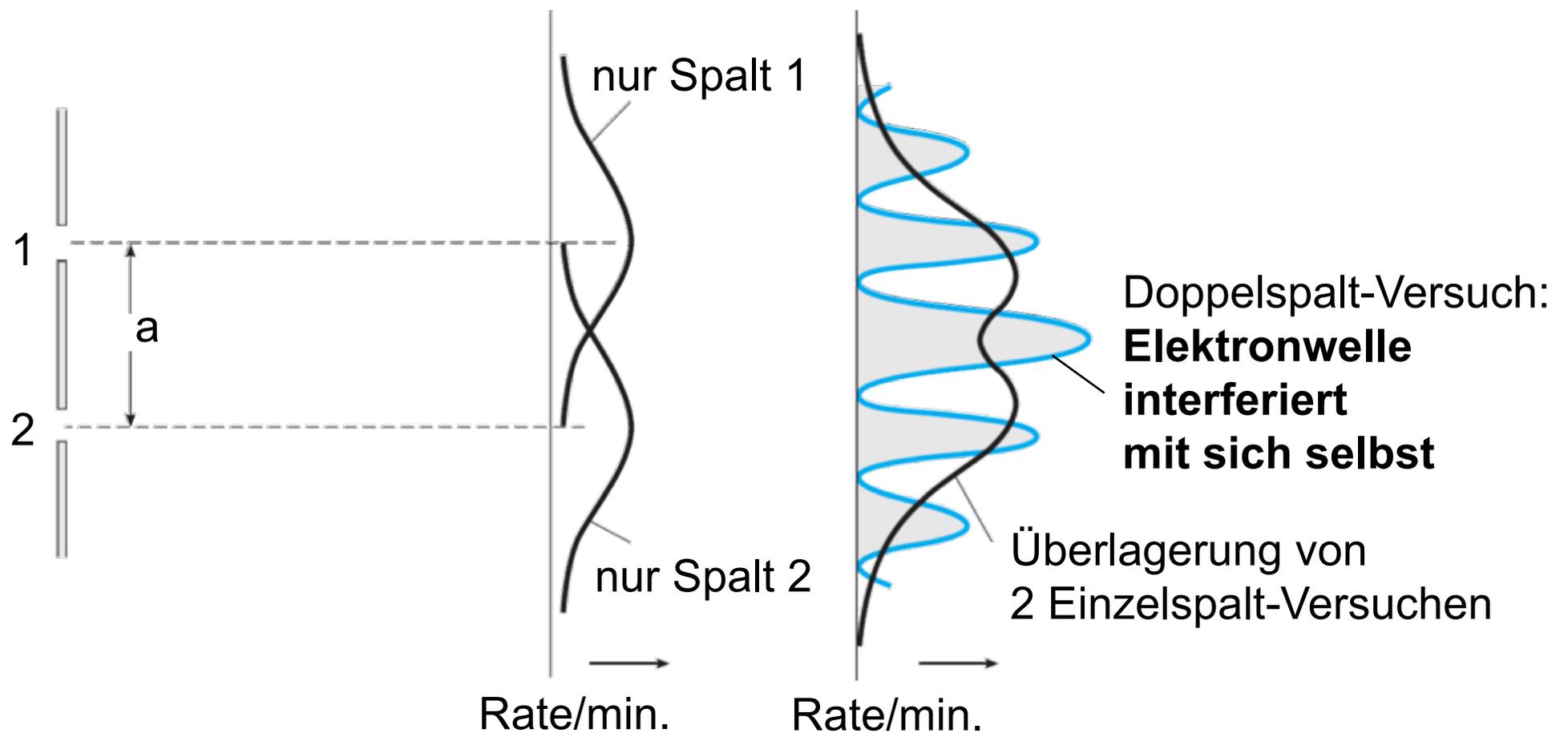
$$\frac{\Delta s}{a} = \frac{x}{d}$$



Q: Wikipedia

■ Doppelspalt-Experiment mit Elektronen

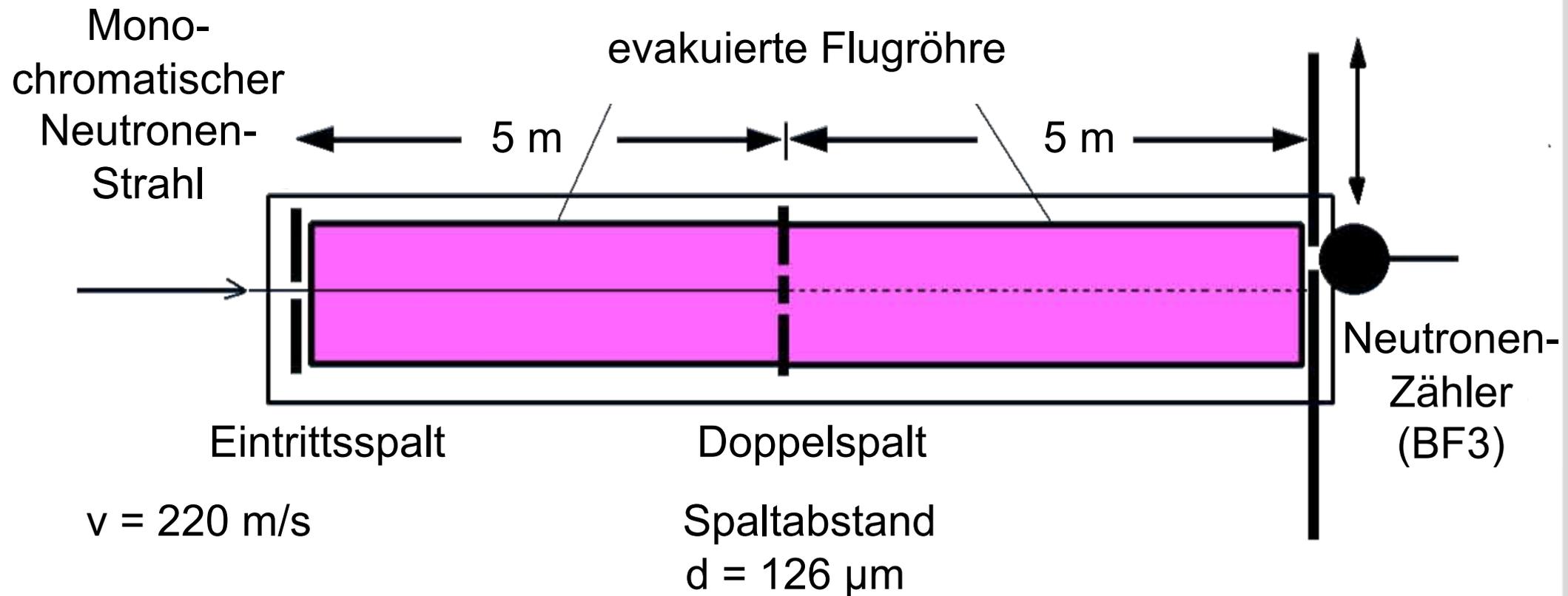
- Interferenz von Elektronen tritt nur auf, wenn beide Spalte offen sind
- Interferenz auch bei geringer Intensität (nur 1 e- pro Zeiteinheit)



Q: Thomson Learning

Neutronen als Materiewellen

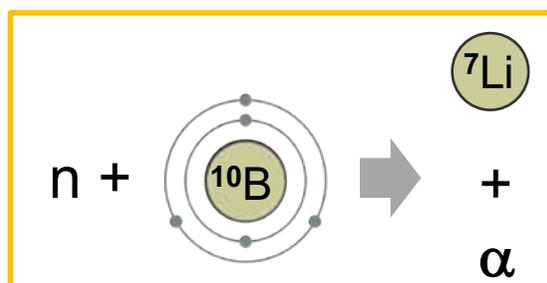
- **Doppelspalt-Experiment** mit Neutronen (Anton Zeilinger et al., 1981)
 - Nachweis der **Wellennatur von Neutronen**
 - Experiment mit kalten Neutronen ($v = 220 \text{ m/s}$, $\lambda_{\text{de Broglie}} = 2 \text{ nm}$)



■ **Doppelspalt-Experiment** mit Neutronen (Anton Zeilinger et al., 1981)

