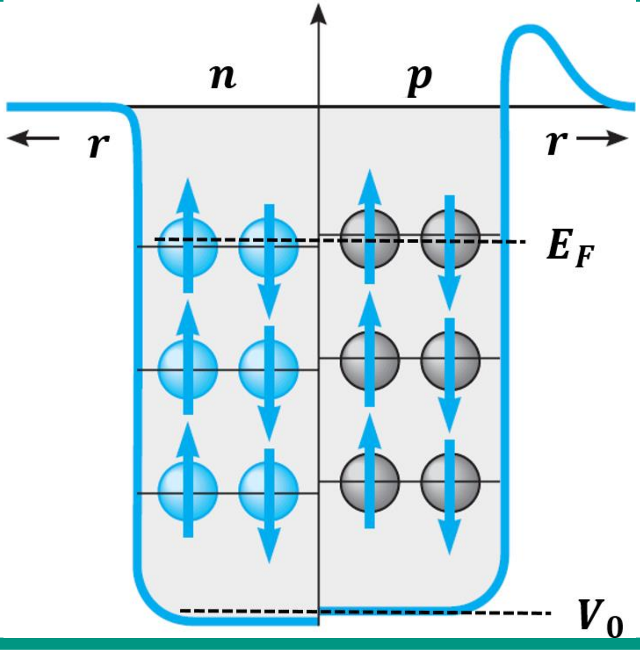
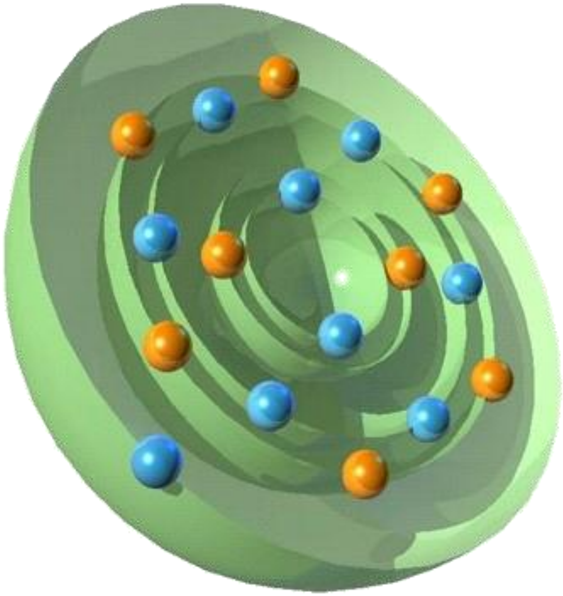
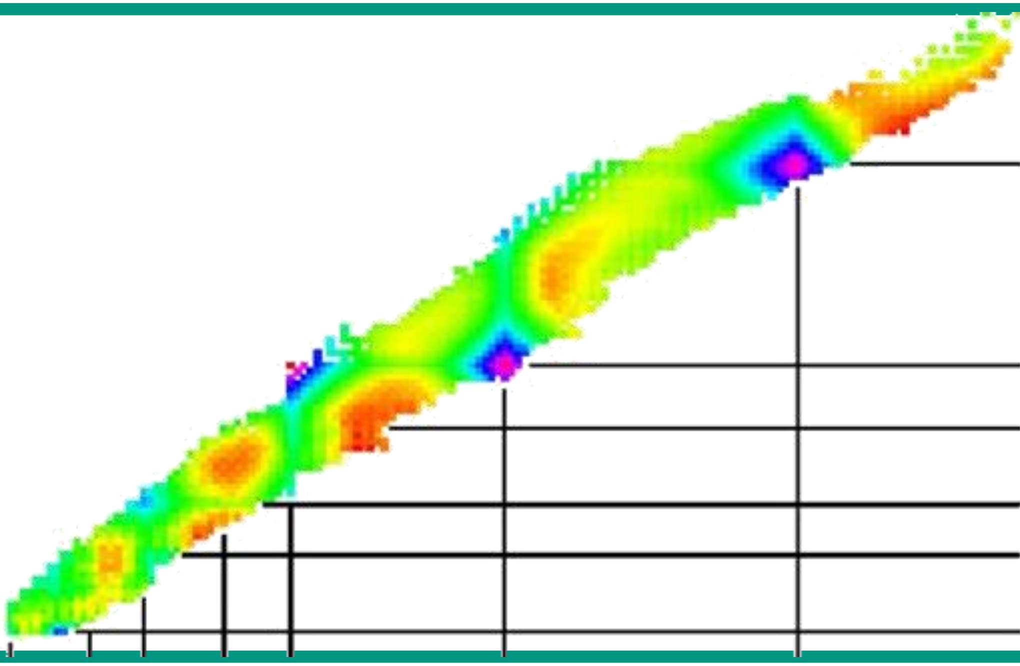
Moderne Experimentalphysik *I* – Atome und Kerne

