

Atome, Moleküle & Kerne

Sommersemester 2024
Vorlesung # 7, 06.05.24

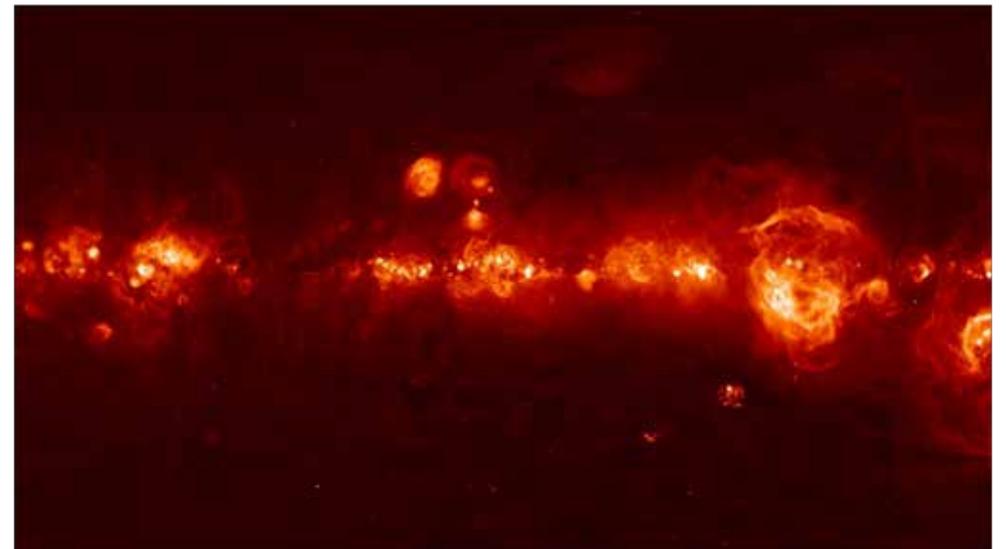


Thomas Müller, Institut für Experimentelle Teilchenphysik, Fakultät für Physik

- 3.2 Elektronen & Materiewellen
- 3.3 Atominterferometer

4. Bohrsches Atommodell

- 4.1 Spektroskopie
- 4.2 Bohrsche Postulate
- 4.3 Anregung durch Stöße



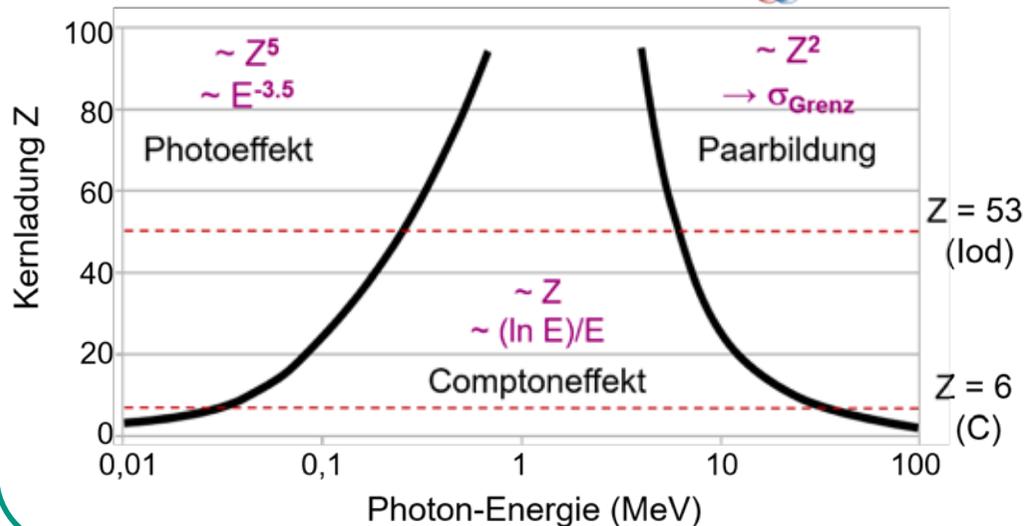
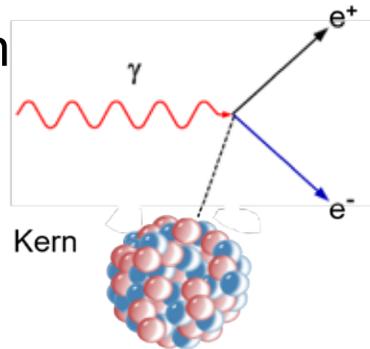
Wh.: Photonen und Feynmann-Diagramme

■ Wechselwirkung von reellen und virtuellen Photonen

■ Paarbildung und Wirkungsquerschnitte

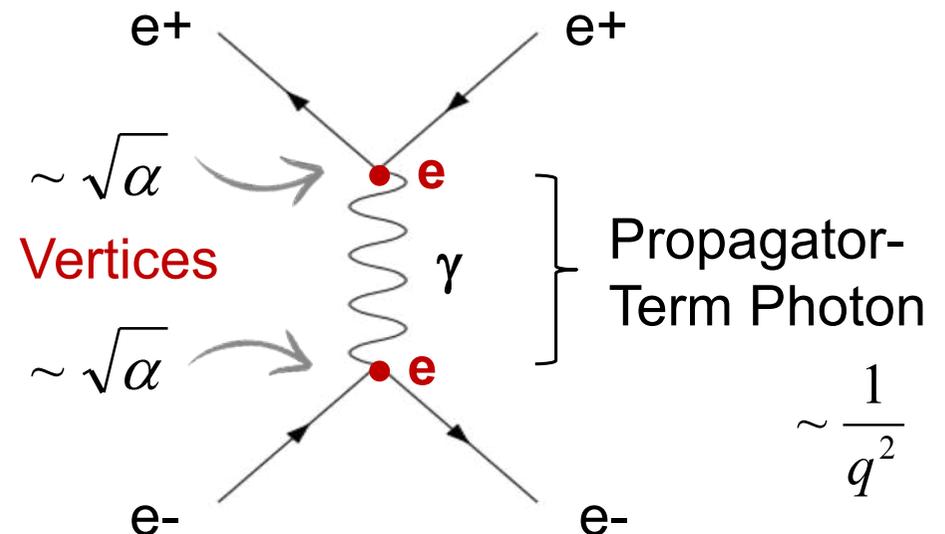
- Paarbildung am Kern
ab $E = 1,02 \text{ MeV}$

$$E_{\text{thres}} = 2 \cdot m_e + O\left(\frac{m_e^2}{M_{\text{Kern}}}\right)$$



■ Feynman-Diagramme

- „Visualisierung“ von Quantenprozessen (real: Rechentools)



$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \propto \alpha^2 \cdot \frac{1}{q^4}$$

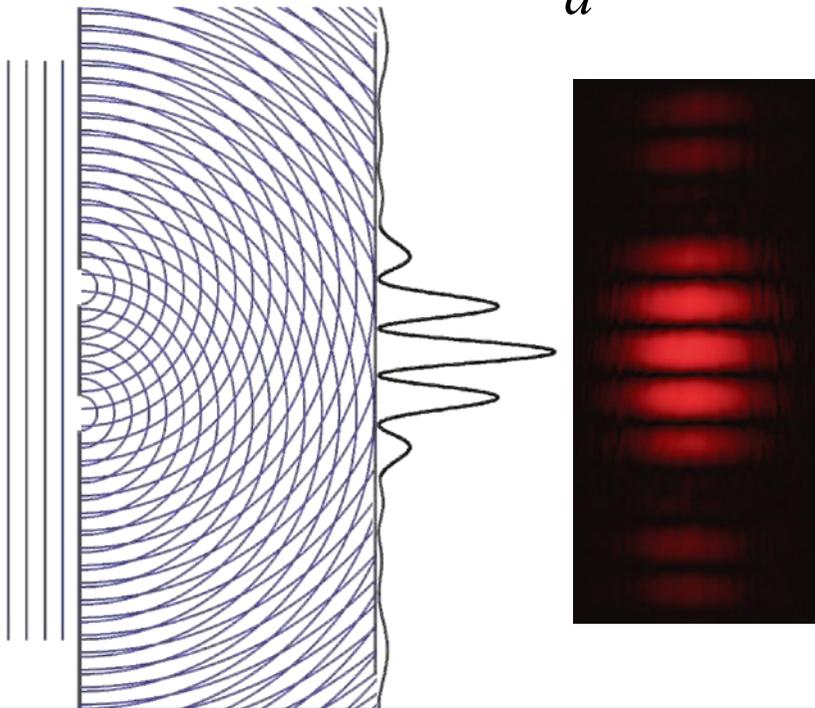
Wh: Elektronen-Interferenz & Materiewellen

■ Teilchen- / Welle- Dualismus

■ Elektronen als Wellen:

- Elektronen zeigen ihre Wellennatur durch Interferenz

$$\text{destruktiv: } \Delta s = \frac{x}{d} \cdot a = \pm n \cdot \frac{\lambda}{2}$$



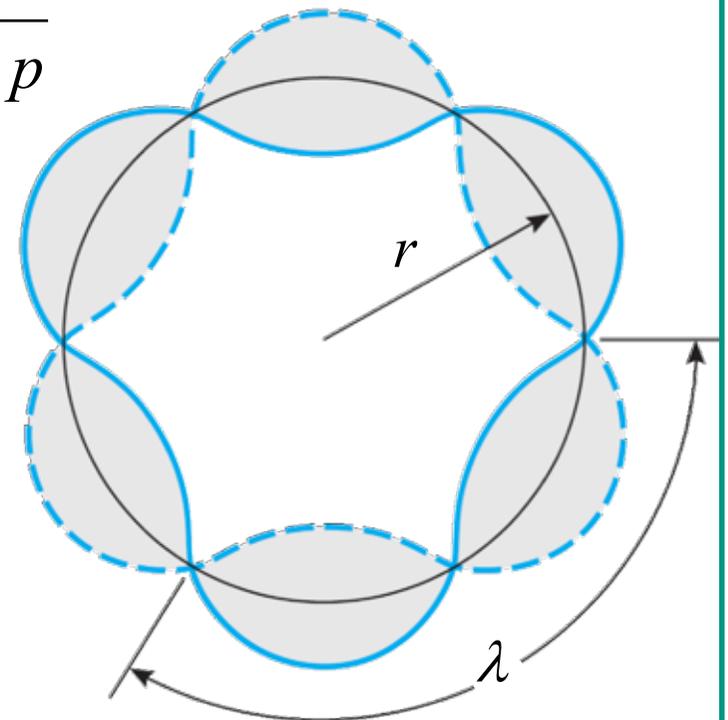
■ de Broglie Wellenlänge:

- Materiewelle mit Wellenlänge λ die abhängig ist vom Impuls p

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

$$\lambda = \frac{h}{m_e \cdot v}$$

$$L = n \cdot \hbar$$



Unschärferelation bei Ortsmessung

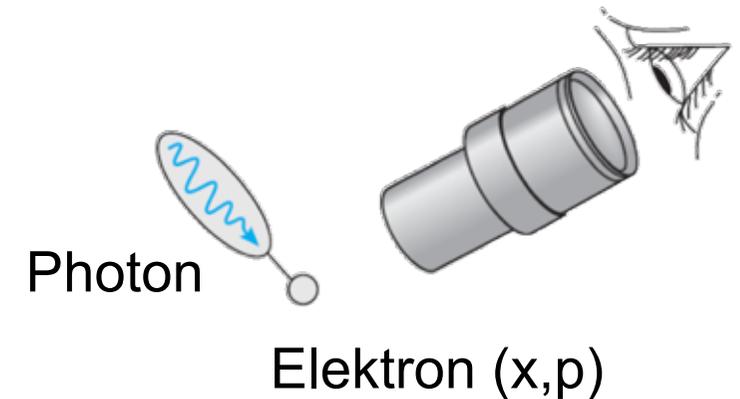
- 1927: W. Heisenberg formuliert seine **Unschärfe-Relation** zur Komplementarität von Paaren von Teilcheneigenschaften als **inhärente Manifestation des Wellencharakters der Materie**

- Ort x und Impuls p
- Zeit t und Energie E

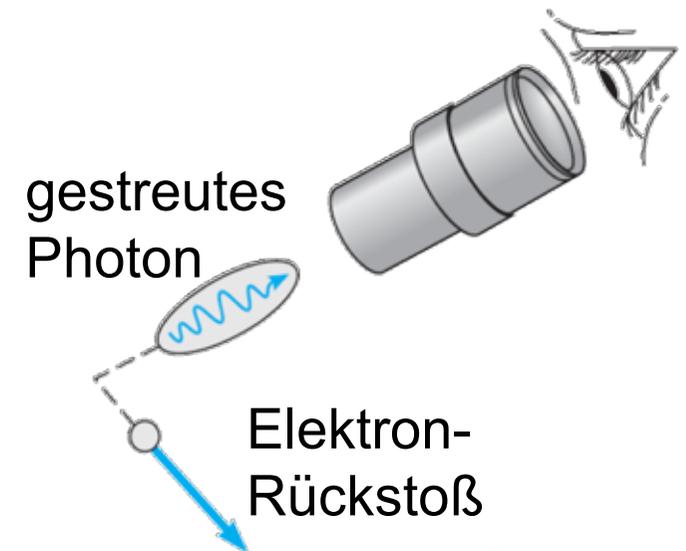
- Unschärferelation am Beispiel der **Ortmessung eines Elektrons** über lichtoptische Methoden:

- Photon überträgt bei Ortsmessung Impuls:
⇒ Elektronrückstoß

vor dem Streuprozess



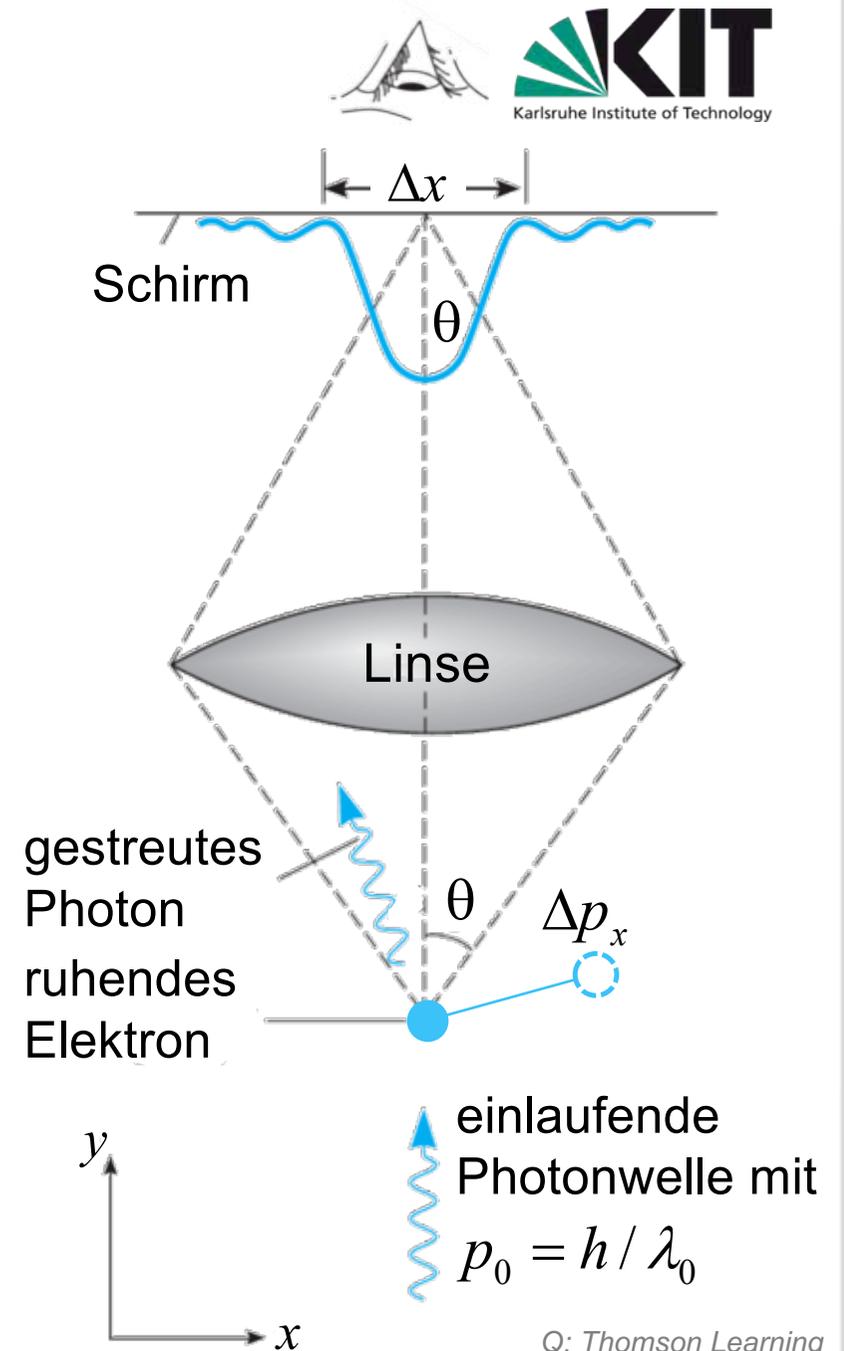
nach dem Streuprozess:



Q: Thomson Learning

Messprozess für Ort und Impuls

- Zum Nachweis des Ortes des Elektrons werde nur ein einzelnes Photon verwendet
- Wie beeinflusst der optische Nachweis die Ortsrekonstruktion?
- Öffnungswinkel der Linse für γ : $-\theta \dots +\theta$
- nach Compton-Stoßprozess erfolgt Impulstransfer Δp_x auf e- im Intervall $[-(h \cdot \sin \theta) / \lambda \dots +(h \cdot \sin \theta) / \lambda]$



Messprozess für Ort und Impuls



- Betrachtung der Impuls- und Orts-Unschärfe des Elektrons

- Impulsunschärfe Δp_x des Elektrons:

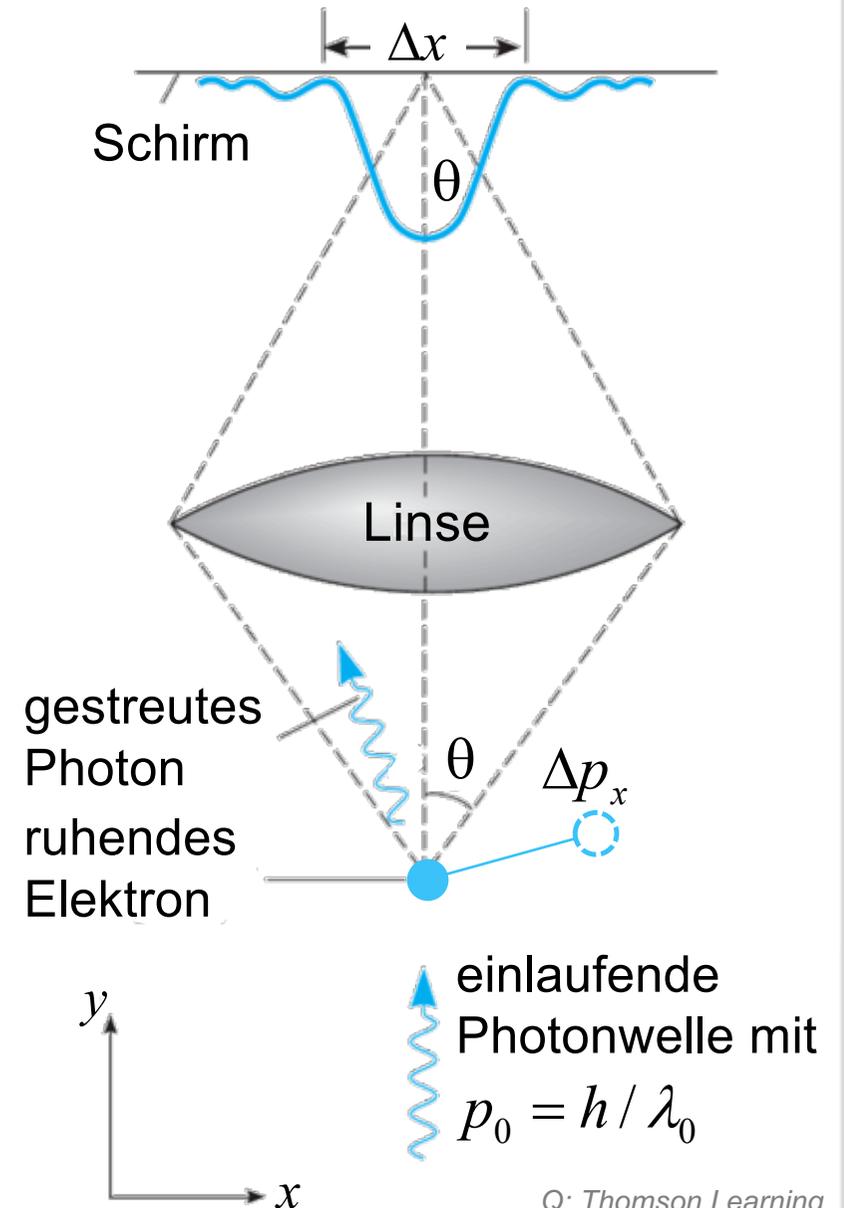
$$\Delta p_x = 2h \cdot \sin \theta / \lambda$$

- Ortsunschärfe Δx des Elektron-Abbilds durch Diffraktion an der Linse:

$$\Delta x = \lambda / 2 \cdot \sin \theta$$

- kombinierte Orts-/Impuls- Unschärfe

$$\Delta x \cdot \Delta p_x = \left(\frac{\lambda}{2 \cdot \sin \theta} \right) \cdot \left(\frac{2h}{\lambda} \cdot \sin \theta \right) = h$$



Heisenbergsche Unschärferelation

- Grundlegende, fundamentale Eigenschaft von Teilchen mit Wellencharakter ist die **Komplementarität** von Variablen

- Impuls p und Ort x
- Energie E und Zeit t

⇒ resultiert nicht aus „Messunzulänglichkeiten“ oder dem Messvorgang!

■ Unschärferelationen:

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

$\Delta x, \Delta p_x, \Delta E, \Delta t$

= statistische Streuung σ



Nobelpreis 1932

■ Implikationen:

- Erzeugung von virtuellen Teilchen, sofern $\Delta E \cdot \Delta t < \hbar/2$
- Relation nur relevant bei Quanten, nicht bei makroskopischen Objekten



W. Heisenberg

Unschärferelation – Konsequenzen

■ angeregte Zustände im Atom

- angeregte Zustände gehen spontan über in Grundzustand

⇒ Heisenbergsche Unschärferelation verbindet endliche **Lebensdauer** τ mit der **natürlichen γ -Linienbreite** Γ

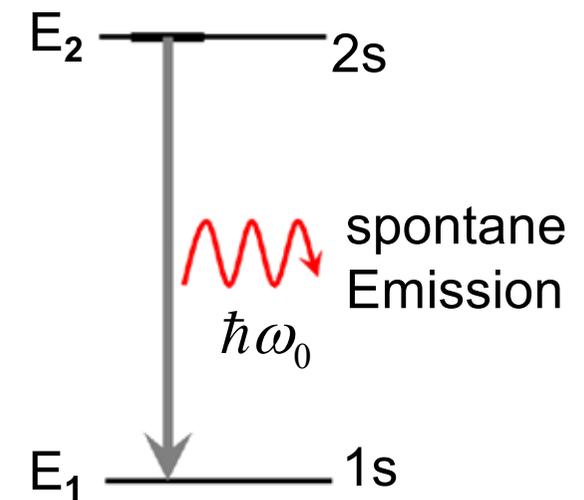
$$\Gamma \cdot \tau \geq \hbar$$

⇒ Energieunschärfe von Zustand 2 sei $\Delta E = \Gamma/2$

⇒ Unschärfe in Photonkreisfrequenz:

$$\Delta\omega \sim \frac{1}{\tau}$$

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$



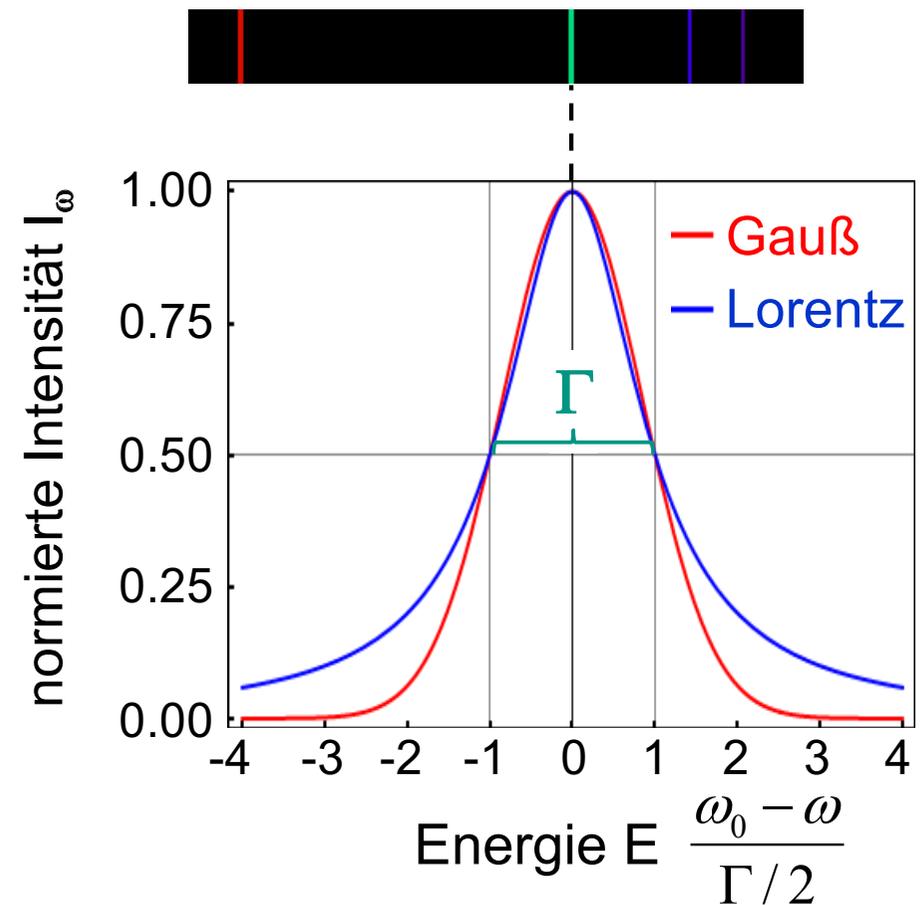
Unschärferelation – Konsequenzen

■ angeregte Zustände im Atom

⇒ Energieunschärfe von Zustand 2
sei $\Delta E = \Gamma/2$

⇒ Messung eines **Lorentzprofils** mit
natürlicher **Linienbreite Γ**

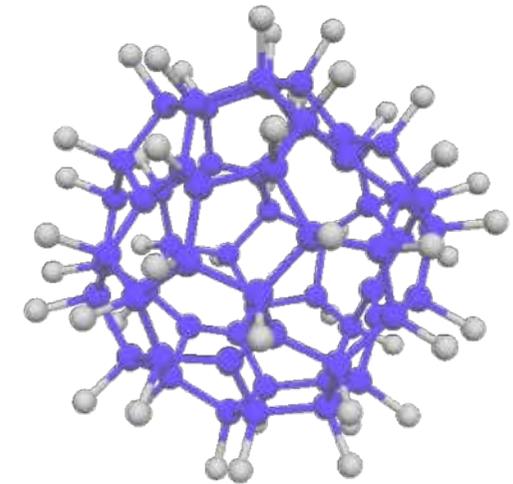
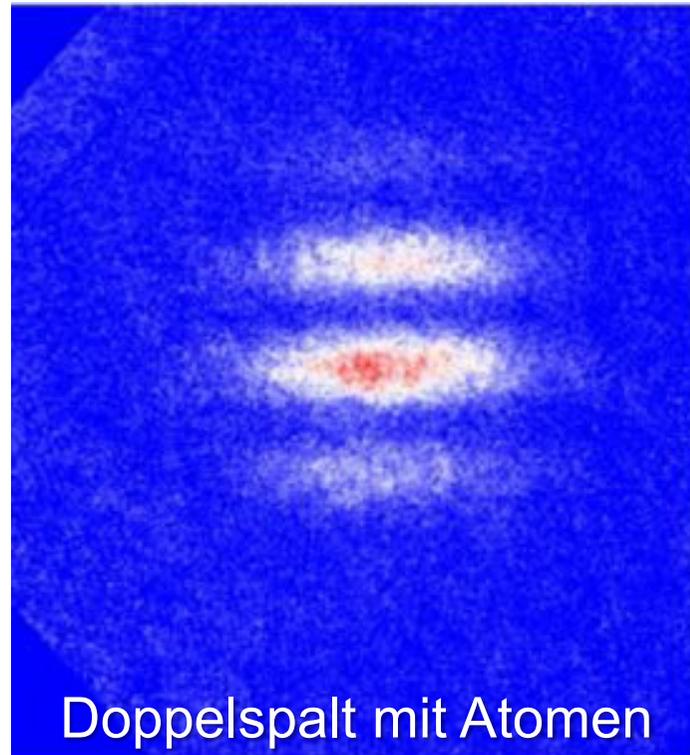
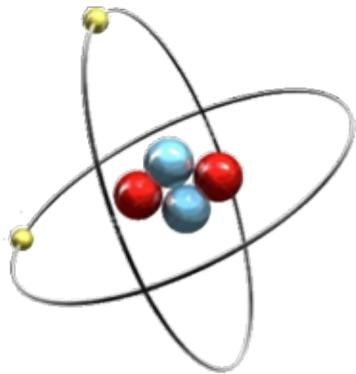
$$I_\omega \sim \frac{\Gamma}{(\omega - \omega_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}$$



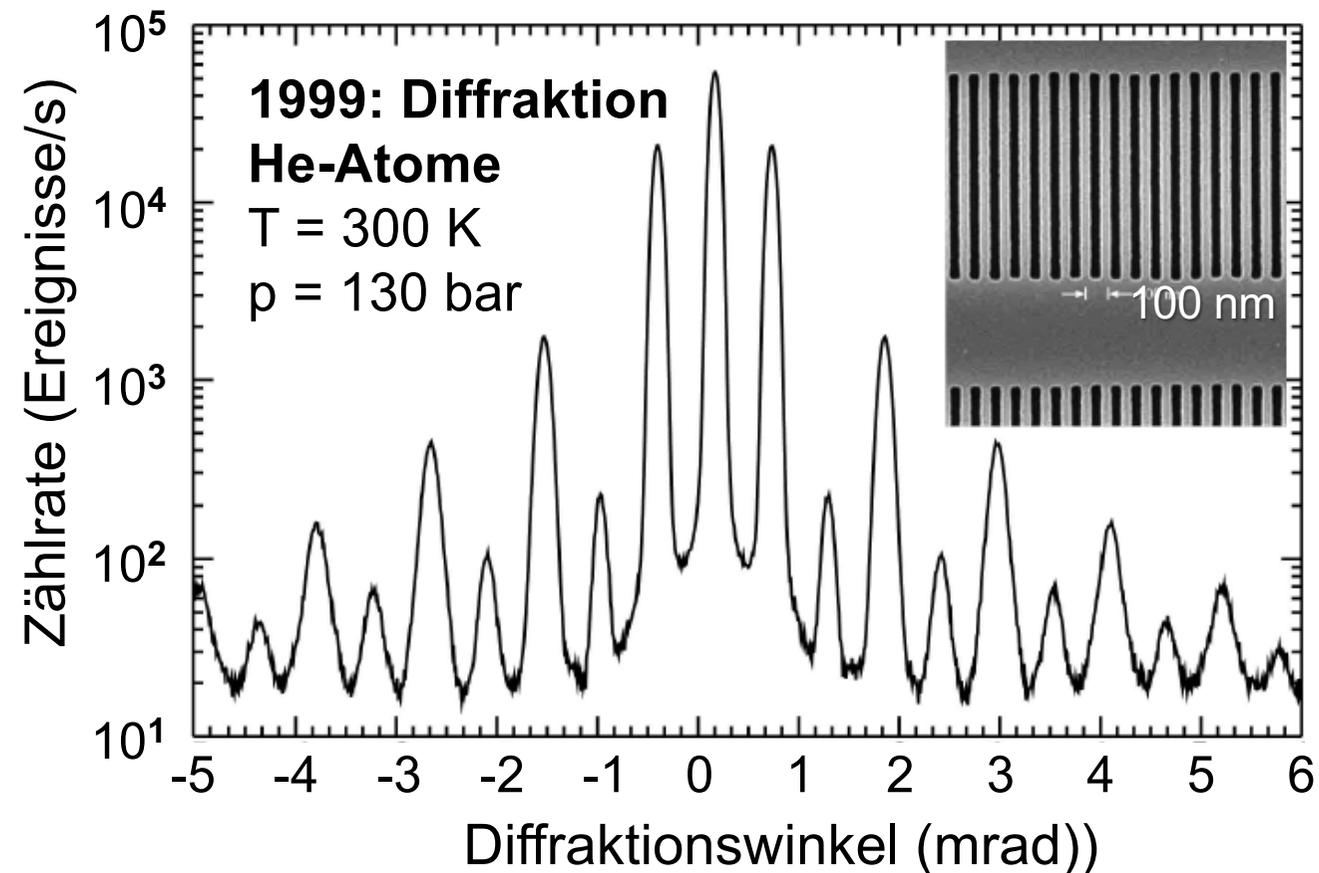
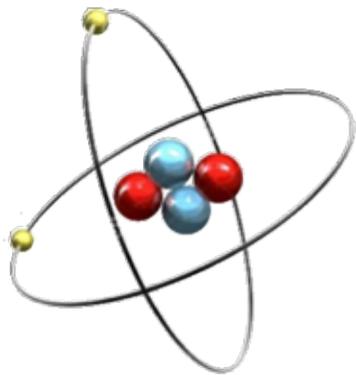
3.3 Atominterferometrie

■ Atome & Moleküle besitzen Wellencharakter

- klassisch: Interferenz am Doppelspalt
- Nanostrukturierung zur Erzeugung von Gittern
- Experimente mit He-Atomen & großen Molekülen wie $C_{60}F_{48}$



- **Atome & Moleküle besitzen Wellencharakter**
 - klassisch: Interferenz am Doppelspalt
 - Nanostrukturierung zur Erzeugung von Gittern

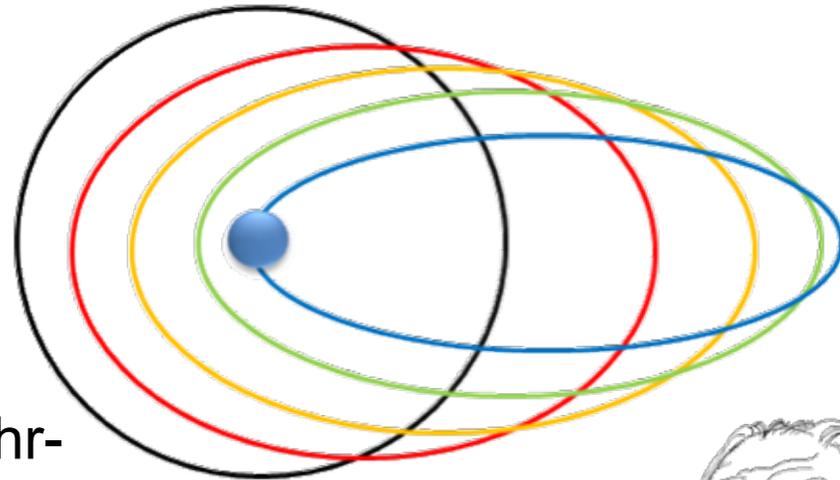
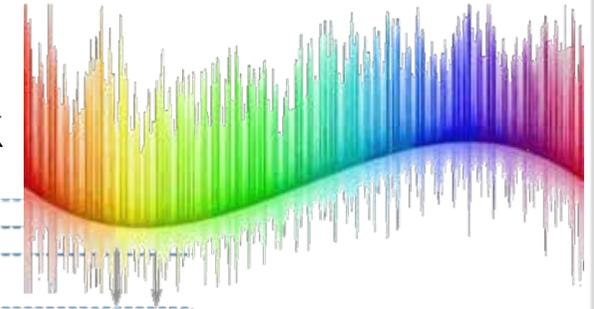


Teilchen-Welle-Dualismus

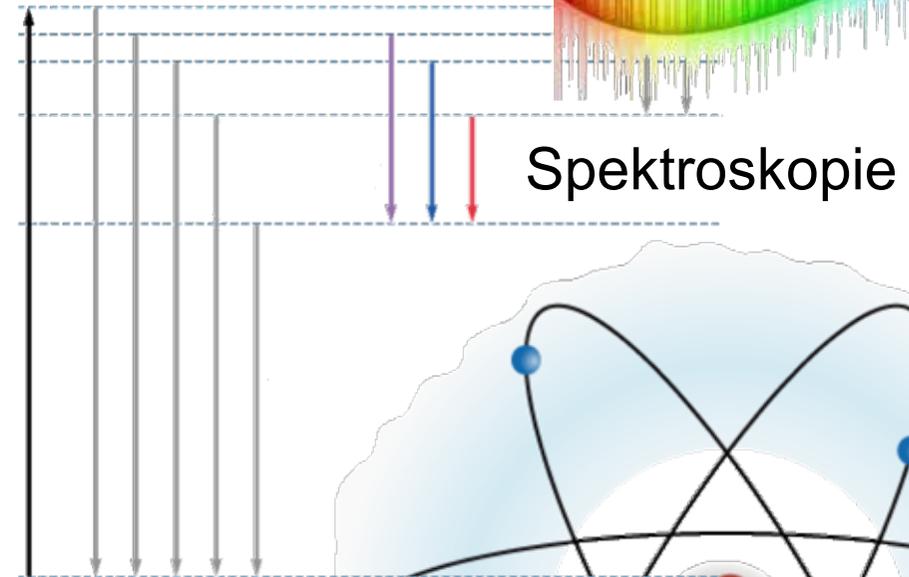


4. Bohrsches Atommodell

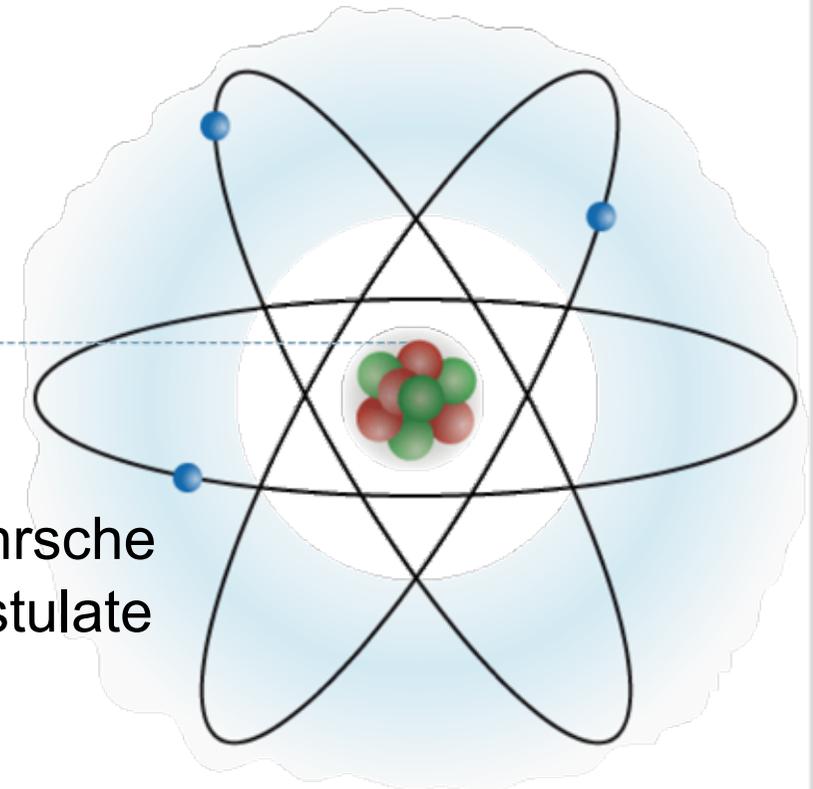
- **Atommodell von Niels Bohr** [semi-klassisch]
 - von der klassischen Mechanik zur Quantenmechanik