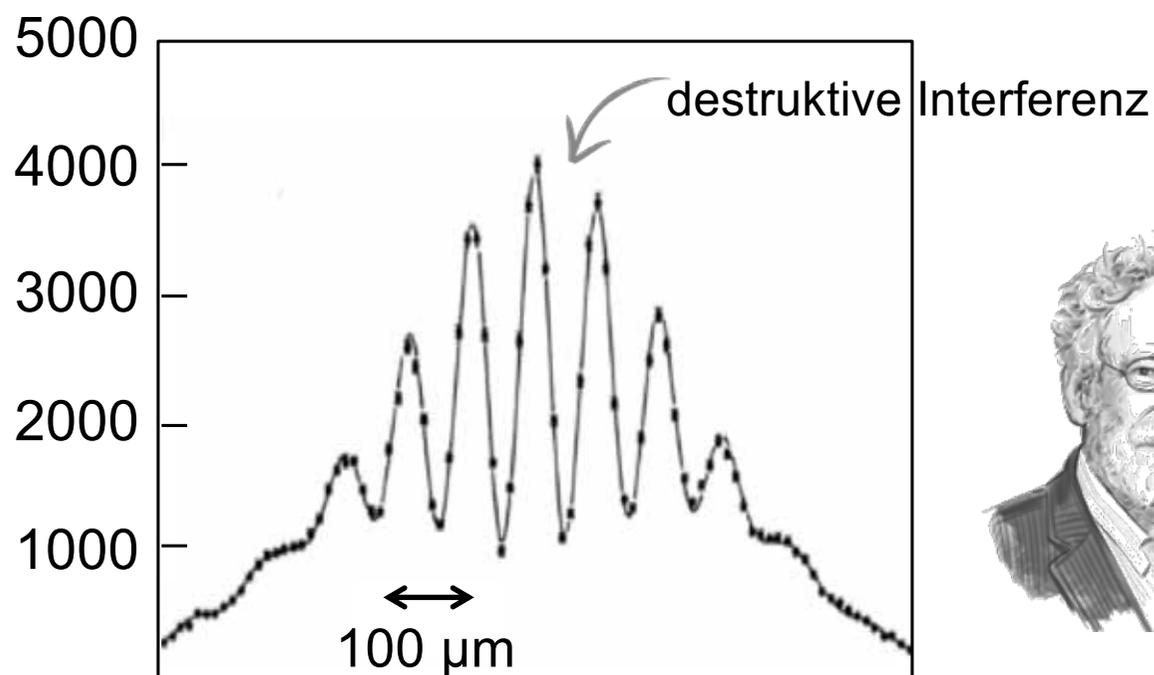
- Nachweis der **Wellennatur von Neutronen**
- Experiment mit kalten Neutronen ($v = 200 \text{ m/s}$, $\lambda_{\text{de Broglie}} = 2 \text{ nm}$)

Nachweis von
thermischen
Neutronen:



Bor-Trifluorid-Proportionalrohr

Intensität (Neutronen
/125 min.)



Position des Mess-Spalts



A. Zeilinger

Materiewellen – de Broglie

- Dissertation von Louis de Broglie (*Recherches sur la théorie des quanta*)
1924 an der Sorbonne, Paris:

- alle Teilchen (Elektronen, Atome,...) besitzen Wellencharakter
mit einer charakteristischen **de Broglie-Wellenlänge λ**

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

h: Planck'sches Wirkungsquantum

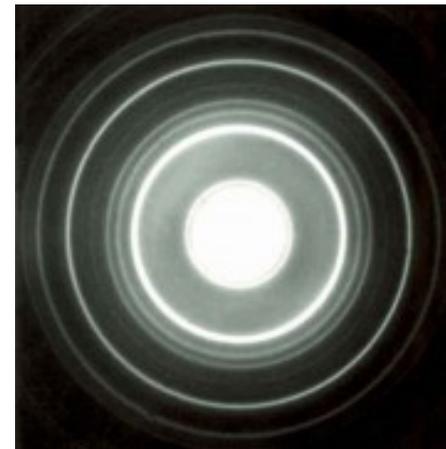
p: **relativistischer Impuls** des Teilchens ($p = \gamma \cdot m \cdot v$)



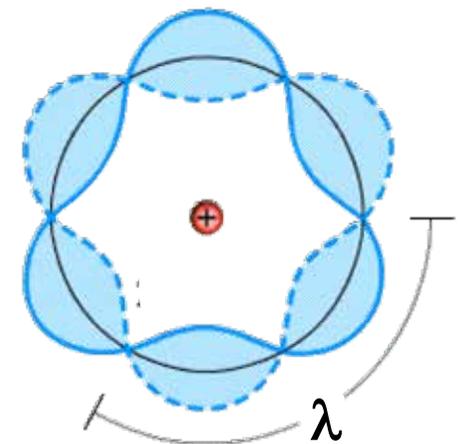
Louis
de Broglie



Nobelpreis 1929



Experiment

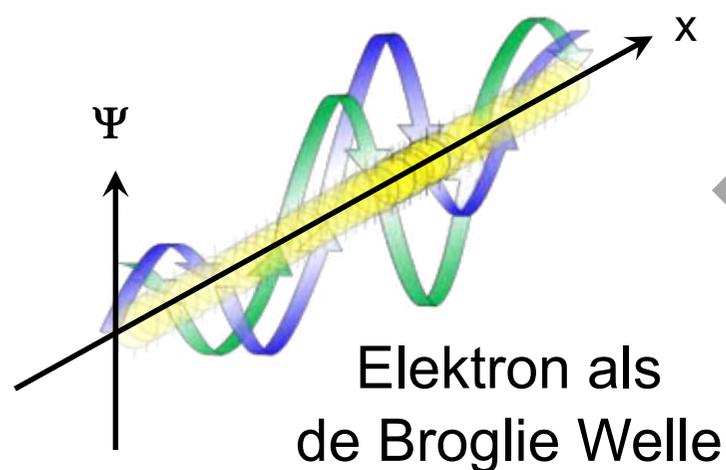


⇒ neues Atom-Modell

- de Broglie Wellenlänge des Proben Teilchens (e,p) sollte der Größe des zu untersuchenden Objekts (Atom, Kern, Nukleon) entsprechen!
 - Beispiel der Größe der de Broglie λ für verschiedene Elektronen-Energien vgl. mit H-Atom ($R_H = 53 \text{ pm}$) bzw. Proton ($R_P = 0,8 \text{ fm}$)