Vorlesung 20   4. 7. 2024



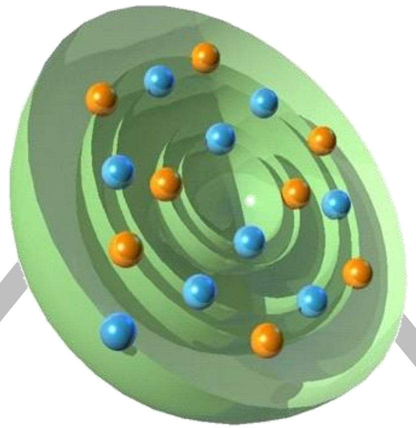




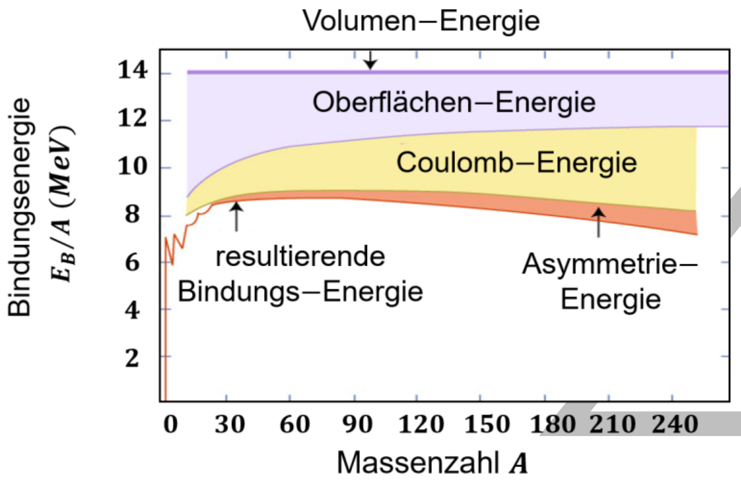
RECAP: Kernmodelle

- **phänomenologische Kernmodelle: 3 wichtige Beispiele**

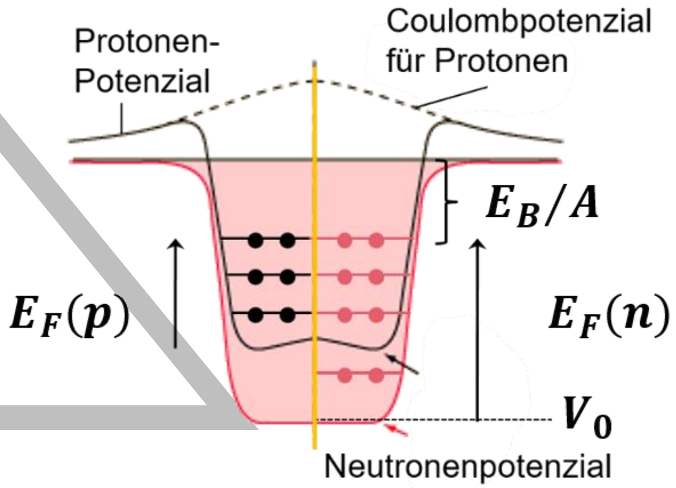
Schalenmodell



Tröpfchenmodell



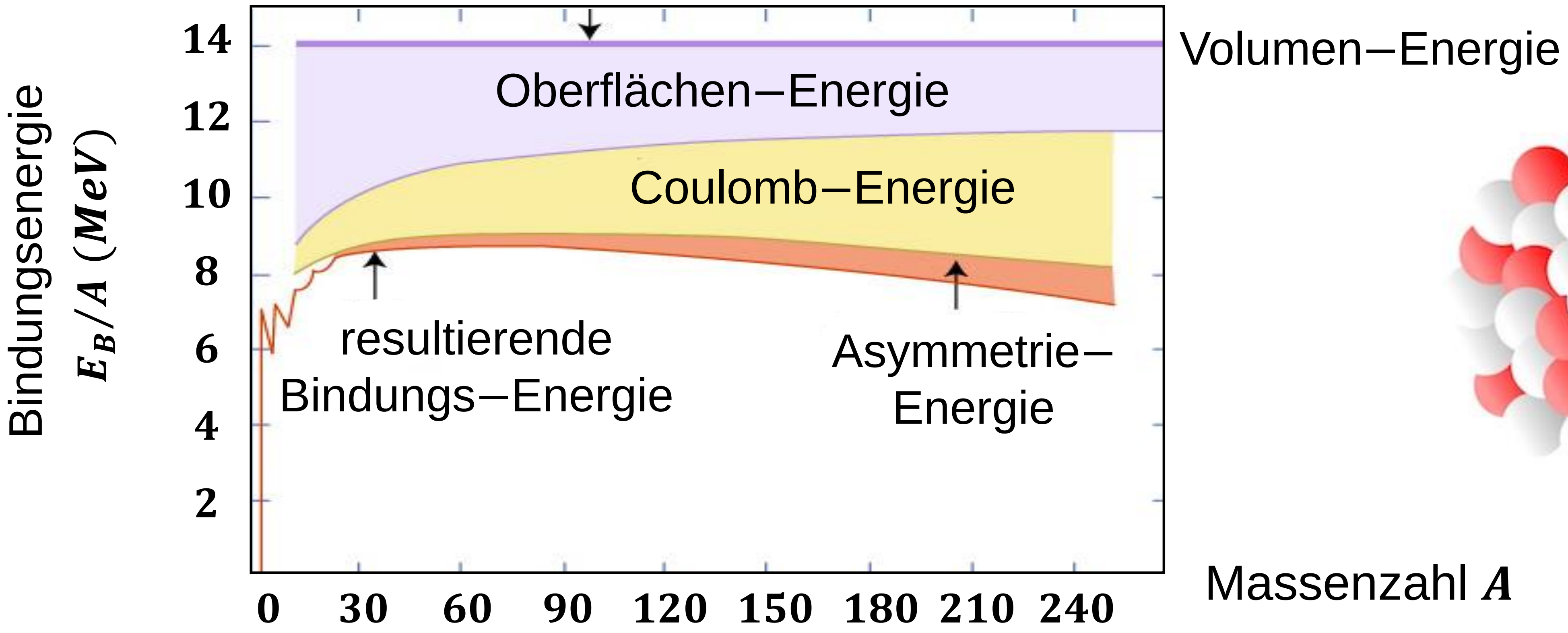
Fermigasmodell

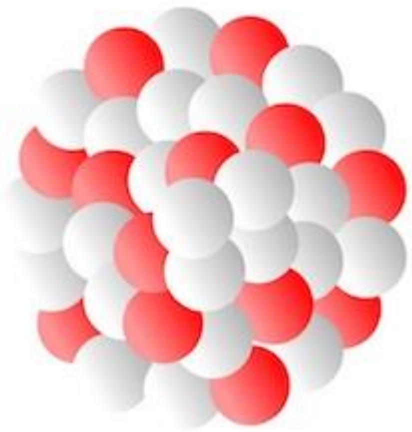


RECAP: Tröpfchenmodell

- **Bethe–Weizsäcker´sche Massenformel: Zusammenfassung aller Terme**

$$E_B(Z,A) = a_V \cdot A - a_S \cdot A^{2/3} - a_C \cdot Z^2 \cdot A^{-1/3} - a_A \cdot (N-Z)^2/A \pm \delta(Z,A)$$



