

# Atome & Kerne

Sommersemester 2024

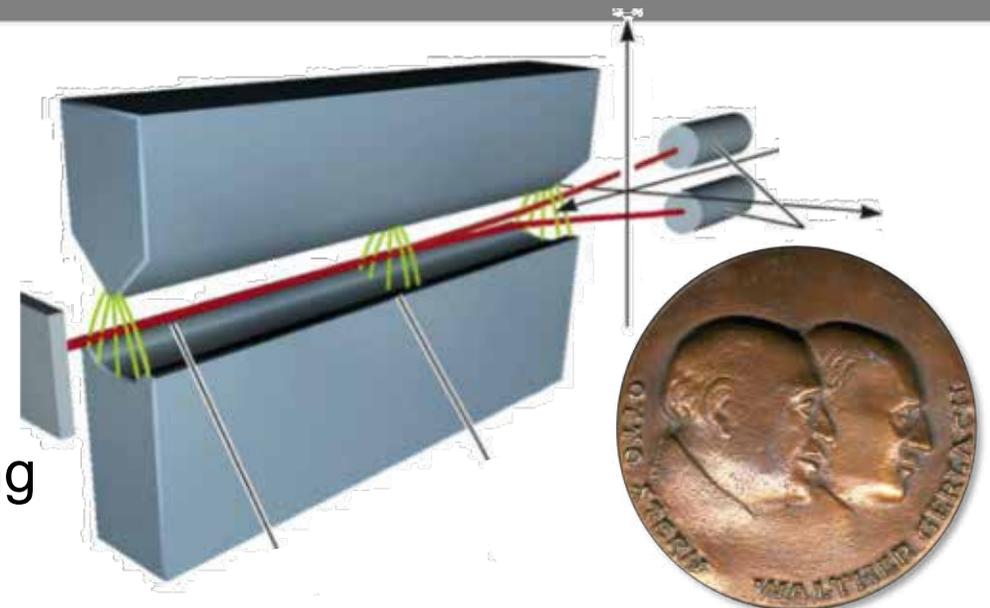
Vorlesung # 11, 04.06.24

Thomas Müller, Institut für Experimentelle Teilchenphysik, Fakultät für Physik

## 6. Das Wasserstoff-Atom

..

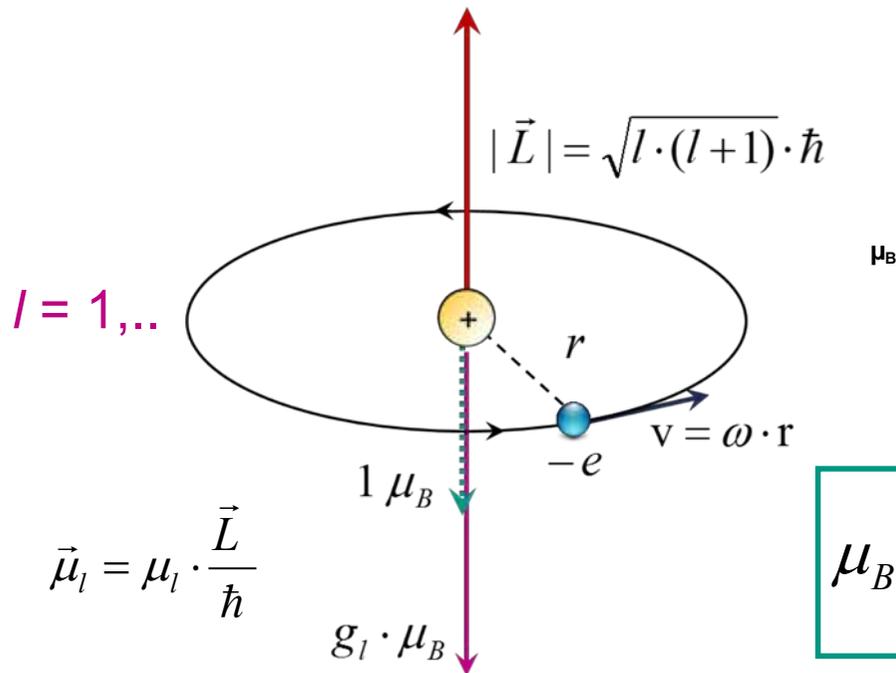
- 6.3 Bahn- und Spinmagnetismus
- 6.4 Richtungsquantelung
- 6.5 Feinstruktur & Spin-Bahnkopplung



# Wh: Bahn- & Spin- Magnetismus

## ■ Magnetische Momente von Bahndrehimpuls L & Spin S

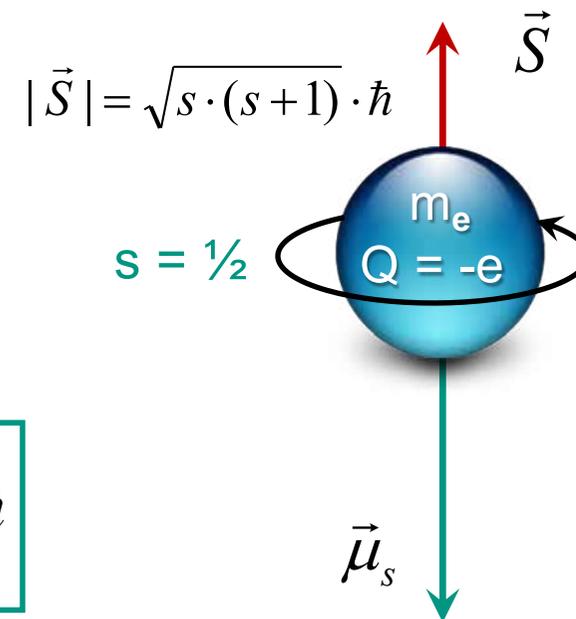
### ■ Bahnmagnetismus $\mu_l$



**magnetisches Moment durch L:**

$$\vec{\mu}_l = -g_l \cdot \mu_B \cdot \frac{\vec{L}}{\hbar} \quad g_l = 1$$

### ■ Spinmagnetismus $\mu_s$



**magnetisches Moment durch S:**

$$\vec{\mu}_s = -g_s \cdot \mu_B \cdot \frac{\vec{S}}{\hbar} \quad g_s = 2$$

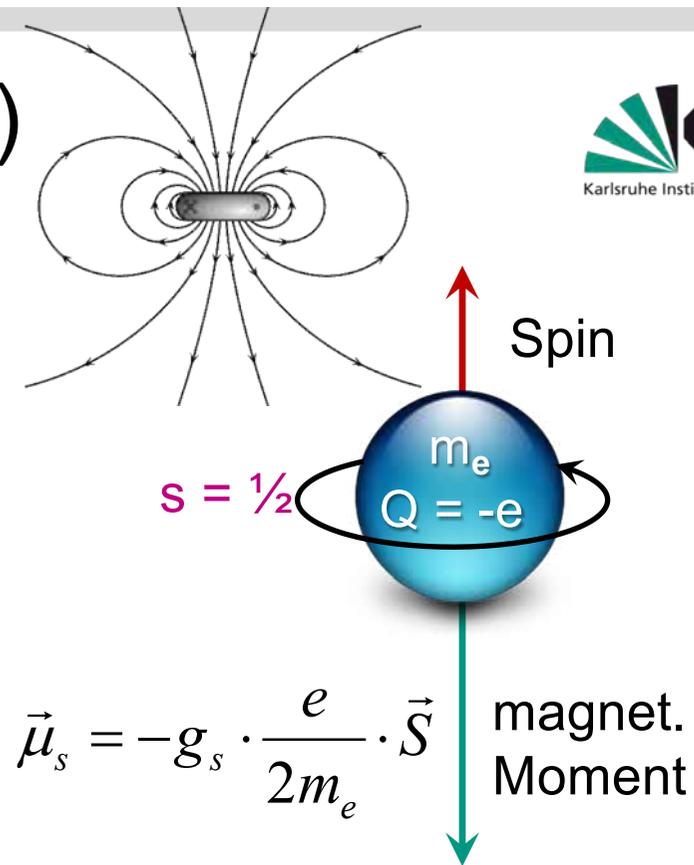
$$\mu_B = \frac{e}{2m_e} \cdot \hbar$$

# Spinmagnetismus (Elektronen)

## ■ Magnetisches Moment des Spins:

$$\vec{\mu}_s = -g_s \cdot \frac{e}{2m_e} \cdot \vec{S}$$

Spin-g-Faktor  $g_s = 2,002$



$$\vec{\mu}_s = -g_s \cdot \frac{e}{2m_e} \cdot \vec{S}$$

magnet. Moment

- Dirac-Theorie fordert Existenz des Spins & sagt g-Faktor Elektron voraus:  $g_s = 2,000$
- g-Faktor des Spins  $\neq$  g-Faktor des Bahndrehimpulses

$$g_s \neq g_l$$



P.A.M. Dirac

# g-Faktor: anomales magnetisches Moment

- **anomales magnetisches Moment** des Elektrons:  
Abweichung des g-Faktors vom Wert der Dirac-Theorie

$$a = \frac{g - 2}{2}$$



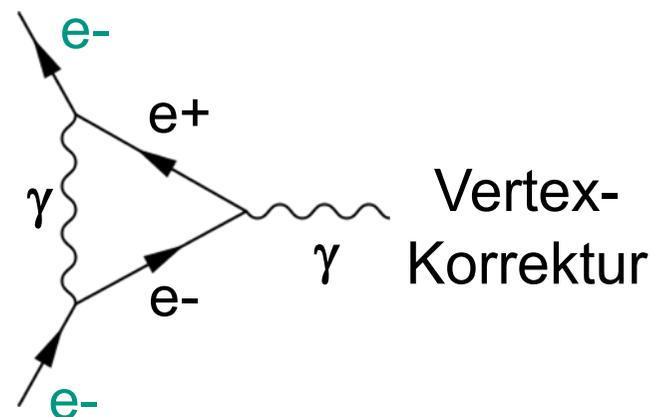
Nobelpreis  
1965



Julian  
Schwinger

- wichtigste Korrektur entsteht durch Prozesse der  
**Quantenelektrodynamik (QED):**

$$a_e = \frac{\alpha}{2\pi} \approx 0,001\,161\,4$$



# g-Faktor: anomales magnetisches Moment

- extrem genaue Messungen und Berechnungen fürs Elektron

## Theorie (Standardmodell)

- theoretische Berechnungen des g-Faktors des Elektrons

$$g_{s,theo} = 2,002\ 319\ 304\ 363\ 29\ (153)$$

**THEO VS. EXP**

## Experiment

- experimentelle Bestimmungen des g-Faktors (aus [Wikipedia](#))

$$g_{s,exp} = 2,002\ 319\ 304\ 361\ 18\ (26)$$

- relative Genauigkeit:  $O(10^{-13})$

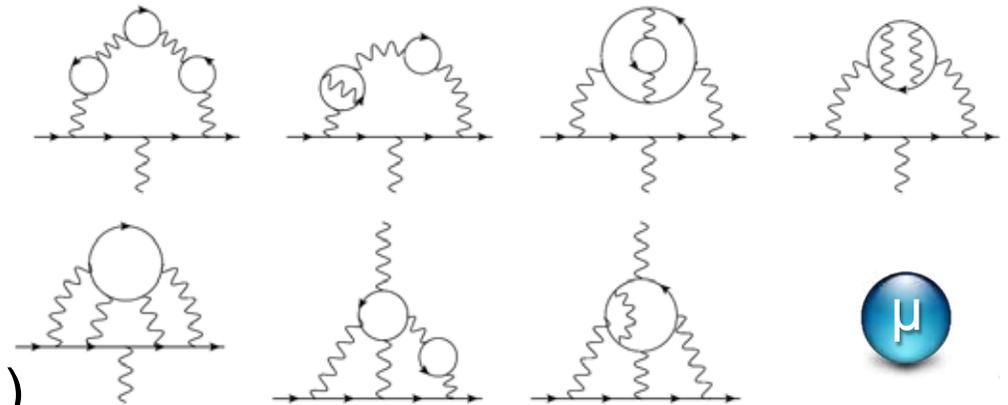
# g-Faktor des Myons: die g-2 Diskrepanz

- seit langem bestehende 3,4  $\sigma$  Diskrepanz für den g-Faktor des Myons

## Theorie (Standardmodell)

- umfangreiche Berechnungen (TTP) QED + Einfluss weiterer Wechselwirkungen & neuer Teilchen:

$$a = \frac{g-2}{2} = a_{\mu,\text{theo}} = 0,001\,165\,918\,04(51)$$

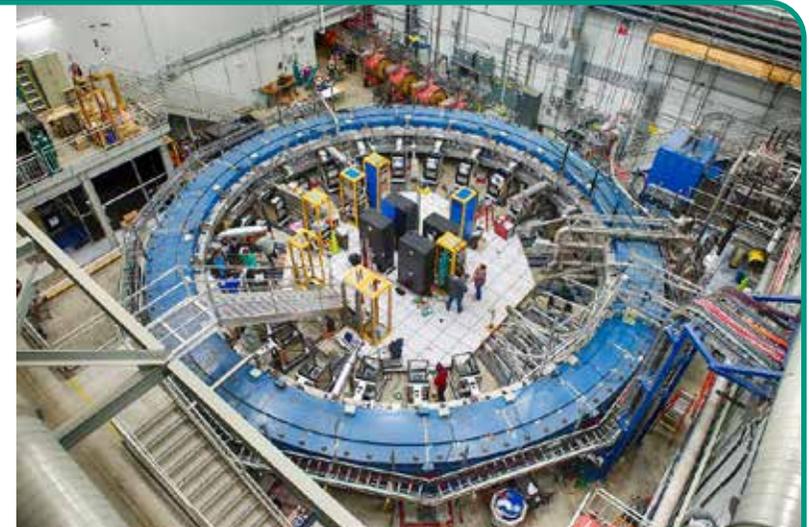


## Experiment

- neueste Messungen (E989):

$$a_{\mu,\text{exp}} = 0,001\,165\,920\,55(22)(10)$$

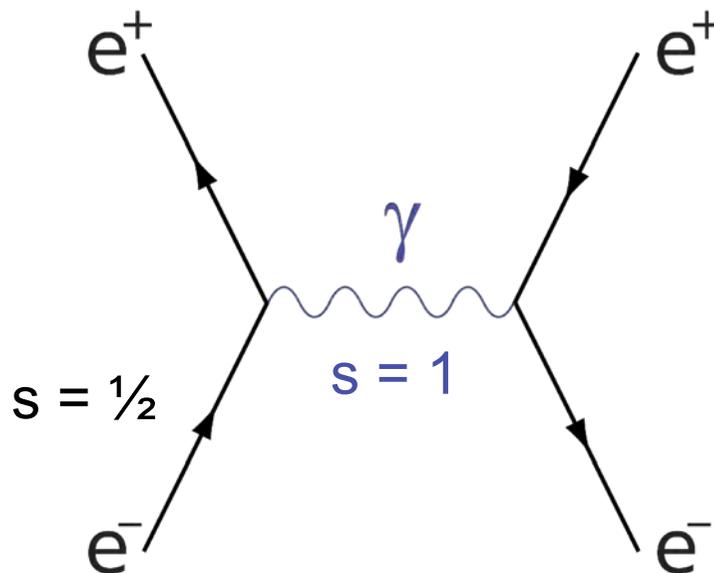
- **g-2 Experiment** am Fermilab (Batavia, USA): Bestimmung der Anomalie des magnetischen Moments des Myons mit 0,2 ppm Präzision