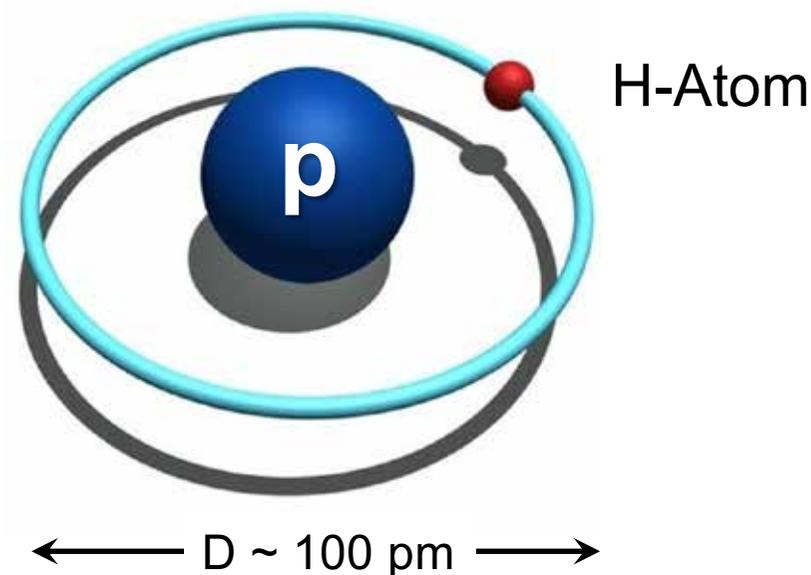
charakteristische de Broglie Wellenlänge λ

E_{kin} (eV)	10	100	10^3	10^4	10^5
λ (pm)	390	120	39	12	3,7



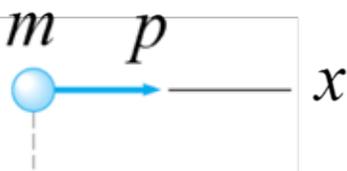
Elektron als de Broglie Welle

$$\lambda_{\text{de Broglie}} \leq R_{\text{Objekt}}$$

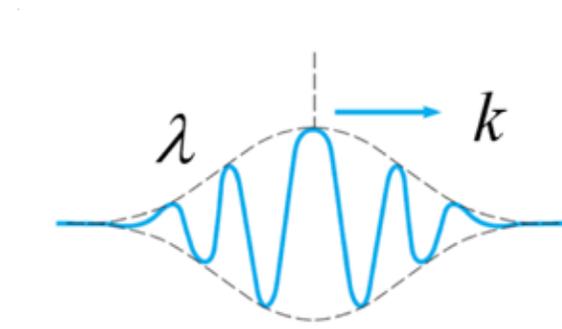


- Materiewelle muss als **Wahrscheinlichkeitsamplitude** interpretiert werden !

**Klass.
Teilchen**



**Klass.
Welle**



- **Beziehungen für Materie und Licht**

Materie	Licht
$E = m \cdot c^2$	$E = h \cdot \nu = \frac{h \cdot c}{\lambda}$
$E = \hbar \cdot \omega$	
$p = \hbar \cdot k$	$p = \frac{E}{c} = \frac{h}{\lambda}$

Dirac-
Konstante

$$\hbar = h / 2\pi$$

Kreisfrequenz

$$\omega = 2\pi \cdot \nu$$

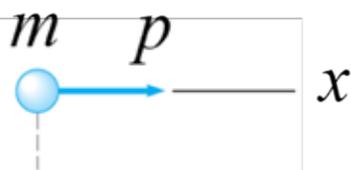
Wellenzahl

$$k = 2\pi / \lambda$$

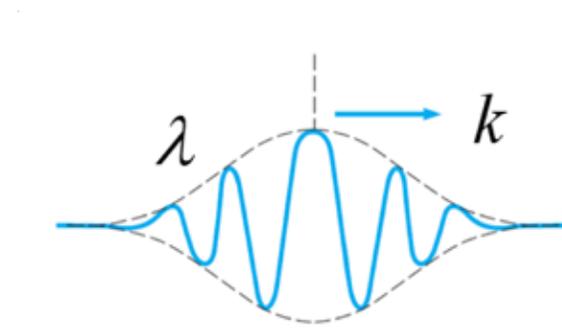
Q: Thomson Learning

- Materiewelle muss als **Wahrscheinlichkeitsamplitude** interpretiert werden !