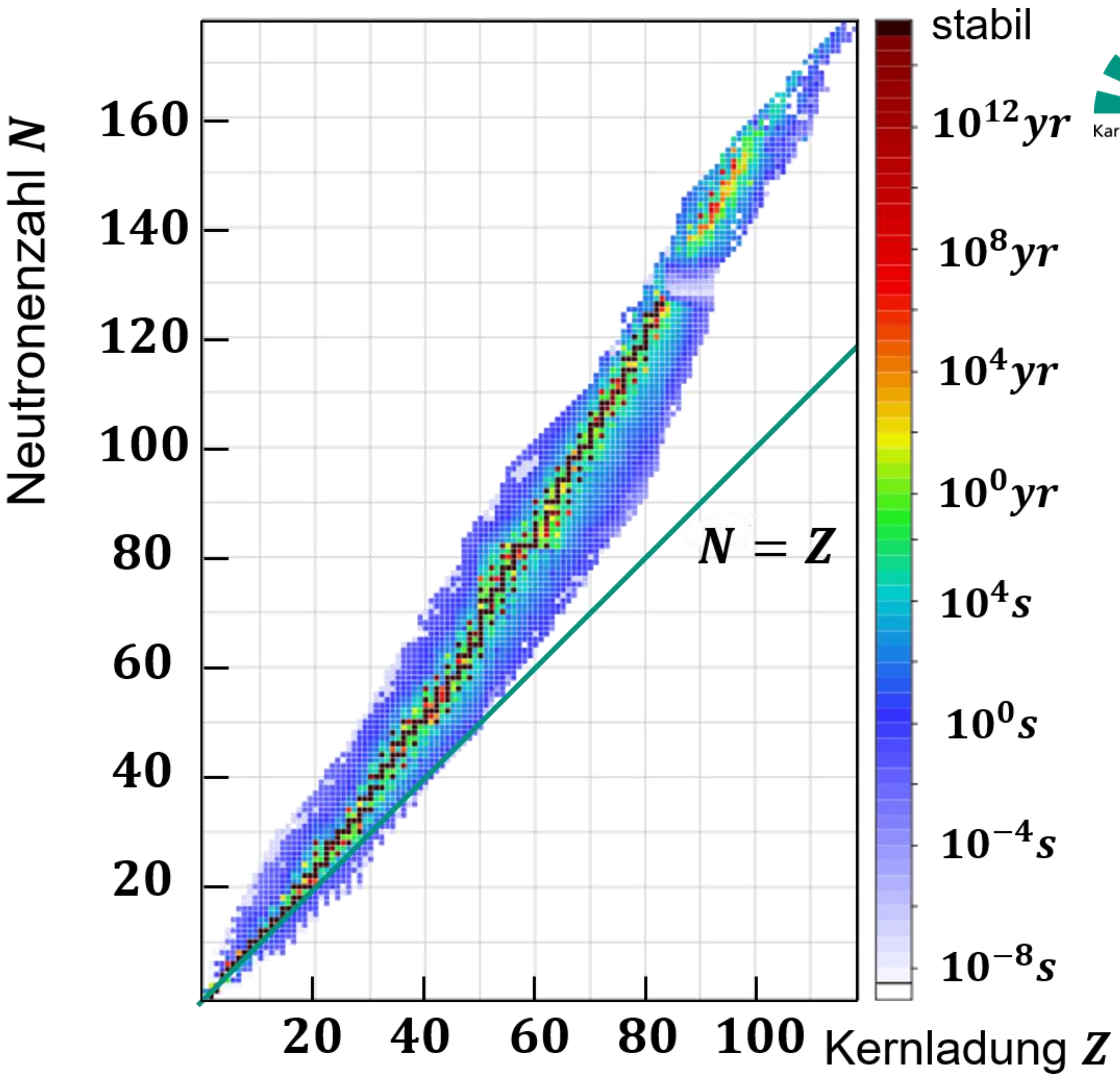


Lebensdauern τ

- **Instabile Nuklide**

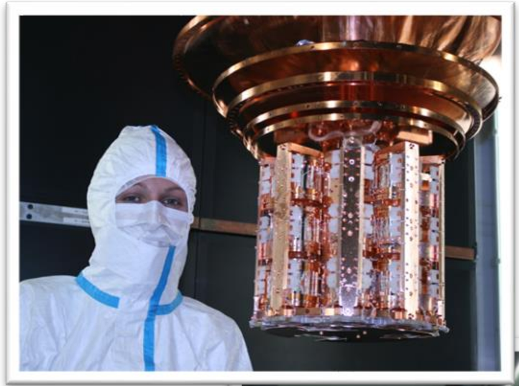
- außerhalb des Stabilitätstals:
  β – Zerfälle
  α – Zerfälle oder Spaltung bzw. Emission von p, n