# Spin bei Elementarteilchen

■ **Spin** = wichtige Teilchen-Eigenschaft von Teilchen des Standardmodells

- **Fermionen** ( $s = 1/2$ ) bauen die Materie auf (Quarks, Leptonen)
- (Vektor-) **Bosonen** ( $s = 1$ ) sind Quanten, die Wechselwirkungen vermitteln (z.B. das Photon)



Quarks	2,3 MeV $2/3$ $1/2$ <b>u</b> up	1,275 GeV $2/3$ $1/2$ <b>c</b> charm	173,07 GeV $2/3$ $1/2$ <b>t</b> top	0 0 1 <b>γ</b> Photon	125,9 GeV 0 0 <b>H</b> Higgs Boson	
	4,8 MeV $-1/3$ $1/2$ <b>d</b> down	95 MeV $-1/3$ $1/2$ <b>s</b> strange	4,18 GeV $-1/3$ $1/2$ <b>b</b> bottom	0 0 1 <b>g</b> Gluon	Eichbosonen $s = 1$	
	<2 eV 0 $1/2$ <b>ν<sub>e</sub></b> Elektron-Neutrino	<0,19 MeV 0 $1/2$ <b>ν<sub>μ</sub></b> Myon-Neutrino	<18,2 MeV 0 $1/2$ <b>ν<sub>τ</sub></b> Tau-Neutrino	91,2 GeV 0 1 <b>Z<sup>0</sup></b> Z Boson		
	0,511 MeV -1 $1/2$ <b>e</b> Elektron	105,7 MeV -1 $1/2$ <b>μ</b> Myon	1,777 GeV -1 $1/2$ <b>τ</b> Tau	80,4 GeV ±1 1 <b>W<sup>±</sup></b> W Boson		
	Fermionen mit $s = 1/2$			Bosonen mit $s = 1 / 0$		
	Leptonen					

# Eigenschaften des Spins

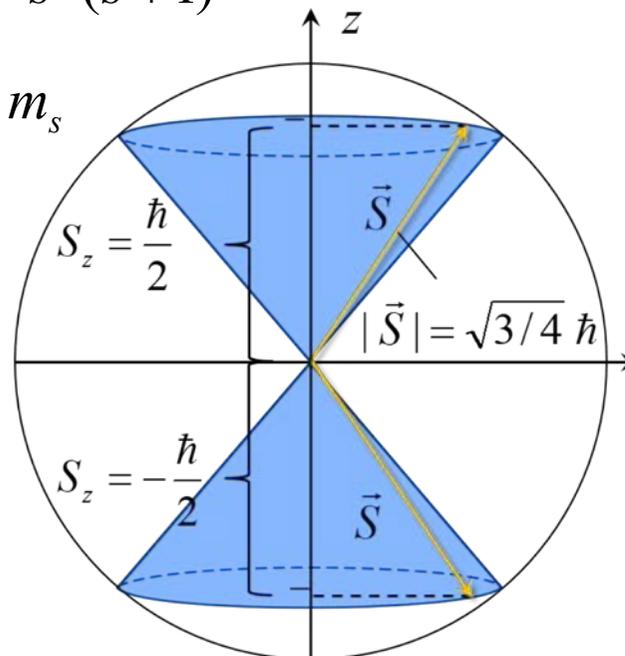
- **Quantenobjekte: Spin S ist eine fundamentale Eigenschaft**

## Spin – Einstellmöglichkeiten ( $s=1/2$ )

$$\hat{S}^2 |s, m_s\rangle = \hbar^2 \cdot s \cdot (s + 1)$$

$$\hat{S}_z |s, m_s\rangle = \hbar \cdot m_s$$

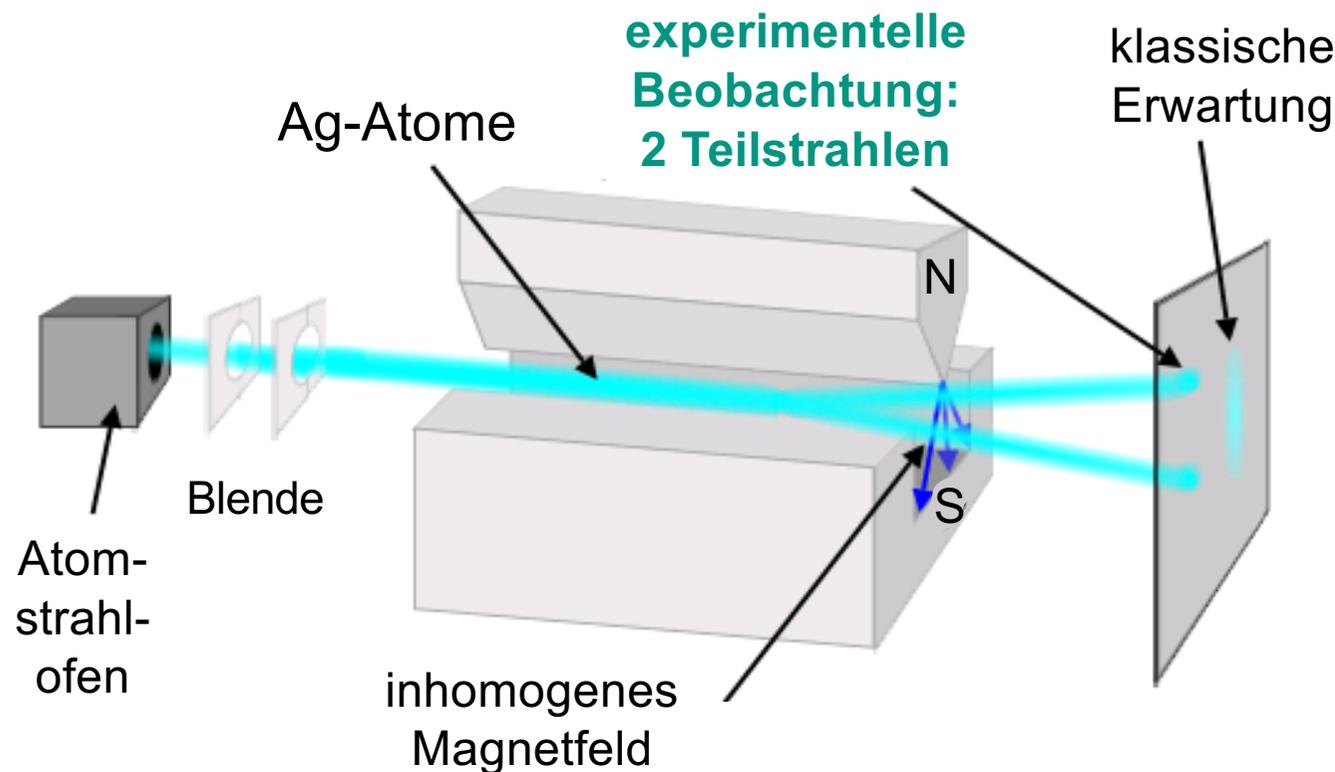
Zustand mit  
Spinquanten-  
zahlen  $s, m_s$



Einstellmöglichkeiten des Spins  
geladener Objekte in externem  
Magnetfeld (**2 Spin-Freiheitsgrade**)

# 6.4 Richtungsquantelung

- 1922: Otto Stern & Walther Gerlach demonstrieren
  - **Richtungsquantelung**: nur diskrete Einstellung von magnetischen Momenten relativ zu externem Magnet-Feld (parallel / anti-parallel)



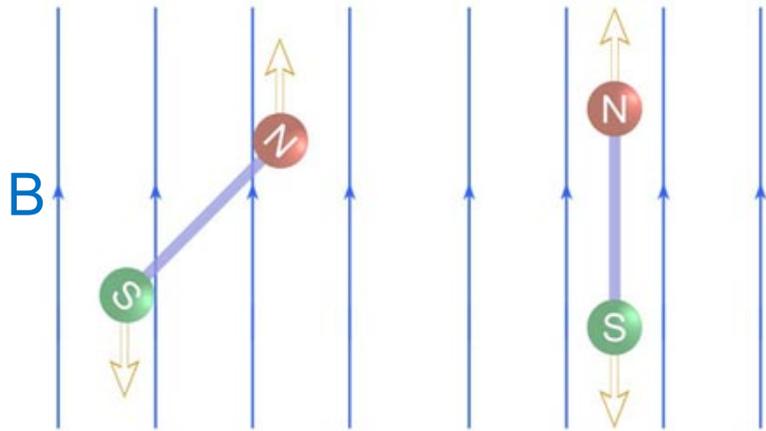
Otto Stern  
(1888-1969)



Walther Gerlach  
(1889-1979)

# Stern-Gerlach Experiment

- **Idee:** ein magnetischer Dipol (Atom) durchlaufe ein B-Feld mit großer Inhomogenität ( $\partial B/\partial z$ ) senkrecht zur Flugrichtung



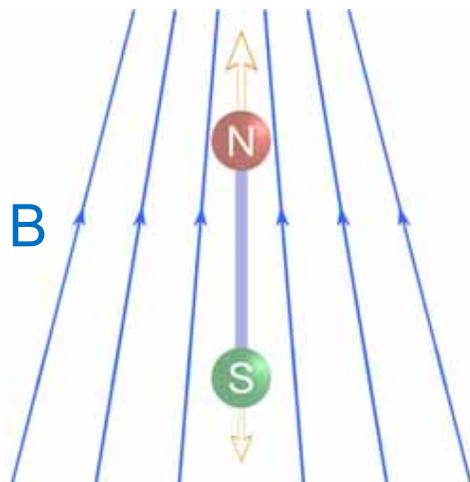
**Dipol in homogenem B-Feld:**

$$\Rightarrow \text{Drehmoment } \vec{M} = \vec{\mu} \times \vec{B}$$

$$\text{mit } E_{\text{pot}} = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

**Dipol in inhomogenem B-Feld (z-Achse):**

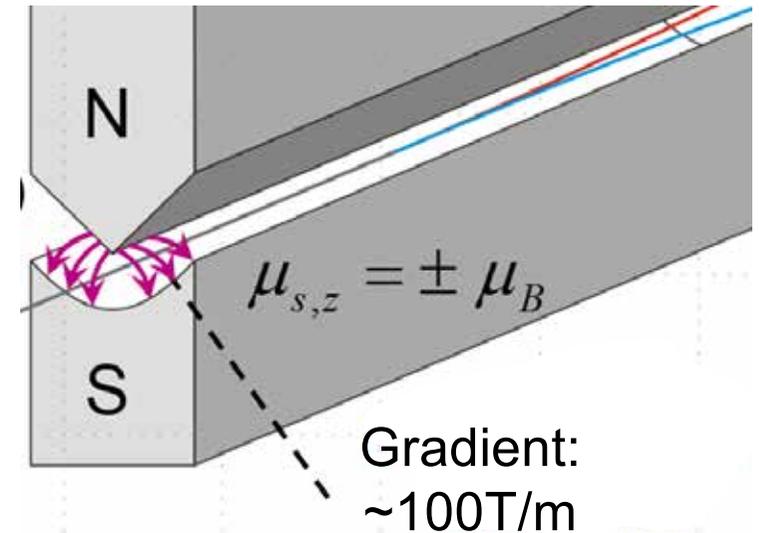
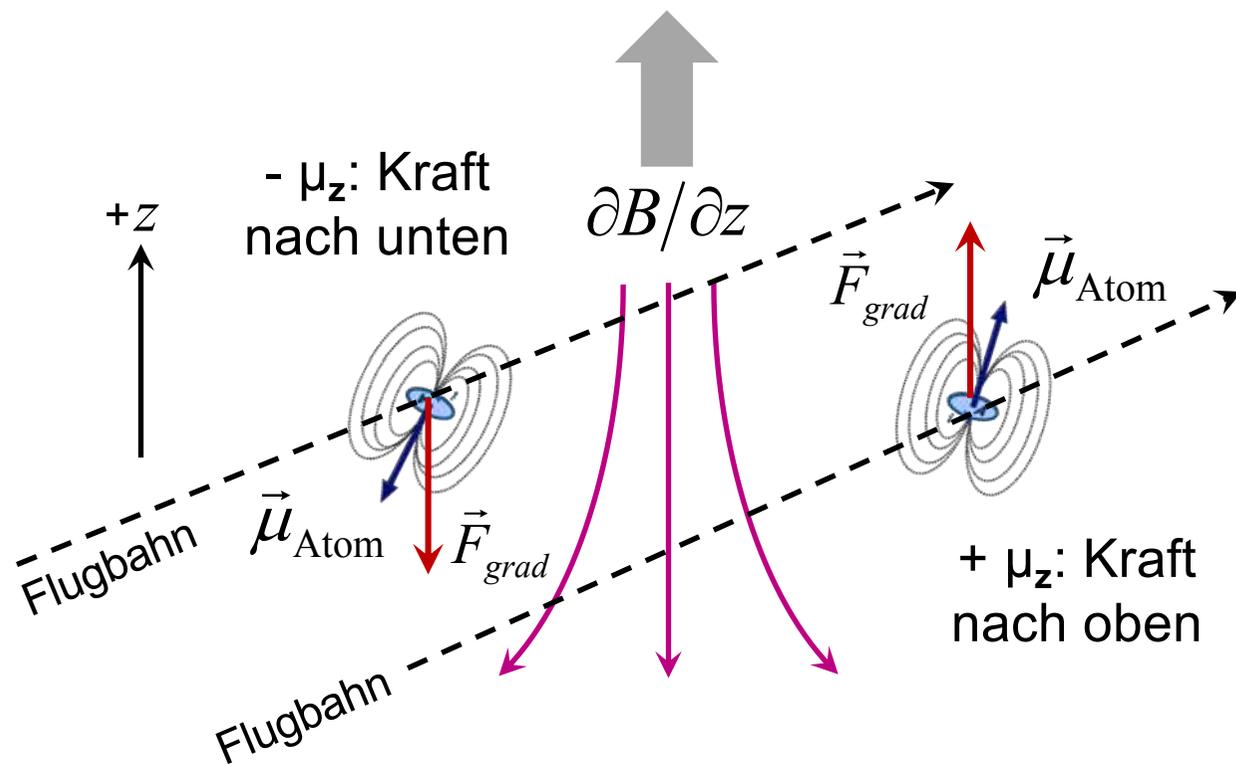
$\Rightarrow$  resultierende **Gradientenkraft** auf Dipol



$$\vec{F}_{\text{grad}} = -\nabla(-\vec{\mu} \cdot \vec{B}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu_z \cdot \frac{\partial B}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu \cdot \frac{\partial B}{\partial z} \cdot \cos \alpha \end{pmatrix}$$