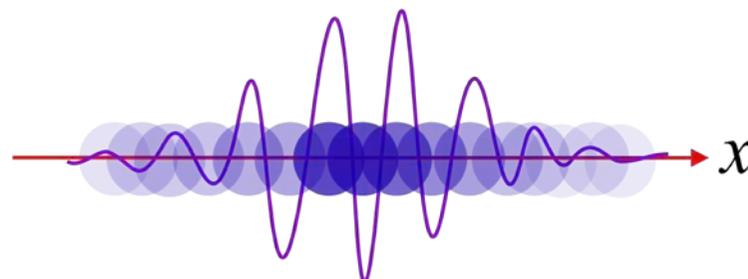
**Klass.
Teilchen**



**Klass.
Welle**



**punktförmiges Teilchen
mit Wellenfunktion $\Psi(x)$**



$$\vec{p} = \hbar \cdot \vec{k}$$

Impuls &
Wellenzahlvektor

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

$$E = \hbar \cdot \omega \quad \nu = \frac{E}{h}$$

Energie &
Kreisfrequenz

■ Elektronen in Atomorbitalen besitzen Wellencharakter

- Elektronwellen in einem Orbital interferieren
- konstruktive Interferenz nur für **stehende Welle** mit

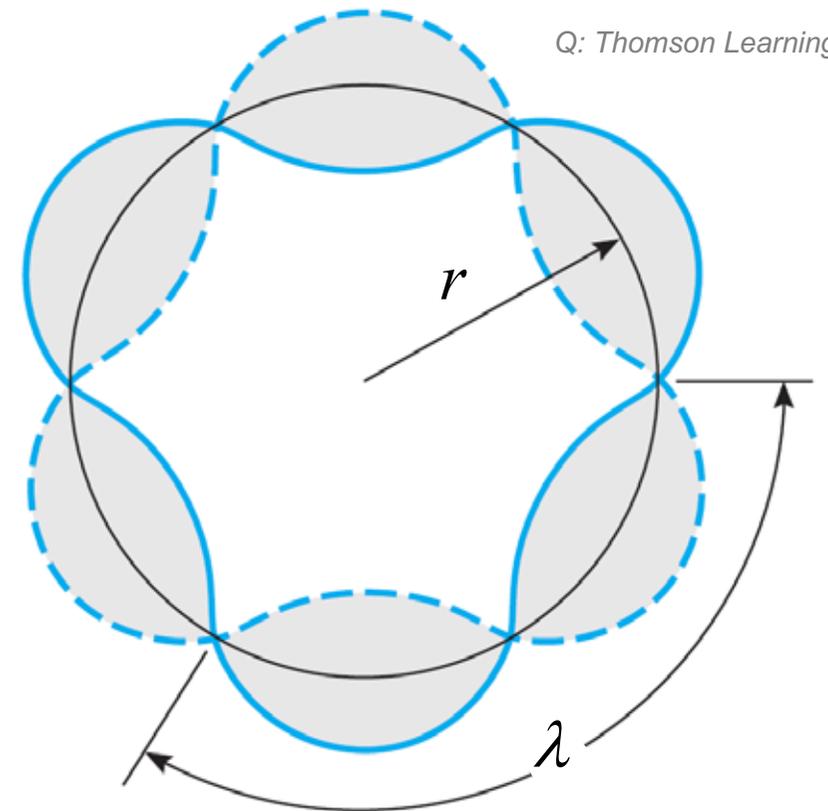
$$n \cdot \lambda = 2\pi \cdot r$$

- mit de Broglie-Gleichung

$$\lambda = \frac{h}{m_e \cdot v}$$

$$n \cdot \frac{h}{m_e \cdot v} = 2\pi \cdot r$$

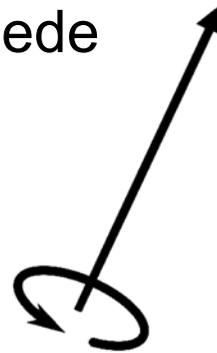
$$n \cdot \hbar = m_e \cdot v \cdot r$$



stehende Elektronwelle in einem
kreisförmigen Atom-Orbital mit $n = 3$

■ Quantisierung des Drehimpulses in der Quantenphysik

- **klassisch:** Drehimpuls kann jede Größe annehmen