Bohr-Sommerfeld



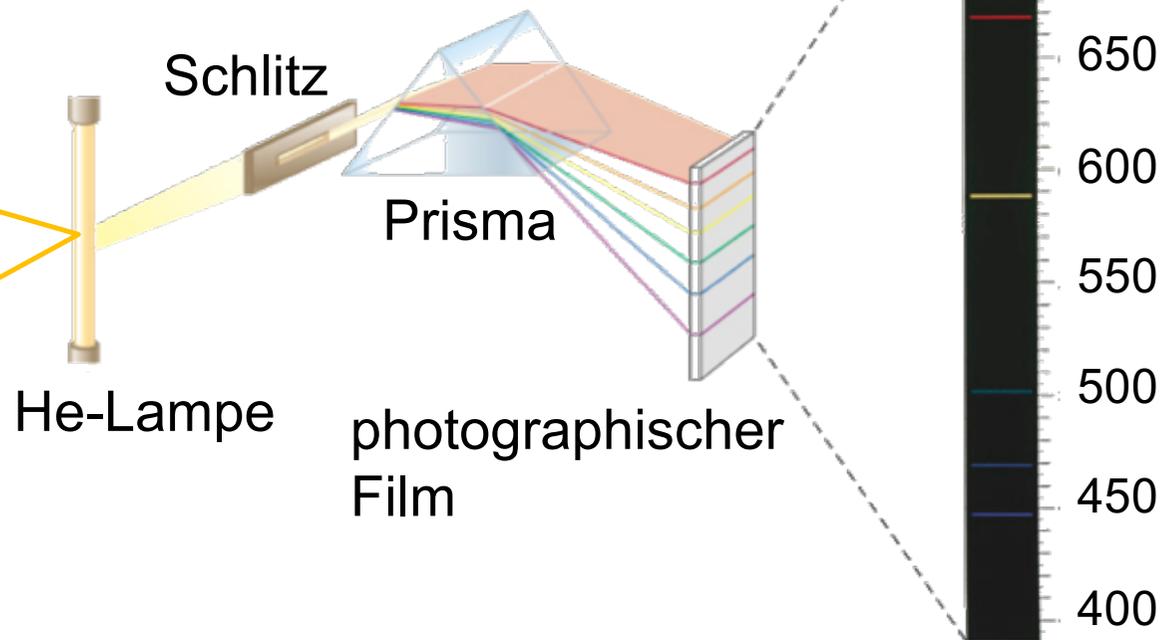
Bohrsche Postulate



4.1 Spektroskopie

- **Spektroskopische Untersuchungen von Atomen** (Einheiten: λ , k , E)
 - Spektraluntersuchungen des H-Atoms (He,...): grundlegende Bedeutung

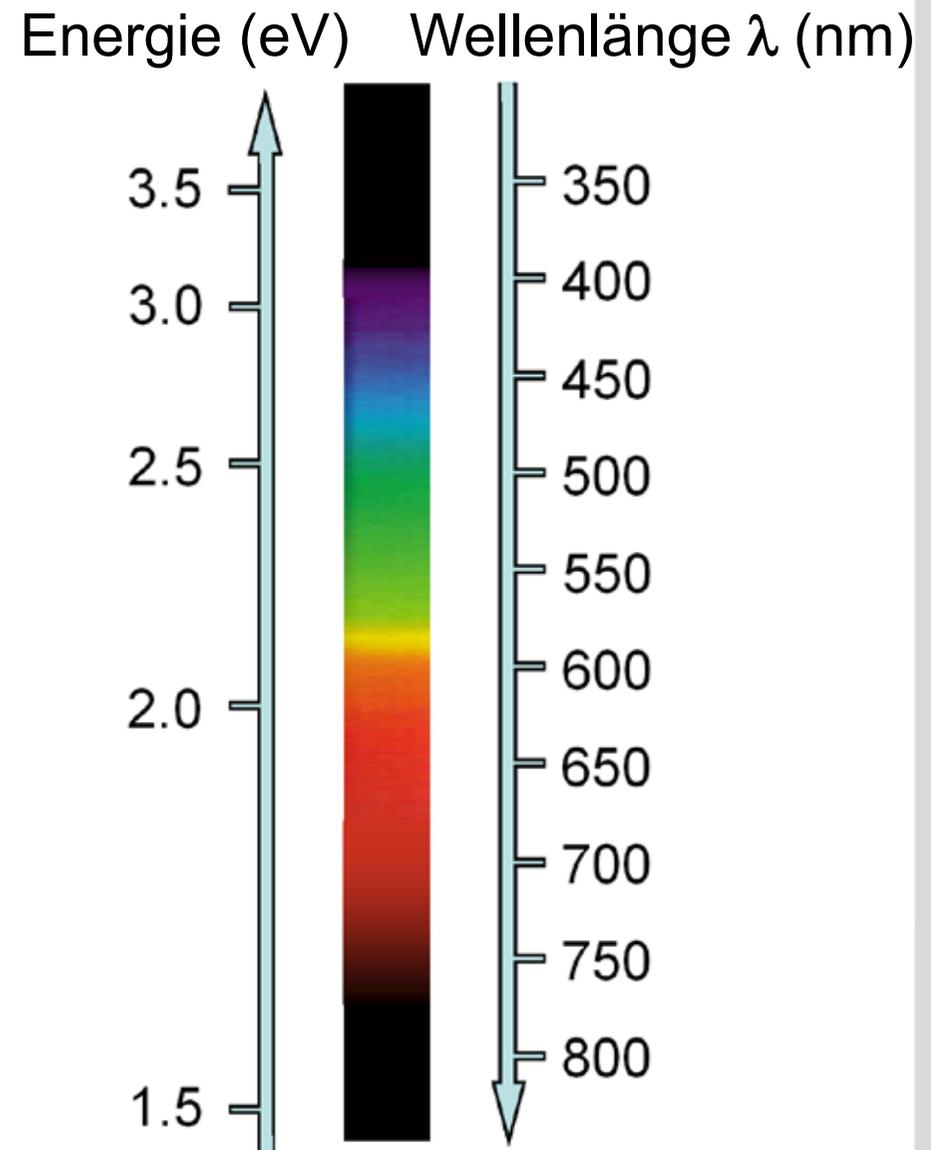
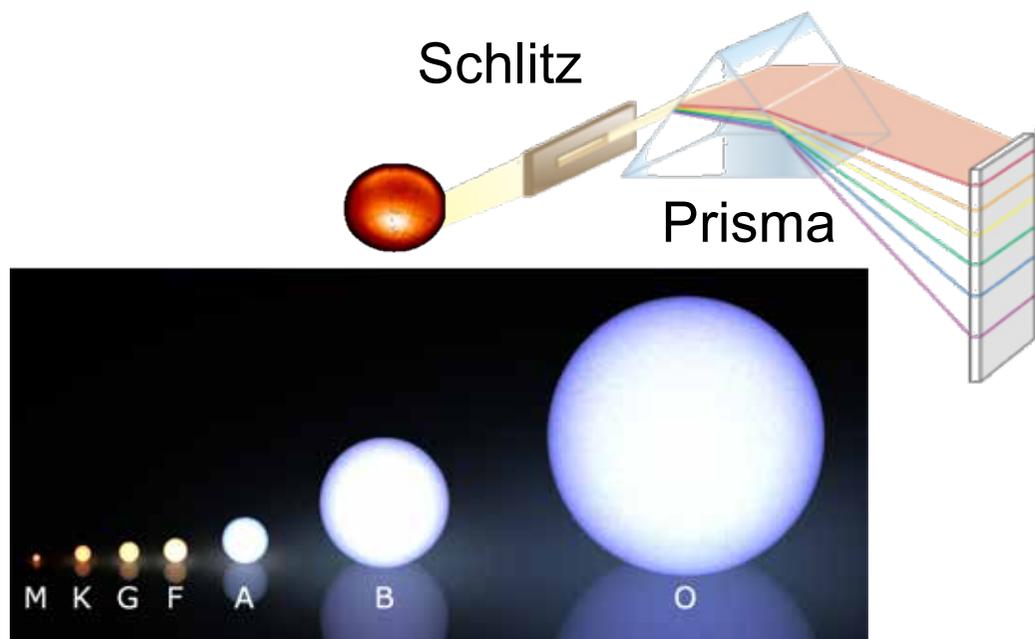
Größe	Einheit	Umrechnung
Wellenlänge λ	1 Å (0,1 nm)	1.000.014 cm^{-1}
Wellenzahl k ($\tilde{\nu}$)	1 cm^{-1} (1 Kayser)	123,984 μeV
Energie E	1 eV	8 066 cm^{-1}



Spektroskopische Untersuchungen

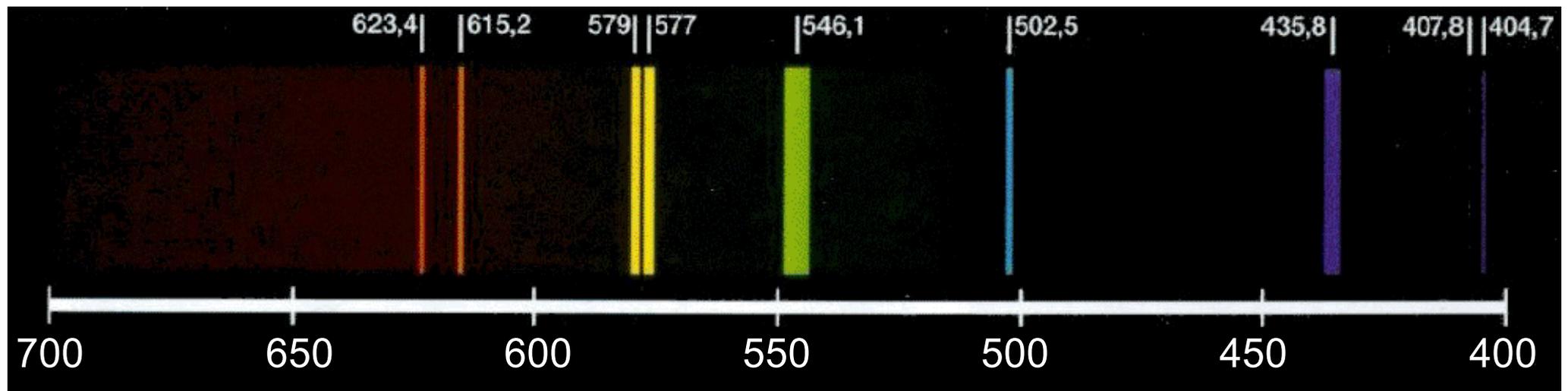
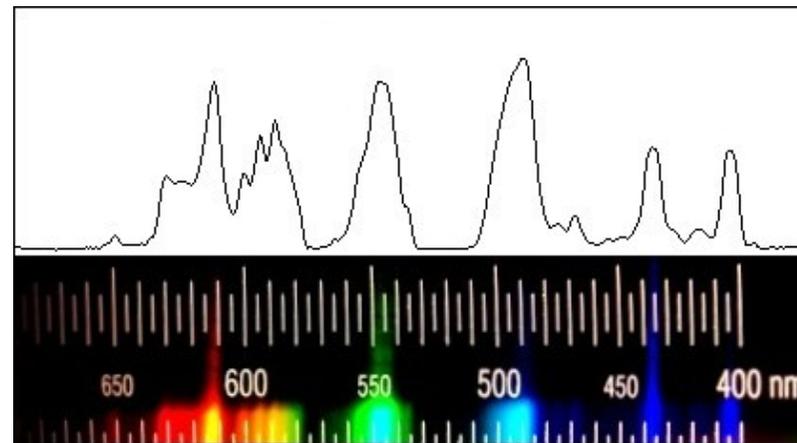
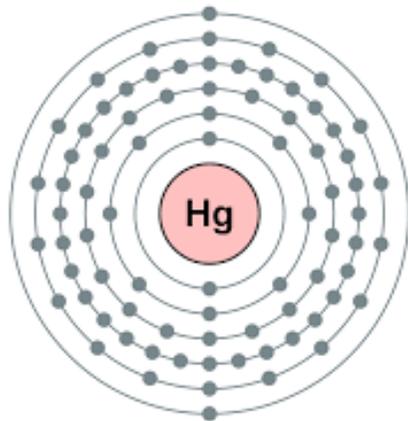
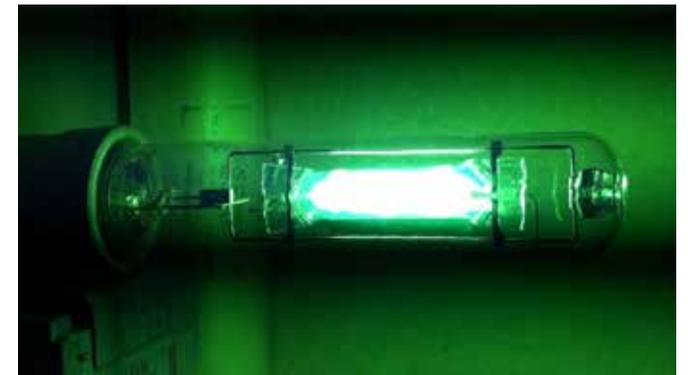
■ spektroskopische Untersuchungen

- wichtig in Astrophysik, z.B. für Analysen von Sternoberflächen
- Zuordnung von $\lambda(\text{nm}) \leftrightarrow E(\text{eV})$



Versuch: Spektrum Quecksilberdampf Lampe

- **spektroskopische Untersuchungen mit Hg**
 - Linienspektrum einer Hg-Lampe



Emissionslinien des H-Atoms

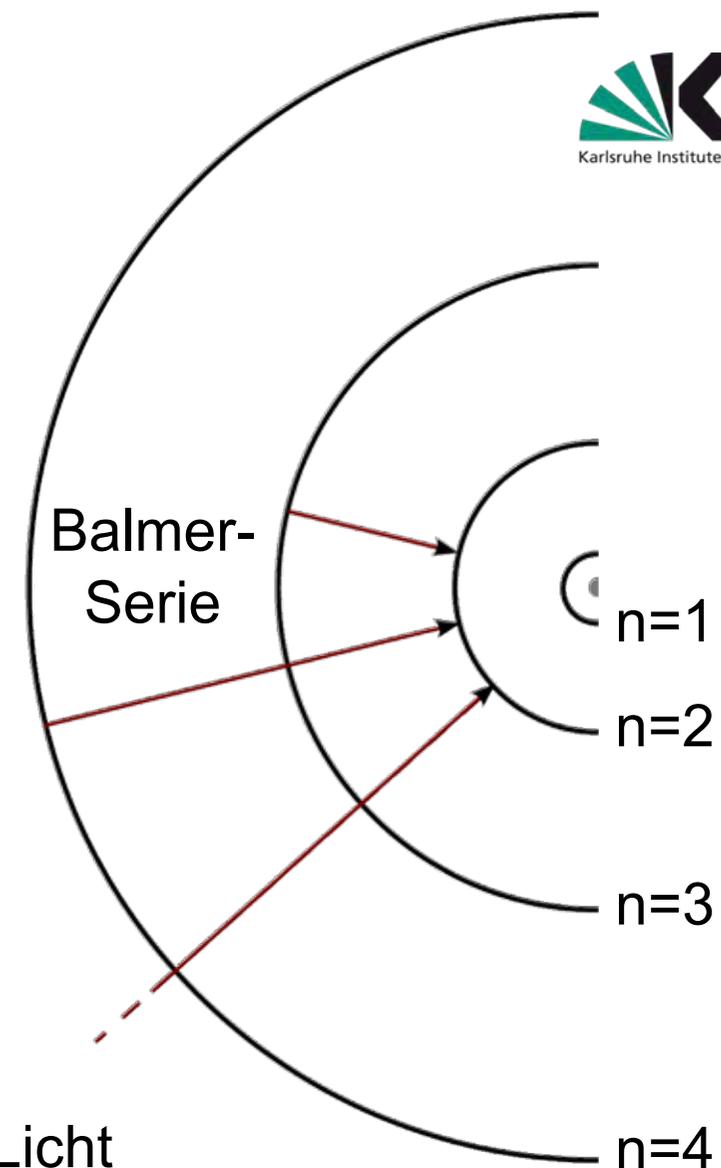
■ Spektroskopie des H-Atoms:

- entscheidend für Verständnis des Aufbaus von Atomen
- optische Übergänge der **Balmer-Serie**: H- α , H- β , H- γ ,...

$$\lambda \sim \frac{n^2}{n^2 - 4} \quad n = 3, 4, \dots$$

- in spektroskopischer Schreibweise:

$$\tilde{\nu} \sim \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad n \geq 3$$



Balmer-Serie von Wasserstoff im sichtbaren Licht



Übergänge des H-Atoms

■ H-Spektrallinien: Nachweis weiterer Serien vom UV bis IR



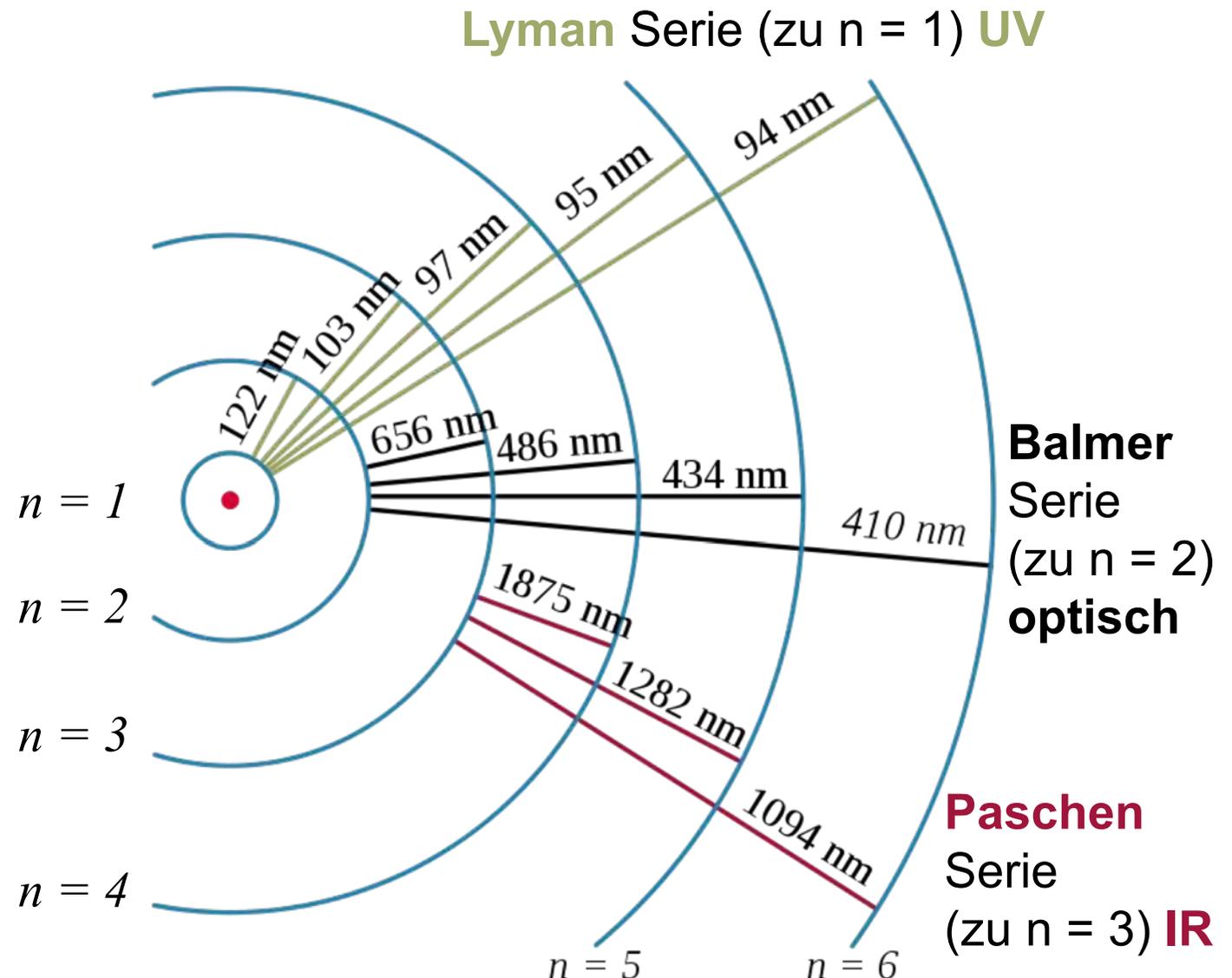
Theodore
Lyman
(1906)



Johann
Balmer
(1885)



Friedrich
Paschen
(1908)



Übergänge des H-Atoms

■ H-Spektrallinien: Einbezug aller Serien durch Johannes Rydberg

$$\tilde{\nu} \sim R_H \cdot \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \quad n_1 = 1, 2, \dots; n_2 > n_1$$

■ Termschema H-Atom:

Differenz von
zwei Termen $\sim 1/n^2$

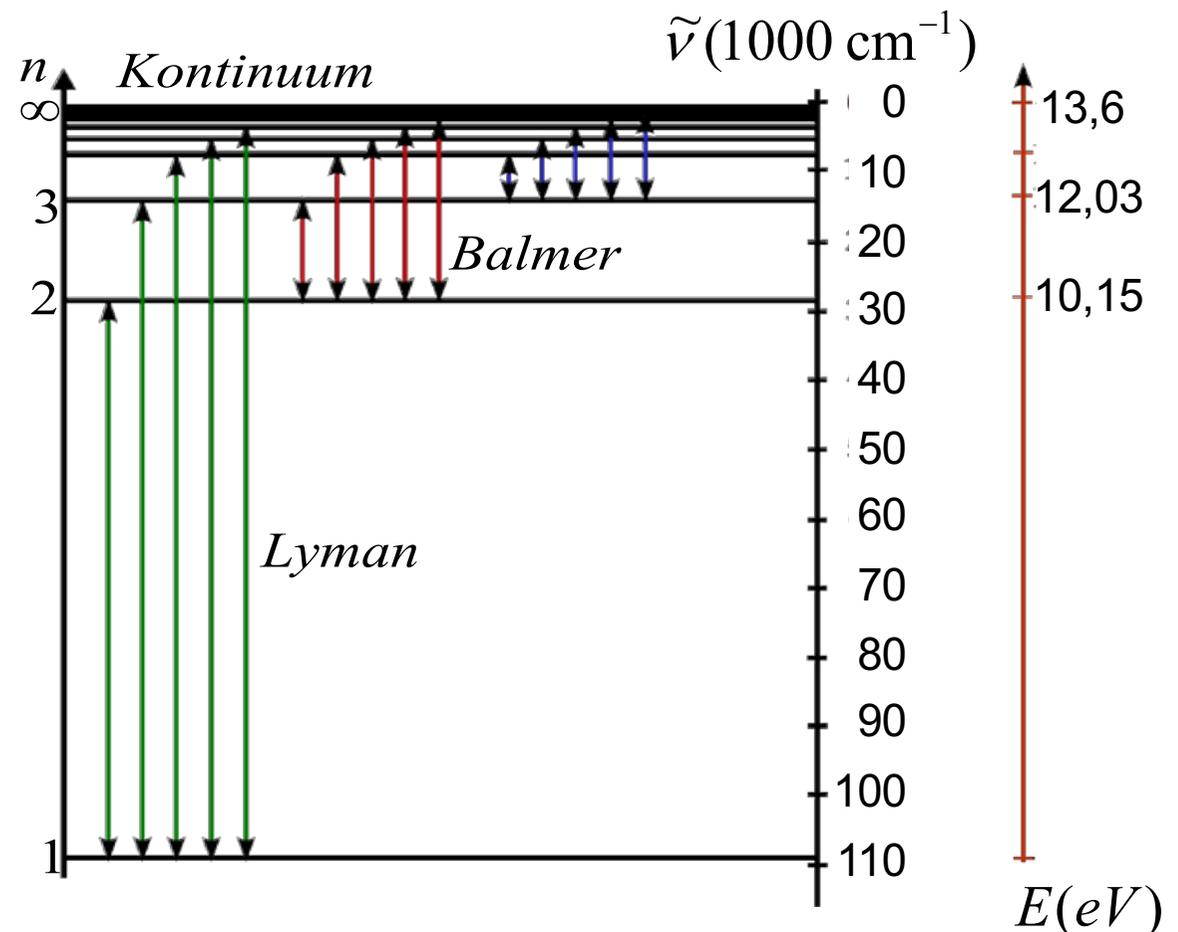
Rydberg-Konstante
 $R_H = 109677,581 \text{ cm}^{-1}$



Johannes
Rydberg

$$R_H = \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \cdot \frac{m_e}{2\hbar^2}$$

$$R_H = \frac{1}{2} \cdot (m_e c^2) \cdot \alpha^2$$



4.2 Bohrsche Postulate

- **N. Bohr** (1913): dynamisches Gleichgewicht für umlaufendes Elektron

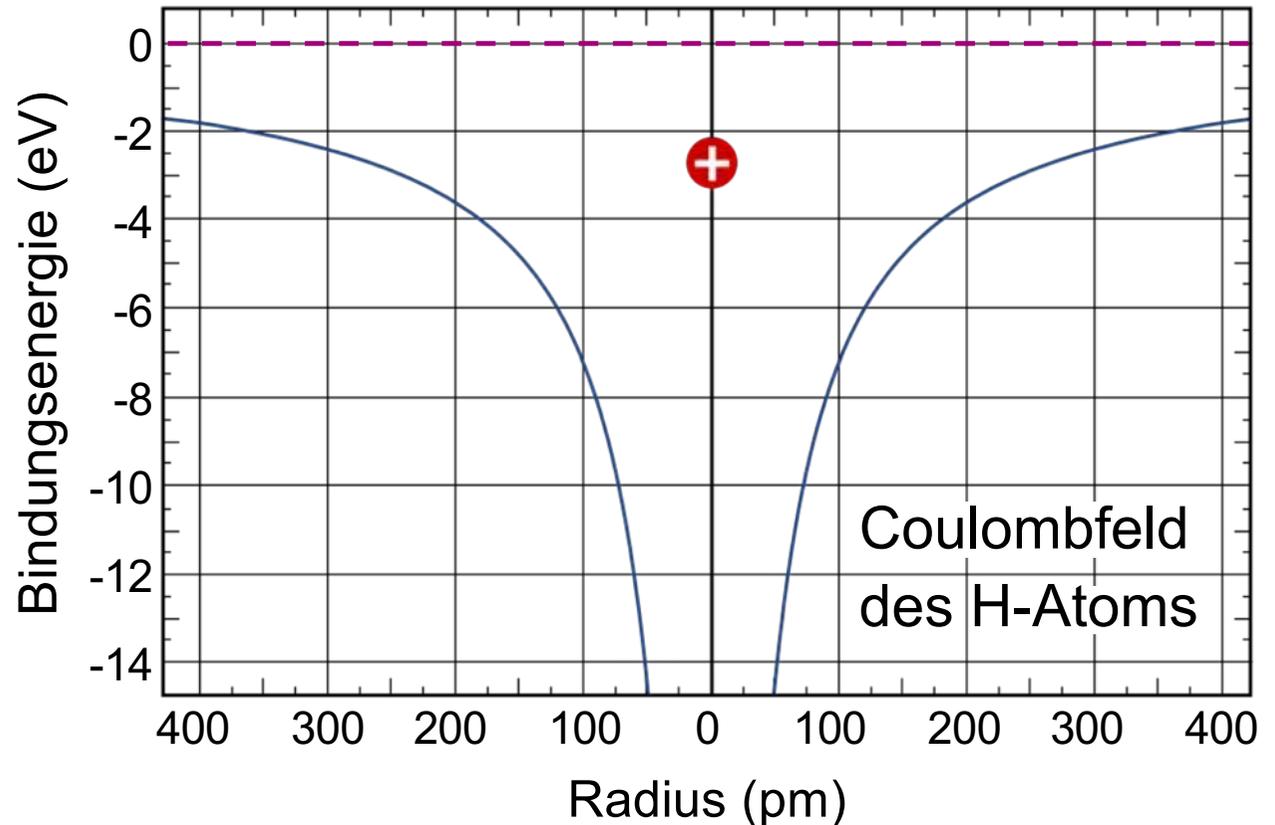
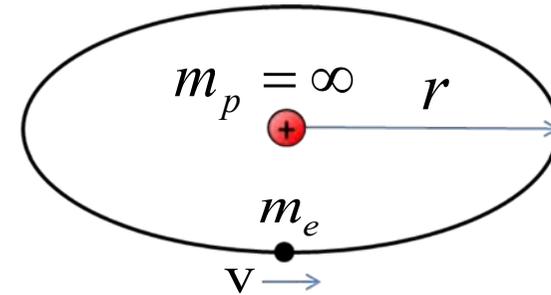
$$\vec{F}_{Coulomb} = \vec{F}_{Zentrip}$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r^2} = m_e \cdot \frac{v_e^2}{r}$$

