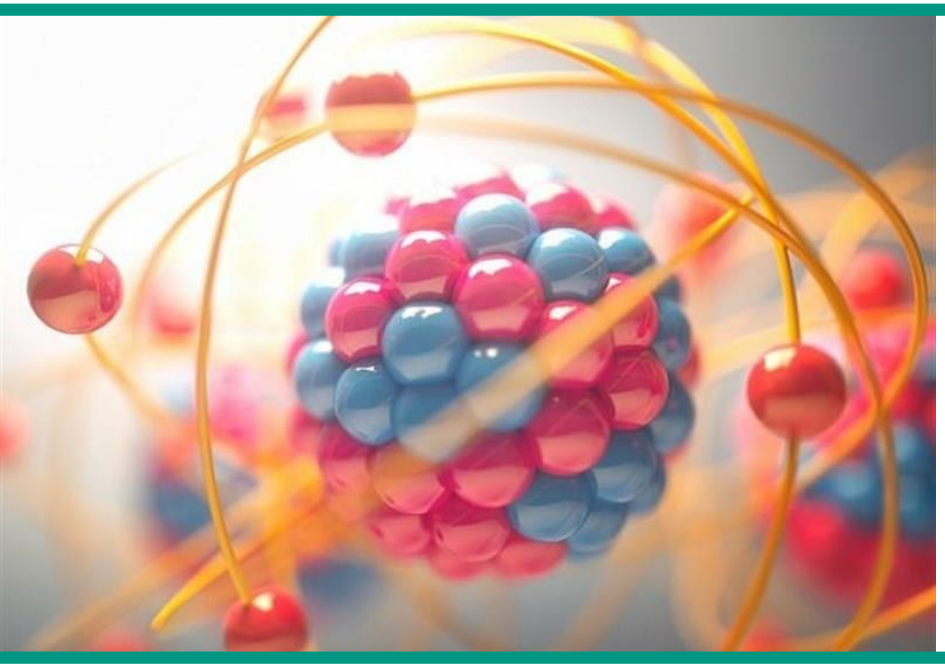
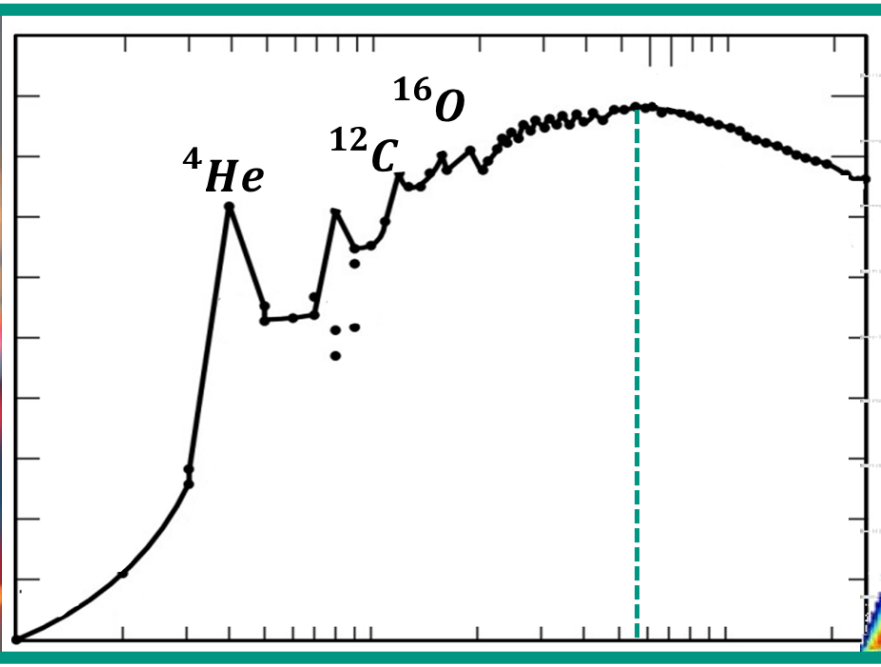
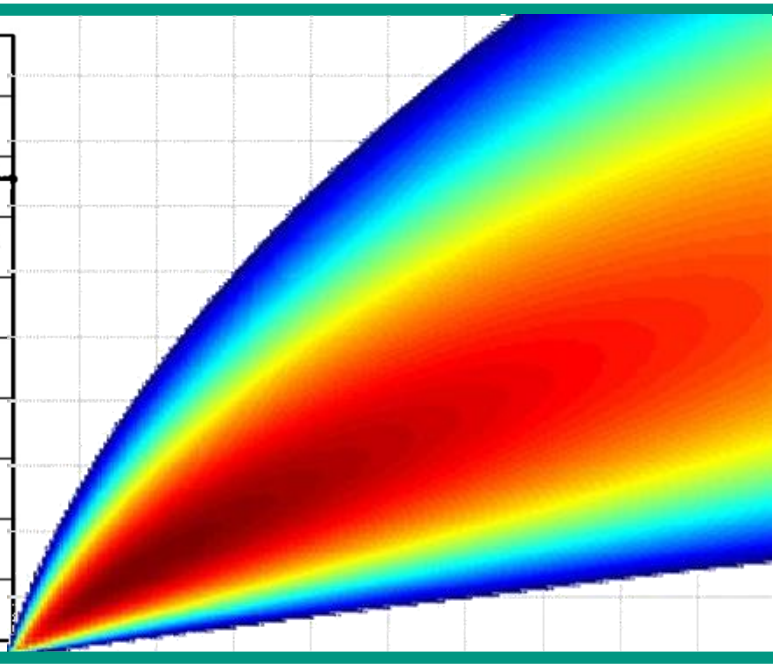
Moderne Experimentalphysik I – Atome und Kerne

Vorlesung 19 2.7.2024







RECAP: Wirkungsquerschnitte

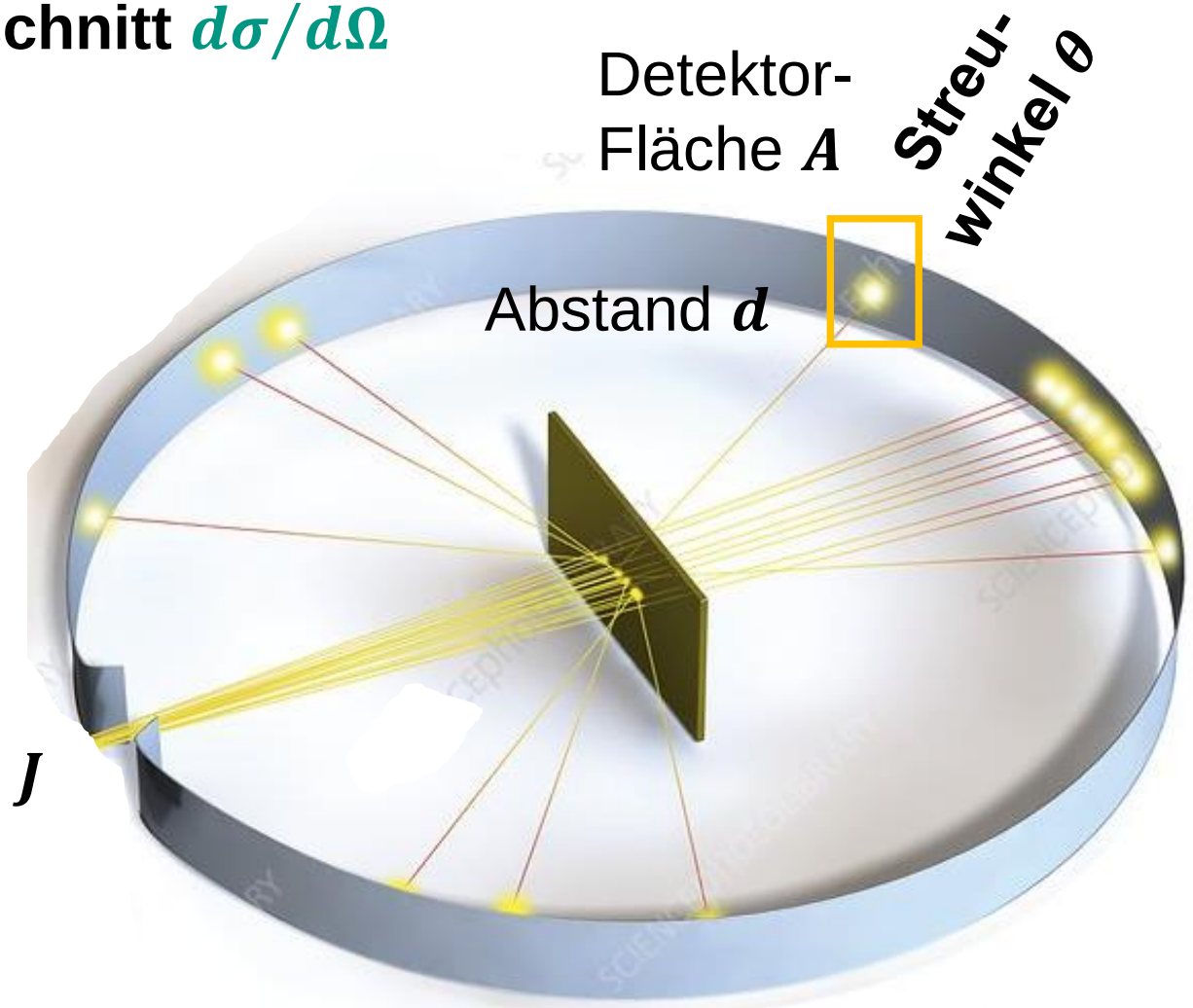
- **Der differentielle Wirkungsquerschnitt $d\sigma/d\Omega$**

$$\frac{dW_R}{d\Omega} = J \cdot N_{target} \cdot \frac{d\sigma}{d\Omega}$$

- Teilchen wechselwirkt im Target
  ⇨ läuft aus unter **Streuwinkel θ**

- Detektor mit Fläche A im Abstand d überdeckt **Raumwinkel–Element** $d\Omega = A/d^2$

- Einheit von $d\sigma/d\Omega$ ist $[cm^2/sr]$ bzw. $[b/sr]$



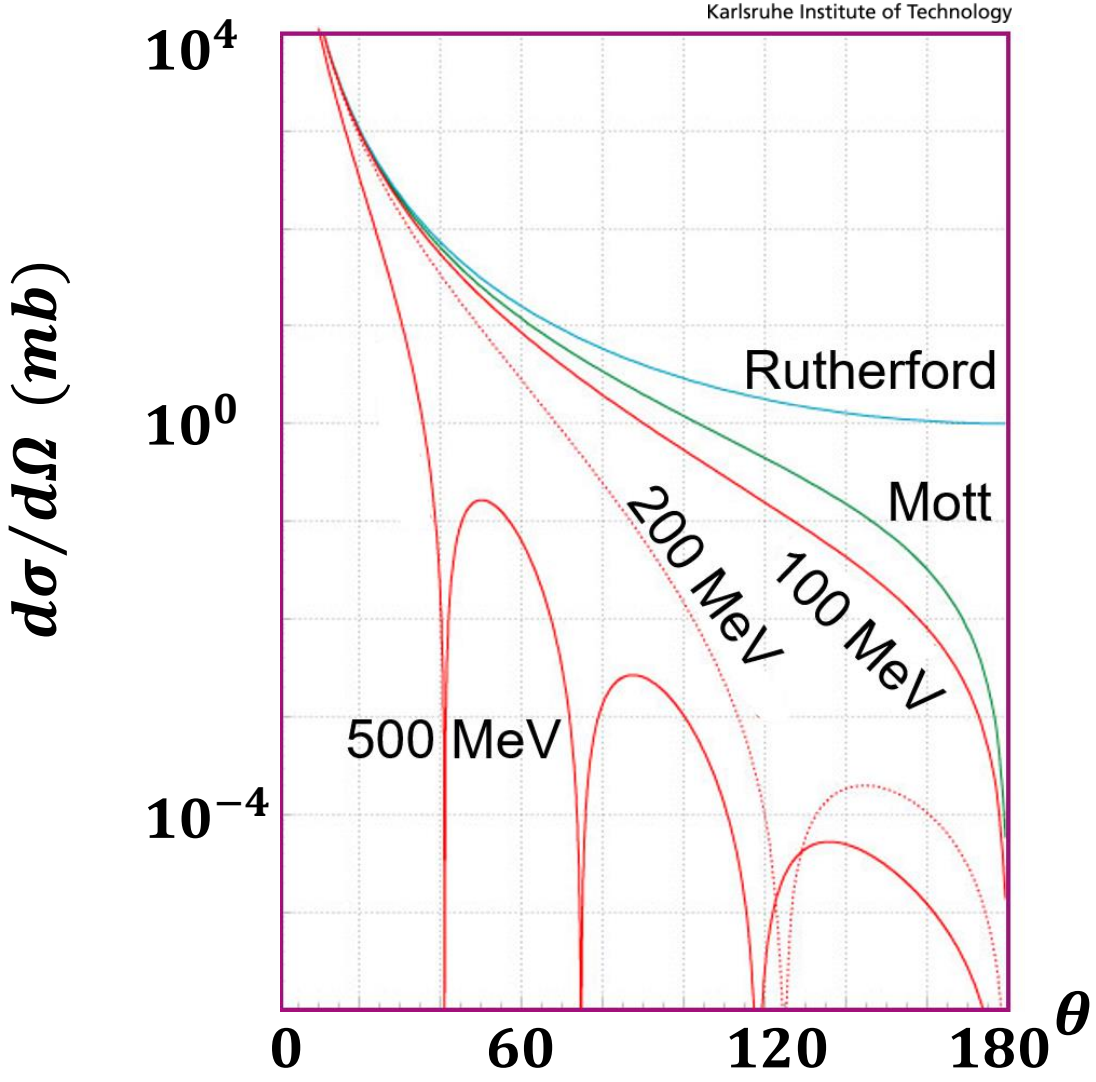
RECAP: Formfaktoren & Ladungsverteilungen

- **Vom Formfaktor zur Ladungsverteilung über eine Fourier−Transformation**

  - Bestimmung des **Formfaktors**:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{exp} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott} \cdot \left|F(q^2)\right|^2$$

  - Beugungseffekte ermöglichen eine Aussage über die Struktur des Objekts



RECAP: Formfaktoren & Ladungsverteilunghen

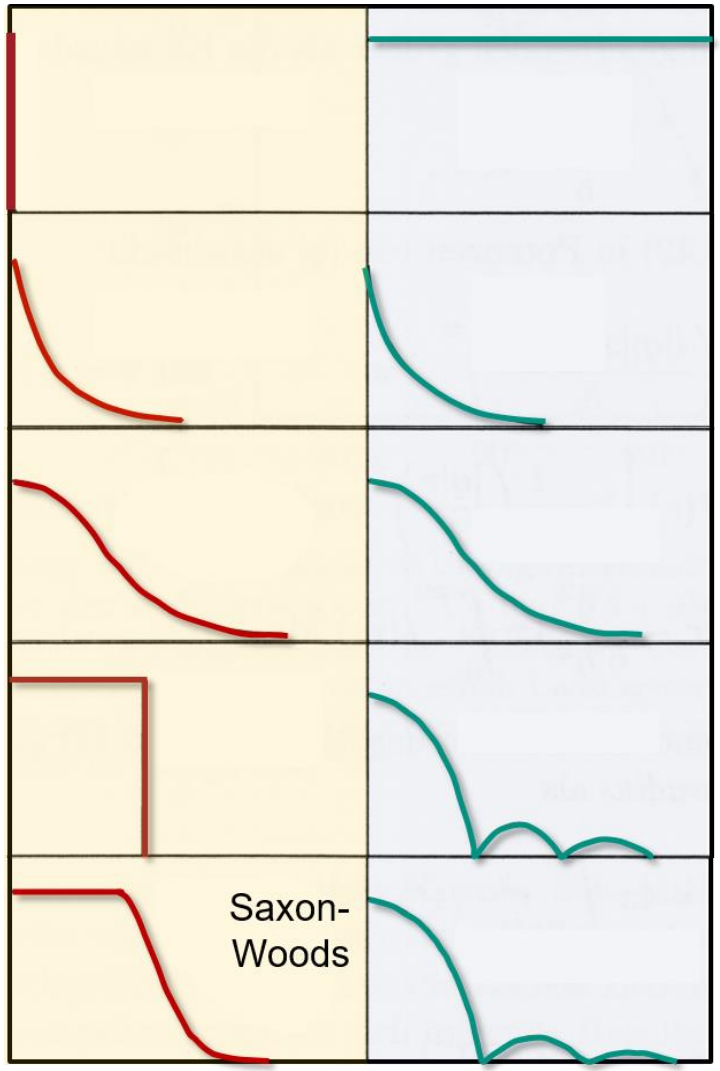
punktförmig
$\rho(r) = \delta(r)/4\pi$

exponentiell
$\rho(r) \sim e^{-(r/a)}$

gaußförmig
$\rho(r) \sim a^{-3} \cdot e^{-(r^2/2a^2)}$

homogene Kugel
$\rho(r) = \text{const.} \quad (r < a)$
$\rho(r) = 0 \quad (r \geq a)$

Kugel mit diffusem Rand
$\rho(r) = r_0/(1 + e^{(r-a)/d})$



konstant
$F(q^2) = 1$

Dipol
$F(q^2) = 1/(1 + a^2q^2)^2$

gaußförmig
$F(q^2) = e^{-1/2(a^2q^2)}$

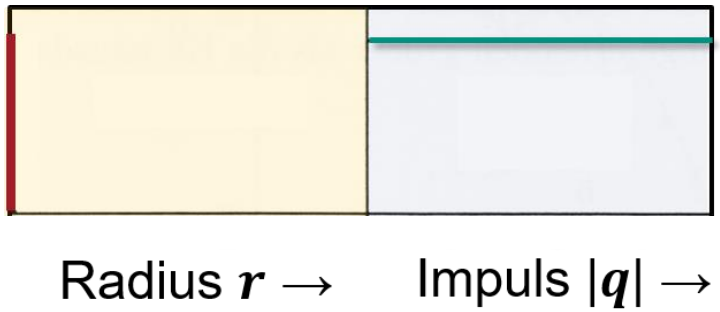
Oszillation
$F(q^2) \sim sin(aq) - a \cdot q \cdot cos(aq)$

verwaschene Oszillation

Formfaktoren und Ladungsverteilung: Beispiele

- **Punktförmiges $\rho(r)$**

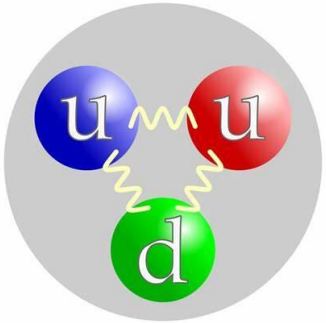
punktförmig
$\rho(r) = \delta(r)/4\pi$



konstant
$F(q^2) = 1$

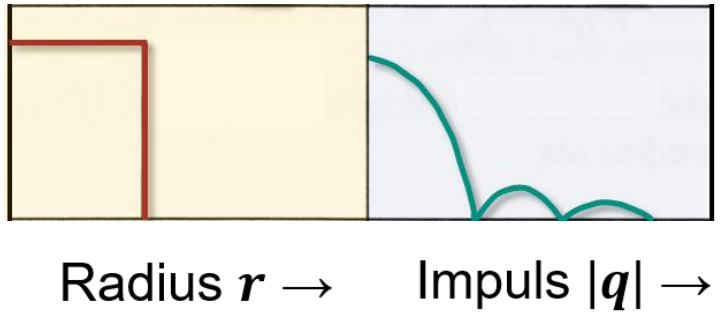
weit entfernte Flugbahnen (niedrige Energie des e^-)
- Kern erscheint punktförmig,
- keine Beeinflussung von $d\sigma/d\Omega$

aber: sehr nahe Flugbahn (hohe Energie des e^-)
- tiefinelastische Streuung am Proton (1968)
  ⇨ Proton ist aus **punktförmigen** Konstituenten aufgebaut