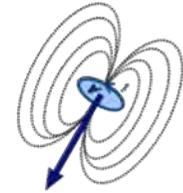
- **Idee:** je nach z-Ausrichtung des magnetischen Dipols (+z/-z -Richtung) erfährt er eine Kraft senkrecht zu seiner Flugbahn (oben/unten)

$$F_z = \mu_z \cdot \frac{\partial B}{\partial z}$$



# Magnetisches Moment Ag-Atom

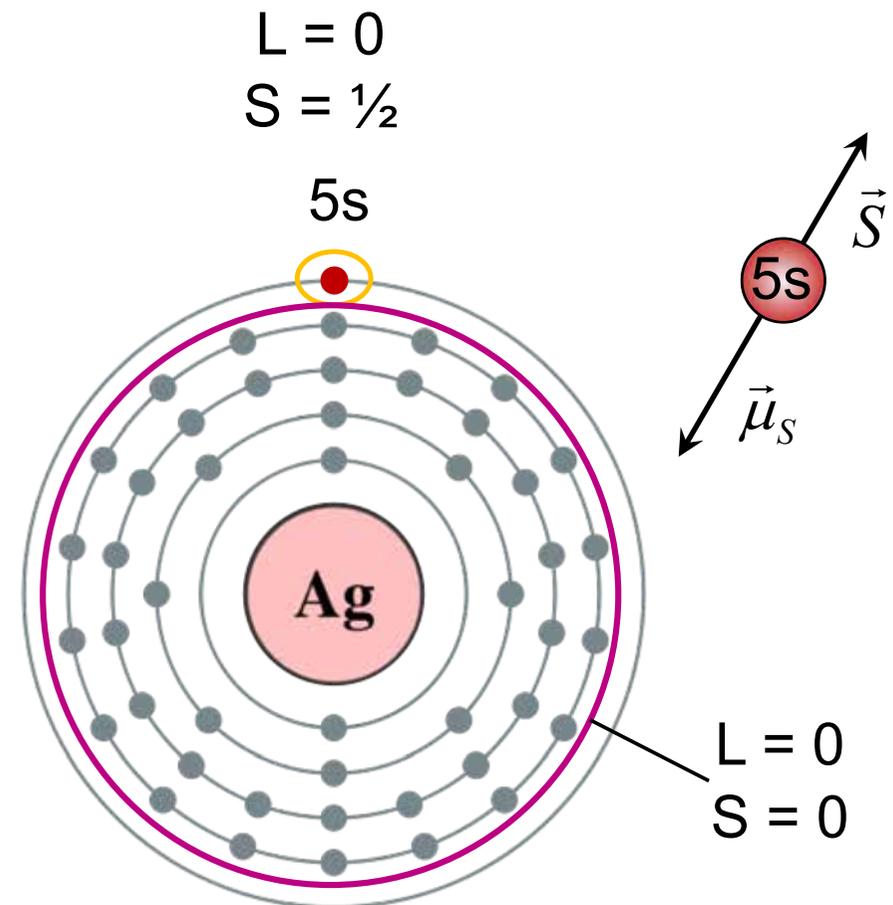
- Testobjekt ohne Ladung  $Q$ , nur mit magnetischem Moment  $\mu$ :  
⇒ unpolarisierter Atomstrahl mit **elektrisch neutralen** Ag-Atomen



- Atom ohne elektrische Ladung  $Q$   
⇒ keine Lorentzkraft

$$\vec{F}_L = -\left(e \cdot \vec{E} + e \cdot \vec{v} \times \vec{B}\right) = 0$$

- **innere 4 Schalen** abgeschlossen  
⇒ kein Bahndrehimpuls / Spin
- magnetisches Moment  $\mu$  nur durch Spin des **Leucht-Elektrons** im 5s Niveau (s-Orbital mit  $L = 0$ )



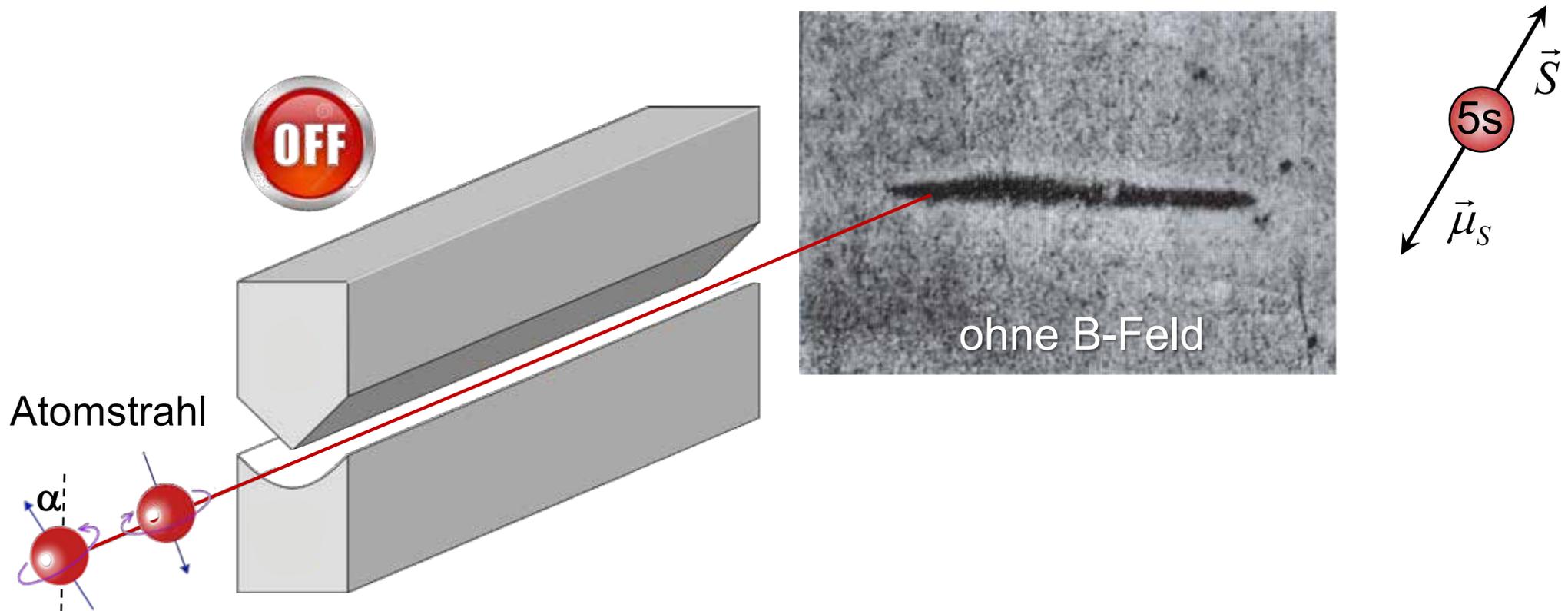
# Stern-Gerlach Experiment – ohne B-Feld

## ■ Unpolarisierter Atomstrahl mit neutralen Ag-Atomen:

- ohne B-Feld: keine magnetische Gradientenkraft, keine Ablenkung

$$F_z = \mu_z \cdot \frac{\partial B}{\partial z} = 0$$

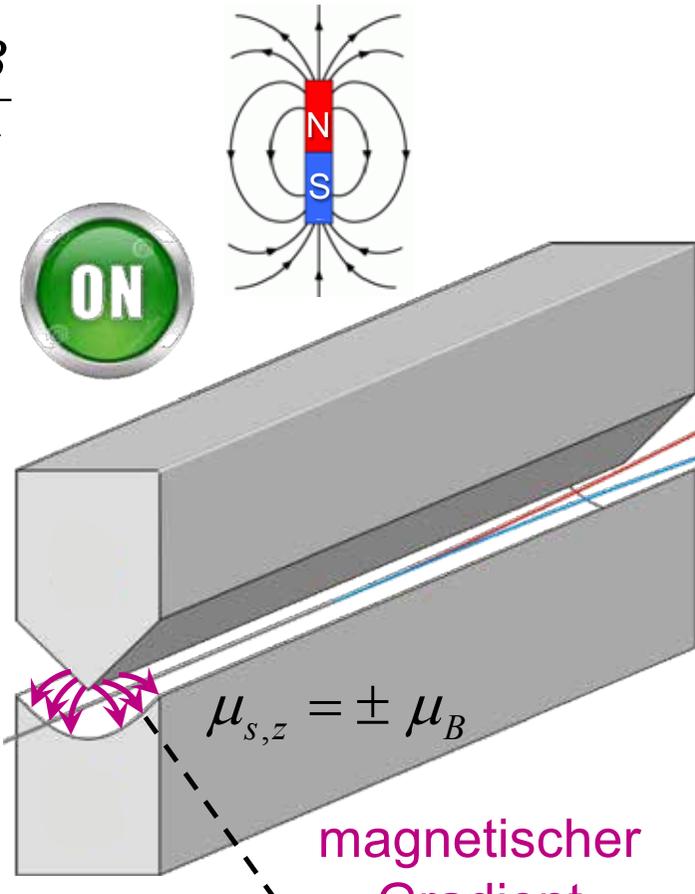
- B = 0: Atomstrahl zeigt keine Ablenkung



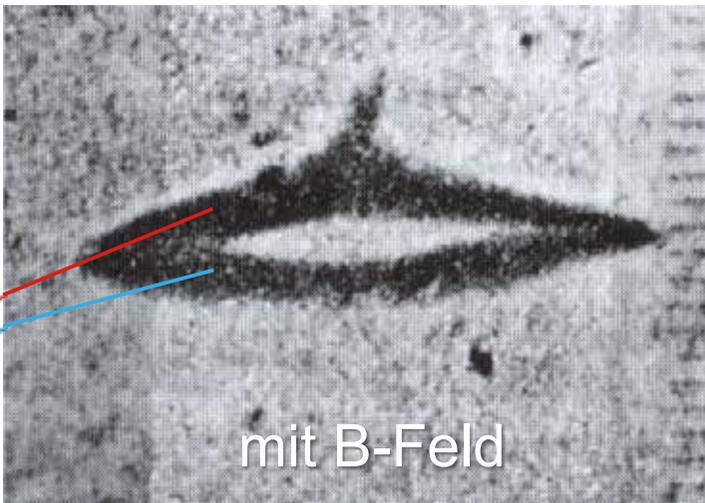
# Stern-Gerlach Experiment – mit B-Feld

- -> Experimentelle Resultate zeigen immer **2 diskrete Atomstrahlen**
  - **klassische Erwartung**: magnetische Momente beliebig ausgerichtet, wir würden also einen verschwommenen Fleck erwarten!

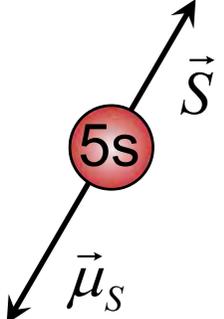
$$F_z = \mu_z \cdot \frac{\partial B}{\partial z}$$