- potenzielle Energie eines Elektrons im Feld eines H-Atoms

Energien: ~ - 10 eV

Radien: ~ 100 pm



Klassische Betrachtung

■ klassische Energie-Betrachtung

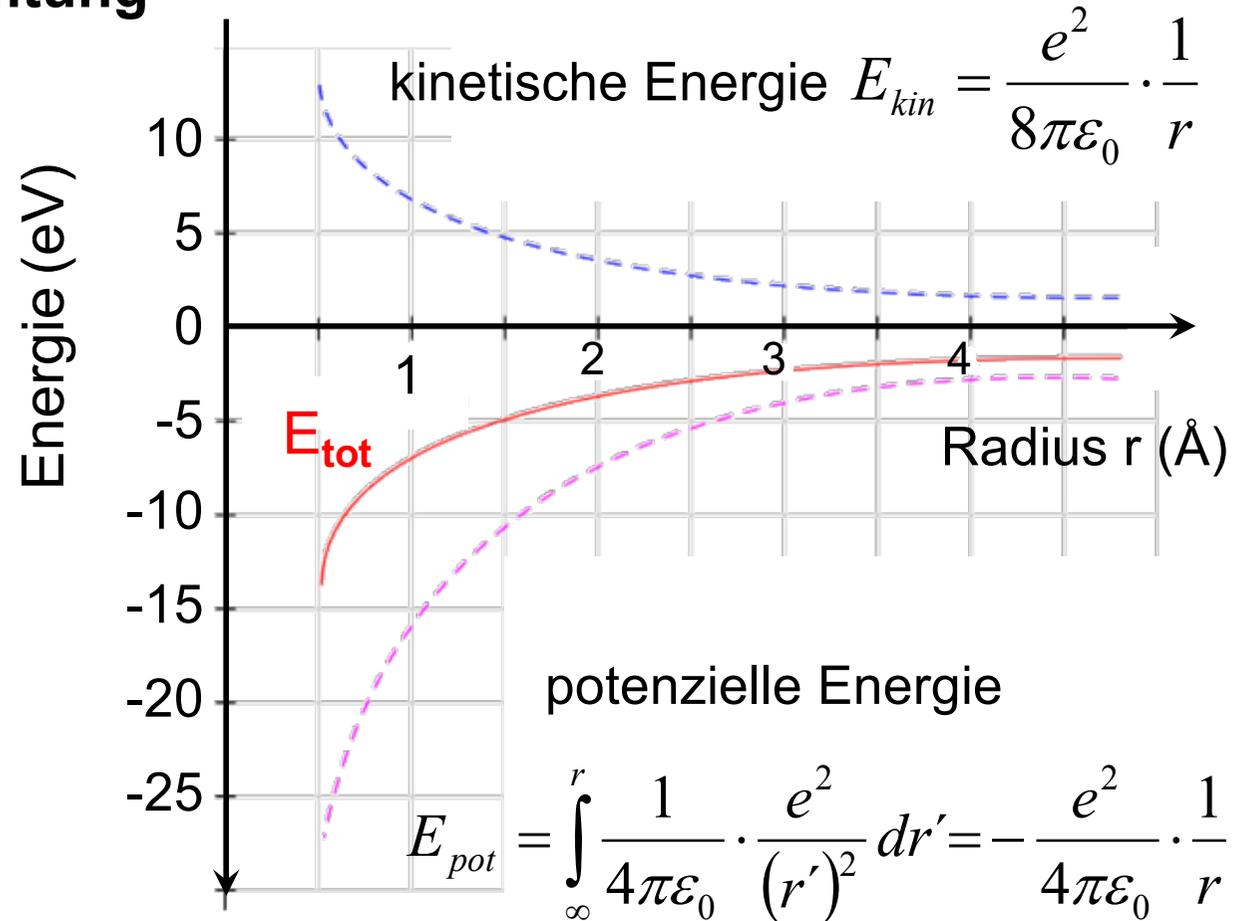
$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r} = m_e \cdot v_e^2$$

Virialtheorem:

$$-E_{pot} = 2 \cdot E_{kin}$$

$$E_{tot} = E_{kin} + E_{pot}$$

$$E_{tot} = -\frac{1}{8\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r}$$



- Klassisch**: Bahnen mit beliebigen Radien, kein Minimum!
⇒ instabile Bahn, da Elektronen kontinuierlich abstrahlen!

■ 3 Postulate mit nicht-klassischen Quantisierungs-Forderungen:

- Elektronen-Orbits nur auf **diskreten** Bahnen
- auf den diskreten Bahnen bewegen sich die Elektronen **strahlungslos**, nur bei einem Wechsel der Bahn
 - ⇒ Emission eines Photons mit $E = h \cdot \nu$
- **Korrespondenzprinzip**: quantisierte Theorie muss im Grenzfall $n \rightarrow \infty$ gegen klassische Theorie konvergieren



- Aufgabe des klassischen Bahnbegriffs,
Bahn des Elektrons wird ersetzt durch (stationären) Zustand des Elektrons

Bohrsche Postulate: H-Atom

- Bindungsenergie E_b eines gebundenen Elektronen-Zustands:

$$E_b = -\tilde{\nu} \cdot hc = -\frac{R_H}{n^2} \cdot hc \quad n: \text{Hauptquantenzahl} \quad R_H \cdot hc = 13,59 \text{ eV}$$

- Grundzustand $n = 1$ im H-Atom:

$$E_b \approx -13,6 \text{ eV}$$

N. Bohr, Philos. Mag. 26, 1

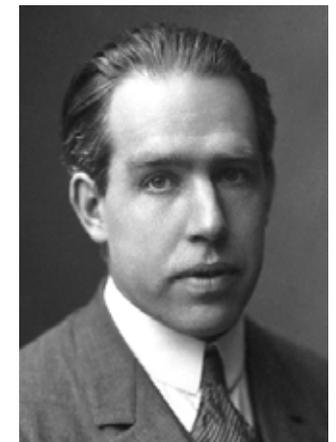
1913

On the Constitution of Atoms and Molecules

N. Bohr,
Dr. phil. Copenhagen
(Received July 1913)



Nobelpreis 1922



Niels H. D. Bohr
(1885-1962)

"for his services in the investigation of the structure of atoms and of the radiation emanating from them".

H-Atom-ähnliche Systeme

■ Ein-Elektron Systeme (Ionen):

He⁺, Li⁺⁺, ..., U(91⁺)

- Coulombfeld des Kerns $Z \cdot e$:

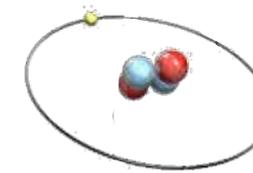
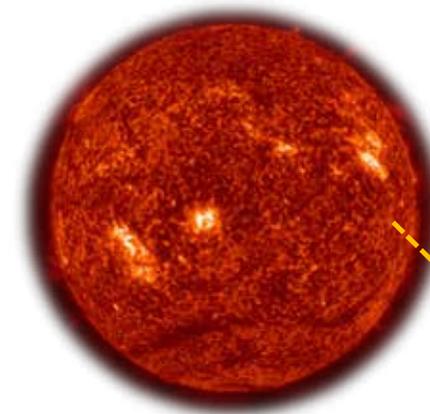
$$\vec{F}_{Coulomb} = \vec{F}_{Zentrip}$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Z \cdot e^2}{r^2} = m_e \cdot \frac{v_e^2}{r}$$

- **Bindungsenergie** des Elektrons:

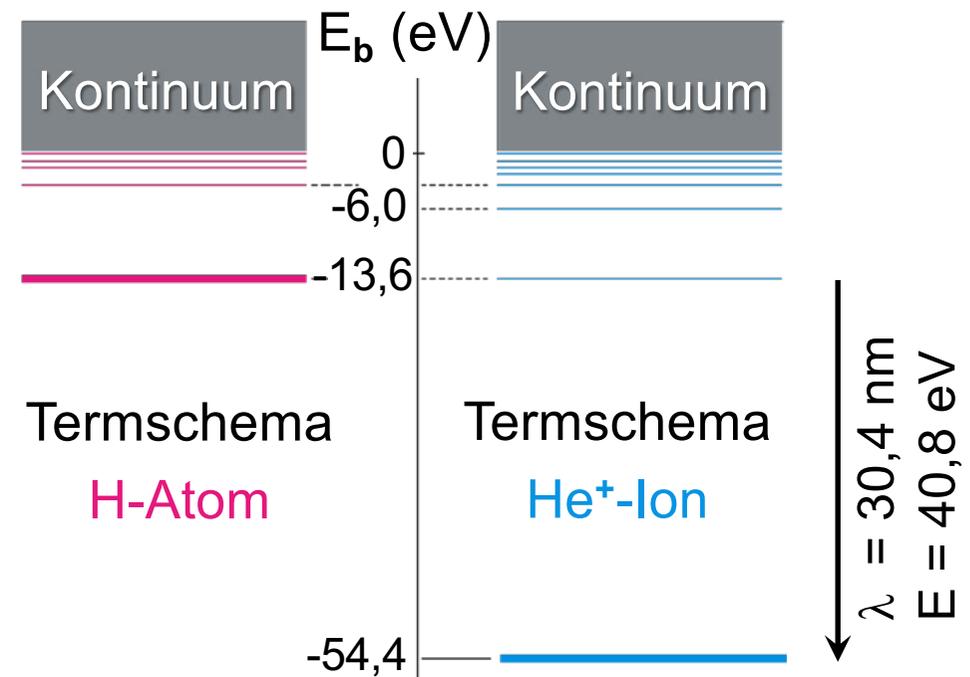
$$E_b = -13,59 \text{ eV} \cdot \underbrace{Z^2}_{\text{circled}} \cdot \frac{1}{n^2}$$

sehr hohe Bindungsenergien im multi-keV-Bereich für $Z > 10$



He⁺

Sonne im Licht von He⁺ ($\lambda = 30,4 \text{ nm}$)
 $n = 2 \rightarrow n = 1$



Endliche Kernmasse

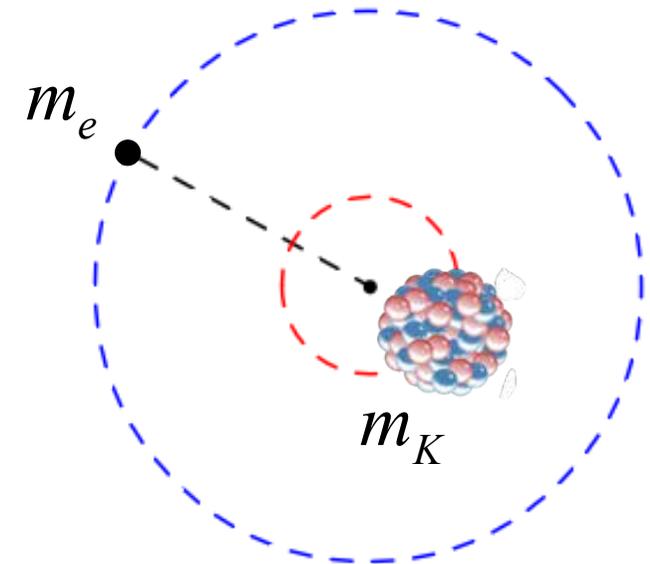
- bisher Berechnung von Elektronenzuständen in unendlich schwerem Kern
 - Mechanik: Bewegung von 2 Massen (Mitbewegung des Kerns m_K) beschrieben durch **reduzierte Masse μ**

$$\mu = \frac{m_e \cdot m_K}{m_e + m_K}$$

- ersetze in allen bisherigen Rechnungen mit Rydberg-Konstante R_H die Masse m_e mit μ

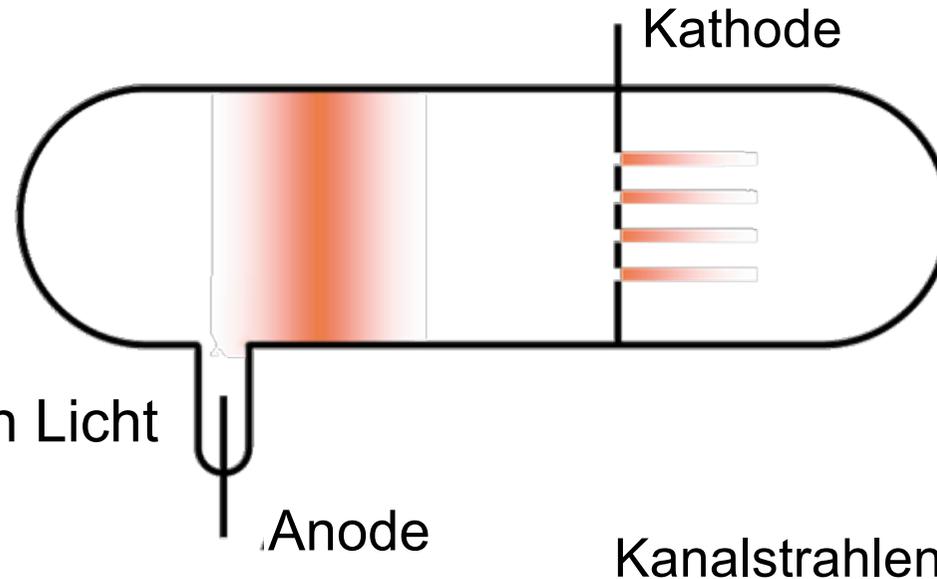
$$R_H = \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \cdot \frac{m_e}{2\hbar^2} \Rightarrow \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \cdot \frac{\mu}{2\hbar^2}$$

- relative Änderung („Isotopieverschiebung“) am größten für H-Atom:
 $\Delta E/E = -5,45 \cdot 10^{-4}$ da $m_p : m_e = 1836,15$