Formfaktoren und Ladungsverteilung: Beispiele

- **Homogene Kugel mit Kernradius a**



Oszillation

$$F(q^2) \sim sin(aq) - a \cdot q \cdot cos(aq)$$

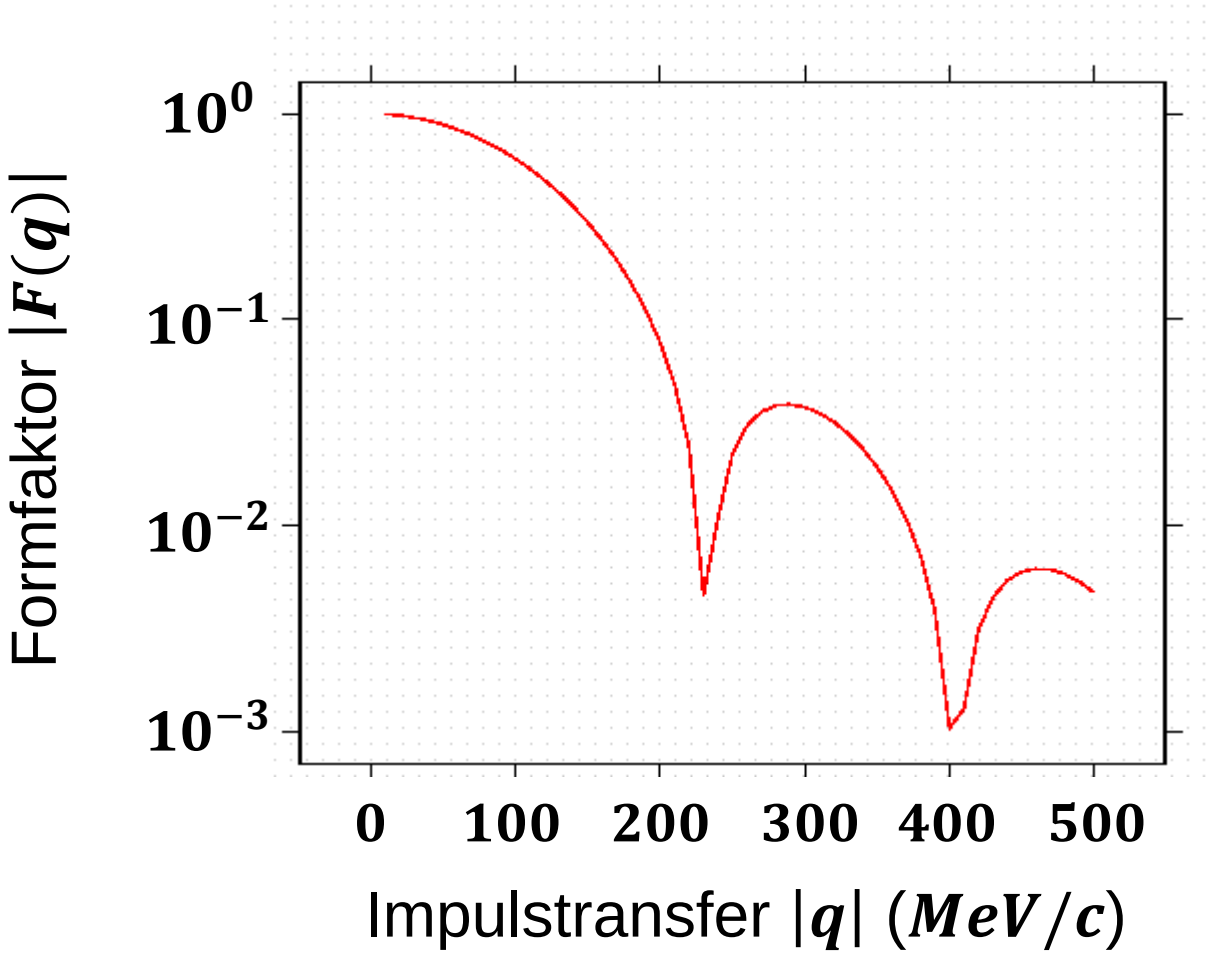
$$\rho(r) = \rho_0 = \frac{3}{4\pi} \cdot \frac{1}{a^3}$$

$$F(q^2) = \frac{3}{(aq)^3} \cdot \{sin(aq) - aq \cdot cos(aq)\}$$

- oszillierender Formfaktor gibt Aufschluss über **Kernradius a**

Formfaktoren und Ladungsverteilungen

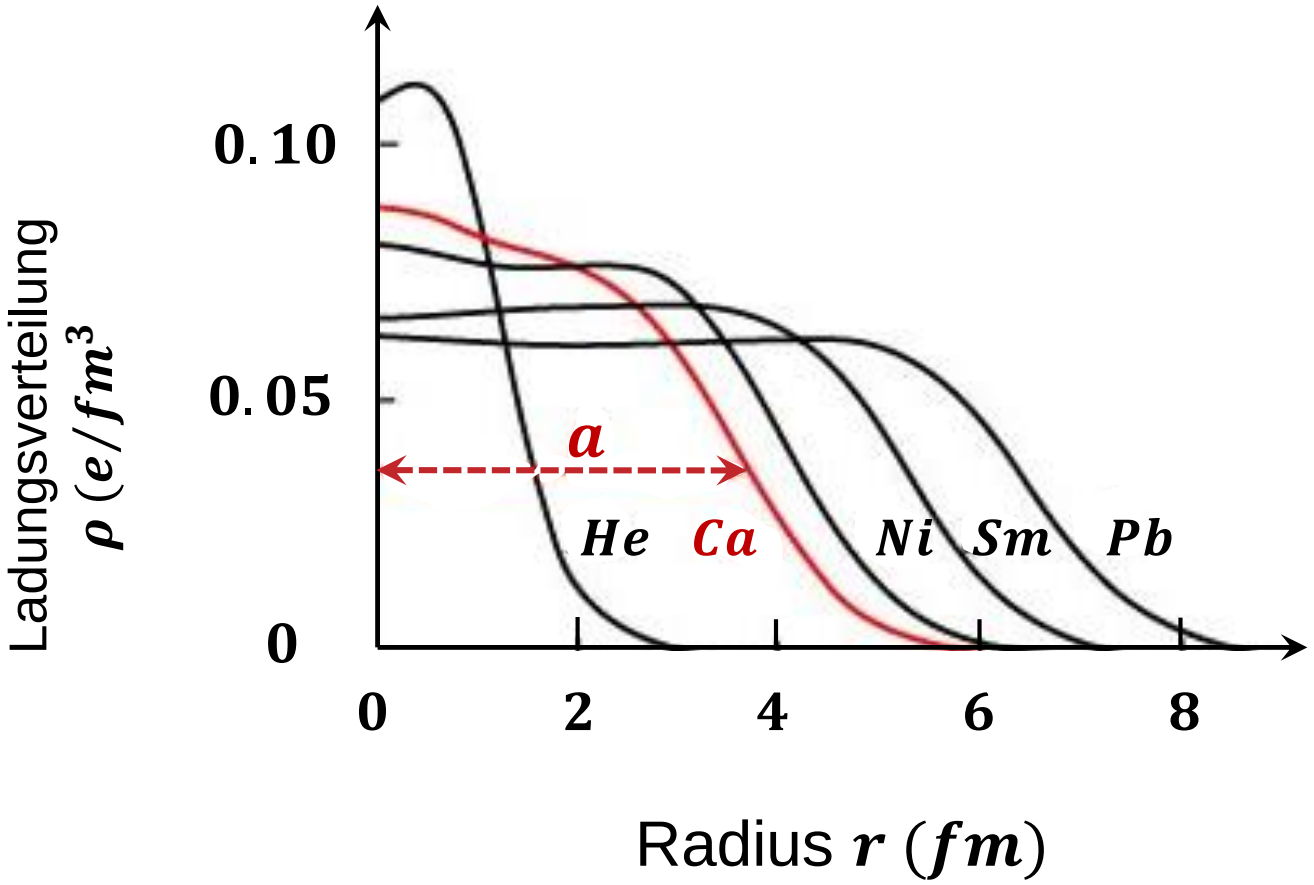
- **Beugungsminima sind von zentraler Relevanz bei Streuexperimenten**



Fourier–
Transformation

Formfaktoren und Ladungsverteilungen

- **Experimentelle Resultate für Ladungsverteilungen von Kernen**

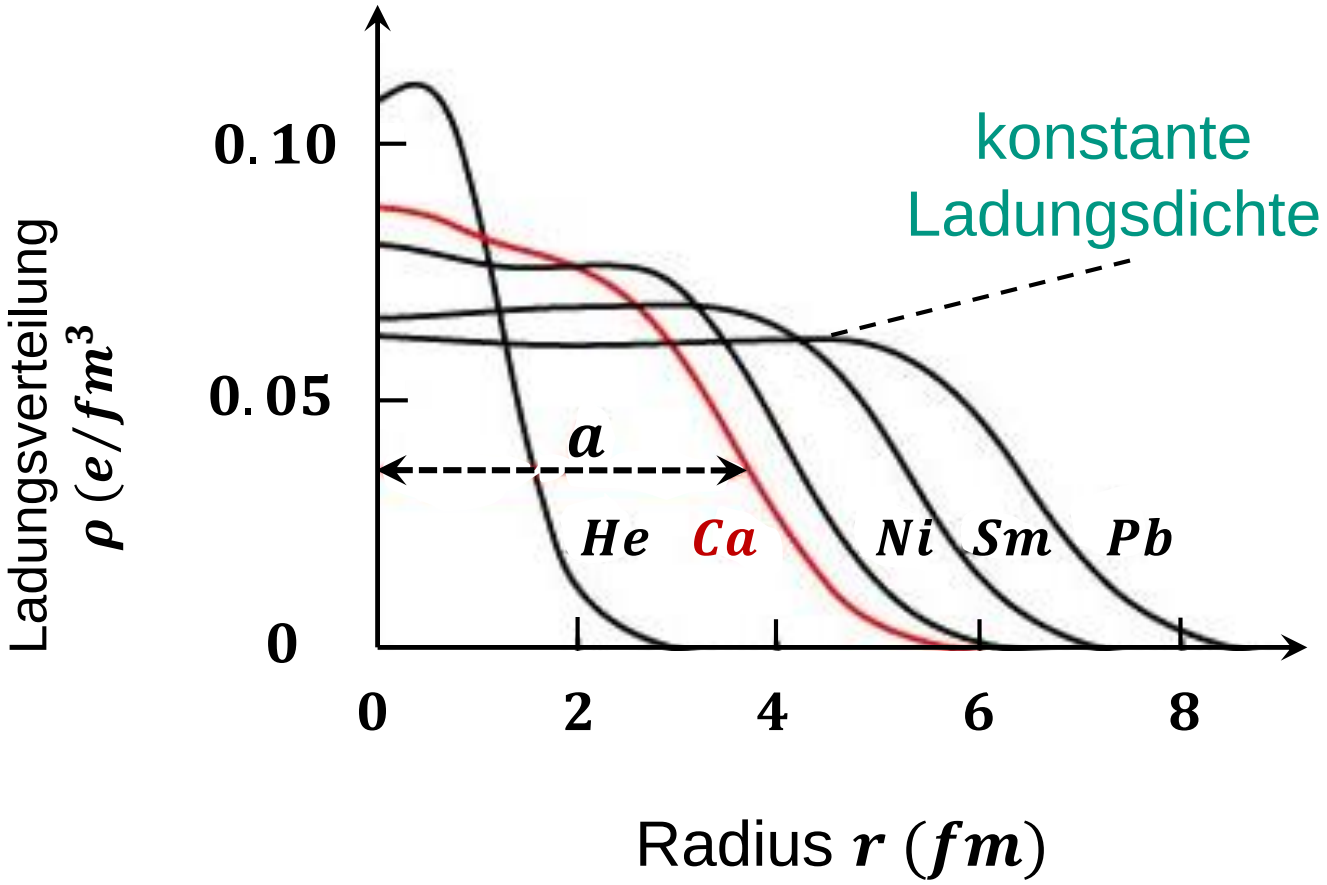


Fourier–Transformation

a: mittlerer Kernradius

Formfaktoren und Ladungsverteilungen

- **Allgemeine Eigenschaften der Ladungsverteilungen von Kernen**



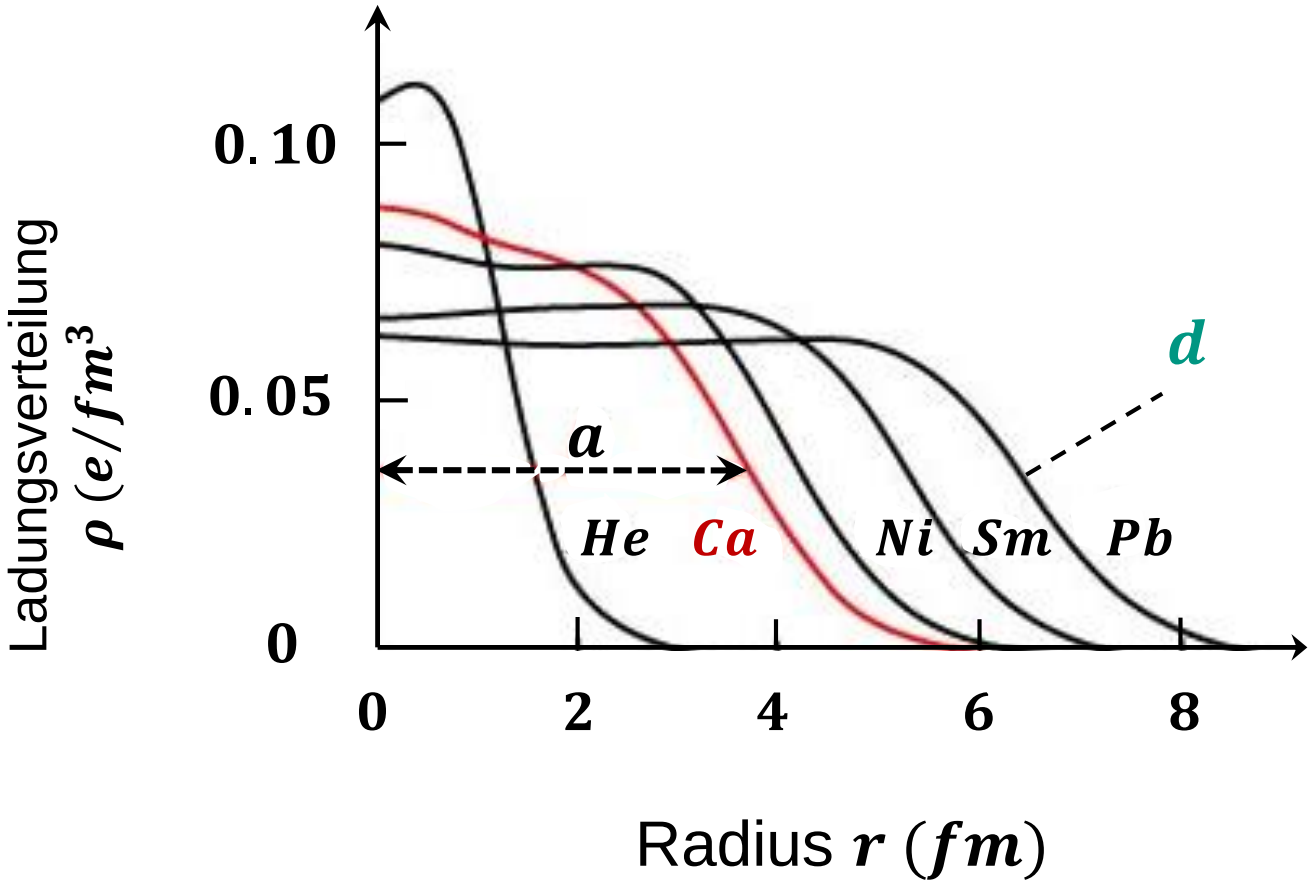
- Kerne zeigen eine fast **konstante Ladungsdichte $\rho(r)$**

  ⇨ **Kernkräfte zeigen Sättigungscharakter**

- Ausnahme:
  leichte Kerne (He) zeigen ein Gauß–Profil für $\rho(r)$

Formfaktoren und Ladungsverteilungen

Allgemeine Eigenschaften der Ladungsverteilungen von Kernen



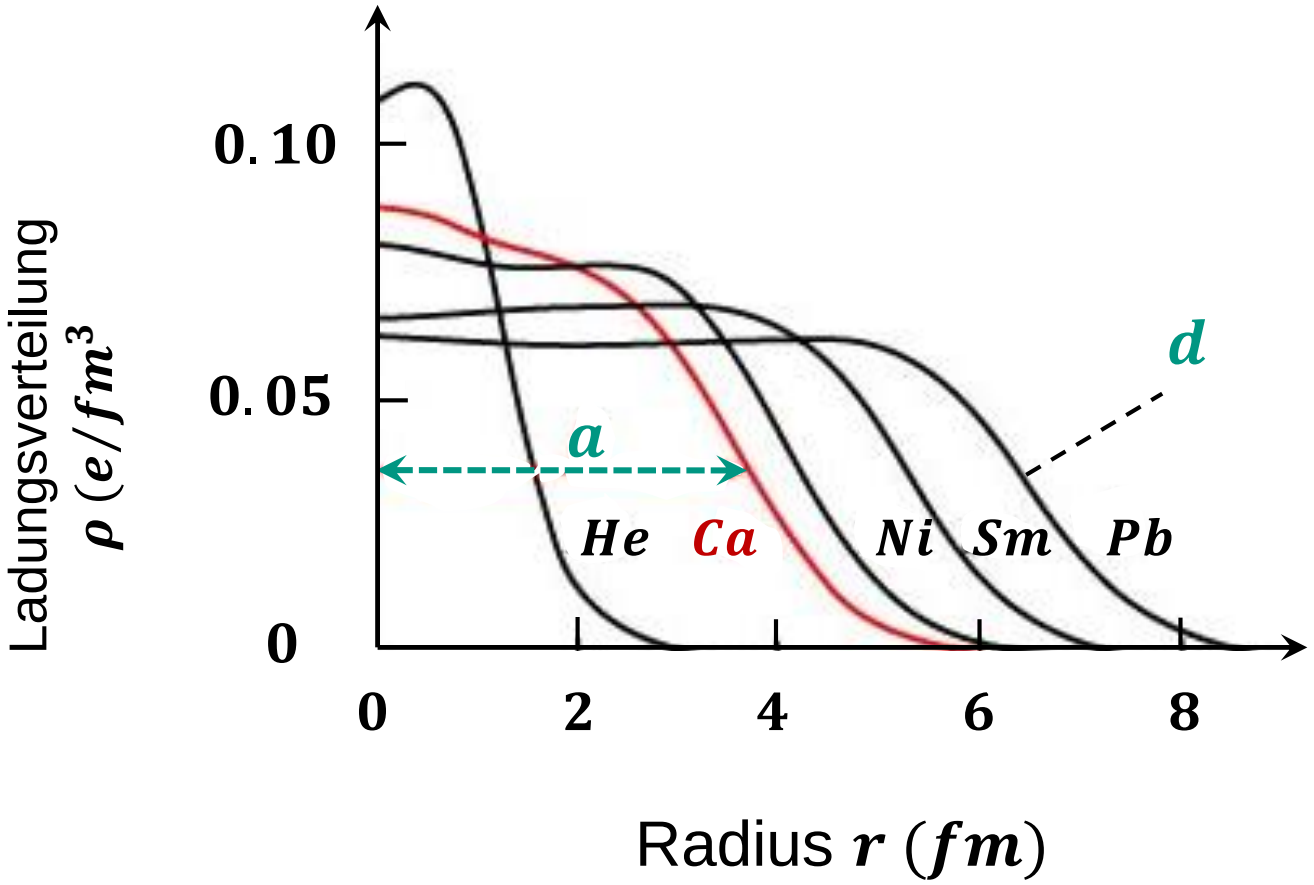
- Kerne zeigen stets einen sehr ähnlichen Abfall der Ladungsdichte nach außen (´**Skindicke**´ d)