Original-Resultate von Stern & Gerlach



mit B-Feld



Atomstrahl

$\mu_{s,z} = \pm \mu_B$

magnetischer Gradient

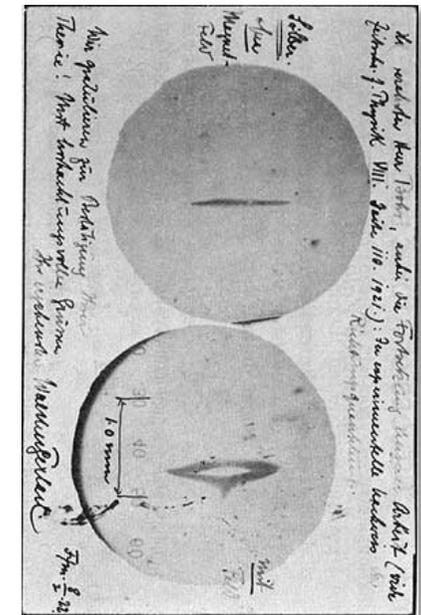
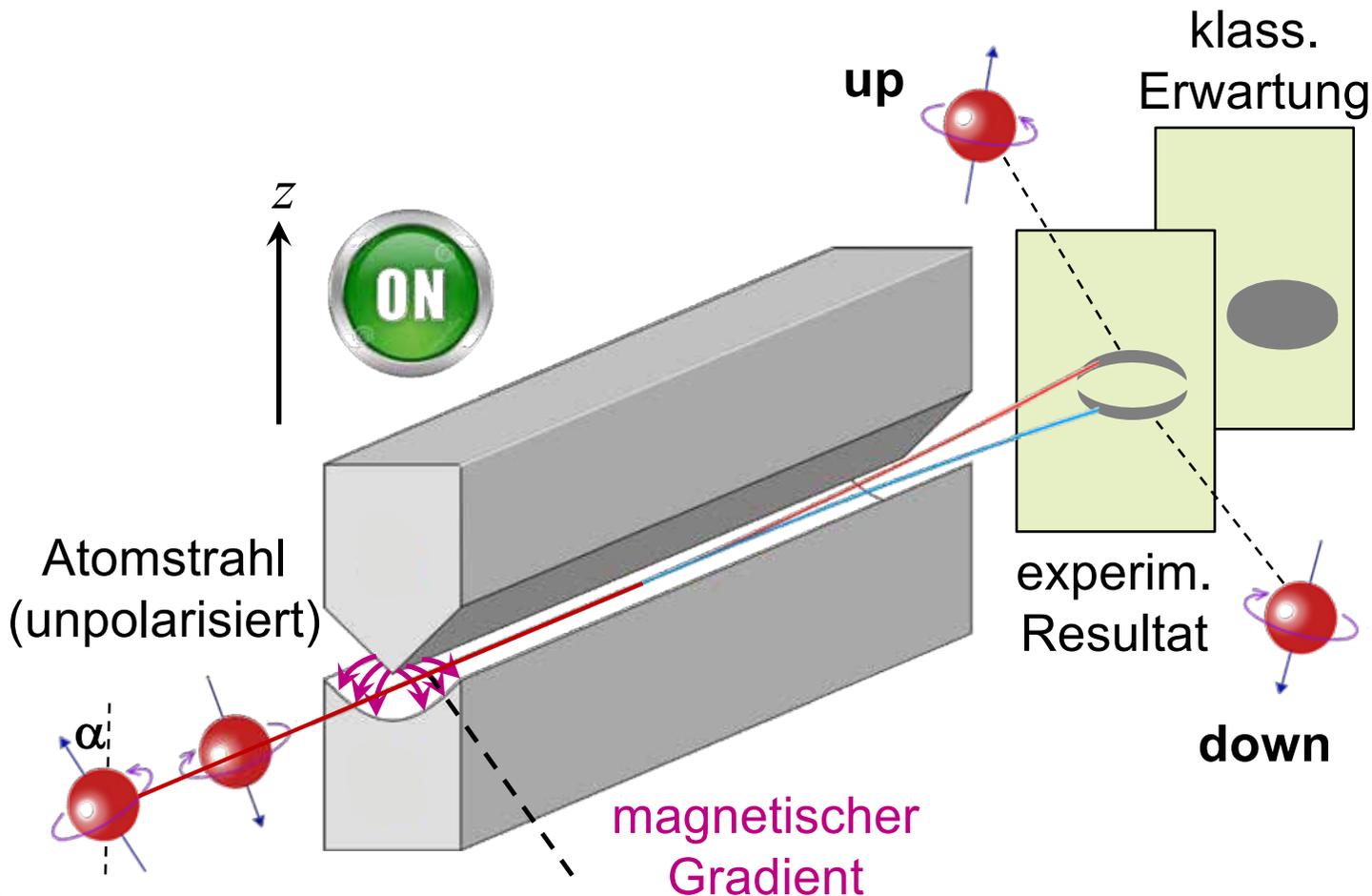
5s

$\vec{\mu}_s$

$\vec{S}$

# Stern-Gerlach Experiment - Implikationen

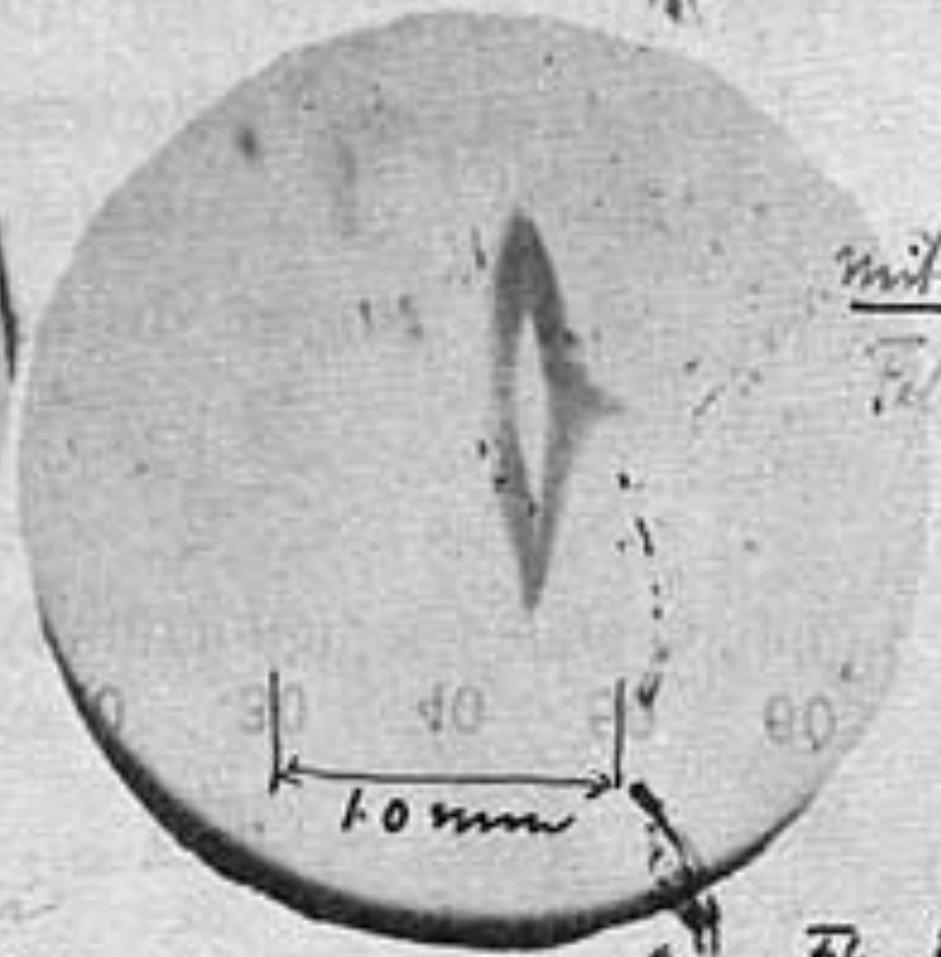
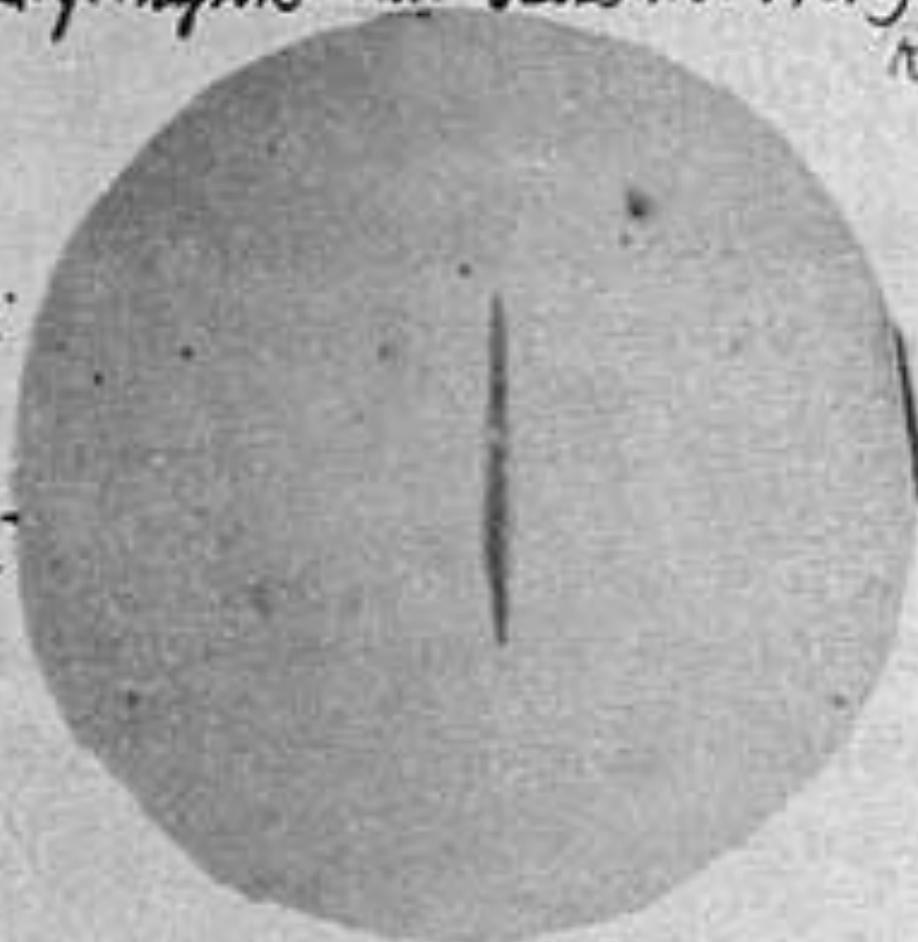
- Es folgt: **2 Spin-Richtungen** für Elektronen: **up** - **down**



8.2.1922: Postkarte von  
Walther Gerlach an  
Niels Bohr

Es werden hier Bohr, auch die Fortsetzung unserer Arbeit (siehe  
 Zeitungs-f. Physik VIII. Seite 110. 1921.): Zu experimentelle Nachweis  
 Richtungsquantelung.

Silber.  
Auer  
 Magnet-  
 Feld



Wir gratulieren zur Bestätigung Ihrer  
 Theorie! Mit hochachtungsvoller Grüsse  
 Ihr ergebener  
 Walter Gerlach

Ffm.  $\frac{8}{2}$ . 22.

# Stern-Gerlach Experiment – Implikationen:

## ■ 2 Spin-Freiheitsgrade für Elektronen: up - down

- zwei Drehrichtungen für Elektronen (linkshändig, rechthändig)

$$|\vec{\mu}_S| = \sqrt{3} \cdot \mu_B$$

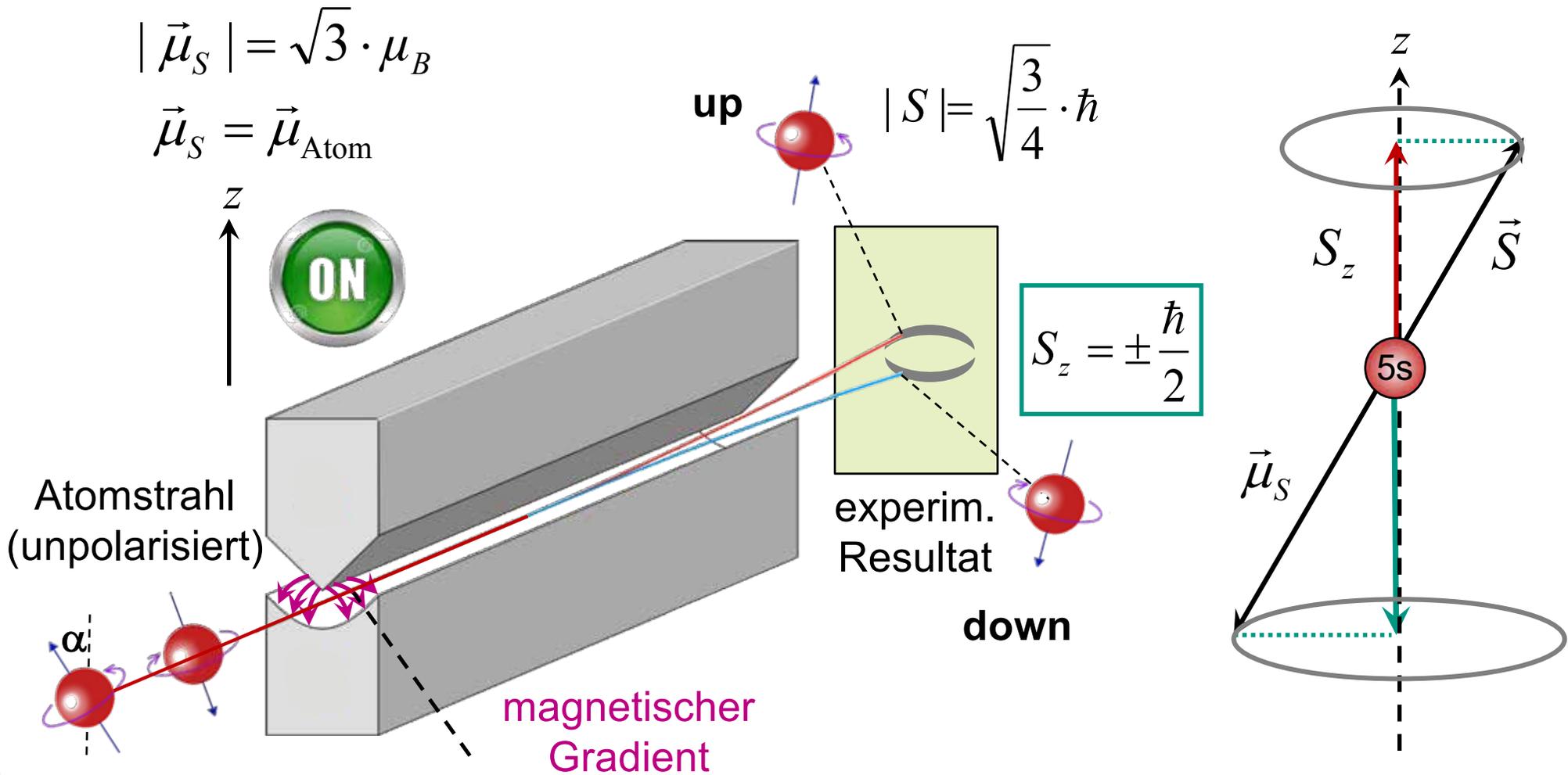
$$\vec{\mu}_S = \vec{\mu}_{\text{Atom}}$$

up

$$|S| = \sqrt{\frac{3}{4}} \cdot \hbar$$

$$S_z = \pm \frac{\hbar}{2}$$

down



# Stern-Gerlach Experiment - Implikationen

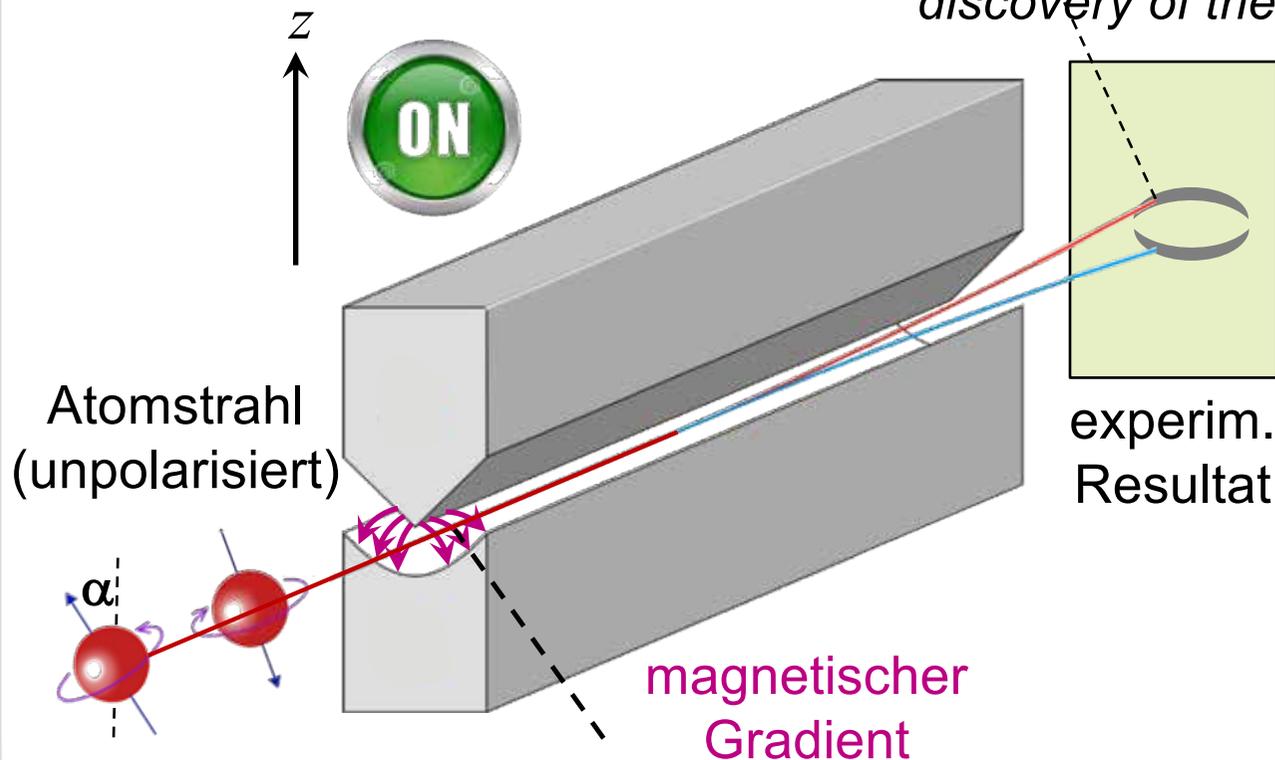
## ■ 2 Spin-Freiheitsgrade für Elektronen: up - down