4.3 Anregung durch Stöße

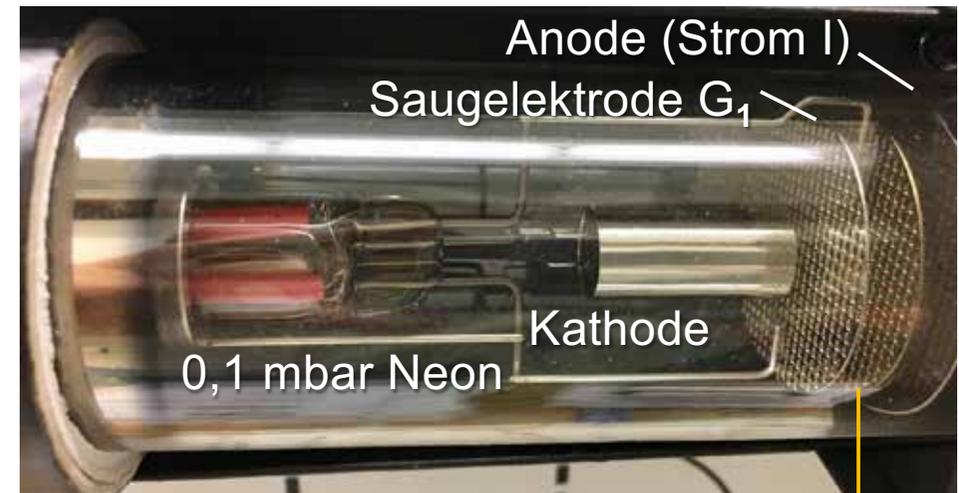
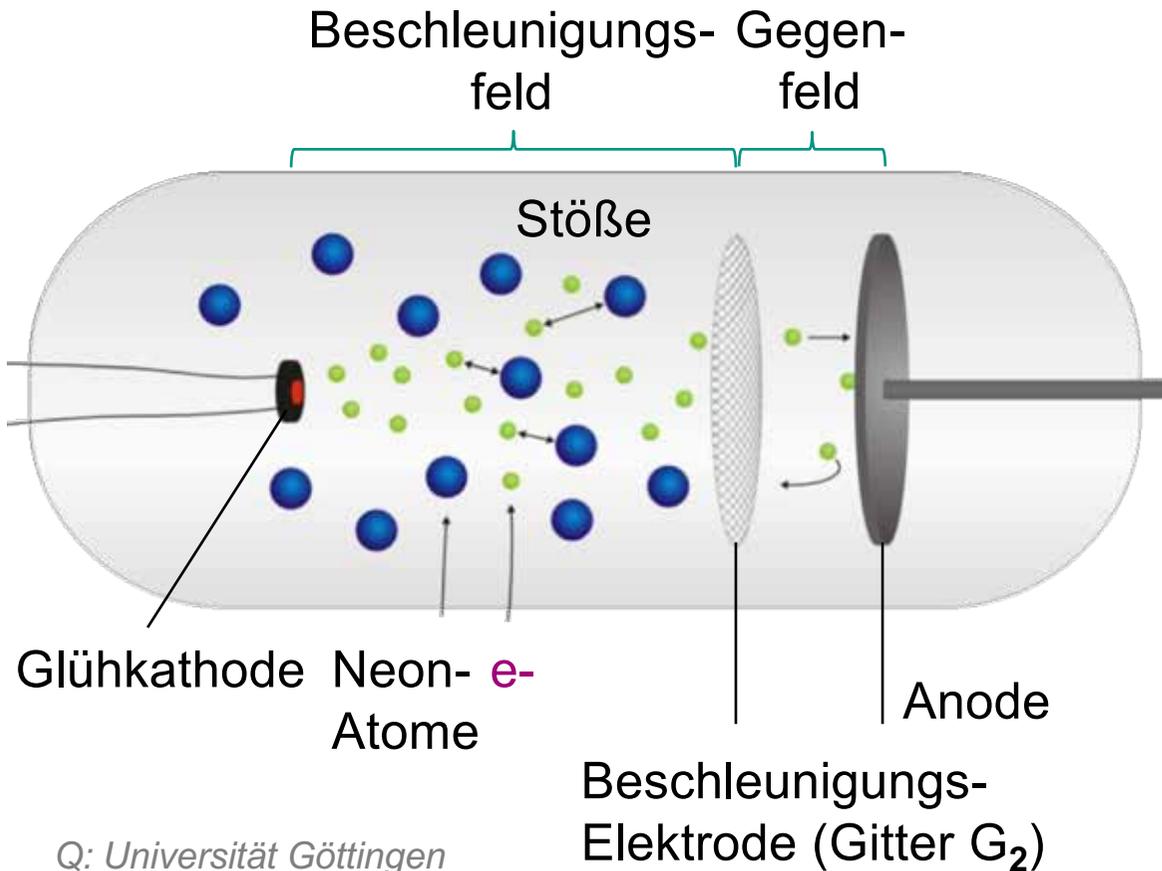
- Atome können durch **Elektronenstöße** ionisiert / angeregt werden
 - Kathodenstrahlen (Elektronen)
 - Kanalstrahlen (Ionen)
 - 1902 untersucht Lenard die Ionisation von Atomen mit Elektronen
 - Stoß: Elektron verliert Energie, Aussendung von Licht



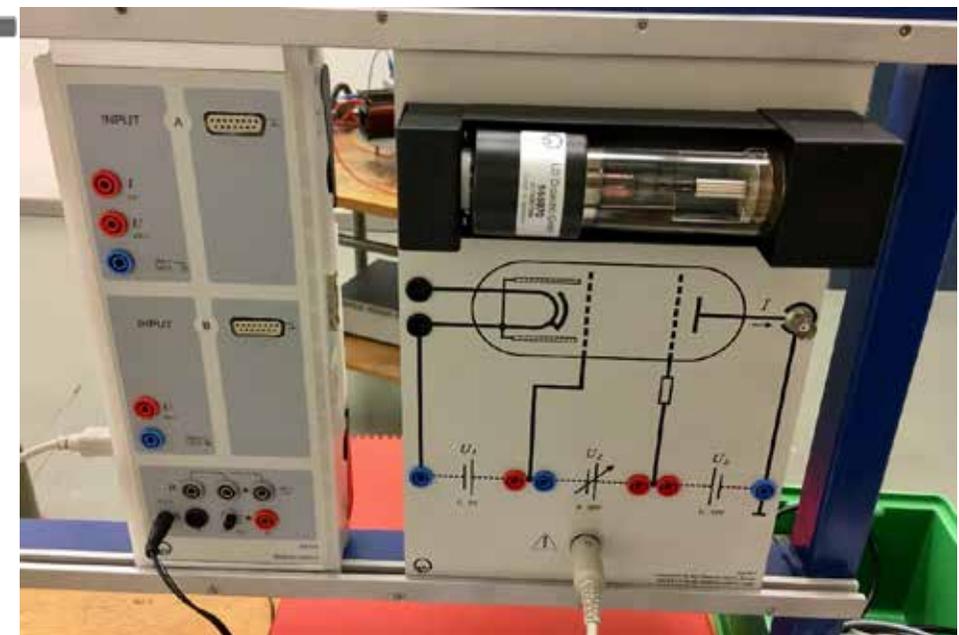
1892: Teilchennatur der Kathodenstrahlen
Apparatur mit Lenard-Fenster aus 3 μm Aluminium-
Folie zum Austritt von Elektronen aus Glasvolumen

Experiment: Franck-Hertz Versuch

- Beschleunigte Elektronen erfahren **inelastische Stoßprozesse** an Neon

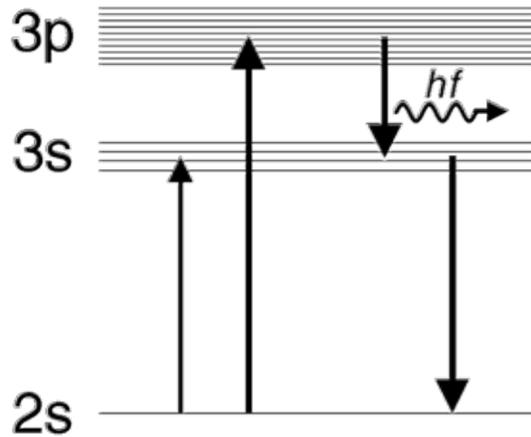


Beschleunigungselektrode G_2 (U)

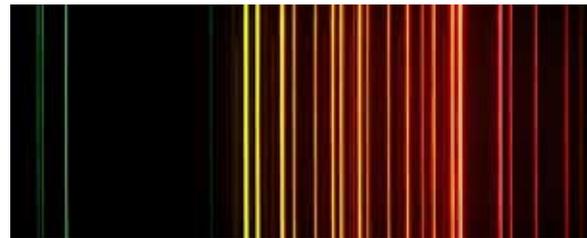


Experiment: Franck-Hertz Versuch

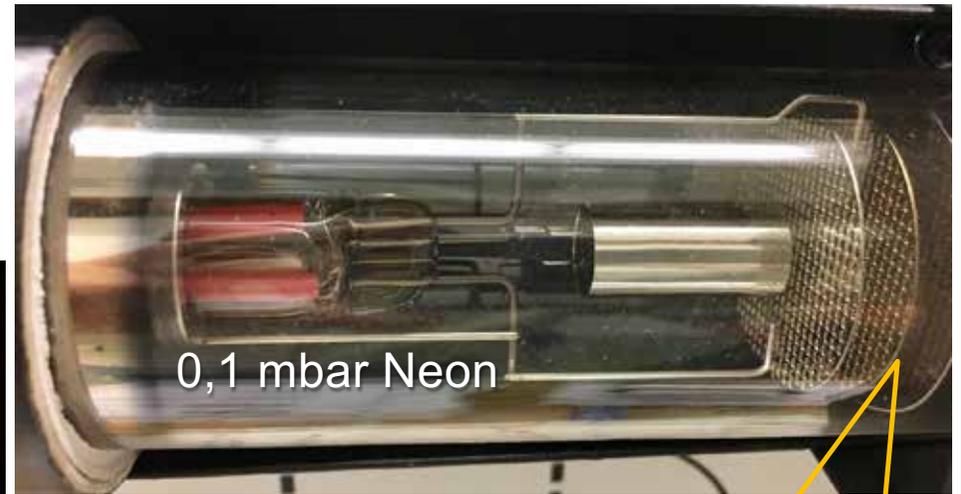
- Beschleunigte Elektronen erfahren **inelastische Stoßprozesse** an Neon



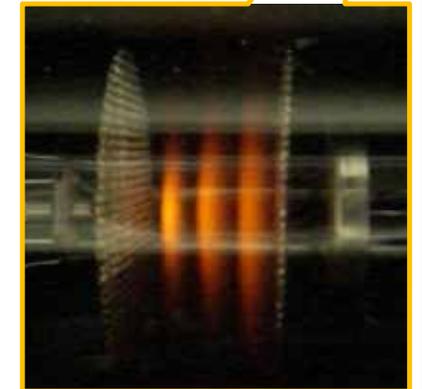
Neon-Termschema



Neon-Emissionslinien

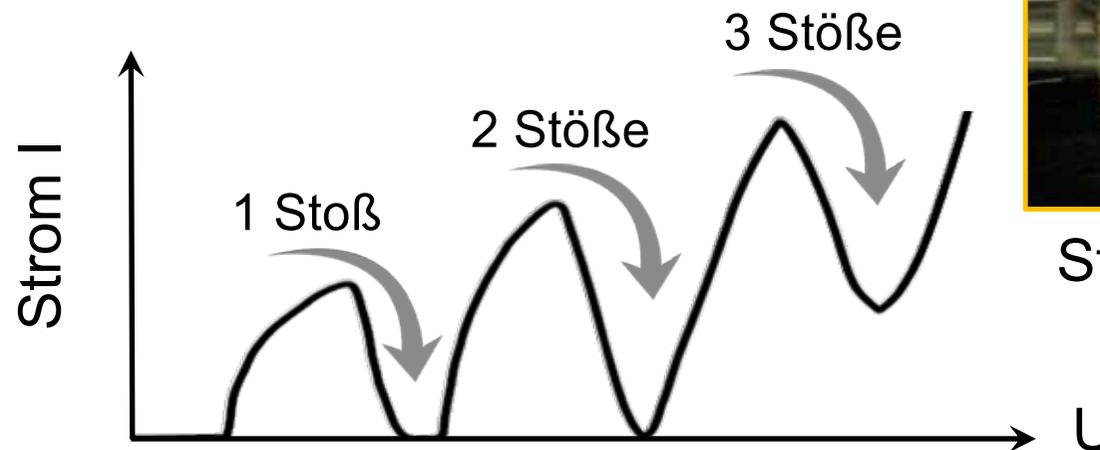


0,1 mbar Neon



Stoßfronten

Frank-Hertz-Kurve



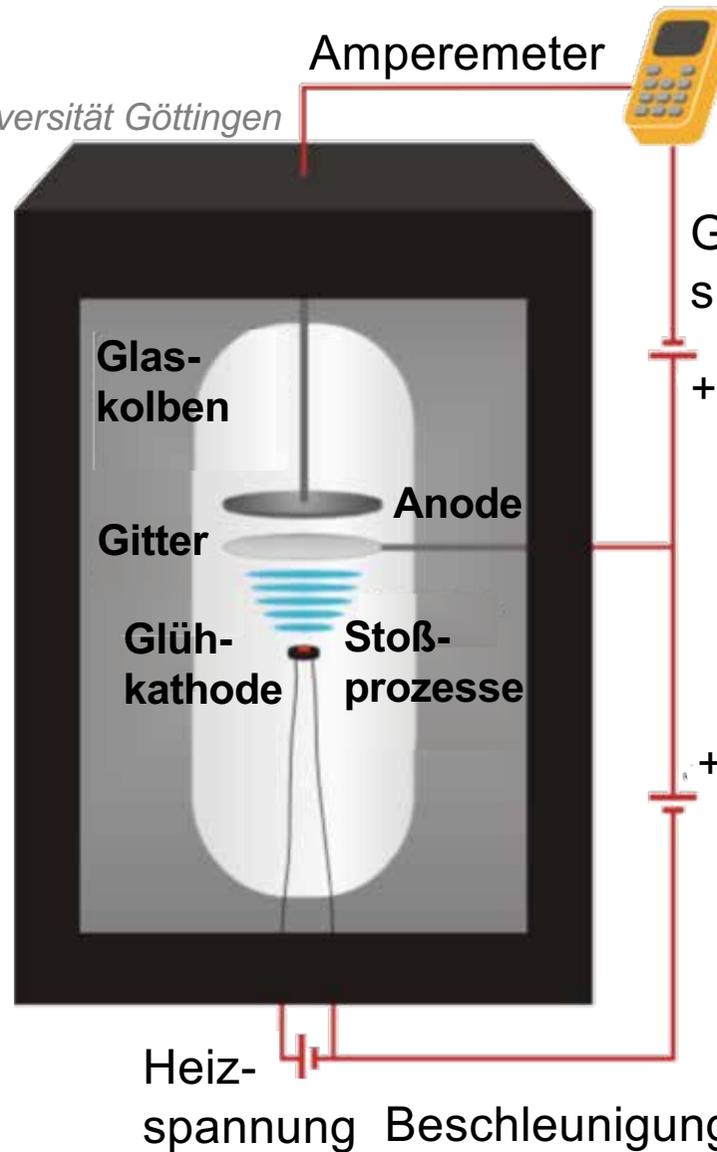
Franck-Hertz Versuch

1913: Elektronen-Stoß

Versuche von
James **Franck**
Gustav **Hertz**

- Elektronen aus heißer Glühkathode werden über Gitter mit U_G beschleunigt
- Kolben gefüllt mit Hg-Dampf unter niedrigem Druck
- Inelastische Stöße von Elektronen mit Hg-Atomen führen zu Energieverlusten