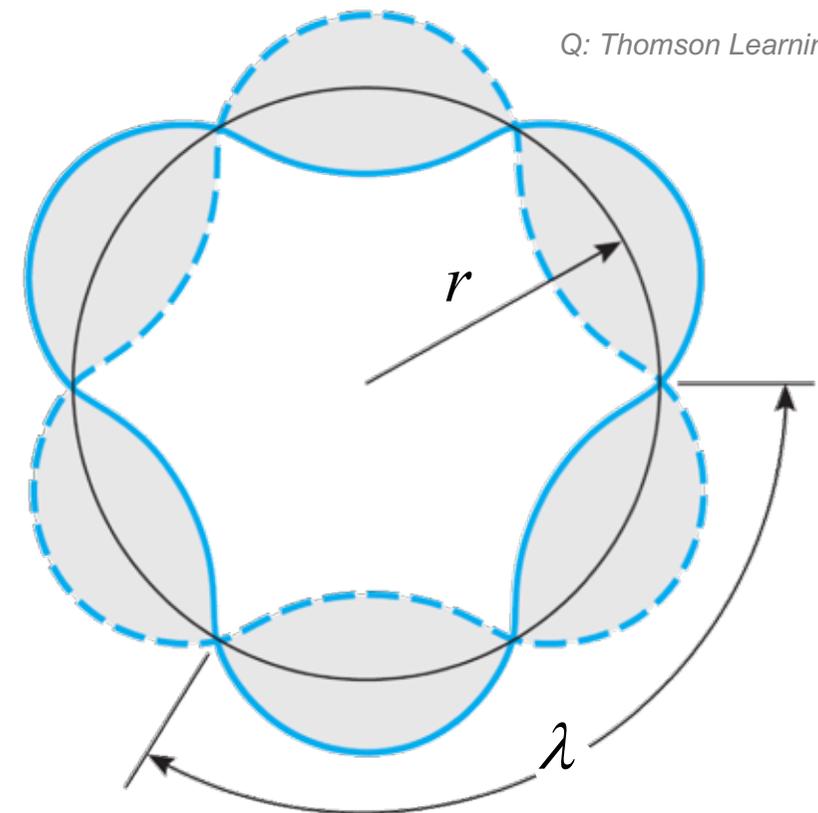


■ Quantisierung des Bahn-Drehimpulses L von Elektronen:

$$L = m_e \cdot v_e \cdot r = n \cdot \hbar$$

- der Drehimpuls des Grundzustands muss über quantenmechanische Methoden bestimmt werden

⇒ **Bild einer „Bahn einer Elektronwelle“ ist noch immer zu einfach!**



Exkurs in die Physik der Wellen

EM Wellen im Vakuum

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi(\vec{r}, t) = c^2 \cdot \Delta \psi(\vec{r}, t)$$

EM Wellengleichung, ergibt sich aus den Maxwellgleichungen

Allgemeine Lösung

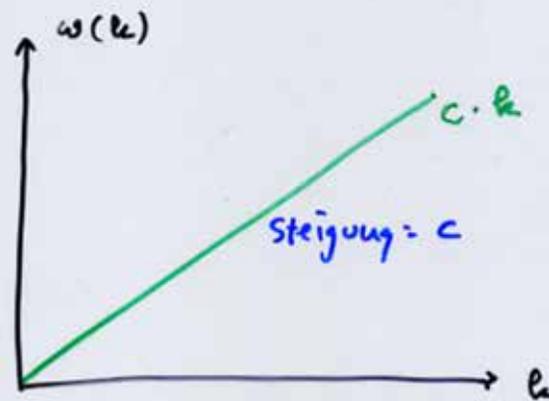
$$\psi(\vec{r}, t) = \int d^3k \, a(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$$

$$\Rightarrow \underline{\omega^2 = c^2 k^2}$$

$$\boxed{\omega = c \cdot k}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Dispersionsgleichung für
EM Wellen im Vakuum



Materie als Welle

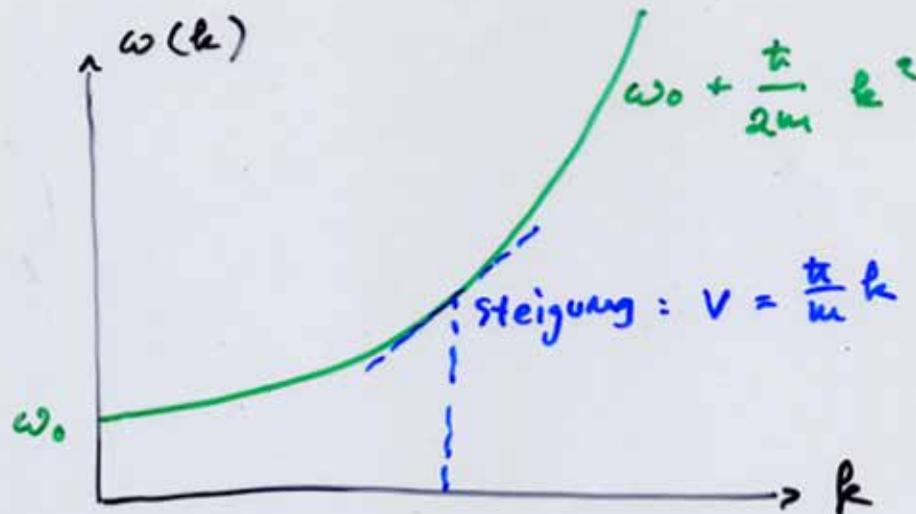
de Broglie : $\lambda = \frac{h}{m \cdot v}$ Für Materiestückchen