- Fit der Kern–Ladungsverteilung nach **Woods–Saxon**:

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + e^{(r-a)/d}}$$

Formfaktoren und Ladungsverteilungen

- **Allgemeine Eigenschaften der Ladungsverteilungen von Kernen**



- Fitparameter (A = Nukleonenzahl)

$$a = \left(1,18 \cdot A^{1/3} - 0,48\right) fm$$

$$d = (0,55 \pm 0,07)\ fm$$

- Fit der Kern–Ladungsverteilung nach **Woods–Saxon**:

$$\boxed{\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + e^{(r-a)/d}}}$$

10.4 Kernmodelle und Kernkräfte

- **Erfolgreiche Modelle erlauben die Beschreibung von:**

  - kollektive Eigenschaften:
  Kernladung Z, Größe (Radius a) und Form (sphärisch, deformiert), Kernmasse M, kollektive Anregungen (Riesenresonanz), Stabilität

  - Eigenschaften durch individuelle Nukleonen:
  Bindungsenergie pro Nukleon E_B/A, elektrische & magnetische Momente μ, Einteilchen–Anregungszustände (Resonanzen)
  Quantenzahlen: Spin I & Parität P

  neue Quantenzahl: **Isospin**

Kernmodelle und Kernkräfte

- **Erfolgreiche Modelle erlauben die Beschreibung von**

  - dynamische Eigenschaften:
  Ablauf & Wirkungsquerschnitte & Energiebilanz von Kernreaktionen wie Fusion, Spaltung, Nukleonentransfer, …

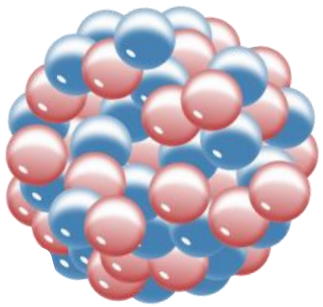
  ⇨ experimentelle Messung via **Streu–Experimente**, Massen–Spektrometer,…

Experimentelle Beobachtungen

- **Charakteristische Kerneigenschaften**

  - **Kernradien und Kerndichten**

    Kernmaterie mit konstanter Dichte
    $\boldsymbol{\rho = 10^{17}\, kg/m^3}$, $\boldsymbol{R = 1{,}2\, fm \cdot A^{1/3}}$



  - **Bindungsenergien und Kernkräfte**

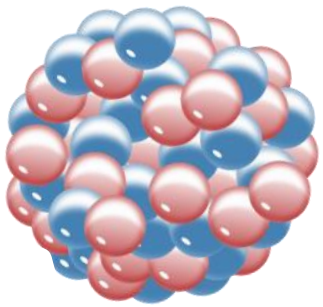
    konstante Bindungsenergie $\boldsymbol{E_B/A \sim 8\, MeV}$
    pro einzelnem Nukleon
    ⇨ **gesättigte Kernkräfte**

Experimentelle Beobachtungen

- **Charakteristische Kerneigenschaften**

  - **Stabilitätsverhalten**

    stabile Kerne (Kernladung $\boldsymbol{Z}$, Nukleonenzahl $\boldsymbol{A}$ Neutronenzahl $\boldsymbol{N}$) finden sich
    kleines $\boldsymbol{A}$: $\boldsymbol{N = Z}$
    grosses $\boldsymbol{A}$: $\boldsymbol{N > Z}$



  - **Zerfallsmoden von Kernen**

    $\boldsymbol{\alpha-}$, $\boldsymbol{\beta-}$, $\boldsymbol{\gamma-}$ **Zerfall**
    Kernspaltung
    Emission von Nukleonen: $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{d}$, …

Experimentelle Beobachtungen

Charakteristische Kerneigenschaften

- Spin und Parität

Kernniveaus besitzen definierten **Spin** J und definierte **Parität** P
beobachtetes J^P: $0^+, 2^+, 4^+, 0^-, 1^-, \ldots$

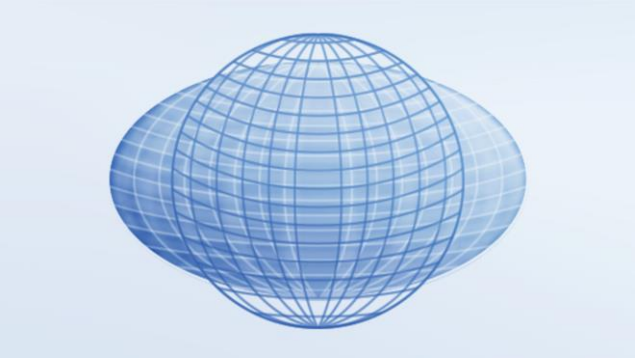
0^+ ——— $7,65\ MeV$*

2^+ ——— $4,44\ MeV$

0^+ ——— $^{12}C(g.s.)$

- Kernanregung und Kerndeformation

Lage von angeregten Zuständen
beobachtete kollektive Anregungen
beobachtete Kerndeformationen



*Hoyle–Zustand: Welt der Physik: Neue Berechnungen zu ersten Kohlenstoff-Atomen im Universum

Kernmodelle

- **phänomenologische Kernmodelle**

  - Kerne sind **komplexe Vielteilchensysteme**

  - es existiert (noch) keine fundamentale Theorie auf Basis der $\boldsymbol{Q}$uanten$-\boldsymbol{C}$hromo$-\boldsymbol{D}$ynamik ($\boldsymbol{QCD}$)

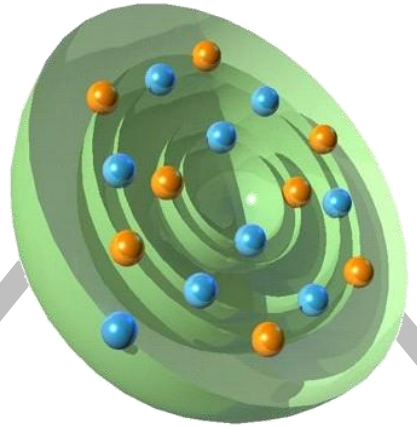
  - seit langer Zeit arbeitet man daher mit **phänomenologischen Modellen**

  - jedes **spezifische Modell** kann bestimmte Kerneigenschaften besonders gut reproduzieren (aber nicht alle…)

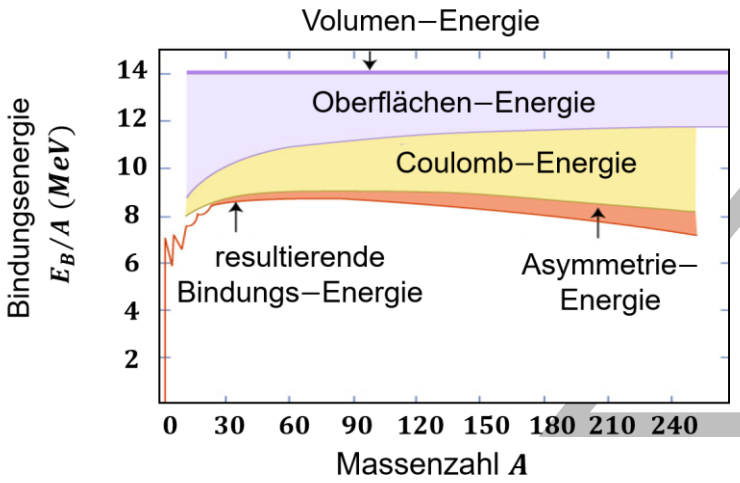
Kernmodelle

- **phänomenologische Kernmodelle: 3 wichtige Beispiele**

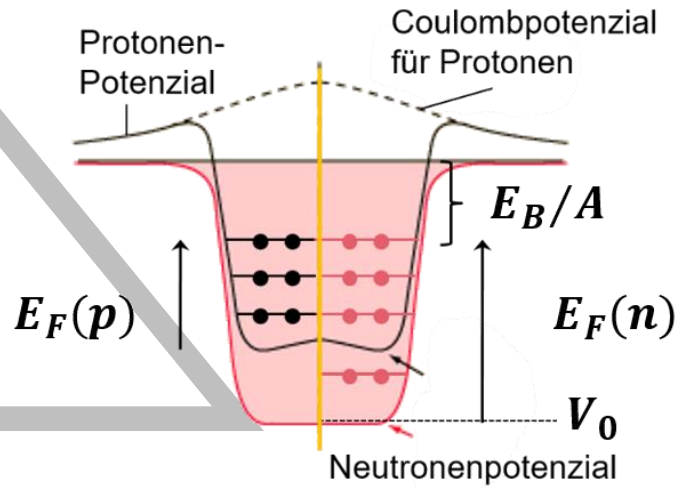
Schalenmodell



Tröpfchenmodell



Fermigasmodell



Kernmodelle

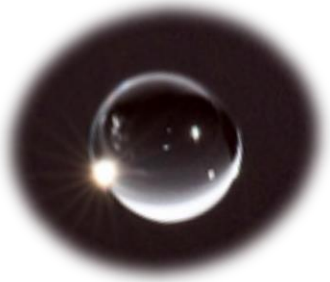
- **phänomenologische Kernmodelle: Tröpfchenmodell**

Tröpfchenmodell

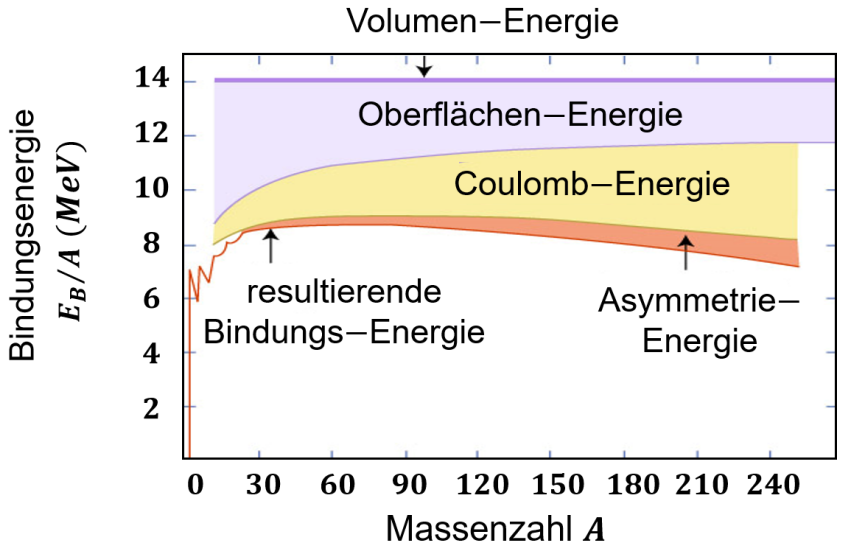
Kern in enger Analogie zu geladenem Flüssigkeitstropfen (quasi–klassisch)
Nukleonen bewegen sich stark korreliert in inkompressibler Flüssigkeit

reproduziert besonders gut

Bindungsenergie pro Nukleon E_B/A



C. F. von Weizsäcker*



 *Bruder: R. von Weizäcker, 6. Bundespräsident

Kernmodelle

- **phänomenologische Kernmodelle: Fermigasmodell**

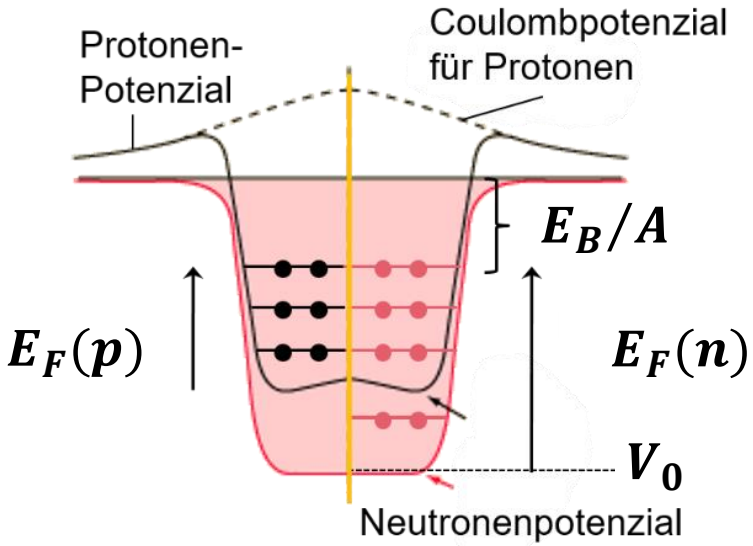
Fermigasmodell

Nukleonen bewegen sich unabhängig voneinander als Fermionen in einem resultierenden Kernpotenzial
Potenzialtiefe folgt aus der Quantenstatistik eines **Fermigases**

reproduziert besonders gut

mittlere Energie eines Nukleons
Fermikante

Enrico Fermi*



*wichtig auch in der Festkörperphysik

Kernmodelle

- **phänomenologische Kernmodelle: Schalenmodell**

Schalenmodell

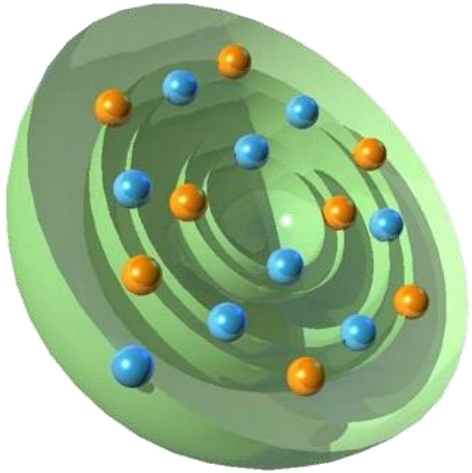
Nukleonen bewegen sich voll quanten–mechanisch: Schrödinger–Gleichung
Potenzial mit speziellem Spin–Bahn–Term