- Experimente mit H-Atomen zeigen Resultate wie mit Ag-Atomen

$$|\vec{\mu}_S| = \sqrt{3} \cdot \mu_B$$

$$\vec{\mu}_S = \vec{\mu}_{\text{Atom}}$$

Der Nobel Preis in Physik 1943 wurde (nur) Otto Stern verliehen *"for his contribution to the development of the molecular ray method and his discovery of the magnetic moment of the proton"*.



Otto Stern  
(1888-1969)

82x nominiert...



# Stern-Gerlach Experiment - Rückblick

- Experiment sollte Bohrsche Theorie (quantisierte Orbitale) bestätigen
  - die experimentellen Resultate wurden erst 5 Jahre später korrekt als **Richtungsquantisierung des Spins** interpretiert (Fraser 1927)
  - aus der Aufspaltung der Teilstrahlen bestimmten Stern und Gerlach das entsprechende **magnetische Moment  $\mu = \mu_B = 9,3 \cdot 10^{-24} \text{ J/T}$**
  - „Koinzidenz“ der Stärke von Bahn- und Spin- Magnetismus

$$\vec{\mu}_l = -g_l \cdot \mu_B \cdot \frac{\vec{L}}{\hbar}$$

$$g_l = 1, l = 1$$

$$\vec{\mu}_s = -g_s \cdot \mu_B \cdot \frac{\vec{S}}{\hbar}$$

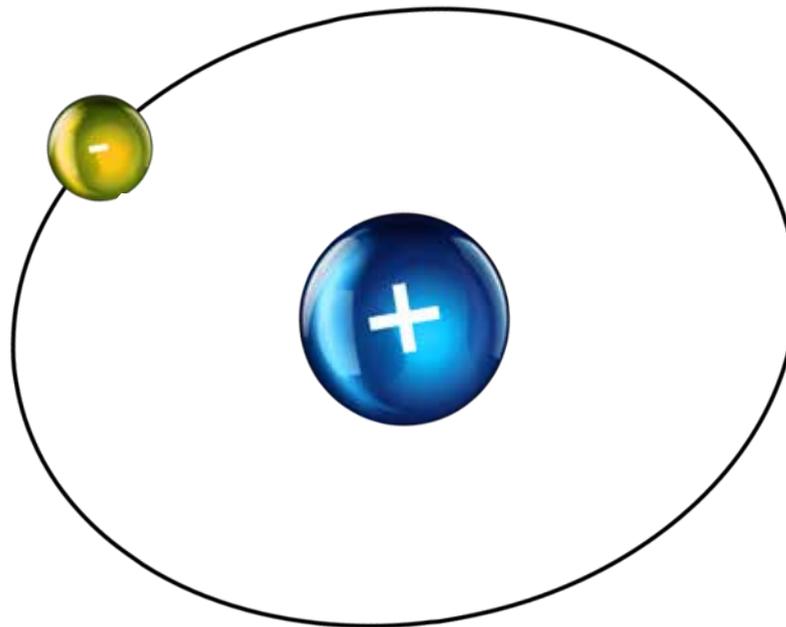
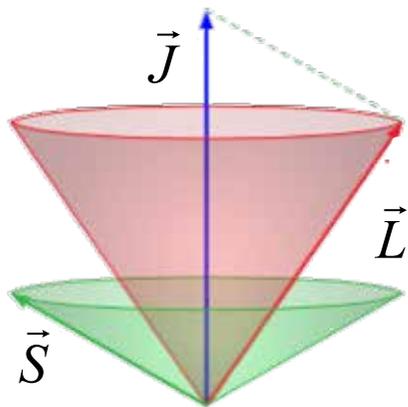
$$g_s = 2, s = \frac{1}{2}$$


$$\vec{\mu}_l = -g_l \cdot \mu_B \cdot \frac{\vec{L}}{\hbar}$$

# 6.5 Feinstruktur, Spin-Bahnkopplung

## Feinstruktur

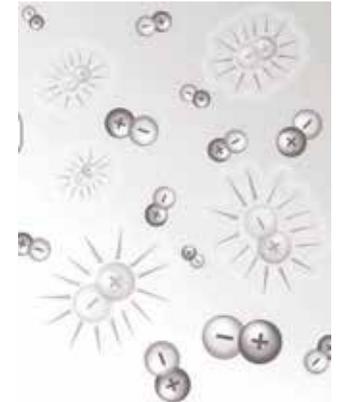
- Spin-Bahn-Kopplung



H-Atom = der Rosetta-Stein der Atomphysik

## Hyperfeinstruktur

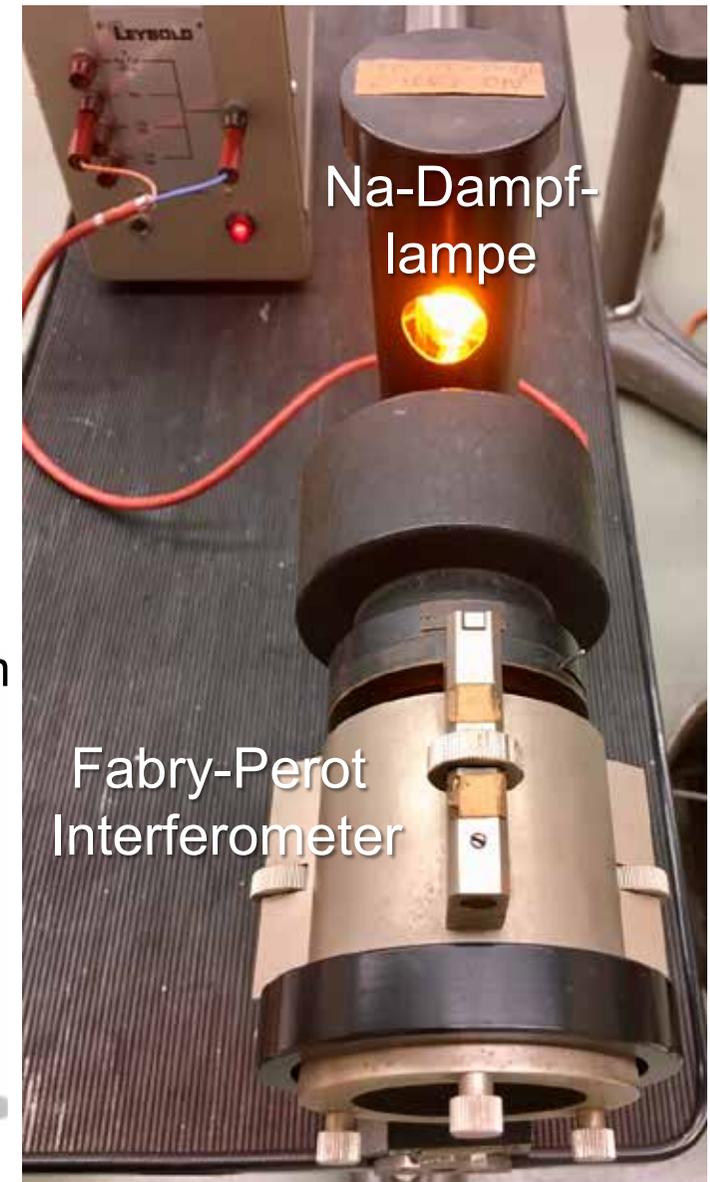
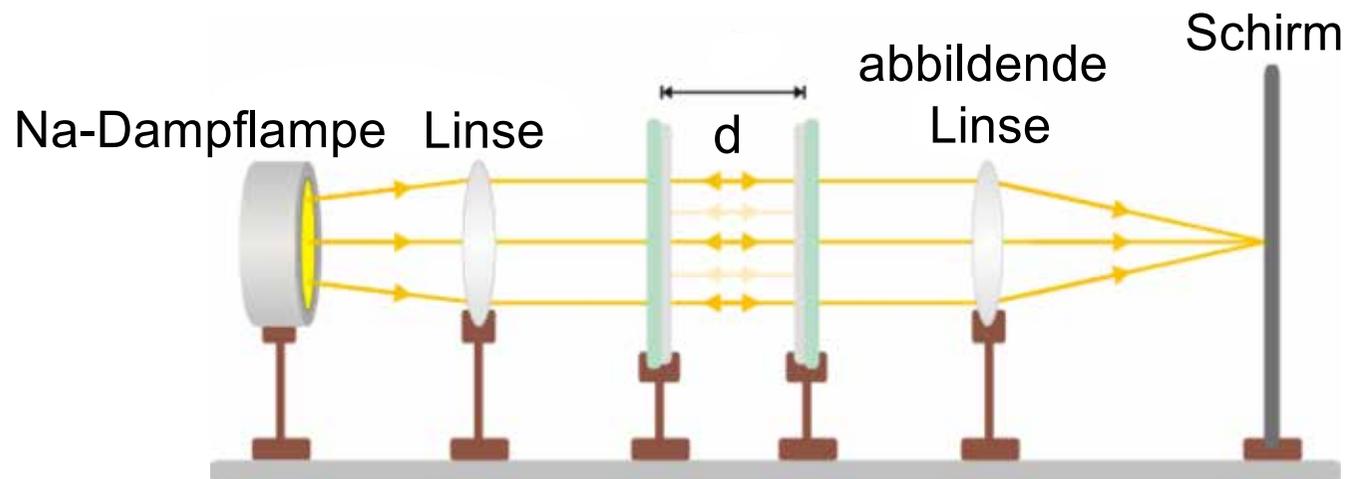
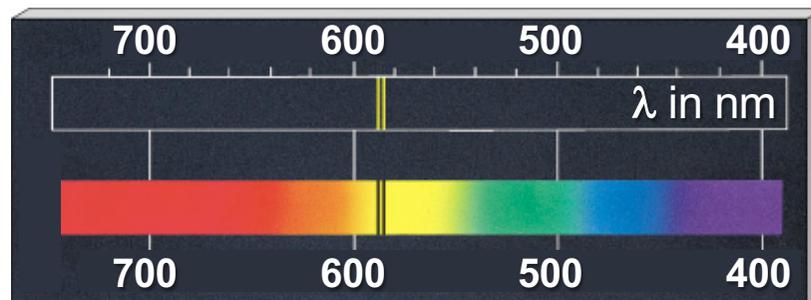
- WW der Magn. Momente von Elektron und Kern  
-> Kerneigenschaften
- Vakuumpolarisation  
-> QED



# Experiment: D-Linien von Natrium

## ■ Dublettstruktur der D-Linie von Na

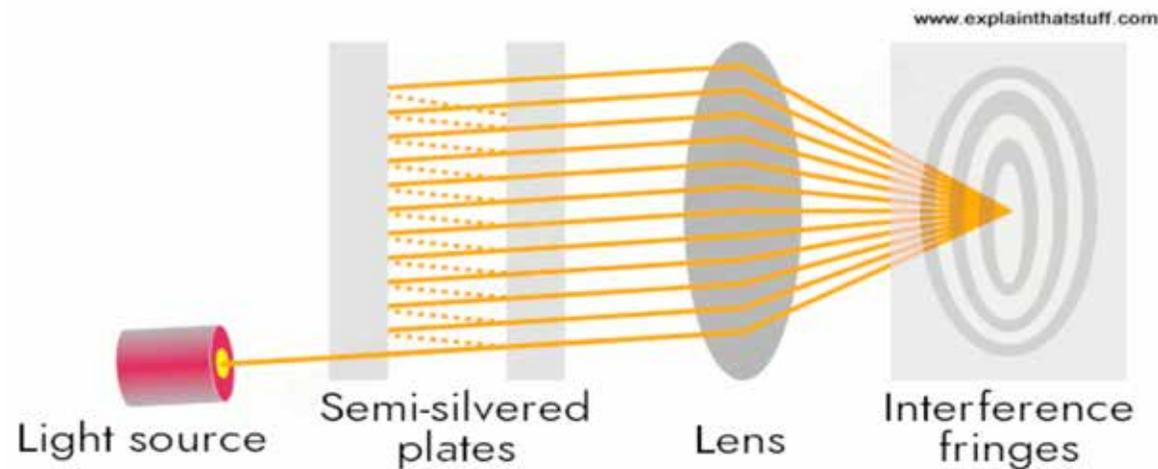
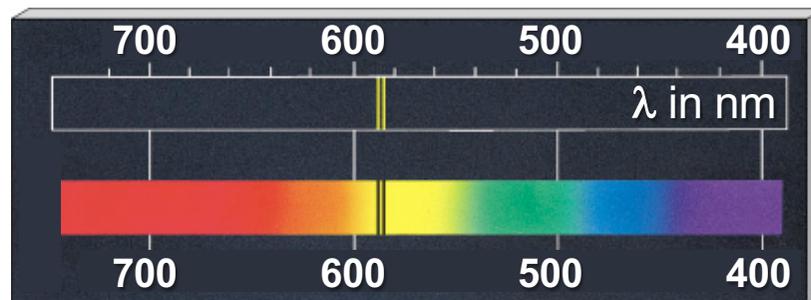
- Lichtquelle: Na-Dampf Lampe
- Spektrum: Fabry-Perot-Interferometer