$$\hat{=} v = \frac{h}{m} \cdot \frac{1}{\lambda} = \frac{h}{m} \cdot k$$

= Gruppengeschwindigkeit $\frac{d\omega}{dk}$

$$\Rightarrow \omega(k) = \omega_0 + \frac{h}{2m} k^2$$

Dispersionsgleichung für Materiewellen



Materiewellen im Vakuum

a] Allgemeiner Ansatz:

$$\psi(\vec{r}, t) = \int d^3k \cdot a(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$$

$$\downarrow \Delta \psi = i \int d^3k k^2 a(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -i \int d^3k \omega(\vec{k}) \cdot a(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$$

$$= -i \frac{\hbar}{2m} \int d^3k k^2 a(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$$

$$= i \frac{\hbar}{2m} \Delta \psi$$

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi$$

Wellengleichung für freie
Materie (im Vakuum)

Schrodingergleichung

b] Relativistische Betrachtung

de Broglie $\lambda = \frac{h}{p}$

Energie: $E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4$

\uparrow \uparrow
(kin. Energie) (Ruheenergie)²

$$= \hbar^2 \omega^2$$

$$\lambda^2 = \left(\frac{2\pi}{k} \right)^2$$
$$= \frac{h^2}{p^2} = \frac{h^2}{\frac{E^2}{c^2} - m_0^2 c^2}$$

$$\Rightarrow \hbar^2 k^2 = \frac{\hbar^2 \omega^2}{c^2} - m_0^2 c^2$$

$$\Rightarrow \frac{\omega^2}{c^2} = k^2 + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2}$$

$$\Rightarrow \omega(k) = c \cdot \sqrt{\frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} + k^2}$$

Dispersionsrelation für Materiewellen (relativistisch korrekt)

c) Sonderfälle

1. $k < \frac{m_0 c}{\hbar}$ ($v \ll c$) nicht rel.

$$\omega(k) = c \sqrt{\frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} + k^2}$$

$$= c \cdot \frac{m_0 c}{\hbar} \sqrt{1 + \frac{k^2}{\frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2}}}$$

$\rightarrow \Rightarrow 0$

für $v \ll c$

$$\omega(k) \approx c \cdot \frac{m_0 c}{\hbar} + \frac{1}{2} \cdot \frac{c k^2}{\frac{m_0 c}{\hbar}}$$

(Taylor)

$$\omega(k) = \omega_0 + \frac{\hbar}{2m_0} k^2 \Rightarrow \text{Schwödinger-} \\ \text{gl.}$$

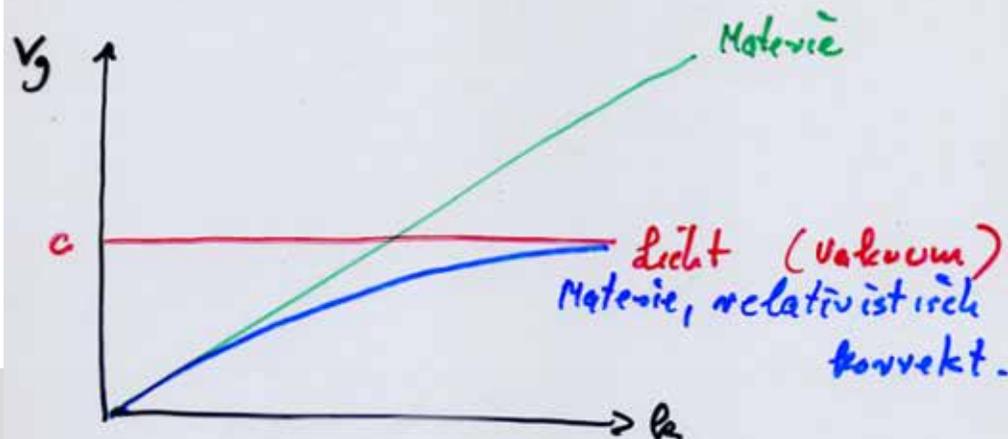
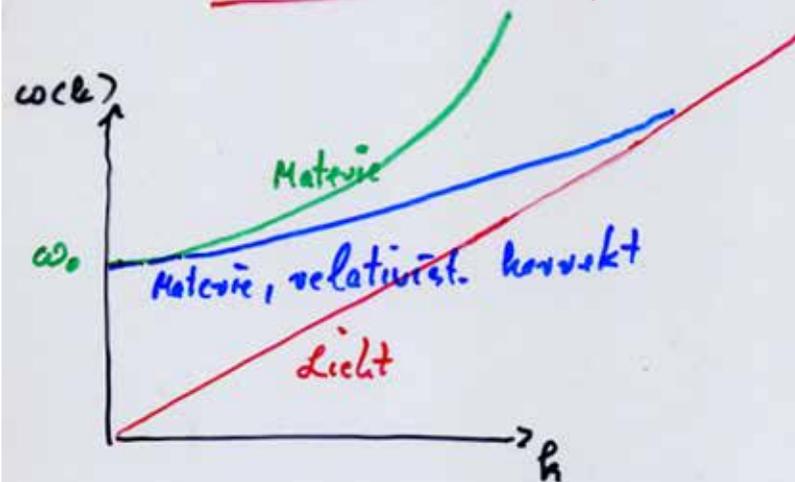
$$v = \frac{d\omega}{dk} = \frac{\hbar k}{m}$$