reproduziert besonders gut

magische Zahlen
Spin & Parität von Kernzuständen

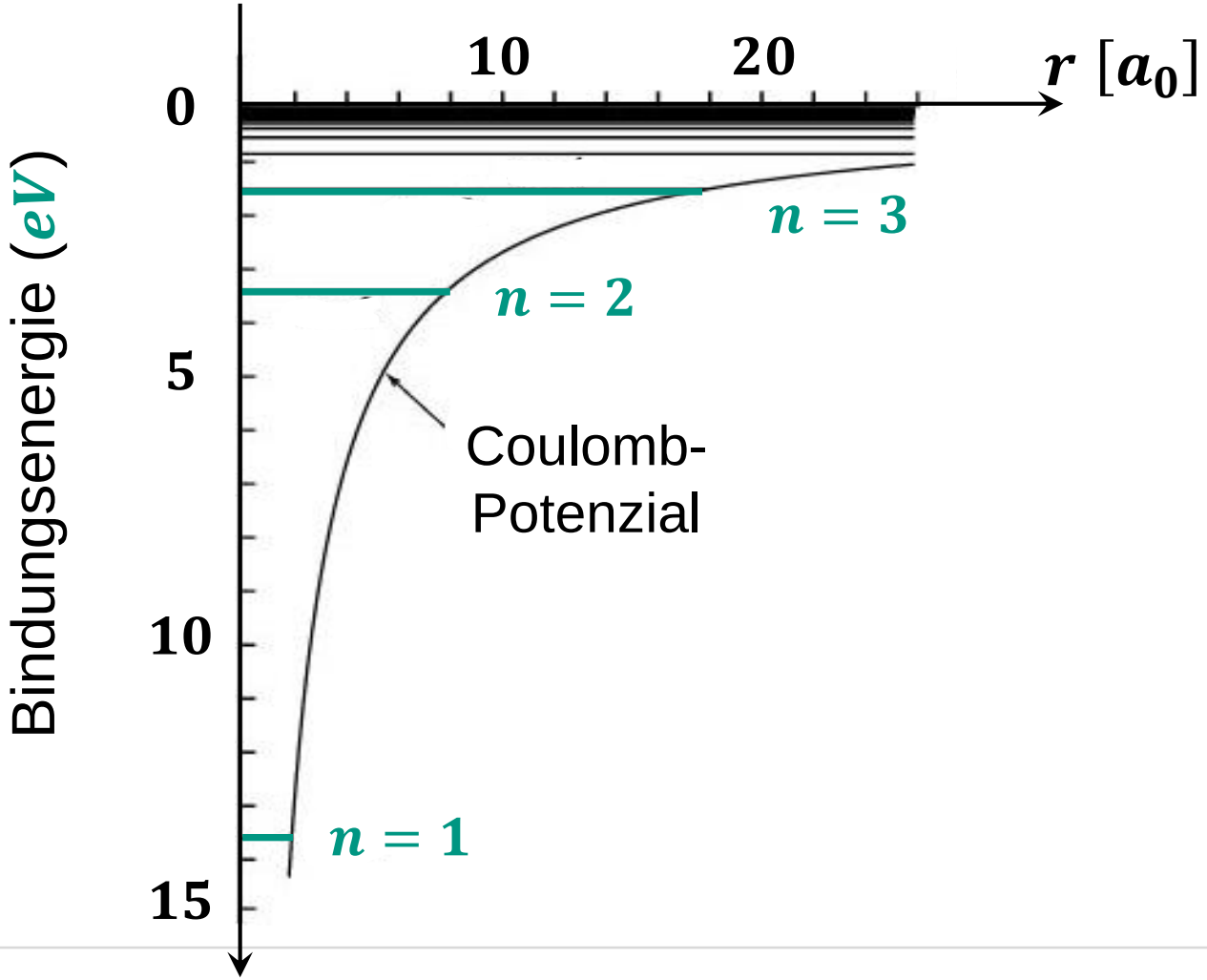
Nobelpreis
1963

Maria Göppert–Meyer



Bindungsenergien bei Atomen und Kernen

- **Deutlich verschiedene Energieskalen & stark unterschiedliches Verhalten**



Atomphysik

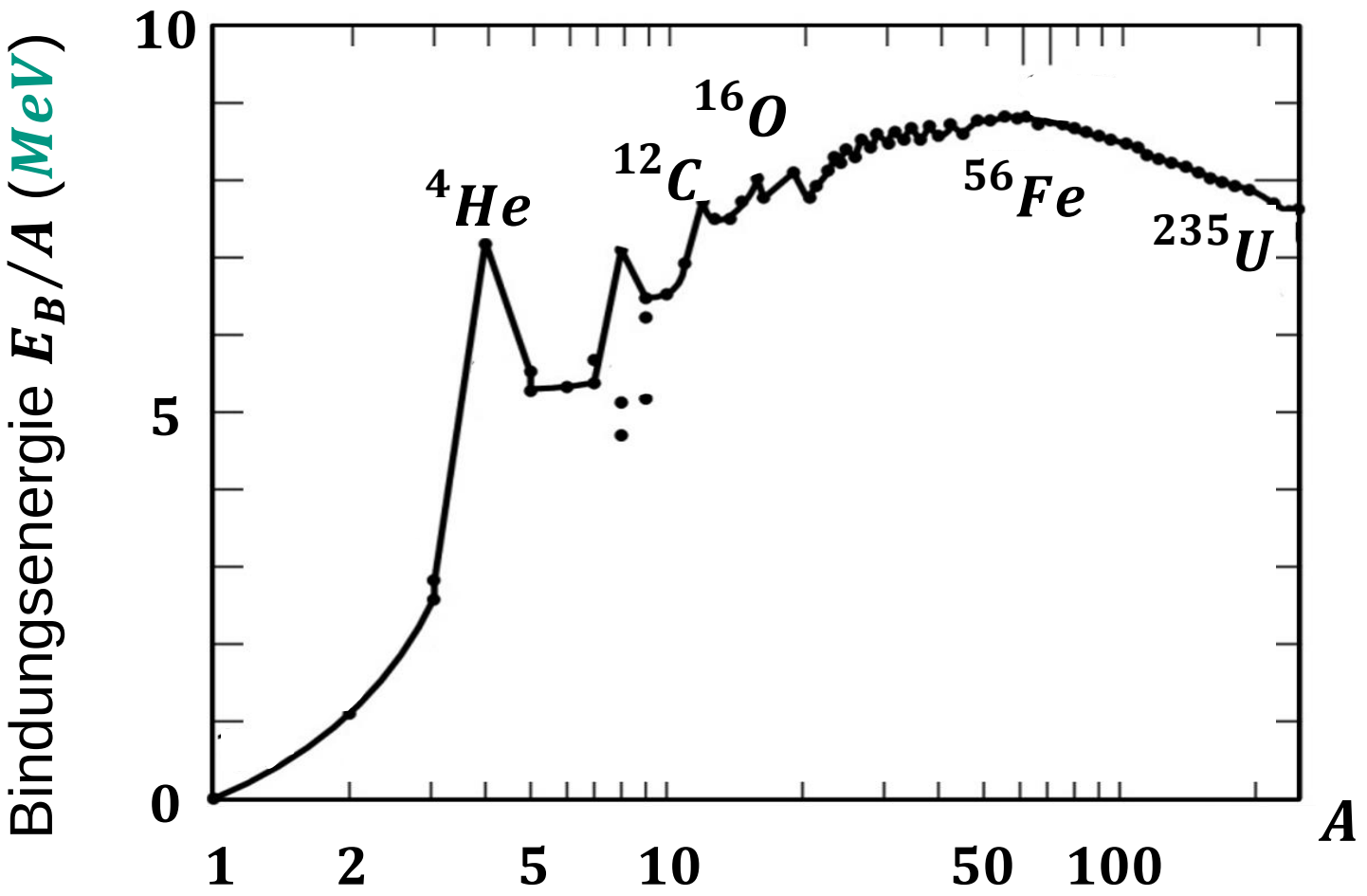
- Zentralpotenzial

- langreichweitige Coulomb–Wechselwirkung

- Bindungsenergien der Elektronen:
  eV … $sub - eV$ Bereich

Bindungsenergien bei Atomen und Kernen

- **Deutlich verschiedene Energieskalen & stark unterschiedliches Verhalten**



Kernphysik

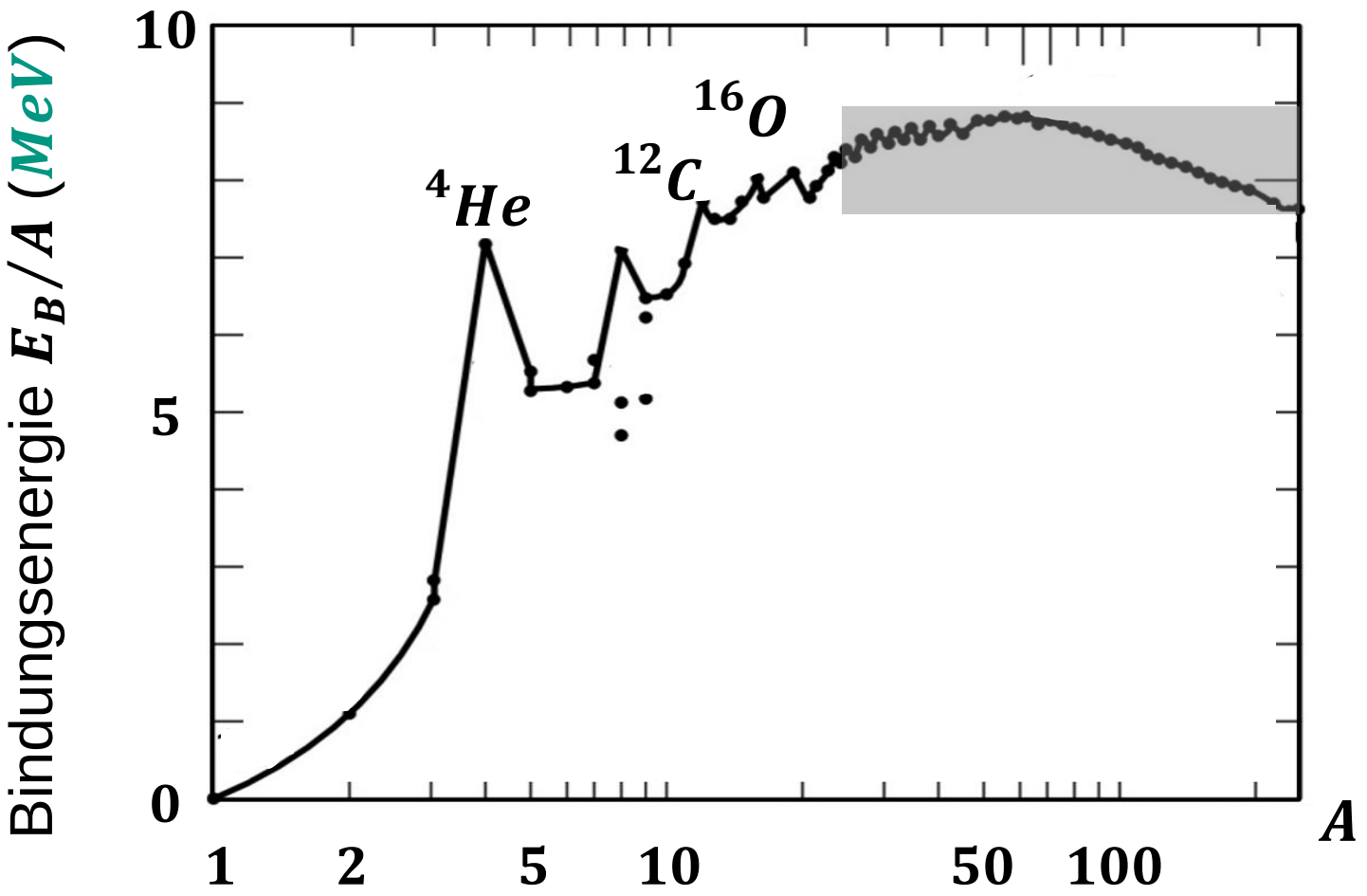
- gesättigte Kernkraft

- kurzreichweitige starke Wechselwirkung

- Bindungsenergien der Nukleonen:
  $\boldsymbol{multi - MeV}$ Bereich

Bindungsenergien bei Atomen und Kernen

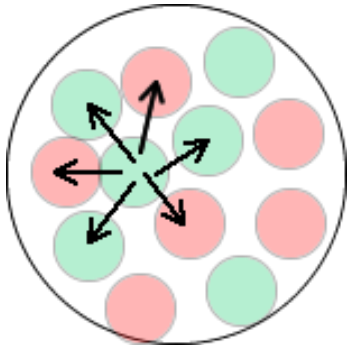
- **Mittlere Bindungsenergie $E_B/A \sim 8\ MeV$ ab Massenzahl $A > 20$**



↳Kernwechselwirkung nur mit dem nächsten Nachbarnukleon!

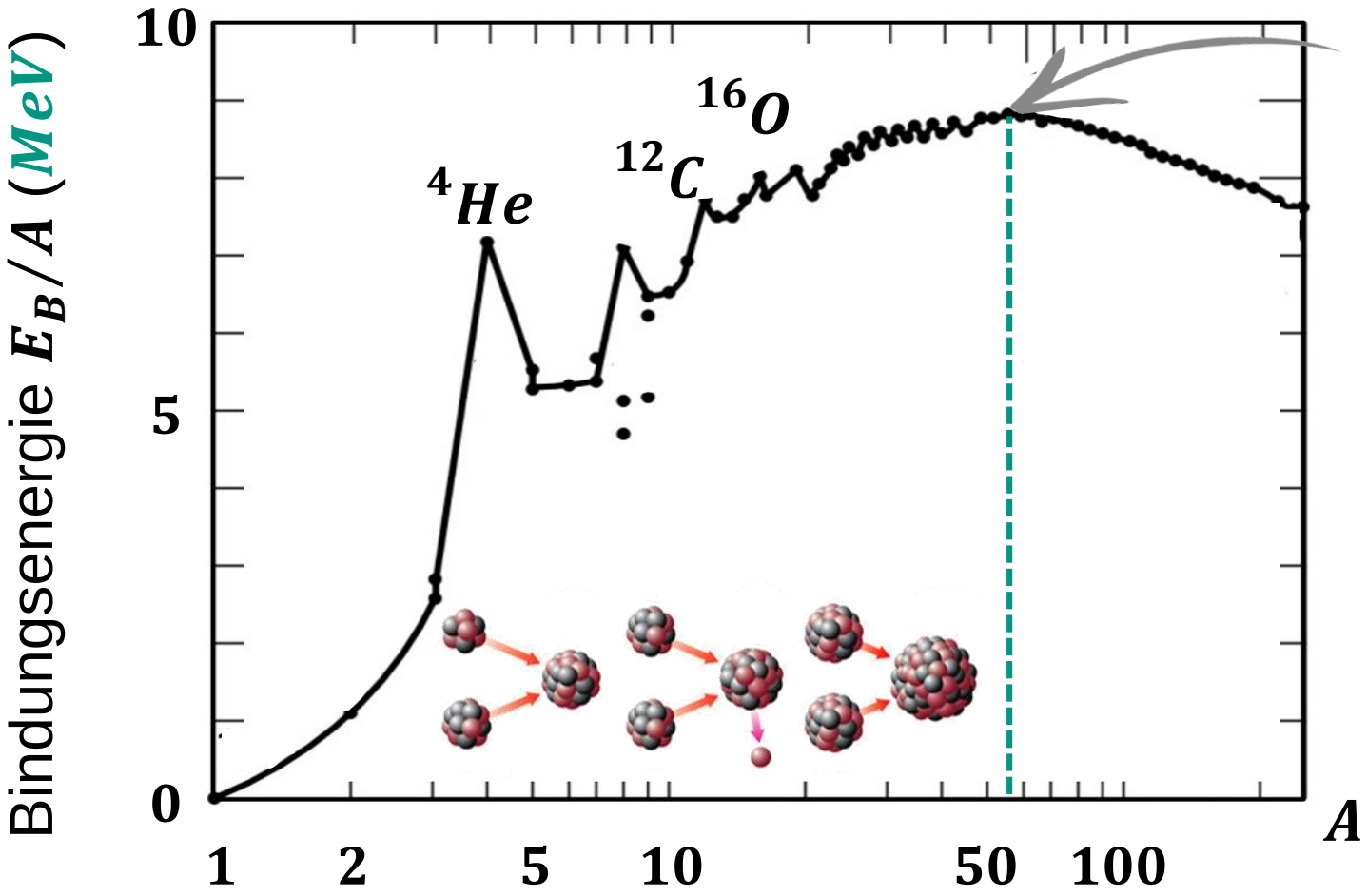
kurzreichweitige Kernkräfte

Reichweite $\sim 1\ fm$



Bindungsenergien bei Atomen und Kernen

- **Möglichkeit der Kernfusion (leichte Kerne) & Kernspaltung (schwere Kerne)**

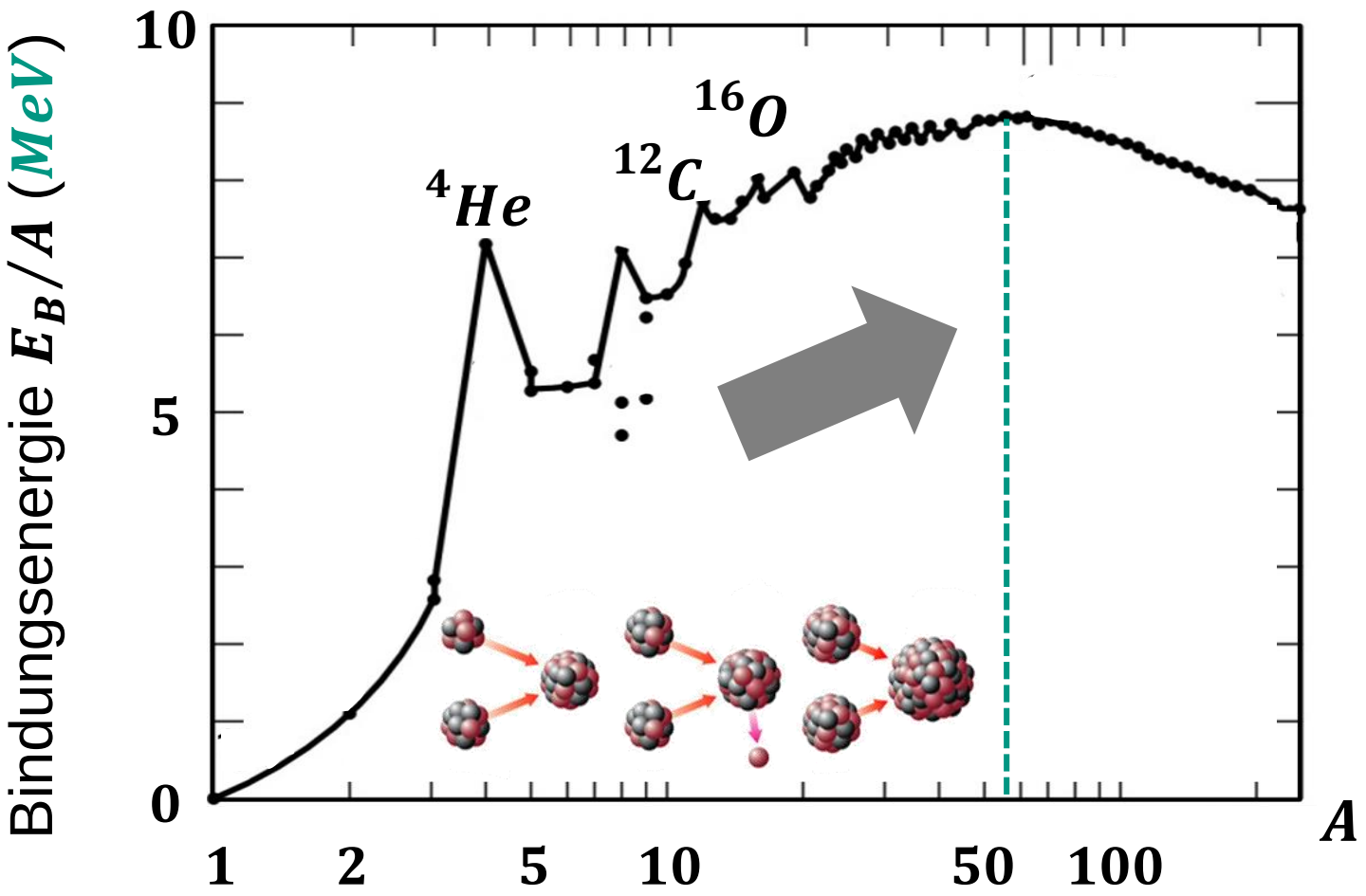


- maximaler Wert von E_B/A bei $A = 56 \ldots 58$ (^{56}Fe, ^{56}Ni)
  ⇨ stabilste Elemente

Eisen–Nickel

Bindungsenergien bei Atomen und Kernen

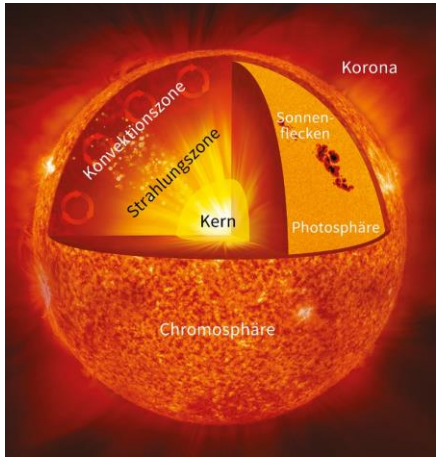
- **Möglichkeit der Kernfusion (leichte Kerne) & Kernspaltung (schwere Kerne)**



- leichte Kerne ($A < 56$): **FUSION**

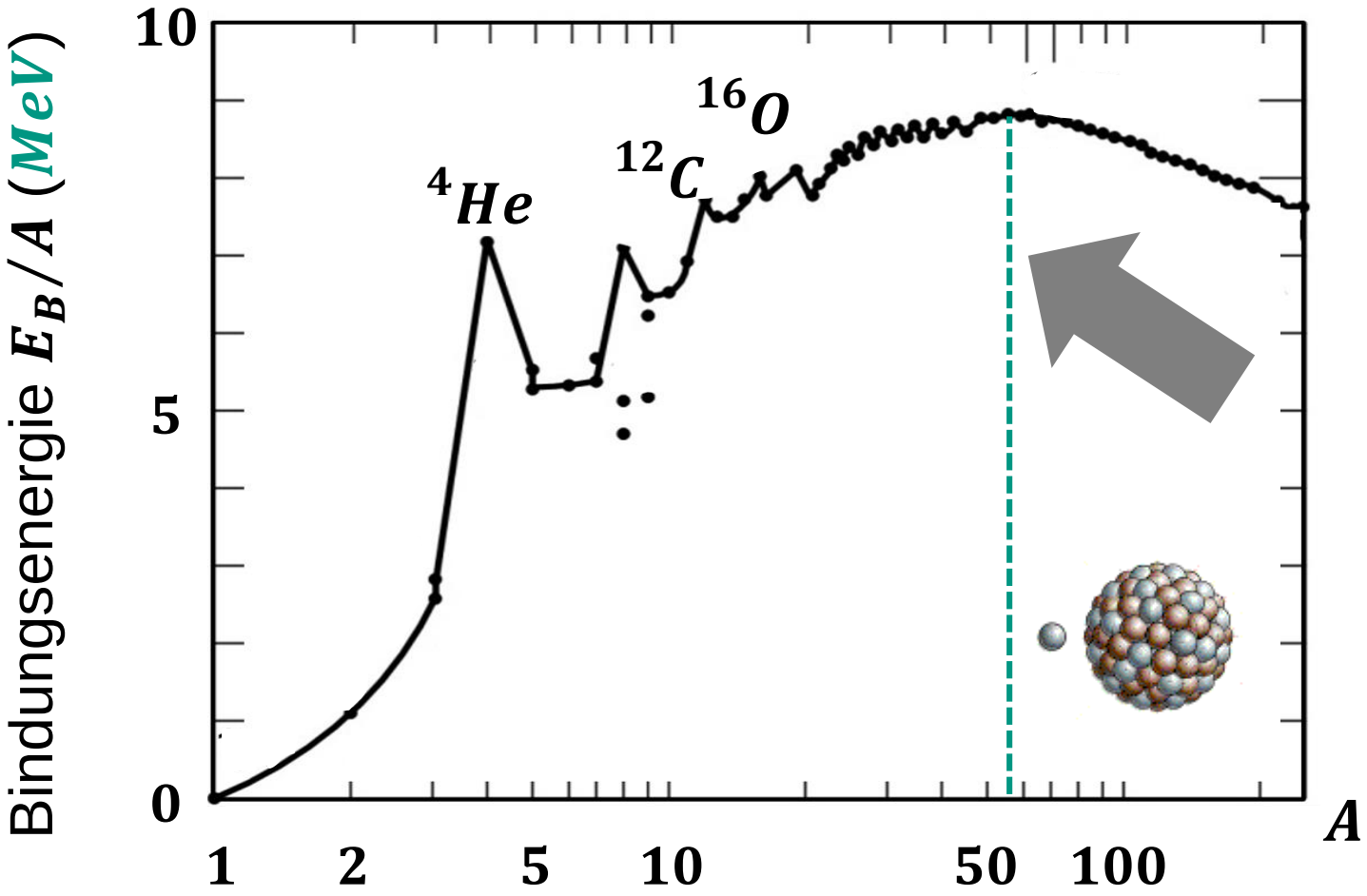
  Fusionsreaktionen führen zu Kernen mit einer höheren Bindungsenergie

  ⇨ **Energiegewinn**



Bindungsenergien bei Atomen und Kernen

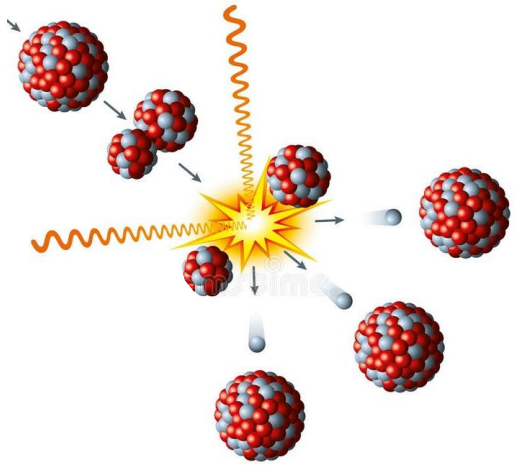
- **Möglichkeit der Kernfusion (leichte Kerne) & Kernspaltung (schwere Kerne)**



- schwere Kerne $(A > 56)$:
  SPALTUNG

  Spaltreaktionen führen zu Kernen mit einer höheren Bindungsenergie

  ⇨ **Energie-gewinn**



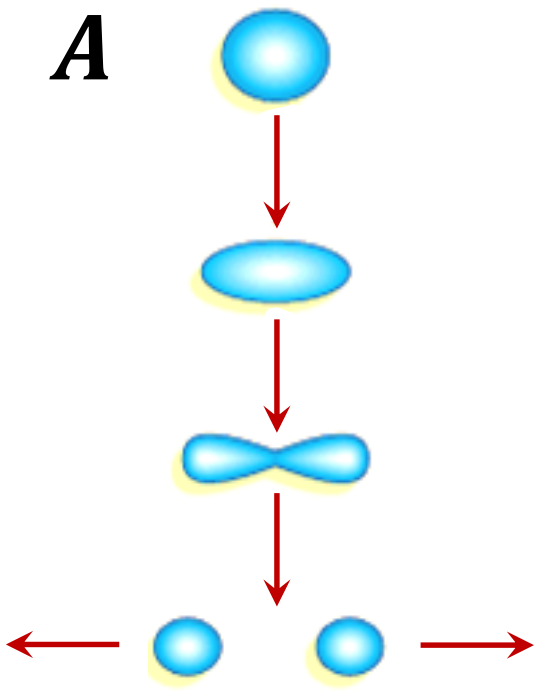
QUIZ: weshalb keine *superschweren* Isotope?