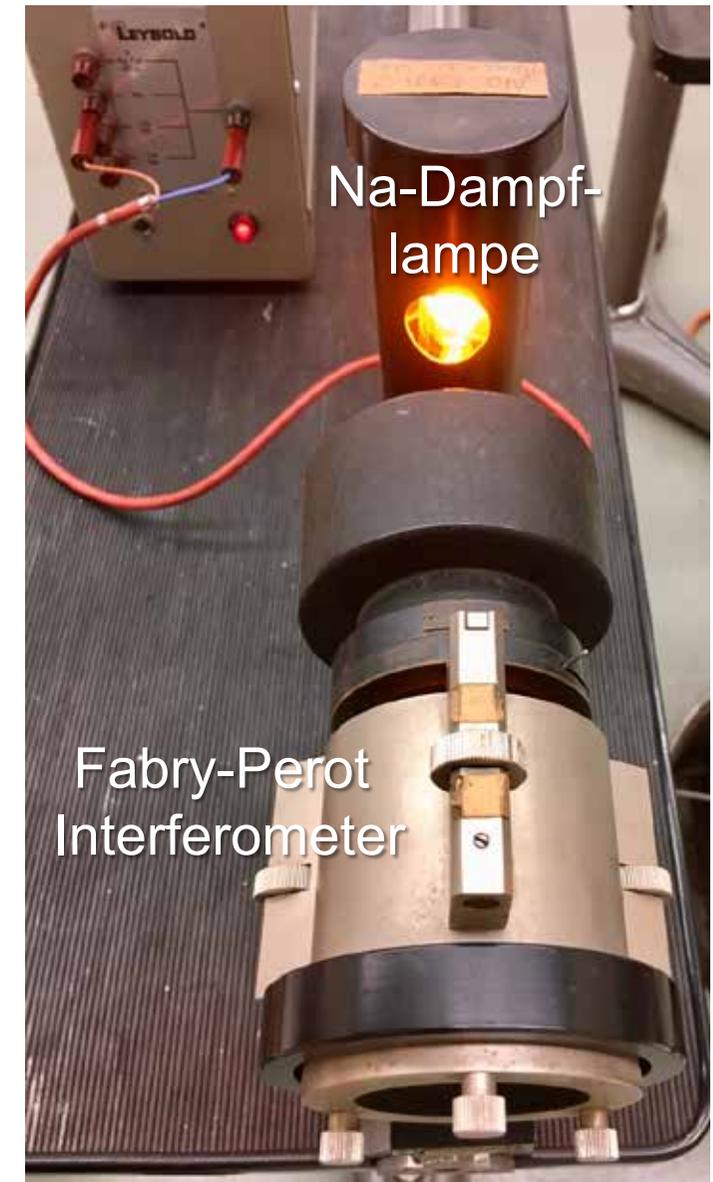
# Experiment: D-Linien von Natrium

## ■ Dublettstruktur der D-Linie von Na

- Lichtquelle: Na-Dampf-lampe
- Spektrum: Fabry-Perot-Interferometer



Fabry-Perot

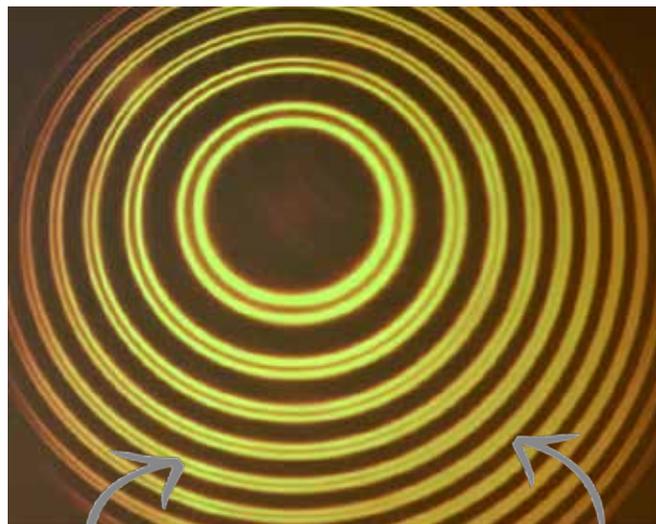


# D-Linien von Natrium

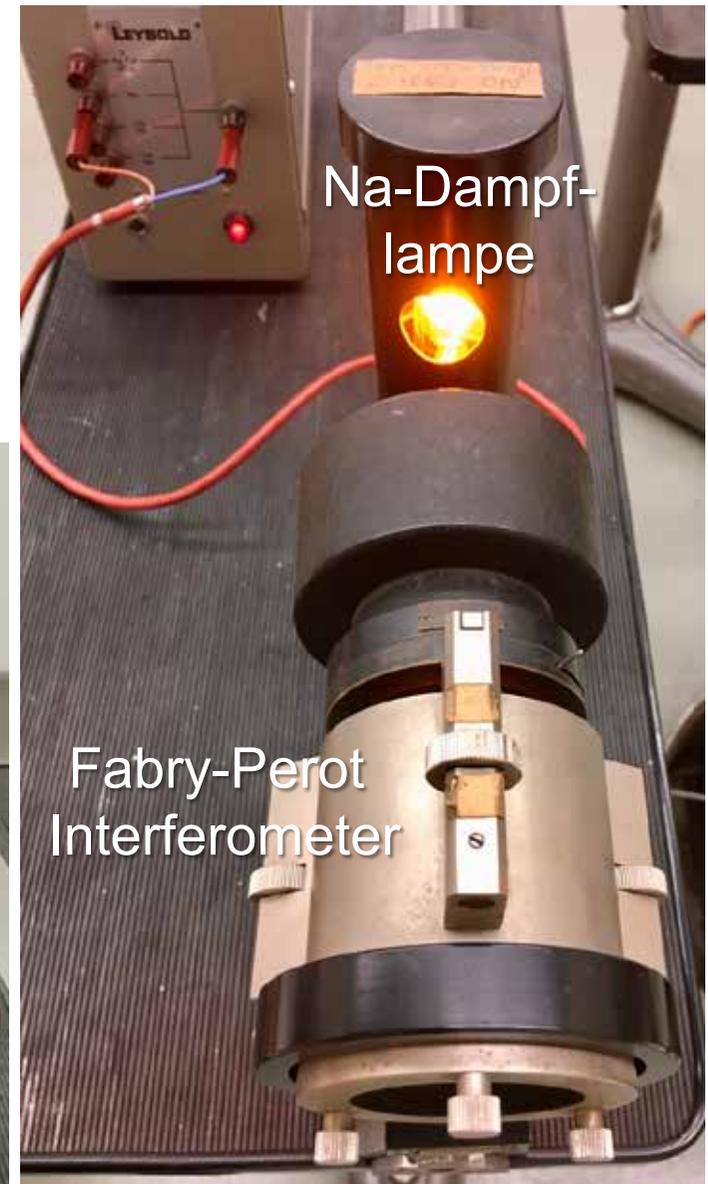
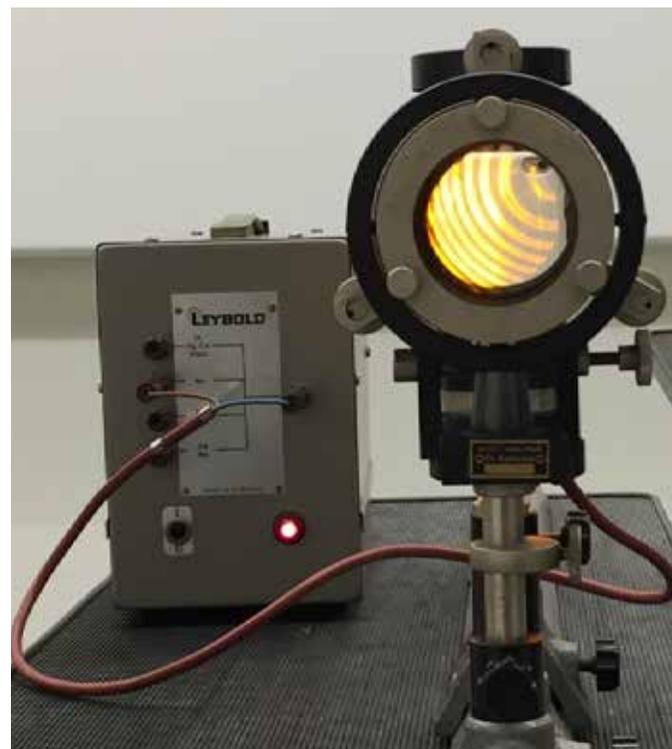
## ■ Dublettstruktur der D-Linie von Na

- Lichtquelle: Na-Dampf-lampe
- Interferenzmuster der beiden D-Linien
- daraus:  $\Delta\lambda = 0,6 \text{ nm}$  („Feinstruktur“)

**D-Linie ist aufgespalten!**

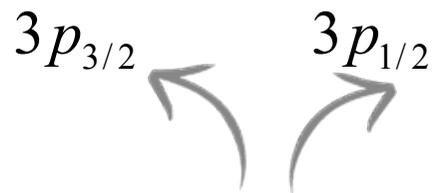


schwache & starke  
D-Linie:  
 $\lambda = 589.6 \text{ nm}$   $\lambda = 589.0 \text{ nm}$

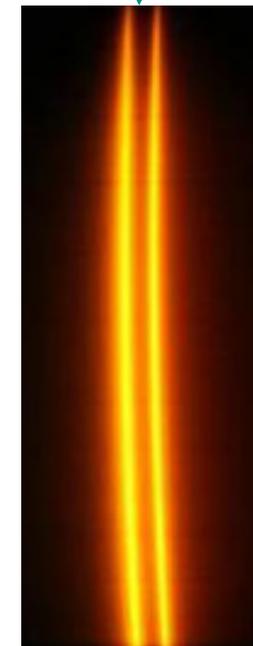
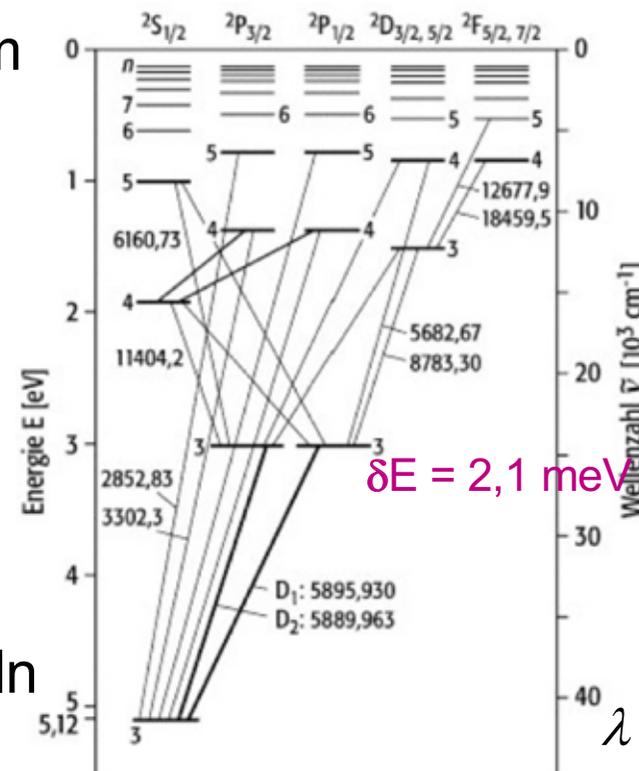
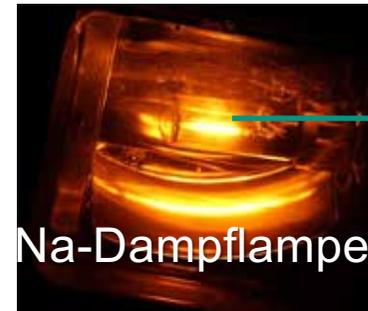


## Erklärung der Feinstruktur-Aufspaltung

- D-Linien aus Übergängen von 3p (-3,04 eV) → 3s (-5,14 eV)  
⇒ Übergangsenergie  $\Delta E = 2,1 \text{ eV}$  (= gelb)
- die Aufspaltung von  $\Delta\lambda = 0,6 \text{ nm}$  ist mit  $\delta E = 2,1 \text{ meV}$  sehr klein!
- das 3p-Orbital ( $l = 1$ ) von Na ist aufgespalten in ein **Dublett**:



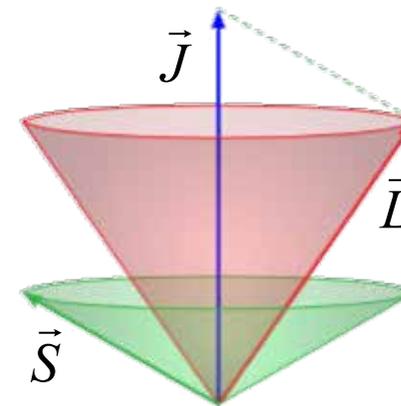
Spin und Bahndrehimpuls koppeln



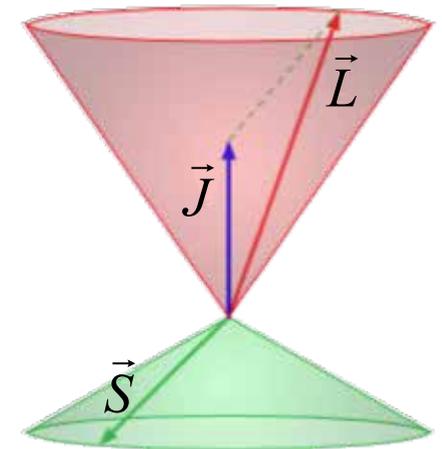
$\lambda = 589 \text{ nm}$     $\lambda = 589,6 \text{ nm}$