2. $\hbar k \gg \frac{m_0 c}{\hbar}$ ($v \rightarrow c$) hoch rel.

$$\omega(k) = c \sqrt{\frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} + k^2} \approx c \cdot k$$

\Rightarrow EM Wellengleichung

$$v = \frac{d\omega}{dk} = c$$



Wellengleichung für relativistische Materieteilchen: Klein-Gordongleichung

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta + \left(\frac{m_0 c}{\hbar} \right)^2 \right) \psi(\vec{r}, t) = 0$$

□
'Quadrat'

Test: Setze $\psi(\vec{r}, t) = \int d^3k a(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$

$$\Rightarrow \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 = k^2 + \left(\frac{m_0 c}{\hbar} \right)^2$$

$$\Rightarrow \omega(\vec{k}) = c \sqrt{\left(\frac{m_0 c}{\hbar} \right)^2 + k^2} \quad \checkmark$$

Interpretation von $\psi(x,t)$

Saite: $\psi \hat{=} \text{Auslenkung in } z$

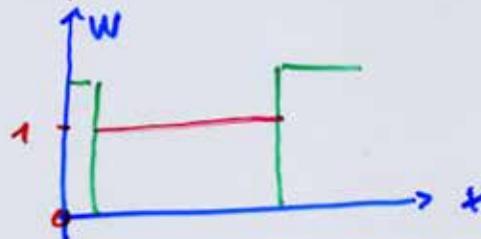
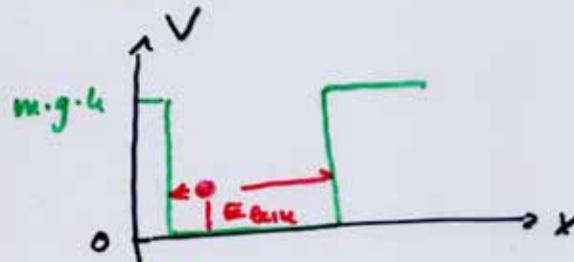
EM Welle: $\psi \hat{=} \text{Feldstärke}$

Schallwelle: $\psi \hat{=} \text{Druck}$

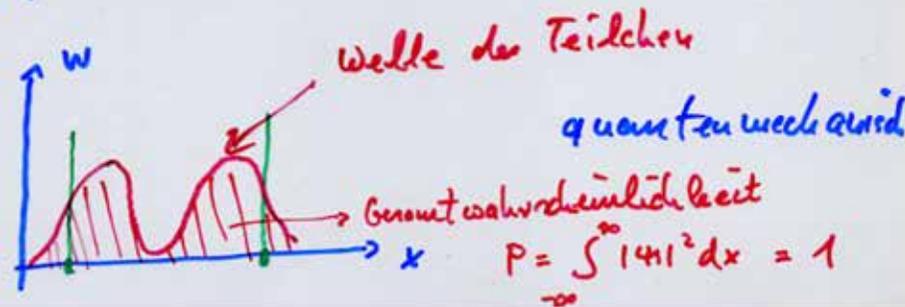
Materie: $\psi \hat{=} \text{Amplitude der Aufenthaltswahrscheinlichkeit}$

$$W = |\psi|^2 \quad \text{Wahrscheinlichkeitsdichte}$$

Illustration: Kastenpotenzial



klassisch



$$P = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dx = 1$$



"IF THIS IS CORRECT, THEN EVERYTHING WE THOUGHT WAS A WAVE 'IS REALLY A PARTICLE, AND EVERYTHING WE THOUGHT WAS A PARTICLE' IS REALLY A WAVE."

Copyright © 2024 by Sidney Harris
„No reproduction other than for personal enjoyment without [written permission](http://www.sciencecartoonsplus.com/pages/gallery.php)."
<http://www.sciencecartoonsplus.com/pages/gallery.php>