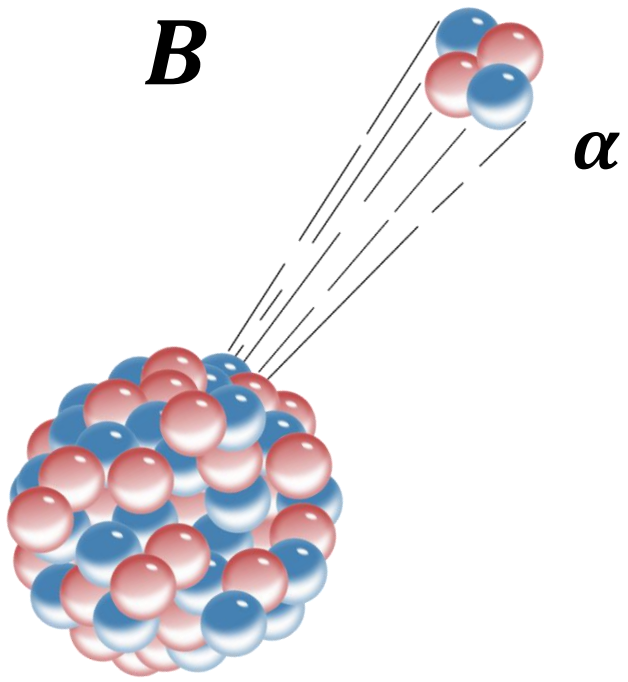
- **Frage: die schwersten Kerne haben $A < 250$: dies erklärt sich, da Kerne**

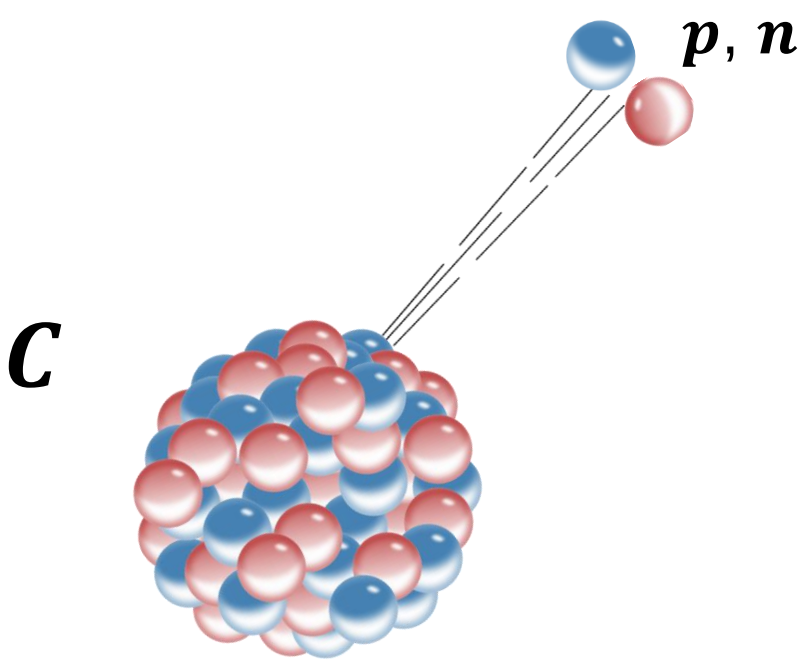
A) … **spontan** spalten können!

B) ... α **–Teilchen** emittieren können !

C) … **Nukleonen** emittieren können!

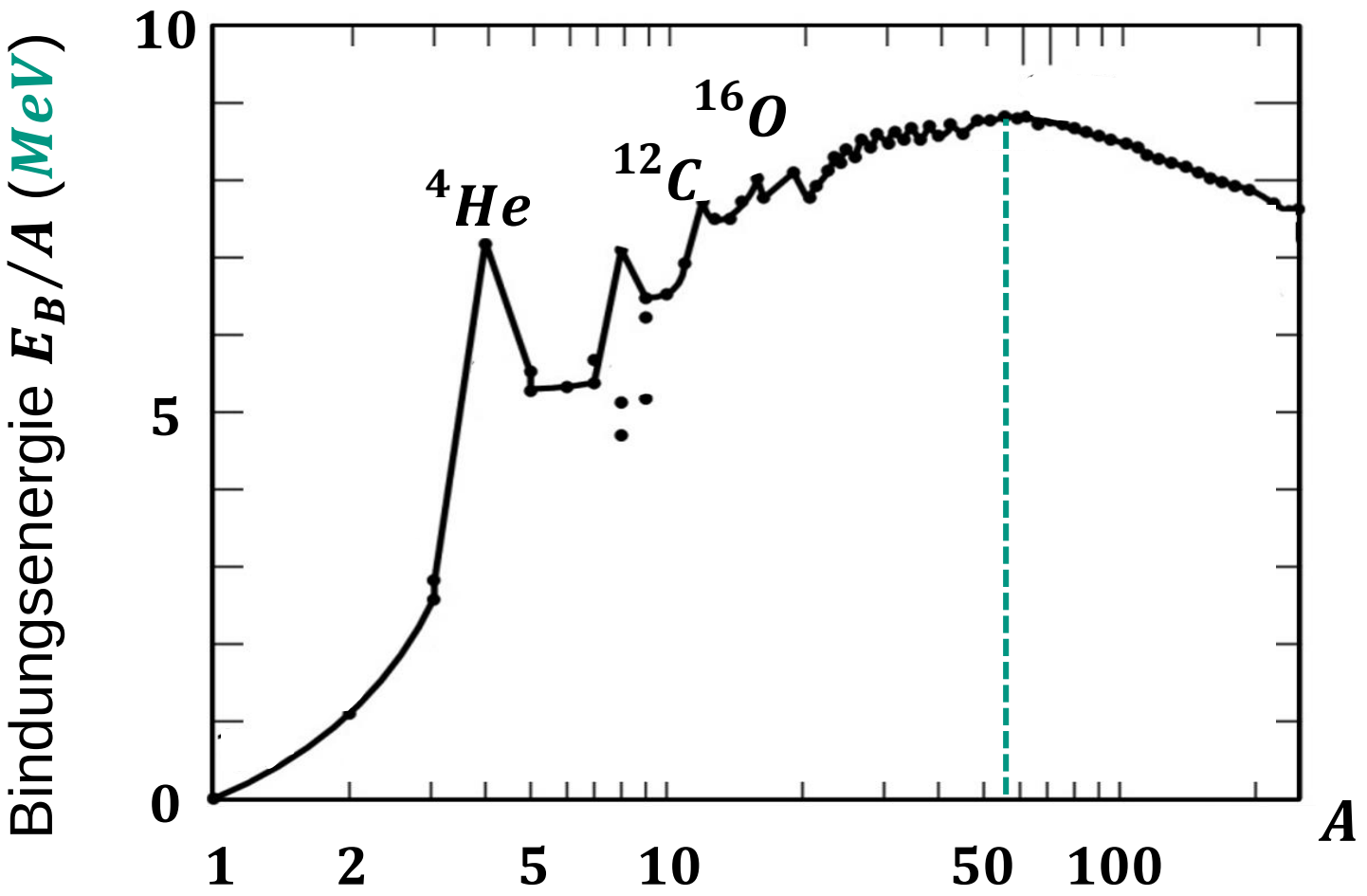






Bindungsenergien bei Atomen und Kernen

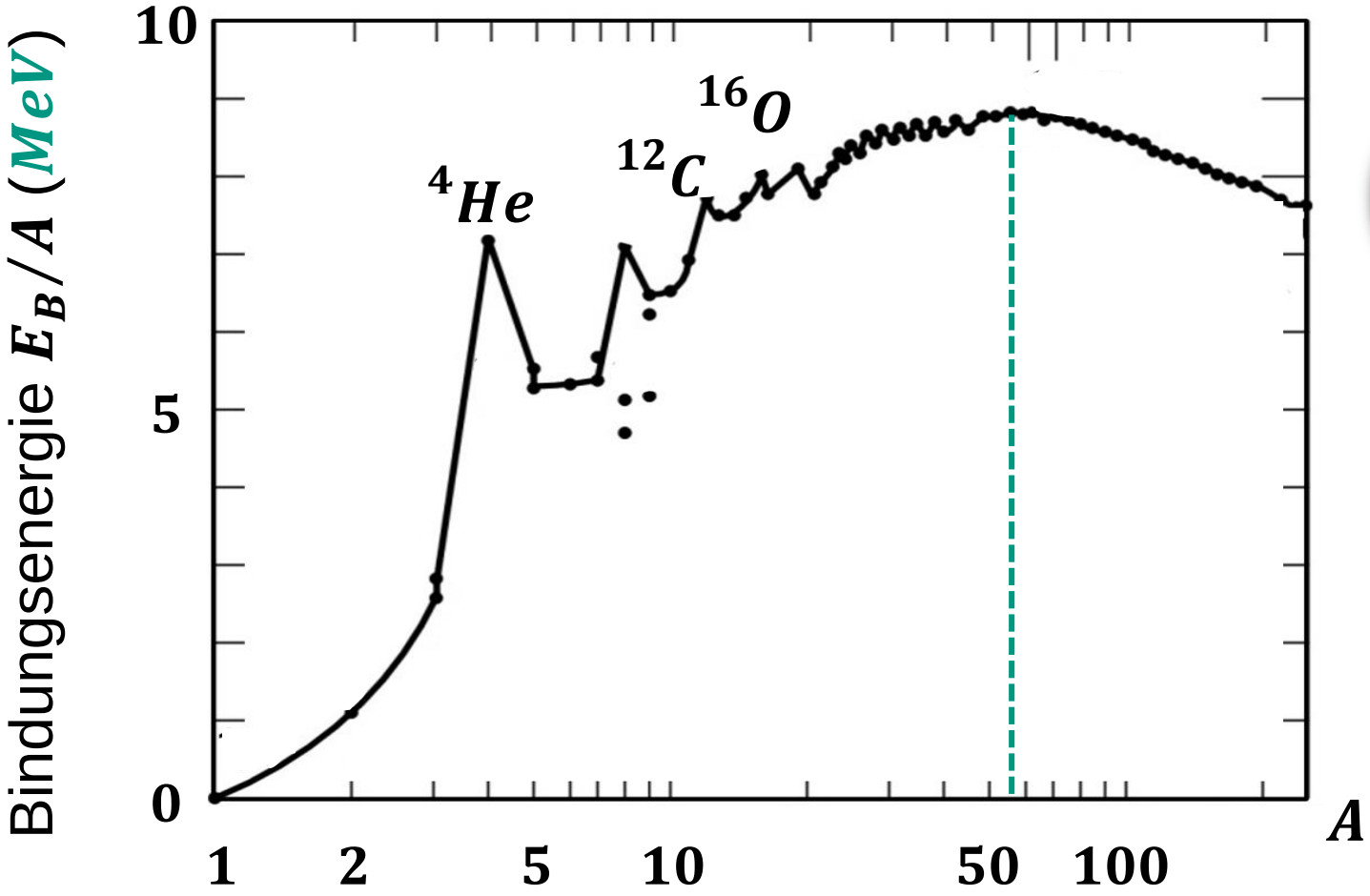
- **Kernmodelle müssen den beobachteten Verlauf von E_B/A reproduzieren**

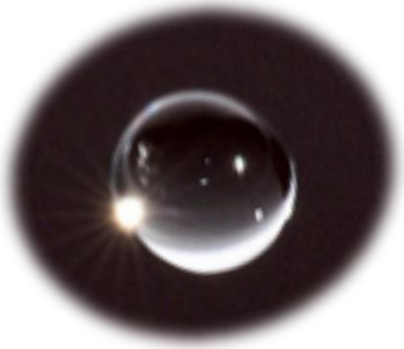


- Abhängigkeit von Masse A mit Maximum bei $A = 56$
- absolute Größe von $7 \ldots 8\ MeV$
- ´Peakstrukturen´ bei $A = 4, 12, 16$
- $gg - ug - uu -$ Verlauf bei den mittleren Massenzahlen

Bindungsenergien bei Atomen und Kernen

- **Kernmodelle: Tröpfchenmodell von H.A. Bethe & C.F. von Weizsäcker**





H. A. Bethe C.F. Weizsäcker

- **semiempirische Massen-formel**: beinhaltet viele freie Parameter, die an Experimente angepasst wurden/werden

QUIZ: wie schwer sind Nukleonen im Kern?

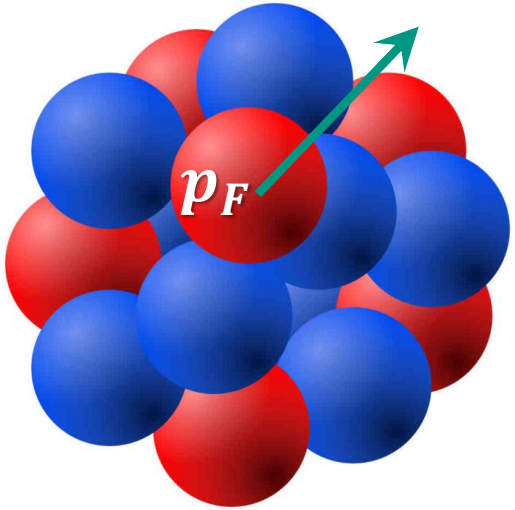
- **Frage: im Vergleich zu freien Nukleonen sind die Nukleonen im Kern**

A) … **schwerer** da sie relativisisch sind (aka ´**Fermi–Impuls**´ $\boldsymbol{p_F \sim 0,25\ c}$) !

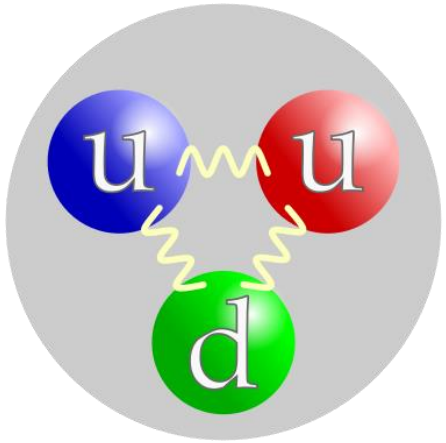
B) … **gleich schwer** da die Nukleon Masse aus Quarks entsteht

C) … **leichter** da sie gebunden sind!

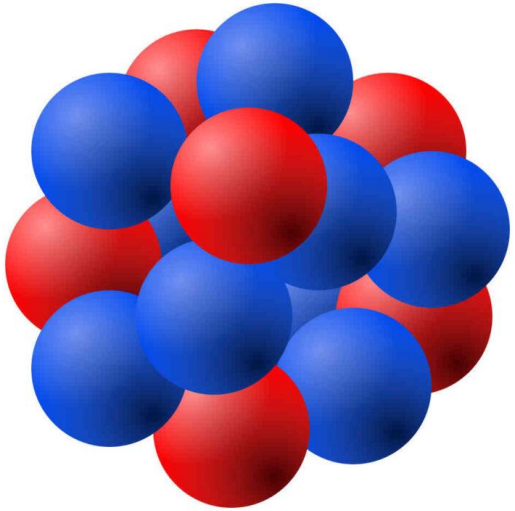
A



B



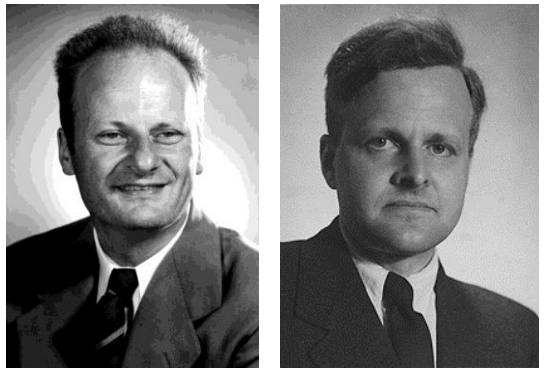
C

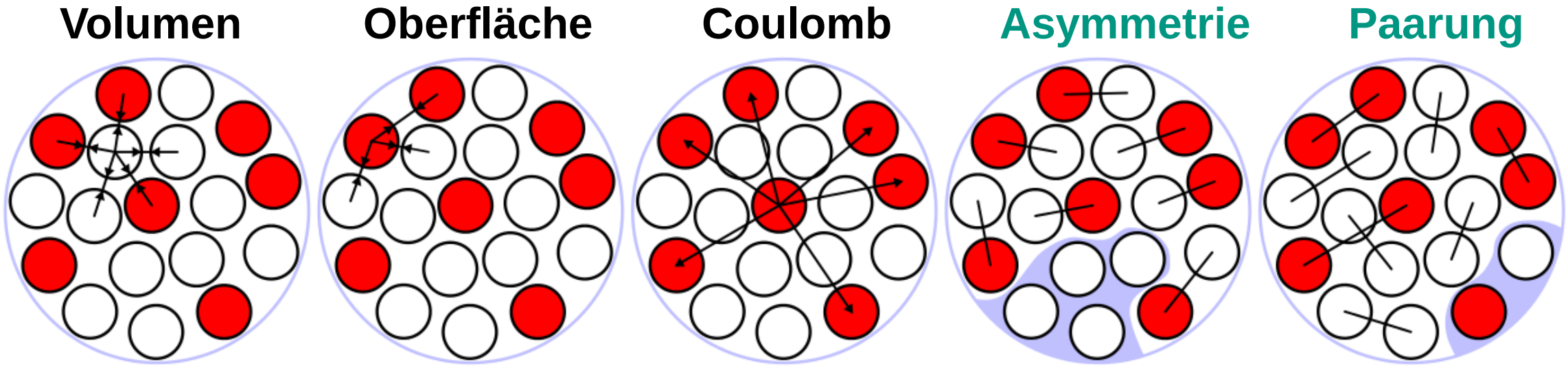


Kernmodelle: Tröpfchenmodell

- **Aufgestellt von H.A. Bethe & C.F. von Weizsäcker**

  - **semi–klassische** Beschreibung:
    - **3** klassische Effekte
    - **2** quantenmechanische Effekte