## ■ Größe der FS- Aufspaltung

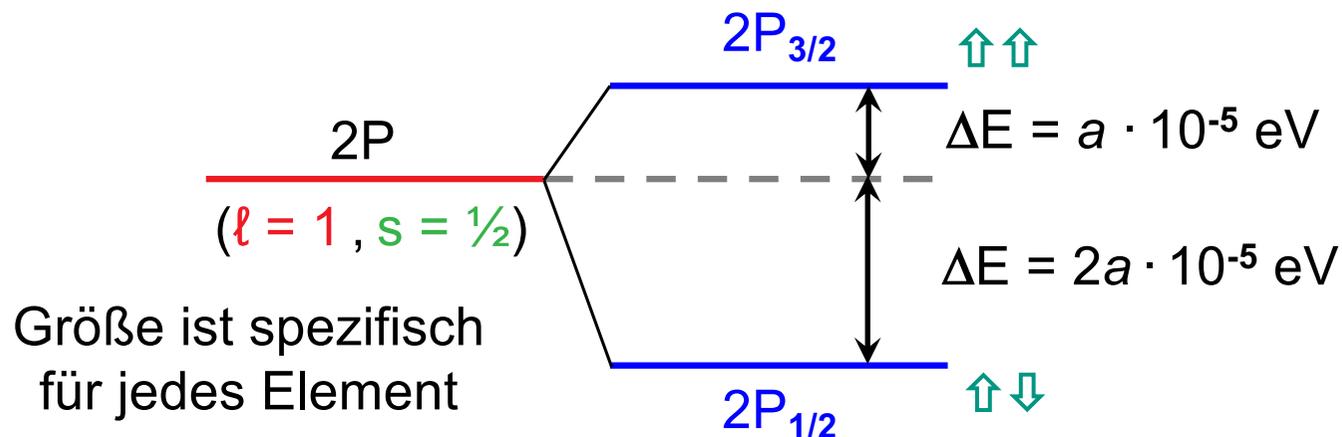
⇒ parallele ( $\uparrow\uparrow$ ) / anti-parallele ( $\uparrow\downarrow$ ) Einstellungen von  $\mu_L$  und  $\mu_S$  ergeben unterschiedliche Orbital-Energien:



parallel ( $\uparrow\uparrow$ )



anti-parallele ( $\uparrow\downarrow$ )

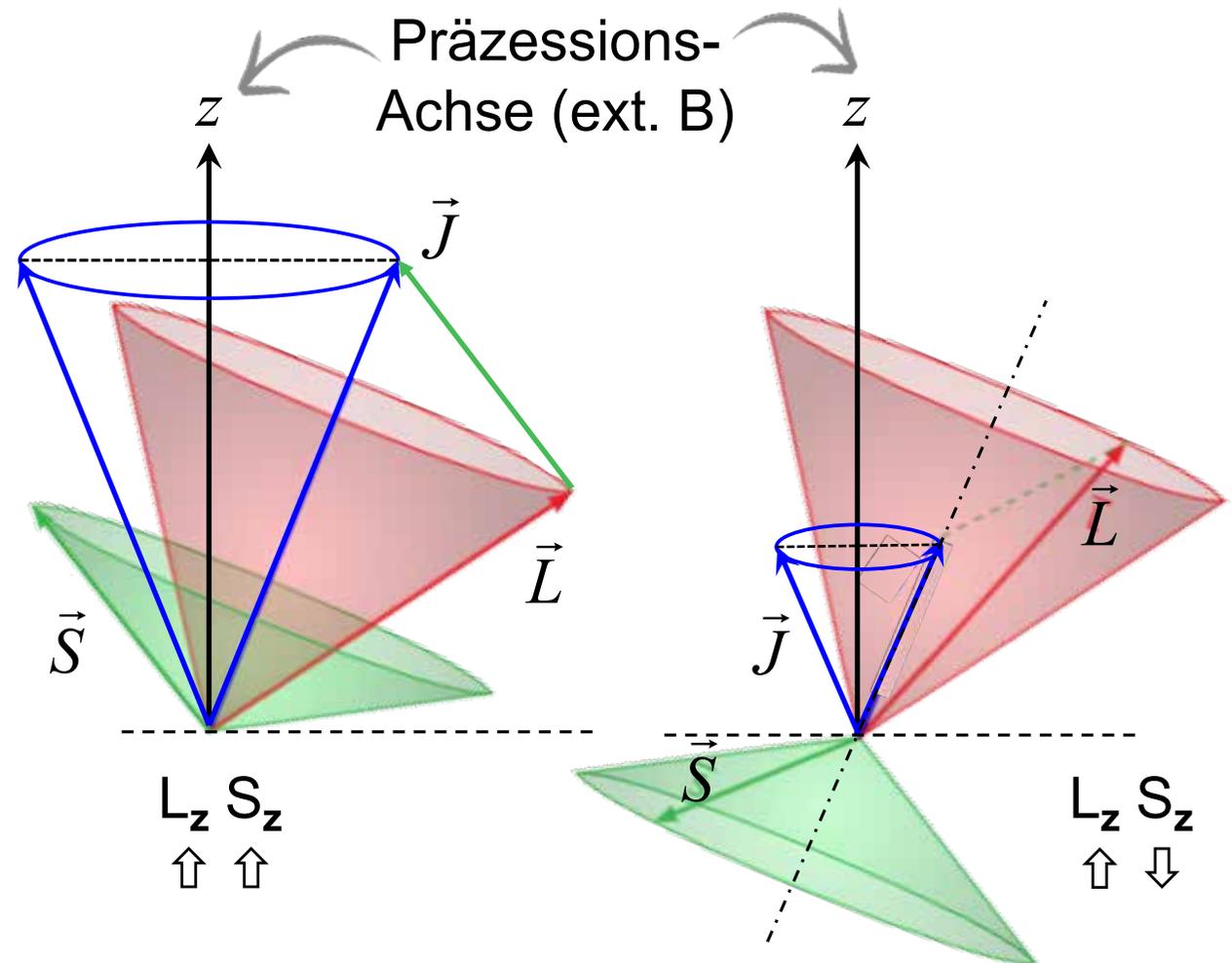


# Spin-Bahnkopplung: Vektormodell

- **Vektorielle Kopplung** von  $\vec{L}$  und  $\vec{S}$  zum Gesamtdrehimpuls  $\vec{J}$  mit neuer Quantenzahl **Gesamtdrehimpulszahl  $j$**

$$|\vec{J}| = \sqrt{j \cdot (j + 1)} \cdot \hbar$$

- die Vektoren  $\vec{L}$  und  $\vec{S}$  präzedieren um den Gesamtdrehimpuls  $\vec{J}$
- in einem äußeren Magnetfeld präzediert Gesamtdrehimpuls  $\vec{J}$  um z-Achse
- **Ein-Elektron-System:**  
 $s = 1/2$ , damit  $j = |\ell \pm 1/2|$

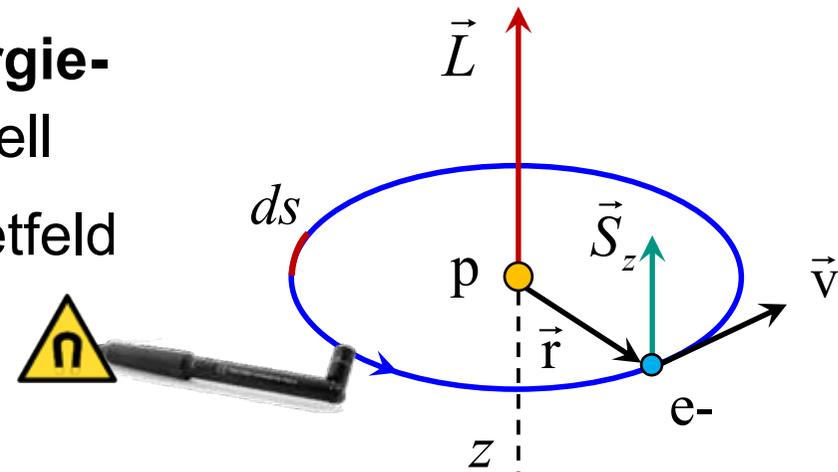




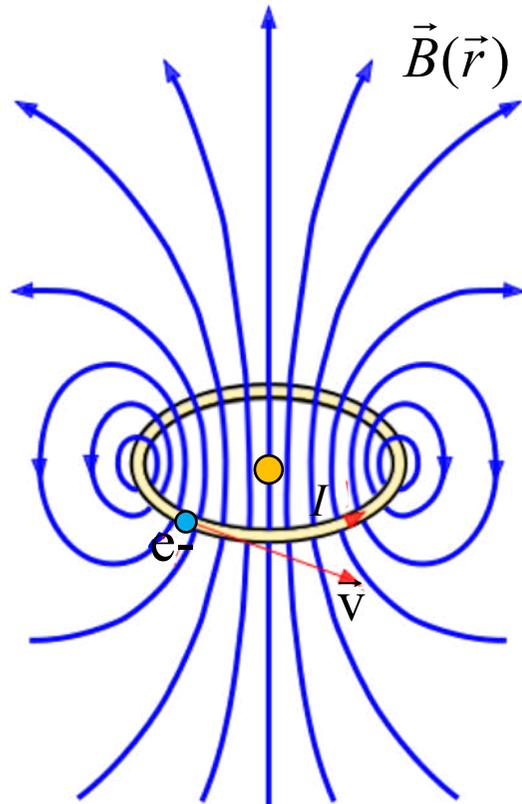
# Spin-Bahnkopplung: Energie-Aufspaltung

## ■ Semiklassische Berechnung der **Energieaufspaltung** im Bohrschen Atommodell

- kreisendes Elektron erzeugt Magnetfeld (s. klassische Leiterschleife)



Ruhesystem des Protons



- **Biot-Savart** für Strom I:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \int I \cdot \frac{d\vec{s} \times \vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

- **Biot-Savart** für bewegte Ladung e:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot e \cdot \frac{\vec{v} \times \vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

# Spin-Bahnkopplung: Energie-Aufspaltung

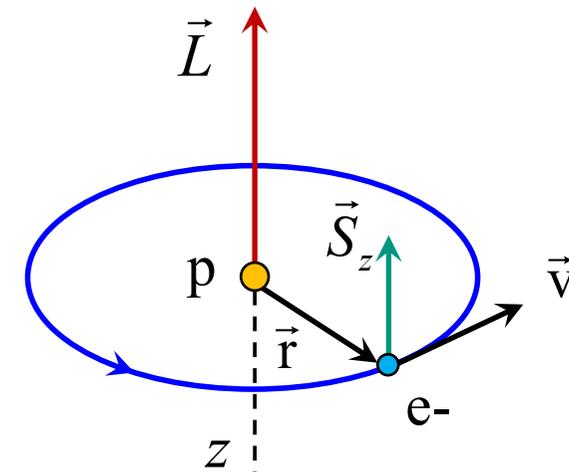
- im Ruhesystem des Elektrons entsteht B-Feld  $\mathbf{B}_e$  durch Kreisstrom des Protons:

$$\vec{B}_e = -\frac{\mu_0}{4\pi \cdot r^3} \cdot e \cdot (\vec{v} \times \vec{r})$$

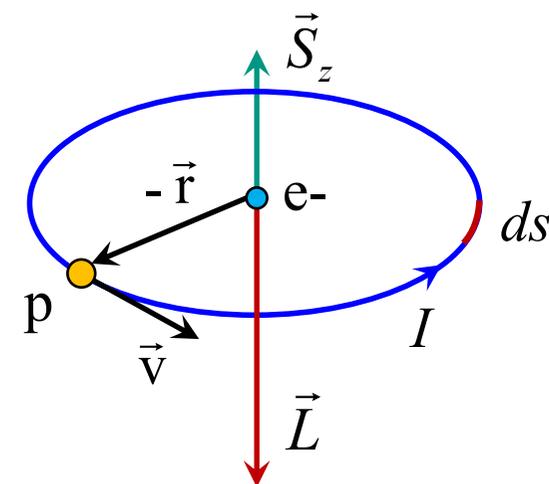
$$\vec{L} = \vec{r} \times m_e \cdot \vec{v} = -m_e \cdot \vec{v} \times \vec{r}$$

$$\vec{B}_e = \frac{\mu_0 \cdot e}{4\pi \cdot r^3 \cdot m_e} \cdot \vec{L} \quad \times \frac{1}{2}$$

- bei Rücktransformation ins Labor (Ruhesystem des Protons) tritt relativistischer Faktor (Thomas-Faktor =  $\frac{1}{2}$ ) auf



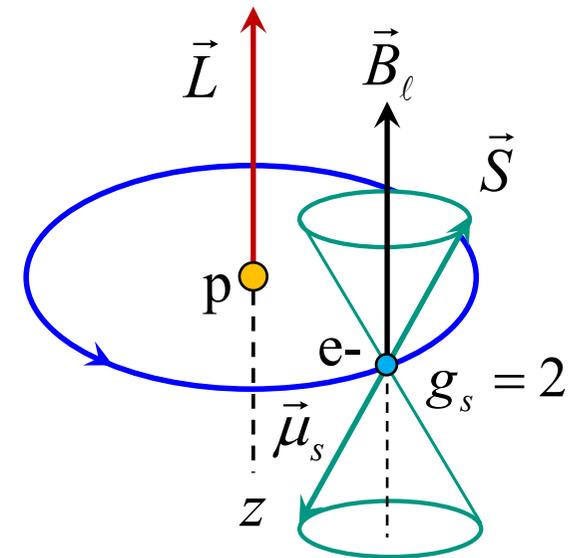
Ruhesystem des Protons



Ruhesystem des Elektrons

# Spin-Bahnkopplung: Energie-Aufspaltung

- am Ort des Elektrons existiert ein „inneres B-Feld“ durch seinen Bahnmagnetismus  $B_\ell$   
⇒ Präzession des Elektronenspins
- Stärke des B-Felds im H-Atom bei  $r = 100 \text{ pm}$  ( $1 \text{ \AA}$ )  
 $B_\ell \sim 1 \text{ T}$