Q: Universität Göttingen



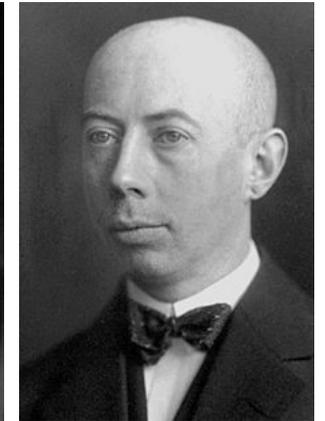
"for their discovery of the laws governing the impact of an electron upon an atom"



Nobelpreis 1925



James Franck



Gustav Hertz

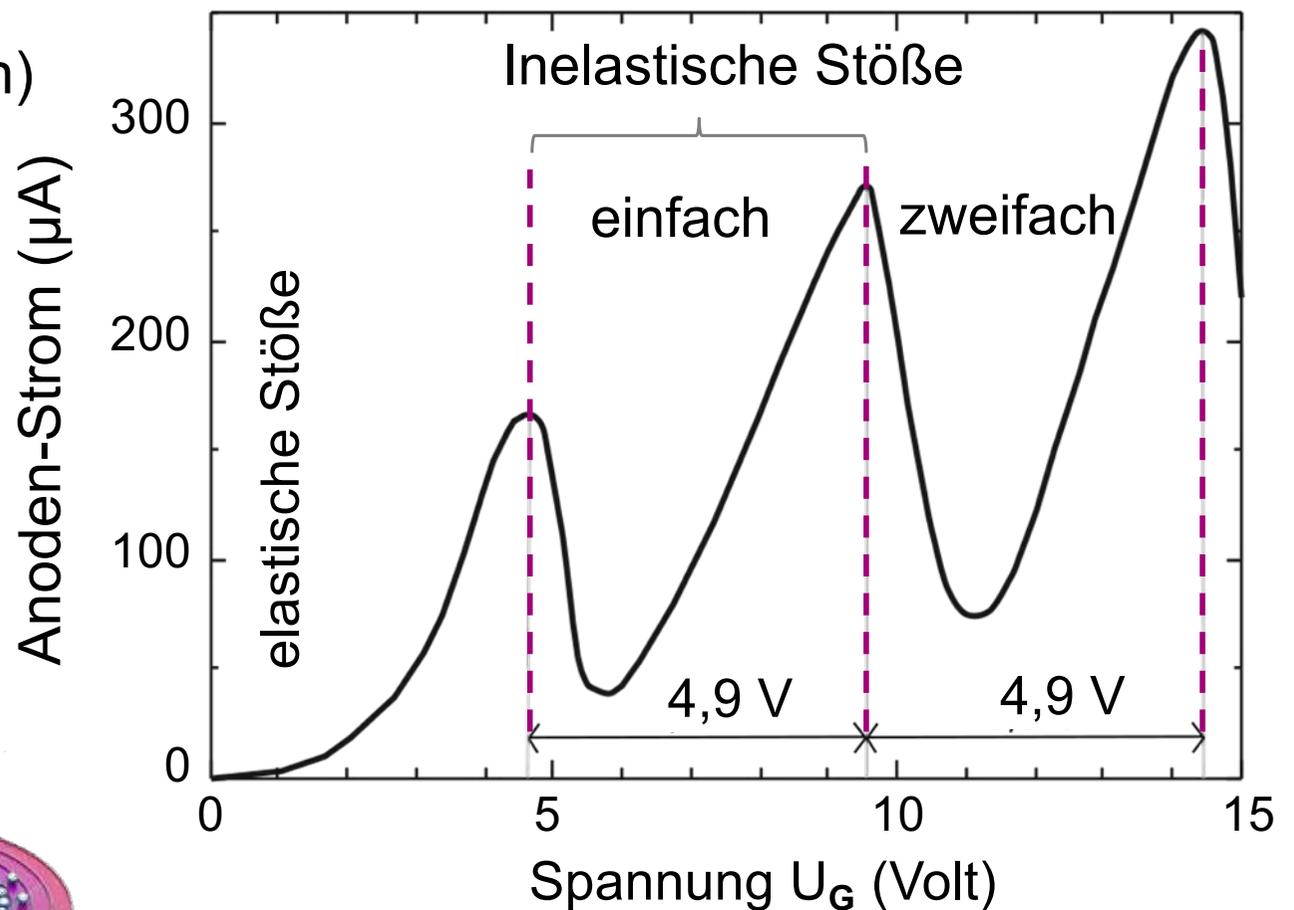
Franck-Hertz Versuch: Implikationen

- Resultate: diskrete Energieverluste der Elektronen durch **atomare Niveaus** in inelastischen Stoßprozessen: $e^- + Hg \rightarrow Hg^*(E_\alpha) + e^- - \Delta E_{kin}$

- Anregung von diskreten Hg* Niveaus (Resonanzen)

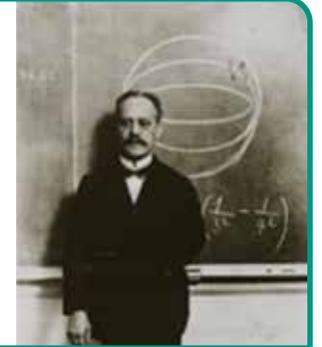
- an Hg*-Resonanzen: großer Energieverlust der e- \Rightarrow Reduktion der Rate an Anode

\Rightarrow Beweis der Anregung atomarer Niveaus mit Elektronen



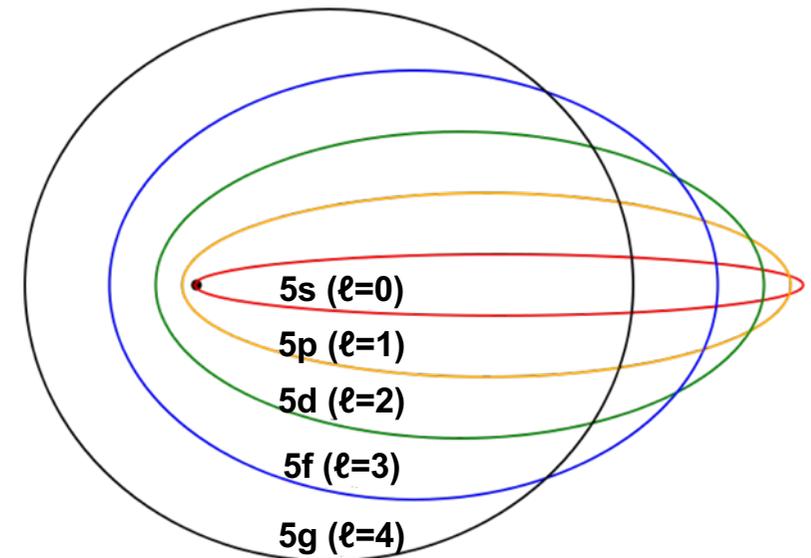
4.4 Bohr-Sommerfeld Theorie

- 1916: A. Sommerfeld erweitert das Bohrsche Atom-Modell durch Einführung von allgem. **Ellipsenbahnen** (analog zu Keplers Planetensystem)
 - Modell ist weiterhin eine semi-klassische Theorie



- Elektronen bewegen sich strahlungslos auf **Ellipsenbahnen**
- Bahndrehimpulszahl ℓ (Nebenquantenzahl, **azimutale Quantenzahl**) ist gequantelt und legt Form der Bahn fest (Halbachse)
- Quantenmechanik (QM, ab 1925) legt **mögliche Werte von ℓ** fest:

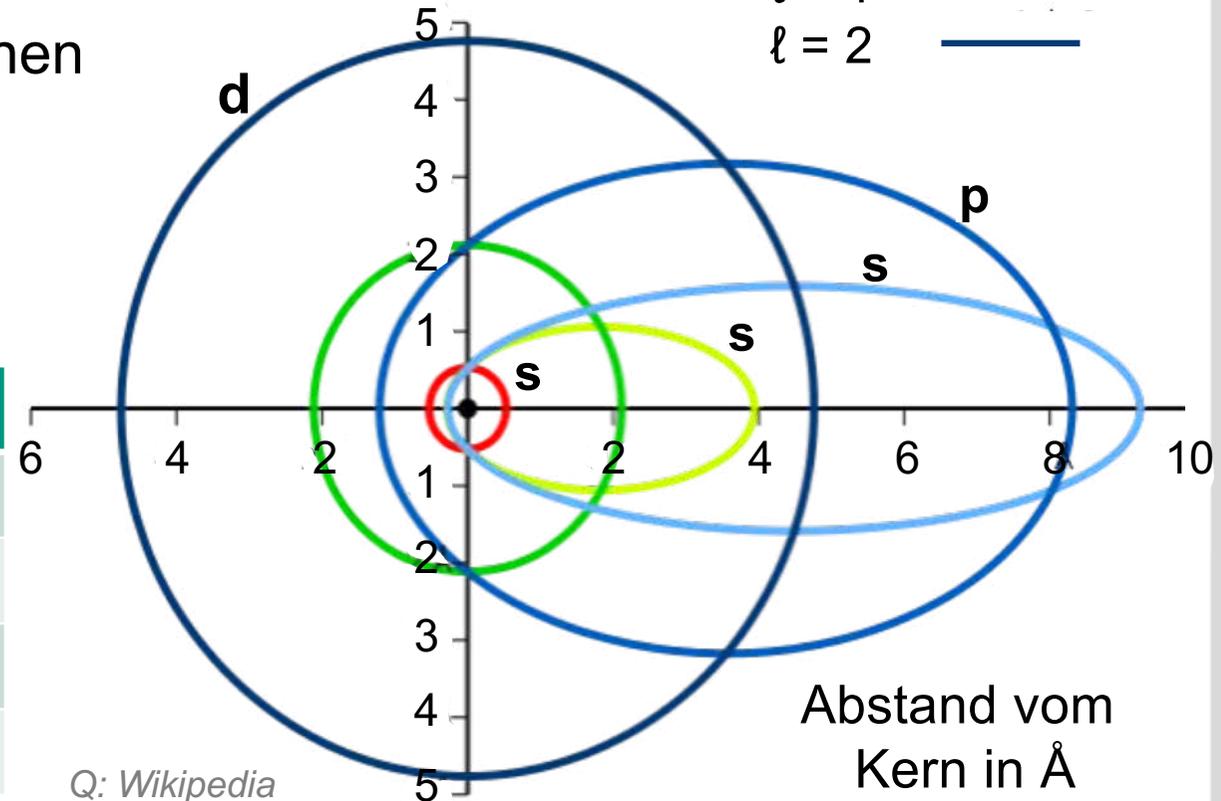
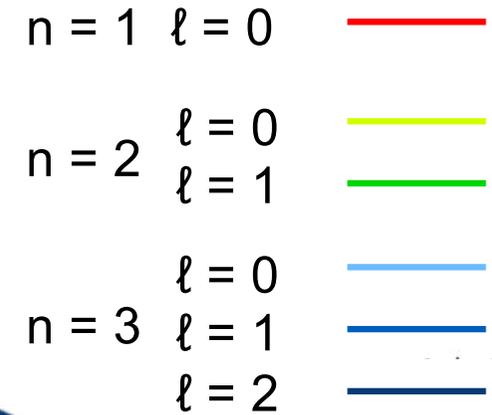
$$\ell = 0, 1, \dots, (n - 1)$$



Sommerfeld-Modell

■ neue **Quantenzahl ℓ** hat wichtige Konsequenzen:

- jeder Energieterm n ist **n -fach entartet**
- für größtmögliches $\ell = n-1 \Rightarrow$ Bohrsche Kreisbahn
- Bahn mit $\ell = 0$ ist quantenmechanisch möglich!
- Bohrsche Theorie liefert falschen Grundzustand, der korrekte Wert $\ell = 0$ der QM wurde experimentell bestätigt



Drehimpuls ℓ	Name	
$\ell = 0$	s	sharp
$\ell = 1$	p	principal
$\ell = 2$	d	diffuse
$\ell = 3$	f	fundamental

Q: Wikipedia