Tröpfchenmodell: Volumen−Term

- **semiklassisches Modell für Verlauf von E_B/A**

- Kerne als inkompressible, geladene ´Flüssigkeitstropfen´

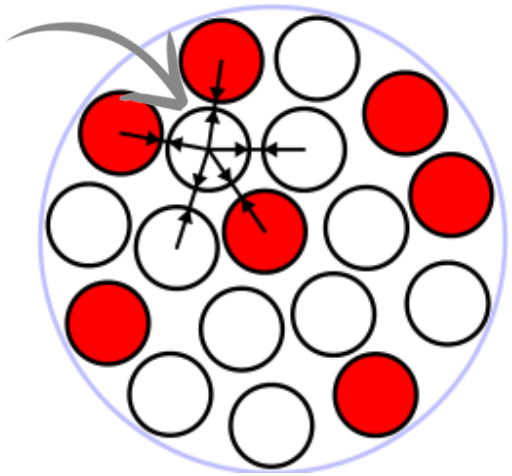
- **kurzreichweitige**, gesättigte Kernkräfte: $E_B/A = const.$ ➡ Nukleon−Ww. nur mit direkten Nachbarn

Nukleon # 1: Ww. nur mit engsten Nachbarn

⋮ ⋮

Nukleon # A : Ww. nur mit engsten Nachbarn

Nukleon # 1



Kern mit A Nukleonen

⇨ Anzahl der Wechselwirkungen $\sim A$

⇨ $E_B/A \sim const.$

Tröpfchenmodell: Volumen−Term

- **semiklassisches Modell für Verlauf von E_B/A**

- Kerne als inkompressible, geladene ´Flüssigkeitstropfen´

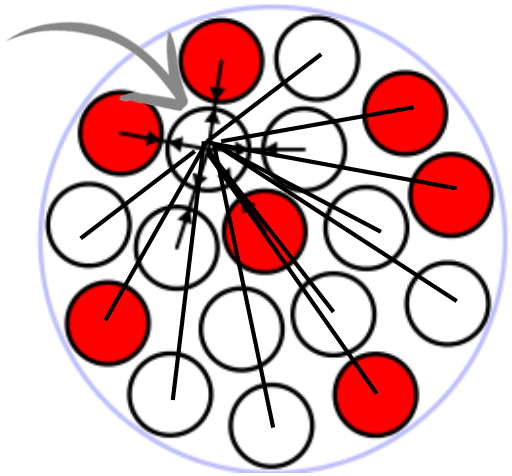
- hypothet., langreichweitige Kernkräfte: $E_B/A \sim A$ ➡ hypothetische Nukleon−Ww. mit allen Nachbarn

Nukleon # 1: Ww. nur mit allen Nachbarn

⋮ ⋮

Nukleon # A : Ww. nur mit allen Nachbarn

Nukleon # 1



Kern mit A Nukleonen

⇨ Anzahl der Wechselwirkungen $\sim A^2$

⇨ $E_B/A \sim A$

WRONG

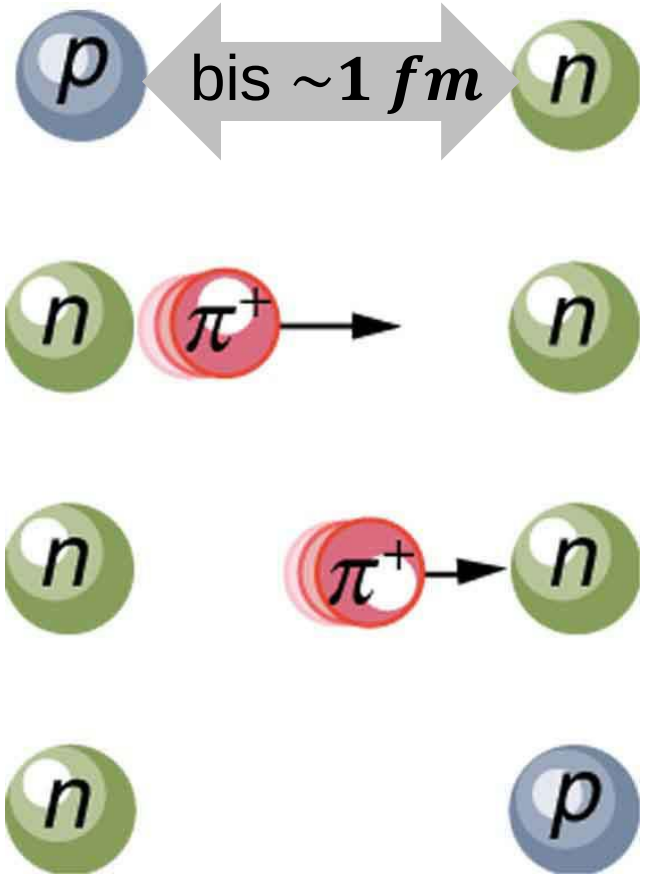
Tröpfchenmodell: Volumen−Term

- **semiklassisches Modell für Verlauf von E_B/A**

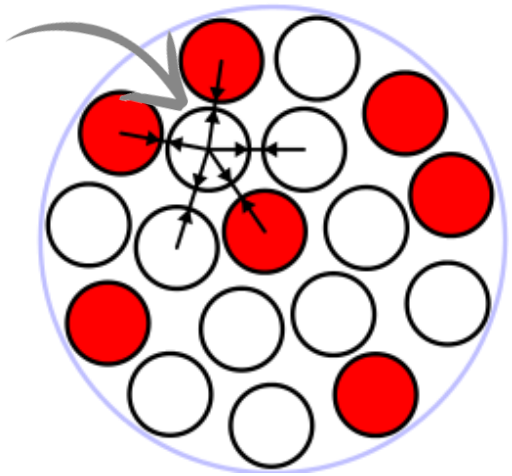
- **Nukleonen**: Austausch von massiven **Pionen**

- kurzreichweitige, gesättigte Kernkräfte:

$$E_B/A = const.$$

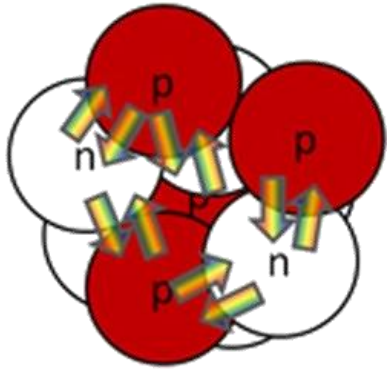


Nukleon
1



Kern mit A
Nukleonen

starke



Kraft

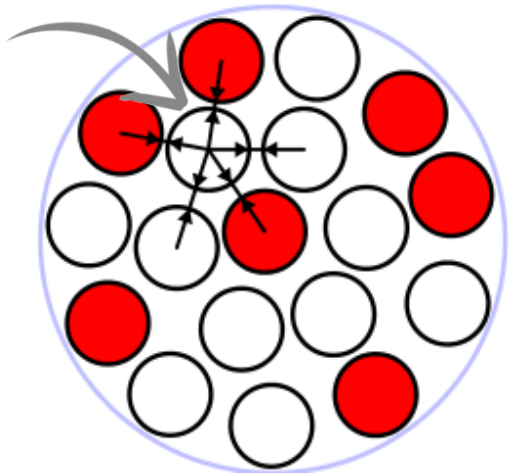
Tröpfchenmodell: Volumen−Term

- **semiklassisches Modell für Verlauf von E_B/A**

- **Volumenterm: Nukleon ´fühlt´ nur die unmittelbaren Nachbarn**

- beschreibt einen unendlich großen Kern ohne Oberfläche

Nukleon
1



Kern mit A
Nukleonen

- dominanter Term im Tröpfchenmodell

- positiver Beitrag zur Bindungsenergie*

$$E_B(Z,A) \sim a_V \cdot A$$

*wird betrachten $|E_B|$

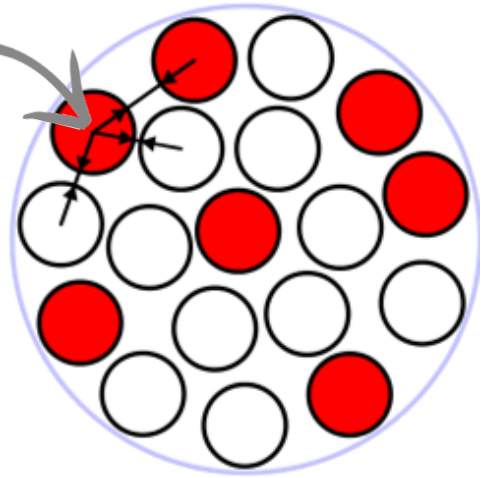
Tröpfchenmodell: Oberflächen−Term

- **semiklassisches Modell für Verlauf von E_B/A**

- **Oberflächenterm: Nukleonen an der Kernoberfläche**

- Nukleonen an der Oberfläche des Kerns besitzen weniger Partnernukleonen

Nukleon
1



Kern mit A
Nukleonen

- Reduktion der Bindungsenergie

- negativer Beitrag zur Bindungsenergie*

$$E_B(Z,A) \sim -a_S \cdot A^{2/3}$$

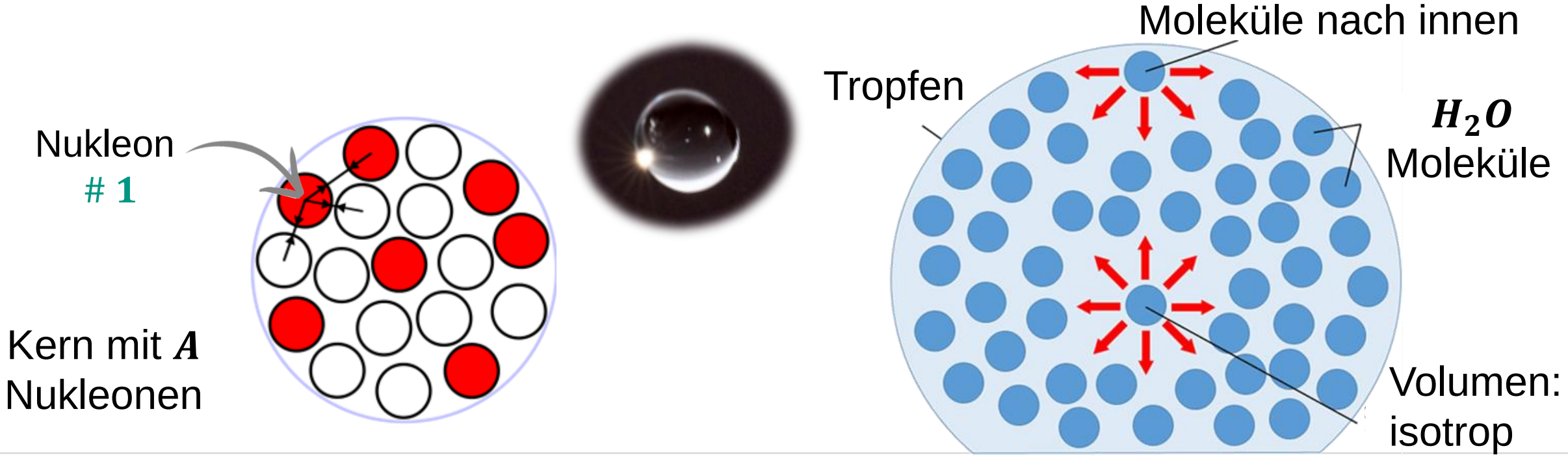
*wird betrachten $|E_B|$

Tröpfchenmodell: Oberflächen−Term

- **semiklassisches Modell für Verlauf von E_B/A**

- **Oberflächenterm: Nukleonen an der Kernoberfläche**

- klassisches Analogon: Oberflächenspannung eines Tropfens



Tröpfchenmodell: Coulomb−Term

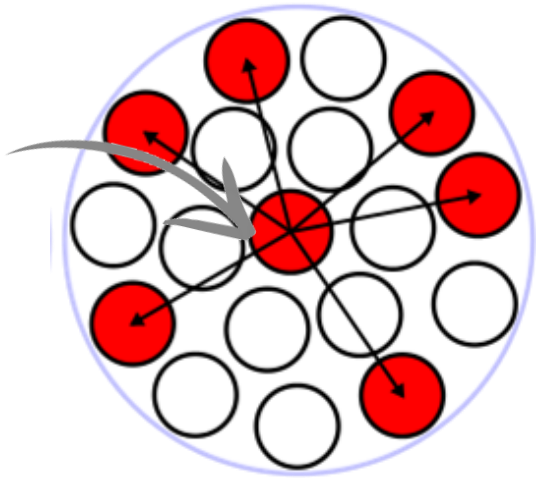
- **semiklassisches Modell für Verlauf von E_B/A**

- Protonen erzeugen langreichweitige $(\sim 1/r)$ abstoßende Kraft

- klassisches Analogon: homogen geladene Kugel

Proton
1

Kern mit Z
Protonen



- Reduktion der Bindungsenergie

- negativer Beitrag

$$E_B(Z,A) \sim -a_C \cdot Z^2 \cdot A^{-1/3}$$

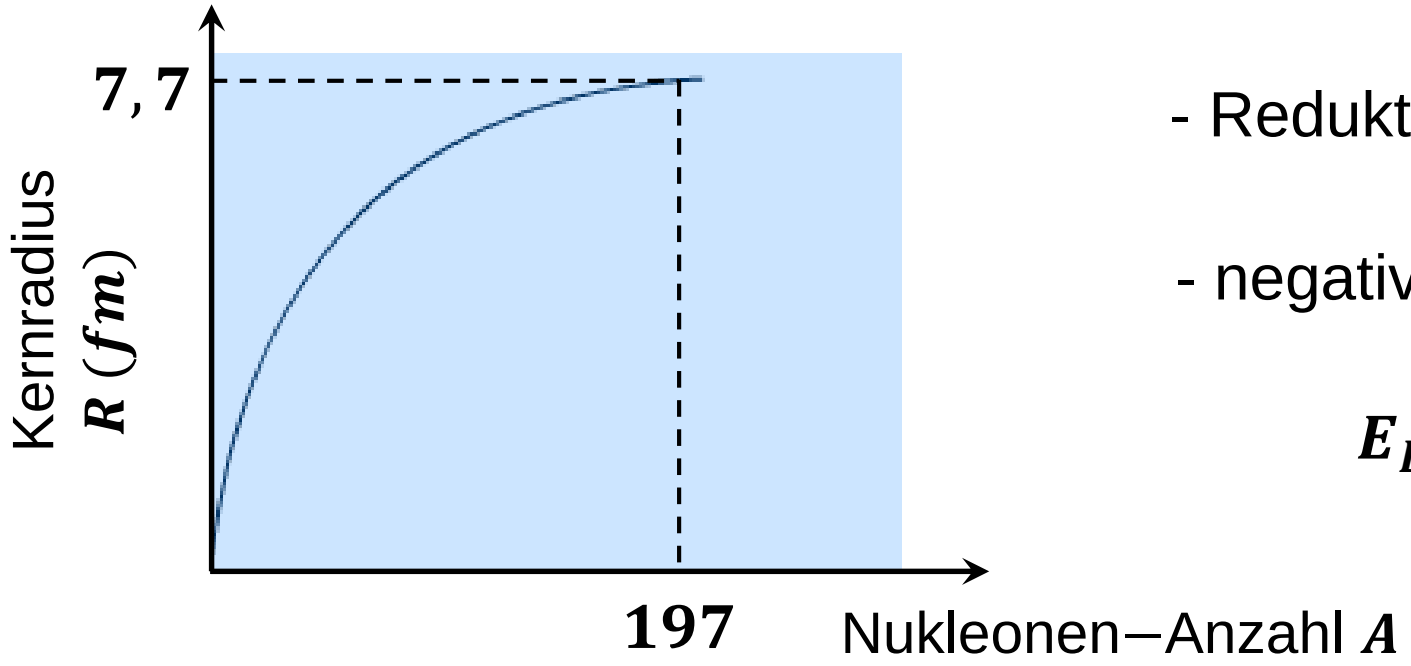
$$R = R_0 \cdot A^{1/3}$$

Tröpfchenmodell: Coulomb−Term

- **semiklassisches Modell für Verlauf von E_B/A**

- Protonen erzeugen langreichweitige ($\sim 1/r$) abstoßende Kraft

- homogen geladene Kugel mit Radius R, Dichte: $\rho = (Z \cdot e)/({}^{4}/_{3} \cdot \pi \cdot R^3)$



- Reduktion der Bindungsenergie

- negativer Beitrag

$$E_B(Z,A) \sim -a_C \cdot Z^2 \cdot A^{-1/3}$$

$$R = 1,2\ fm \cdot A^{1/3}$$

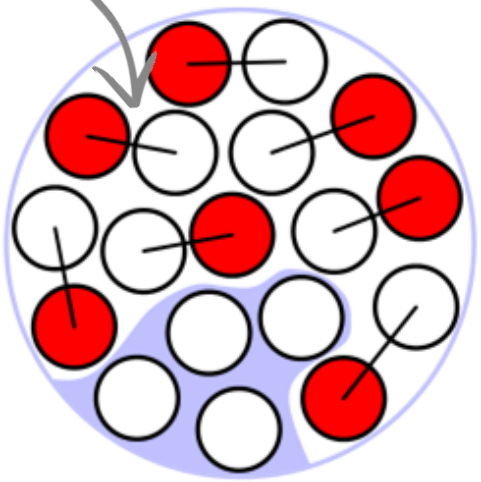
Tröpfchenmodell: Asymmetrie−Term

- **semiklassisches Modell für Verlauf von E_B/A**

- **Asymmetrieterm**: quantenmechanischer Ursprung – ideal ist $N = Z$

- resultiert aus Pauli´s Ausschliessungsprinzip

p/n −´Balance´



Kern mit asymmetrischer Nukleonenzahl

- Reduktion der Bindungsenergie

- negativer Beitrag

$$E_B(Z,A) \sim -a_A \cdot (N-Z)^2/A$$

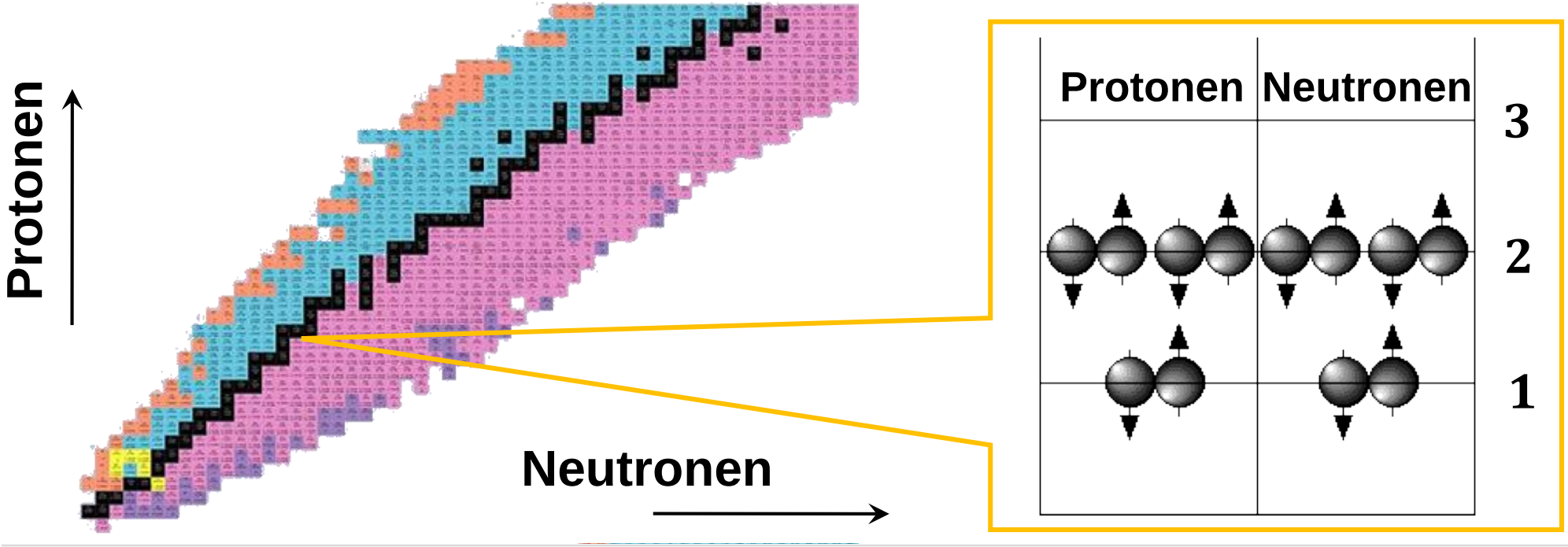
- Konfiguration mit einer identischen Zahl an Protonen (Z) und Neutronen (N) bevorzugt $N = Z$