Präzession von Spin und Spinmagnetismus um B-Feld

# Spin-Bahnkopplung: Energie-Aufspaltung

- Wechselwirkungsenergie  $V_{\ell s}$  zwischen Spin und Bahndrehimpuls:

$$V_{\ell s} = -\vec{\mu}_s \cdot \vec{B}_\ell$$

$$V_{\ell s} = \frac{a}{\hbar^2} \cdot \vec{L} \cdot \vec{S}$$

Einsetzen von

$$\vec{\mu}_s = -g_s \cdot \frac{e}{2m_e} \cdot \vec{S}$$

$$\vec{B}_\ell = \frac{\mu_0 \cdot e}{8\pi \cdot r^3 \cdot m_e} \cdot \vec{L}$$

Konstante  $a = \frac{e^2 \cdot \mu_0}{8\pi \cdot m_e^2 \cdot r^3} \cdot \hbar^2$



größte Feinstruktur-Aufspaltung bei kleinem  $r$  (d.h. speziell bei  $n = 2$ )

- Größe der Energie-Aufspaltung im H-Atom bei  $r = 100 \text{ pm}$ :  $V_{\ell s} \sim 10^{-4} \text{ eV}$  (Feinstruktur)

# Spin-Bahnkopplung: Energie-Aufspaltung

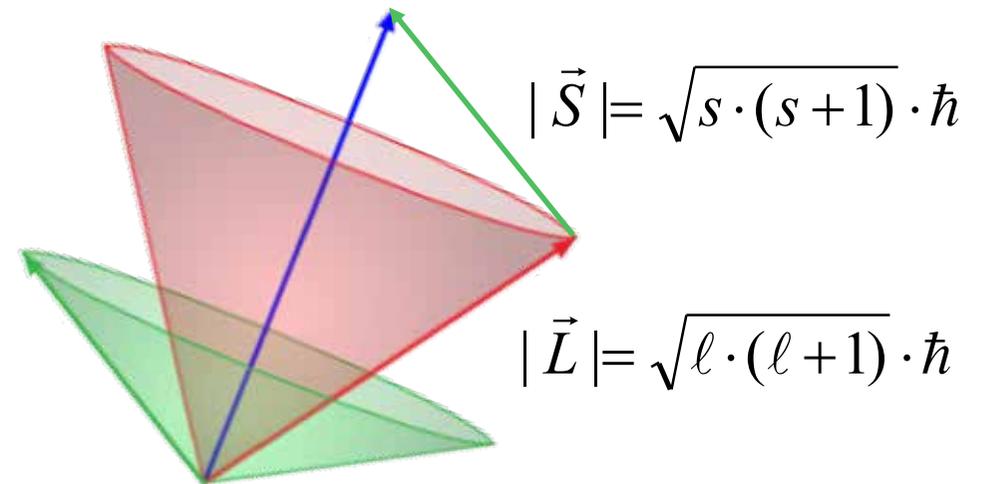
- Wechselwirkungsenergie  $V_{\ell s}$  zwischen Spin und Bahndrehimpuls:

$$V_{\ell s} = \frac{a}{\hbar^2} \cdot \vec{L} \cdot \vec{S}$$

- mit  $\hat{J}^2 = \hat{L}^2 + \hat{S}^2 + 2 \cdot \hat{L} \cdot \hat{S}$

$$\Rightarrow \hat{L} \cdot \hat{S} = \frac{1}{2} \cdot (\hat{J}^2 - \hat{L}^2 - \hat{S}^2)$$

$$|\vec{J}| = \sqrt{j \cdot (j+1)} \cdot \hbar$$



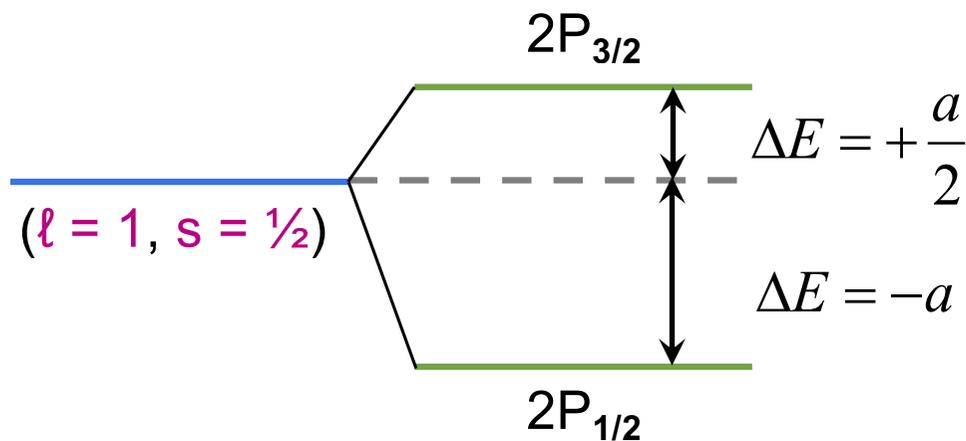
$$V_{\ell s} = \frac{a}{2} \cdot [ j \cdot (j+1) - \ell \cdot (\ell+1) - s \cdot (s+1) ]$$

# Spin-Bahnkopplung: Energie-Aufspaltung

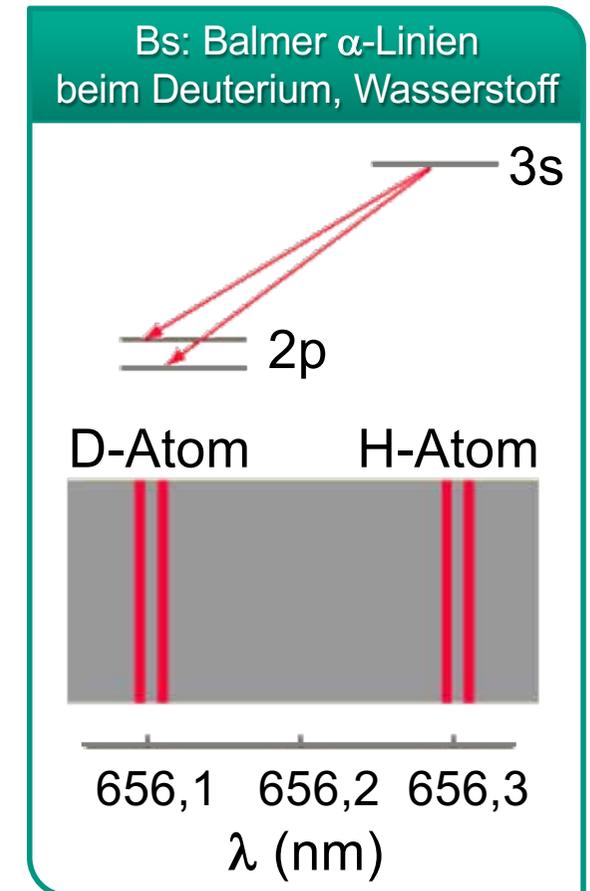
- Wechselwirkungsenergie  $V_{\ell s}$  zwischen Spin und Bahndrehimpuls:

- für  $j = \ell + \frac{1}{2}$      $V_{\ell s} = \frac{a}{2} \cdot \ell$

- für  $j = \ell - \frac{1}{2}$      $V_{\ell s} = -\frac{a}{2} \cdot (\ell + 1)$



} Aufspaltung 1:2

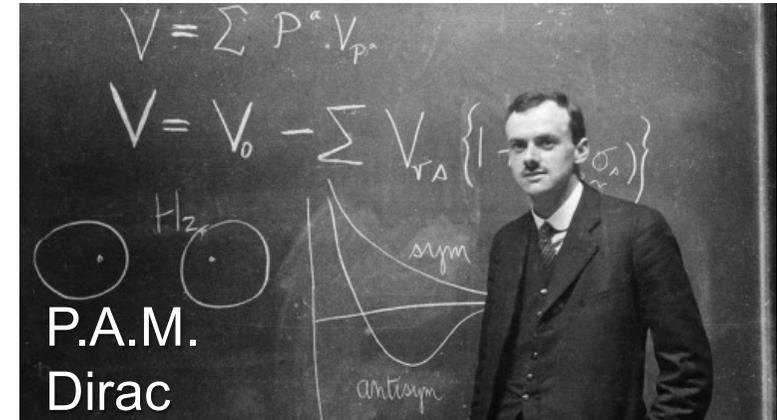


# Feinstruktur beim H-Atom

■ Feinstrukturaufspaltung  $E_{FS}$  direkt berechenbar in **Dirac-Theorie**, mit Beiträgen durch

- relativistische Massenzunahme
- Spin-Bahn-Kopplung

$$E_{FS} = -E_n \cdot \frac{1}{n} \cdot \alpha^2 \cdot \left( \frac{1}{j+1/2} - \frac{3}{4n} \right) \cdot Z^2$$



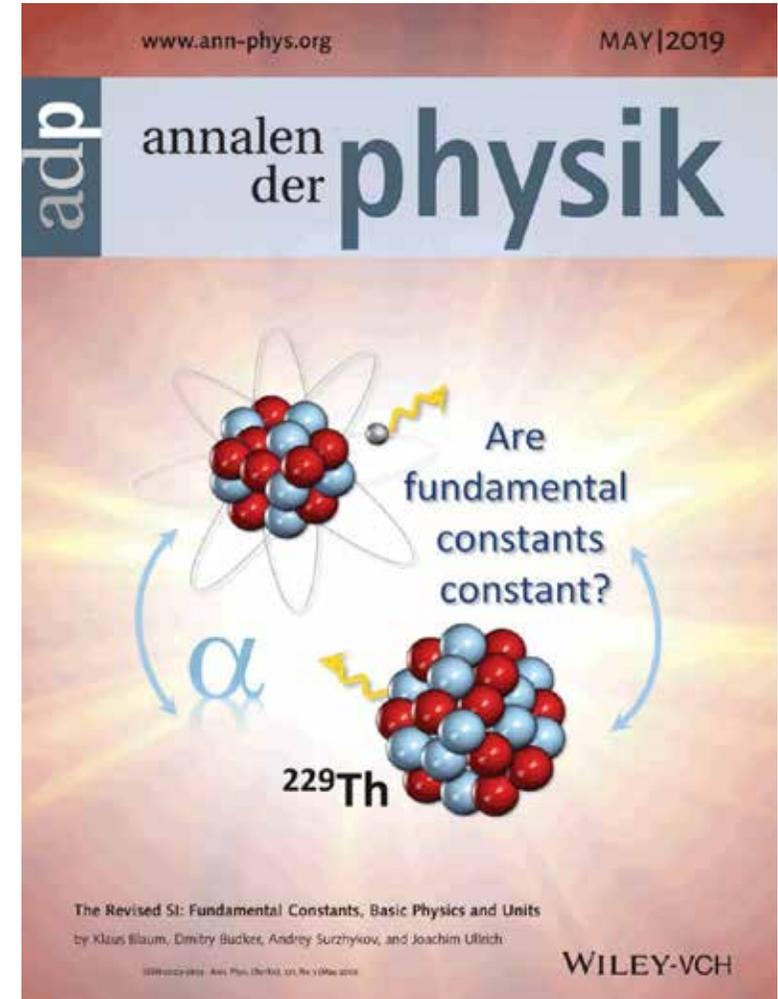
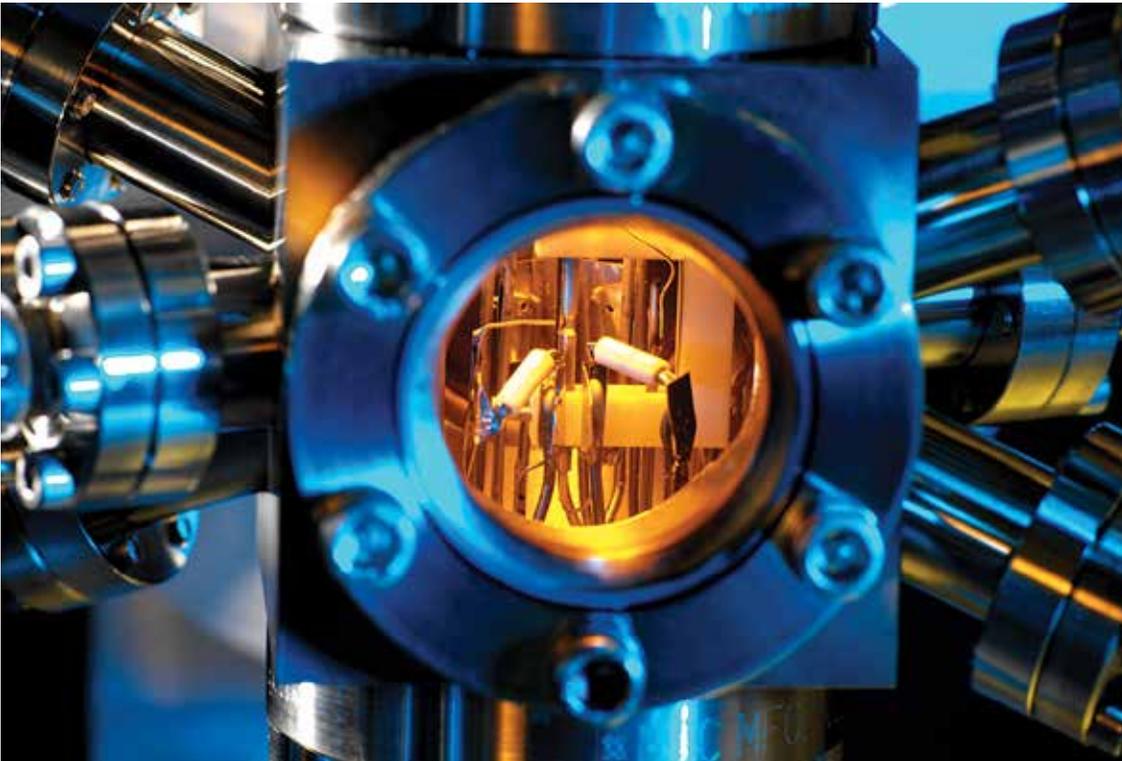
- mit Sommerfeldscher Feinstruktur-Konstanten  $\alpha$

$$\alpha = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \cdot \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137}$$

- im H-Atom sind Zustände mit gleicher Quantenzahl  $j$  entartet

# Feinstrukturkonstante: wirklich konstant?

- Feinstrukturkonstante – Suche nach einer möglichen **Zeitvariabilität**
  - ⇒ Untersuchung mit **Atomuhren** mit extrem guter Stabilität



# Feinstrukturkonstante: wirklich konstant?

- Feinstrukturkonstante – Suche nach einer möglichen **Zeitvariabilität**
  - ⇒ Untersuchung der Absorptionslinien von fernen Quasaren
  - 2017: Analyse der **Feinstruktur von H-Atomen** & OH-Molekülen mit dem Arecibo Radio-Teleskop von PKS 1413+135

$$\frac{\Delta\alpha}{\alpha} < 0,00013\%$$