Tröpfchenmodell: Asymmetrie−Term

- **semiklassisches Modell für Verlauf von E_B/A**

  - **Asymmetrieterm:** keine stabilen Kerne mit starkem Überschuss an p oder n

  - wird bei Kernen mit $N = Z$ ein Nukleon ausgetauscht ($p \leftrightarrow n$), reduziert sich E_B



Termschema

Tröpfchenmodell: Paarungs−Term

- **semiklassisches Modell für Verlauf von E_B/A**

- **Paarungsterm**: quantenmechanischer Ursprung

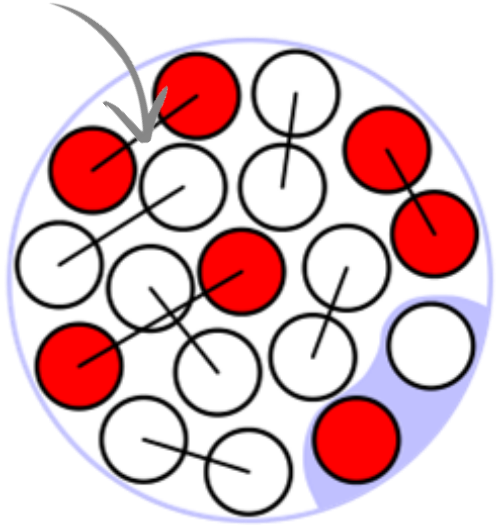
- basiert auf exp. Befunden: gg – Kerne stärker gebunden als ug – & uu – Kerne

- variabler Einfluss auf Bindungsenergie

$$\delta(Z,A) \sim a_P \cdot A^{1/2}$$

$$\left\{\begin{array}{lll} + & \text{für} & gg \\ 0 & \text{für} & ug \\ - & \text{für} & uu \end{array}\right\} \text{Kerne}$$

Nukleonpaar



uu – Kern mit **2 ungepaarten** Nukleonen

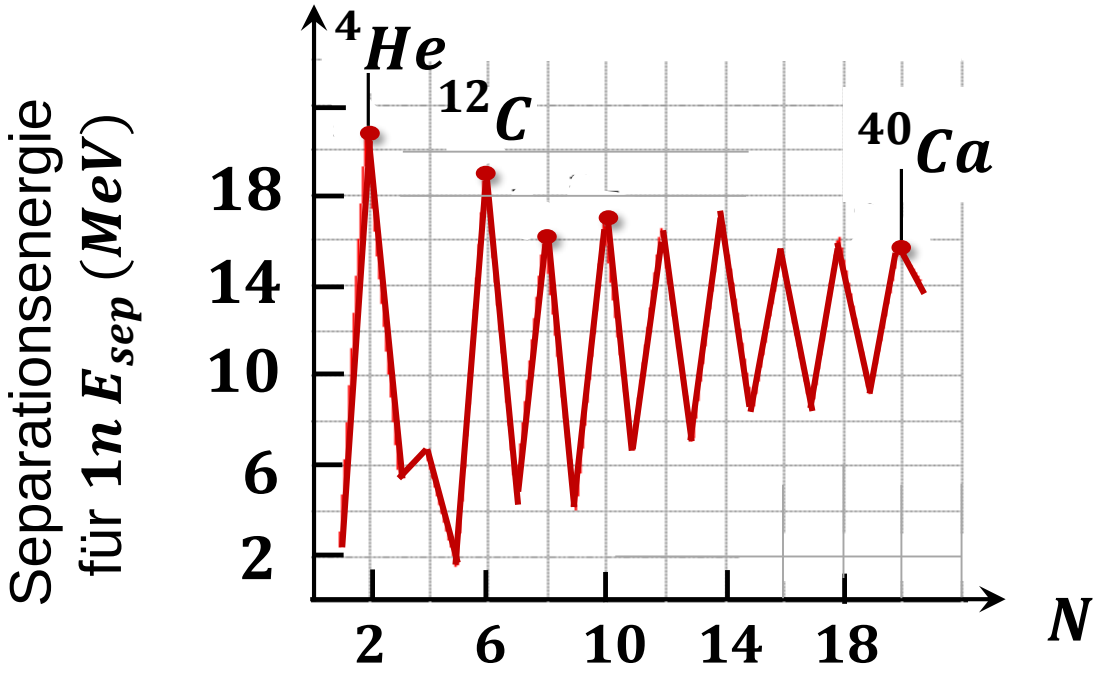
gg – $g$erade $g$erade
uu – $u$ngerade $u$ngerade

Tröpfchenmodell: Paarungs−Term

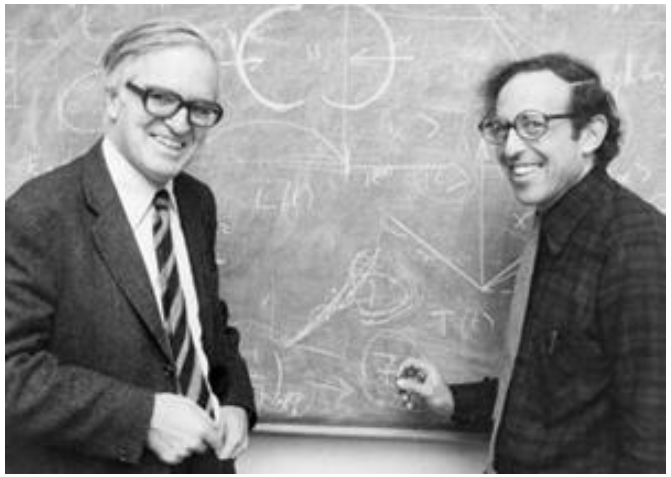
- **semiklassisches Modell für Verlauf von E_B/A**

- **Paarungsterm: gepaarte Nukleonen mit antiparallelem Spin**

- basiert auf exp. Befunden: Kerne mit **geradem N** sind **$2\ MeV$** stärker gebunden!



- **Bohr−Mottelson** Erweiterung relativ zur Massenformel von Weizsäcker



Nobelpreis
1975

Tröpfchenmodell: Fit der Parameter

- **semiklassisches Modell für Verlauf von E_B/A**

- **Bethe–Weizsäcker´sche Massenformel: Zusammenfassung aller Terme**

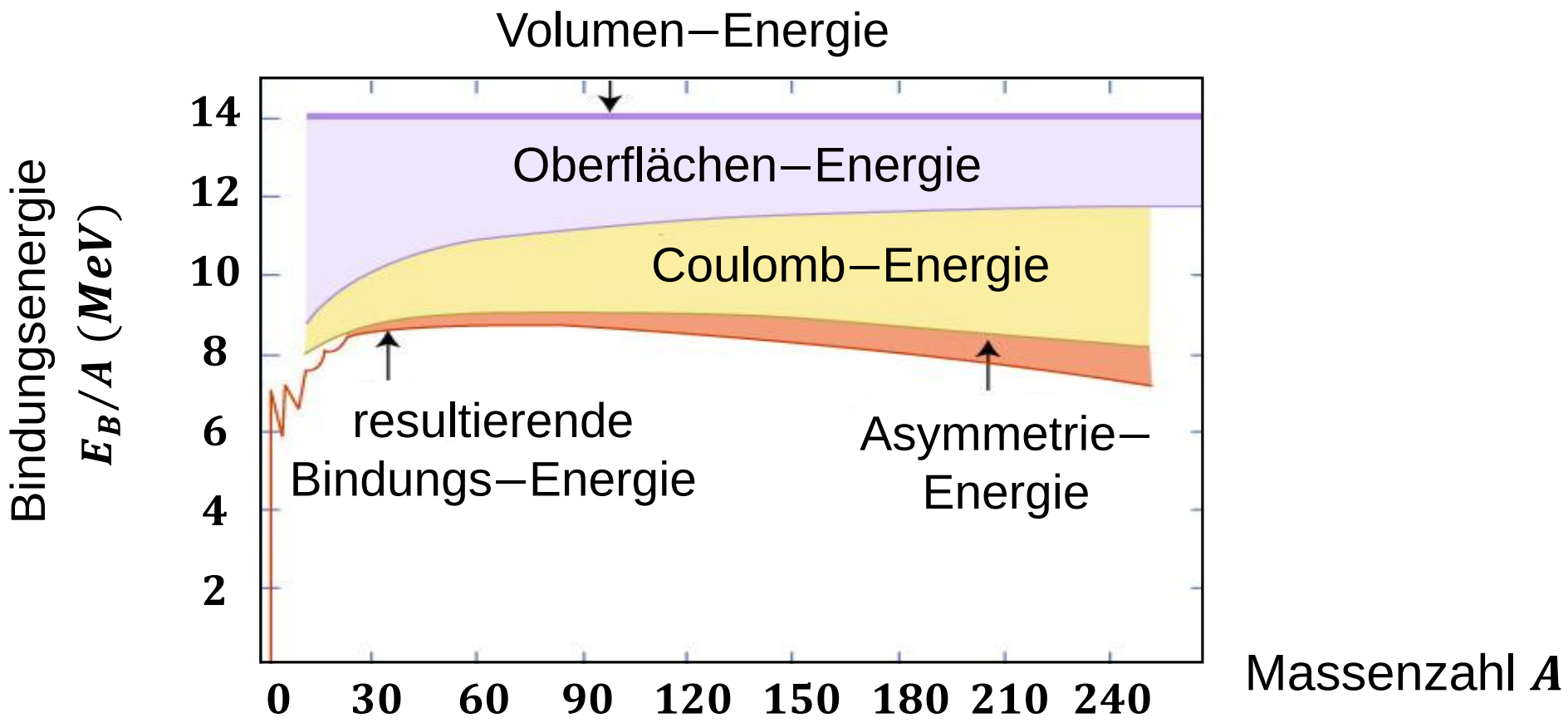
$$E_B(Z,A) = a_V \cdot A - a_S \cdot A^{2/3} - a_C \cdot Z^2 \cdot A^{-1/3} - a_A \cdot (N-Z)^2/A \pm \delta(Z,A)$$

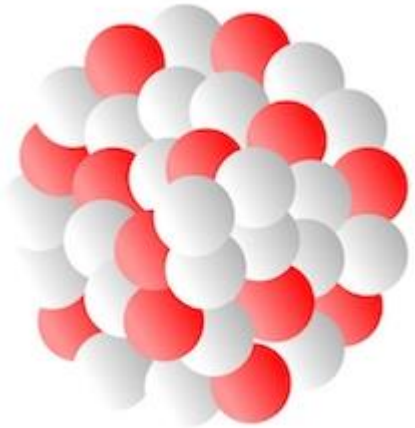
Beitrag	Faktor a	Größe (MeV)
Volumenterm	a_V	$15,58$
Oberflächenterm	a_S	$16,91$
Coulombterm	a_C	$0,71$
Asymmetrieterm	a_A	$23,21$
Paarungsterm	a_P	$11,46$

- Anpassung der Terme an zahlreiche experimentell bekannte Kernmassen für Nukleonzahlen $A > 40$: erlaubt ca. $\sim 10\%$ Genauigkeit

Tröpfchenmodell: Beiträge und Verlauf

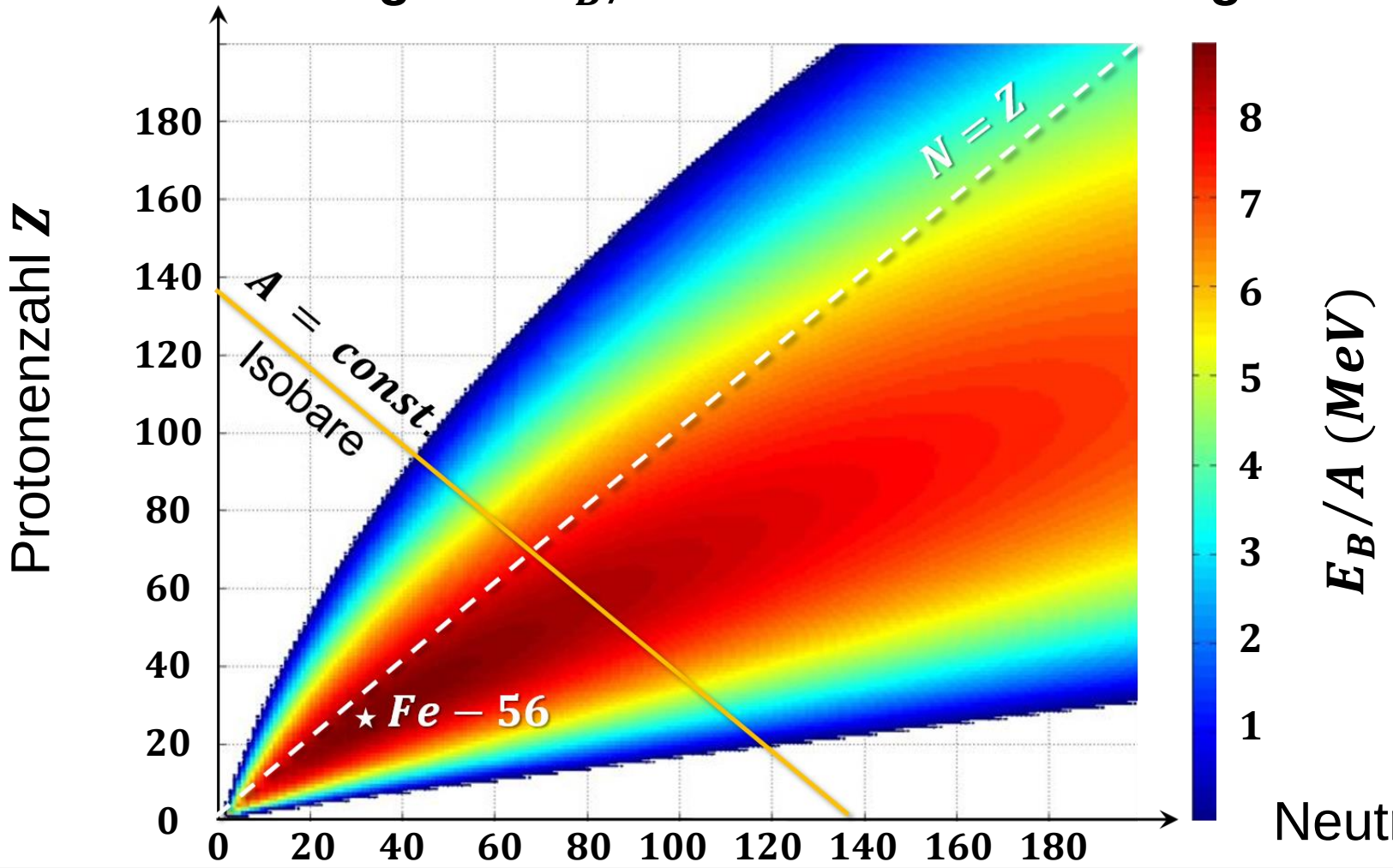
- **Bethe–Weizsäcker´sche Massenformel: Zusammenfassung aller Terme**

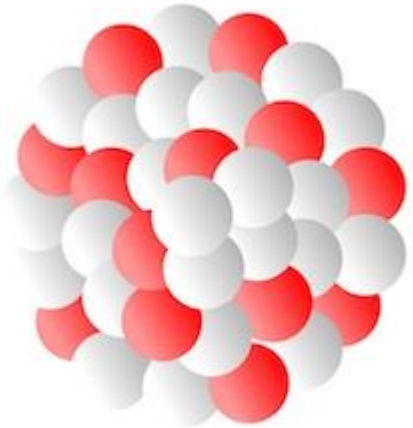




Tröpfchenmodell: Beiträge und Verlauf

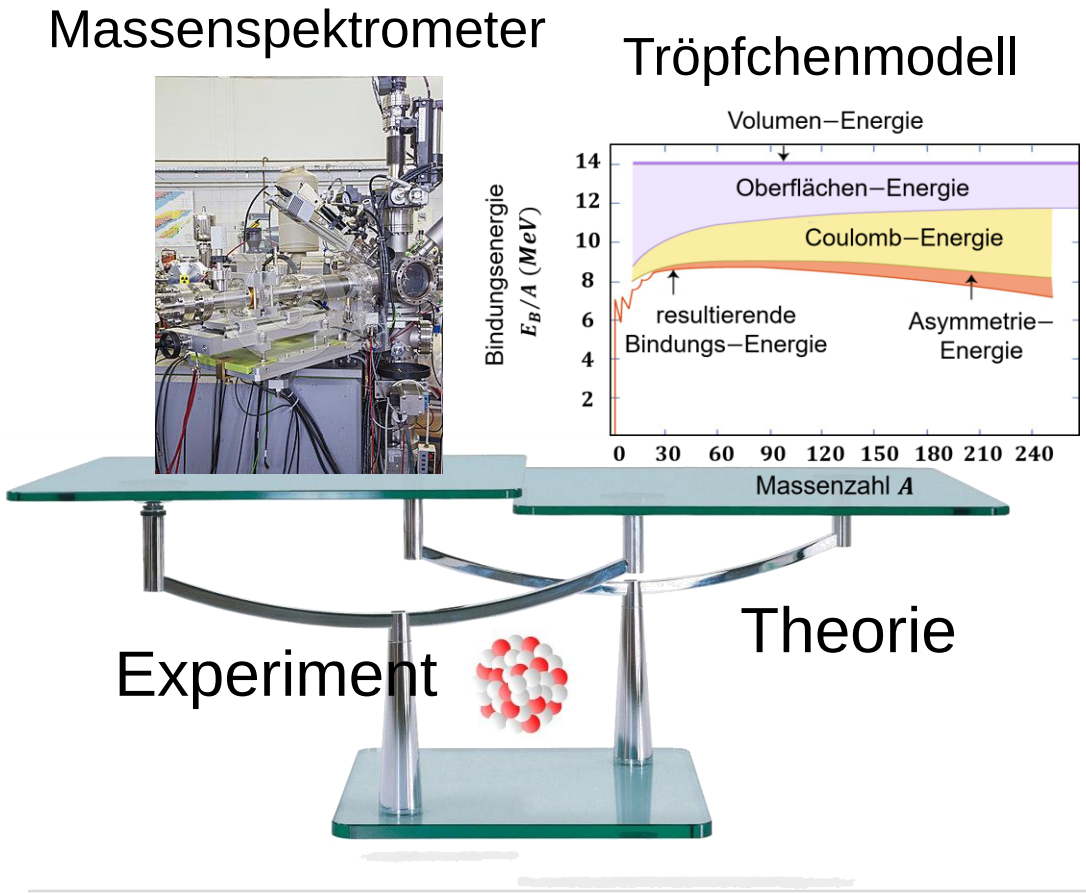
- **Visualisierung von E_B/A für Kerne mit Ladungszahl Z & Neutronenzahl N**





Tröpfchenmodell: Bezug zu Kernmassen

- **Bethe–Weizsäcker´sche Massenformel im Vergleich mit der Kernmasse**



Kernmasse $\boldsymbol{M}$

$$\boldsymbol{M(Z,A) = Z \cdot M_P + N \cdot M_N - E_B(Z,A)}$$

$\boldsymbol{938,27\ MeV}$ $\boldsymbol{939,57\ MeV}$ $\boldsymbol{8 \ldots 9\ MeV}$

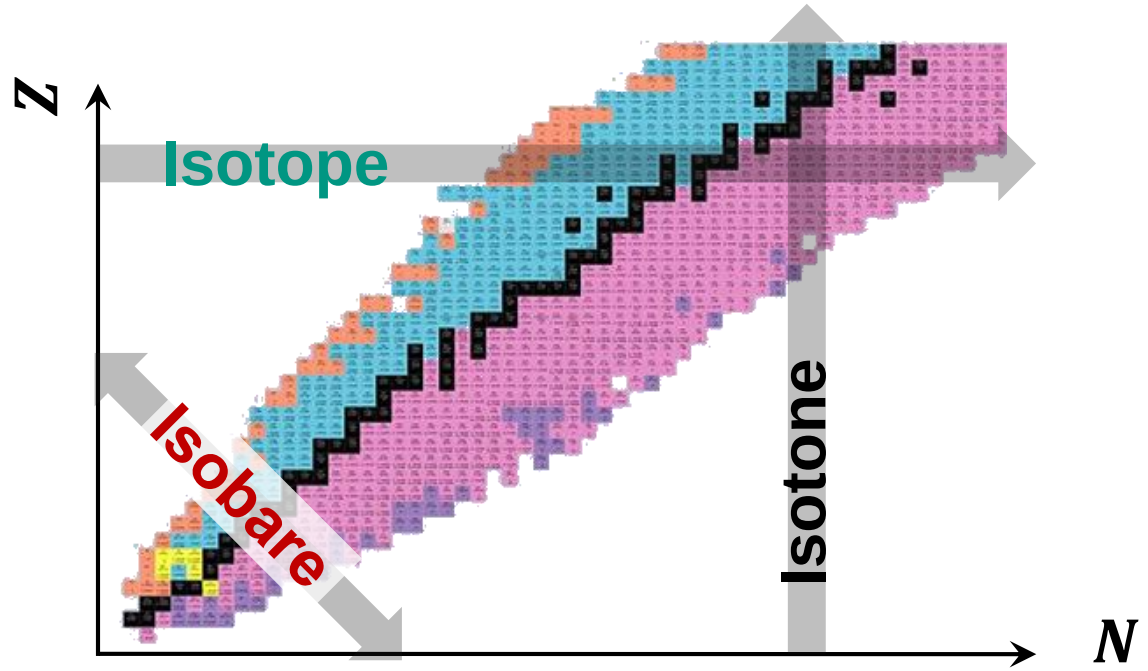
klein, $\sim$ **1% der Nukleonenmasse**

Kerne: Begrifflichkeiten bei den Nukliden

Isotope, Isobare und Isotone sowie Spiegelkerne

- **Spiegelkerne**:

gleiches $A = Z_1 + N_1\ [C-14\colon\ 6p + 8n]$
$= Z_2 + N_2\ [N-14\colon 8p + 6n]$



ISOTOPE:

Kerne mit gleicher Protonenzahl Z

$$^{124,126,128,129,130,131,132,134,136}_{54}Xe$$

ISOTONE:

Kerne mit gleicher Neutronenzahl N

$$^{36}S_{20} \quad ^{37}Cl_{20} \quad ^{38}Ar_{20} \quad ^{39}K_{20}$$

ISOBARE:

Kerne mit gleicher Nukleonenzahl A

$$^{138}Ba \quad ^{138}La \quad ^{138}Ce$$

Tröpfchenmodell: das Tal der Stabilität

- **Eigenschaften von Isobaren**

  - es gibt für jedes $\boldsymbol{A = const.}$
    ein **stabilstes Nuklid**
    mehrere **stabile Nuklide**

    im ´Stabilitätstal´

  - Vorgehen:

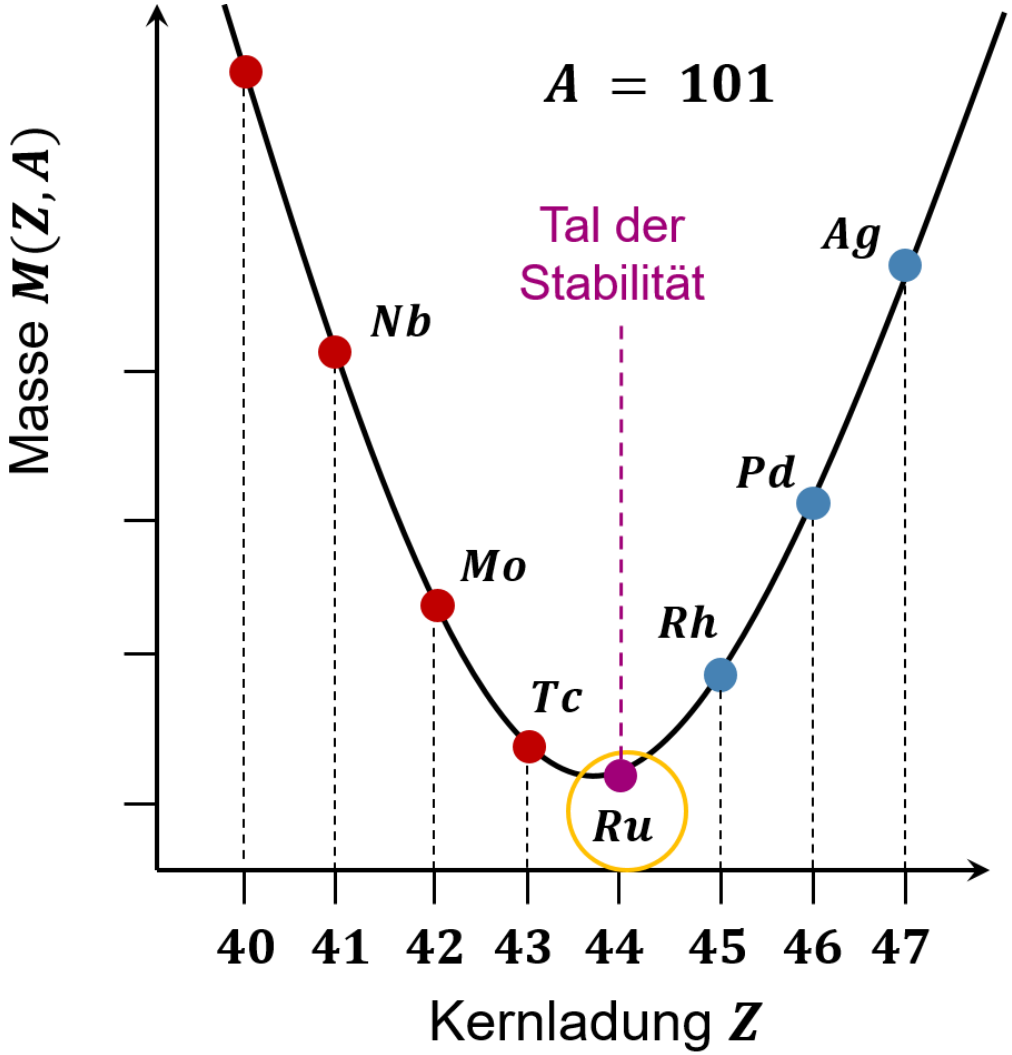
    a) ordne Nuklide mit Masse
    $\boldsymbol{M(Z, A = const.)}$nach
    Kernladung $\boldsymbol{Z}$

    b) bilde $\boldsymbol{\partial E_B(Z, A = const.)/\partial Z = 0}$

Tröpfchenmodell: das Tal der Stabilität

- **Eigenschaften von Isobaren**

  - ug – Kerne:
    1 Massenparabel



Tröpfchenmodell: das Tal der Stabilität

- **Eigenschaften von Isobaren**

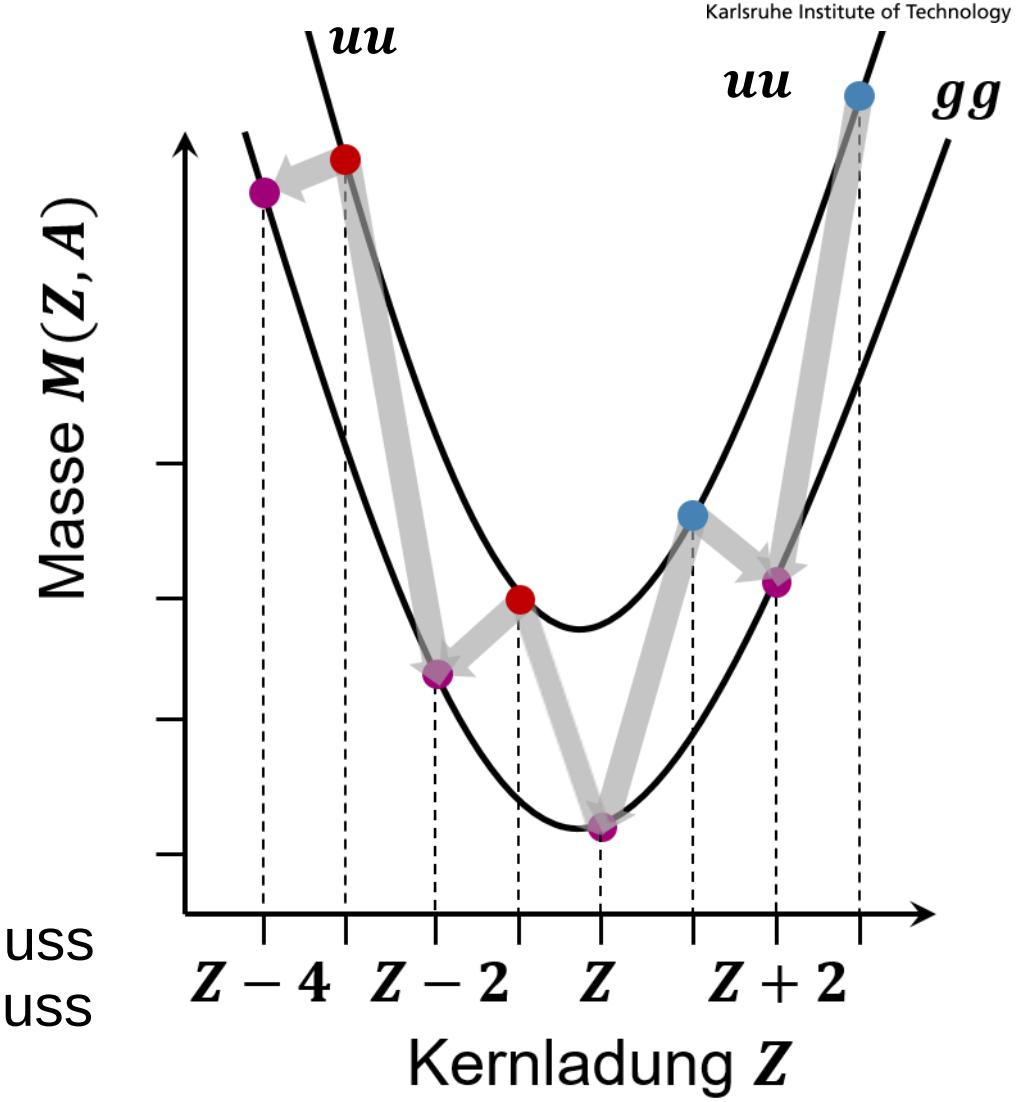
  - gg – und uu – Kerne:
    2 Massenparabeln

  durch **Paarungsterm**

  Parametrisiert durch
  Paarungsenergie δ

  ⬇

  mehrere stabile Nuklide



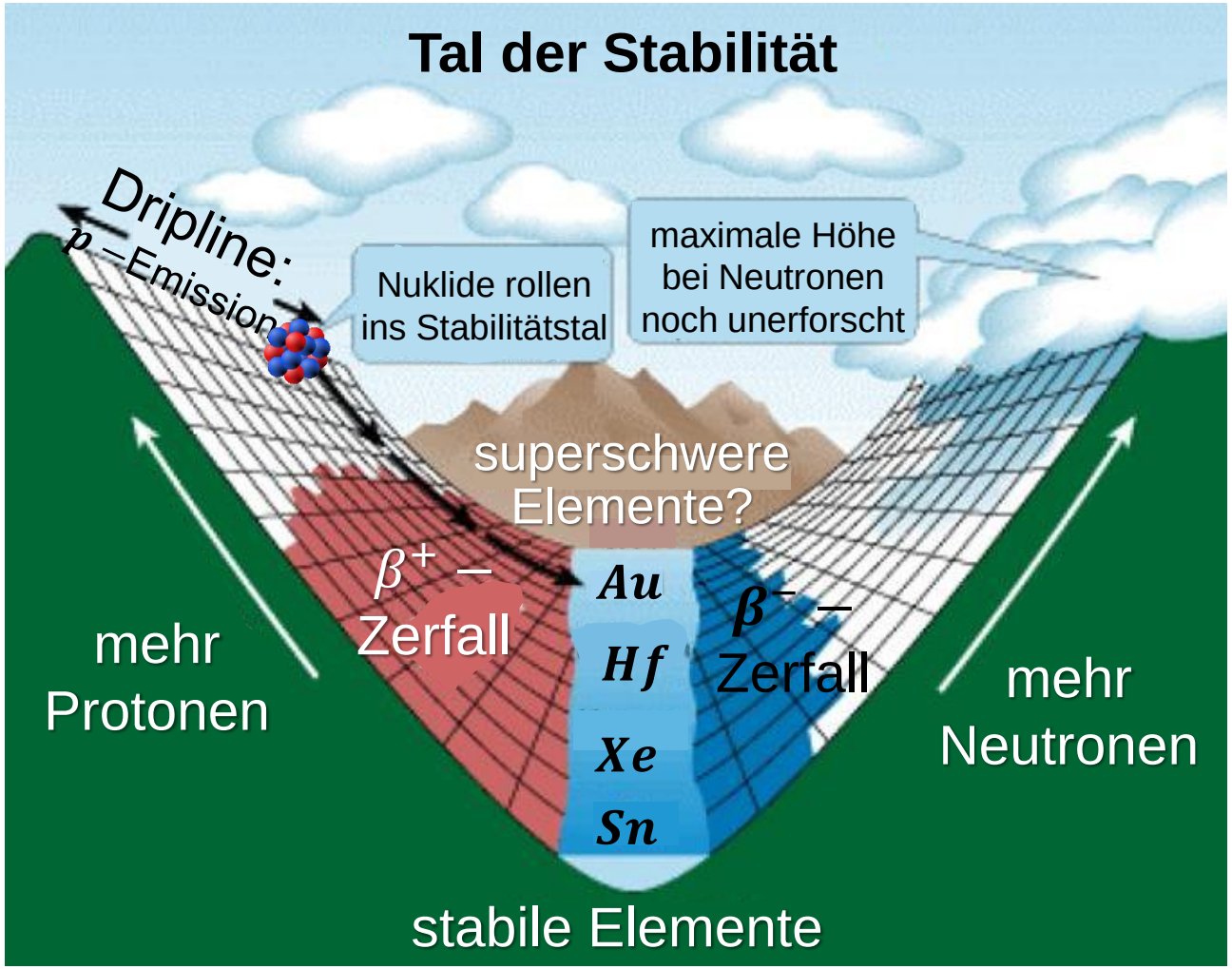
- n – Überschuss
- p – Überschuss
- stabil

Tröpfchenmodell: das Tal der Stabilität

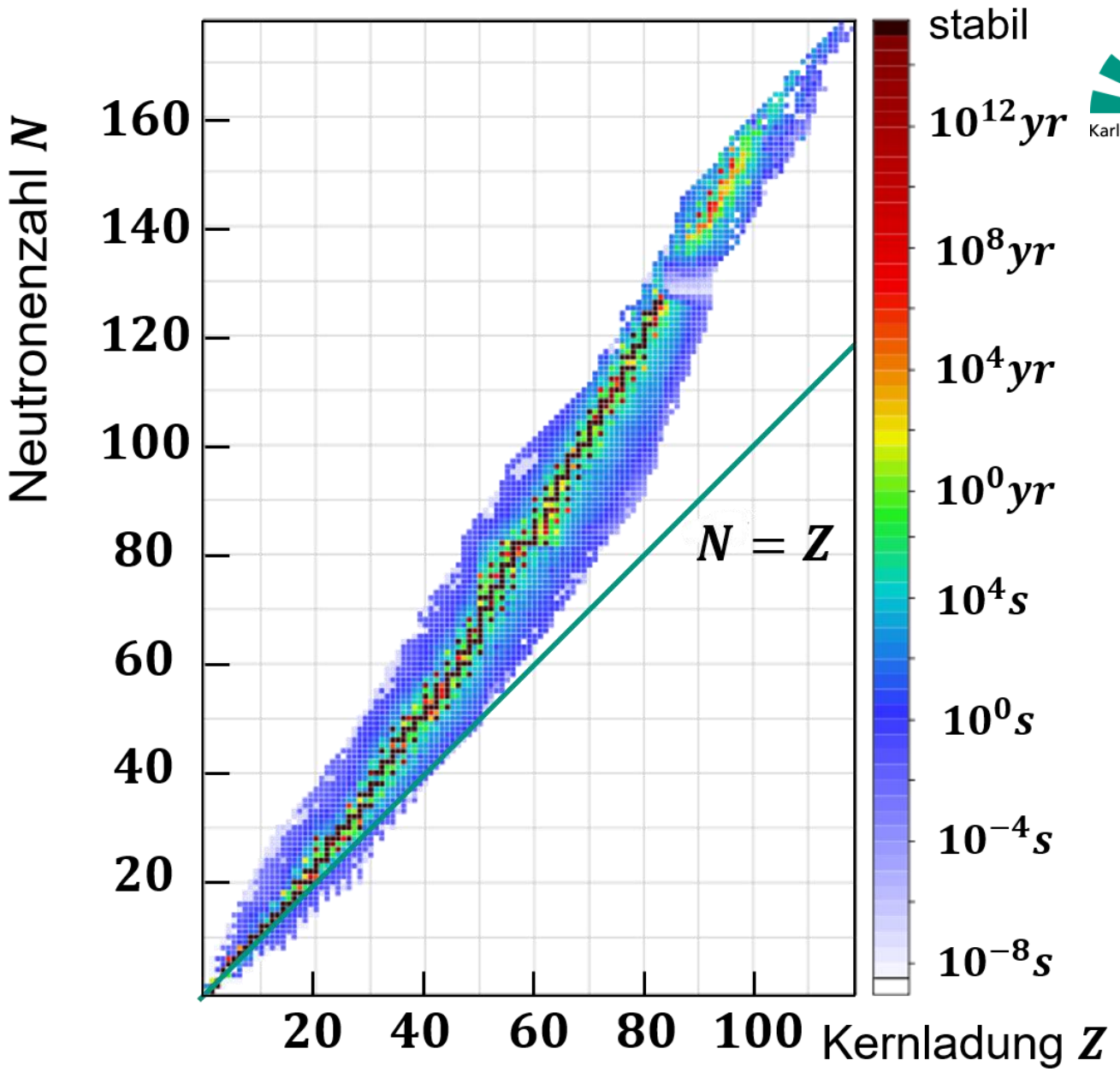
- **Beobachtungen**

  - **Coulomb–Abstoßung** der Protonen erzeugt bei schweren Kernen einen deutlichen **Neutronenüberschuss**

  - außerhalb des Stabilitätstals: $\boldsymbol{\beta}$ – Zerfälle, $\boldsymbol{\alpha}$ – Zerfälle oder Emission von $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{n}$



Lebensdauern

- **Instabile Nuklide**

  - außerhalb des Stabilitätstals:
    $\boldsymbol{\beta}$ – Zerfälle
    $\boldsymbol{\alpha}$ – Zerfälle oder Emission von $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{n}$