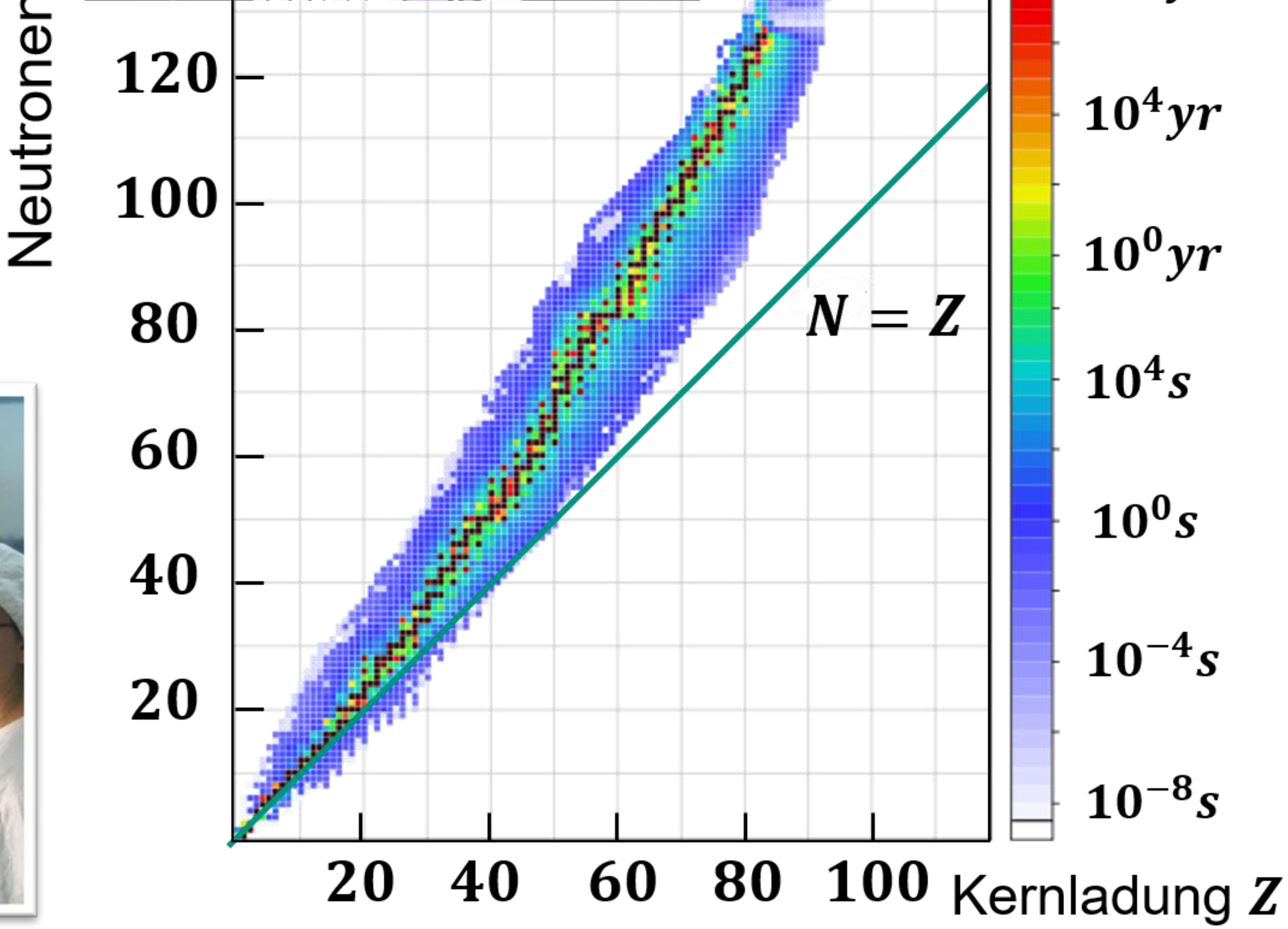
- τ variiert um mehr als 30 Größen-ordnungen!



Lebensdauern τ

- Instabile Nuklide: Untergrund!



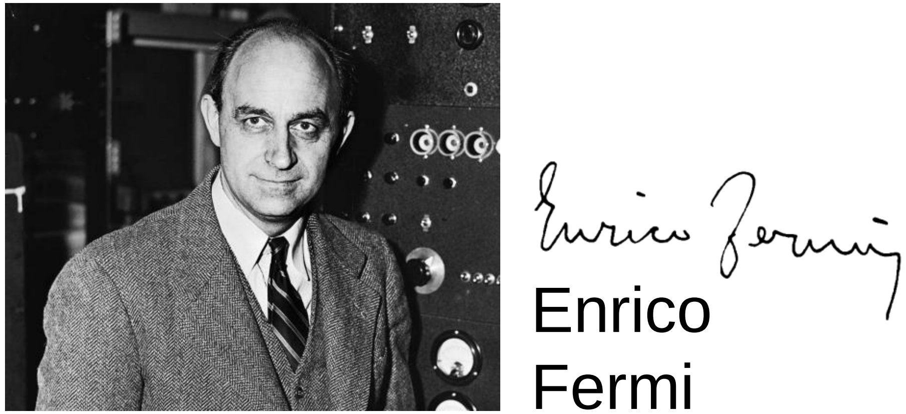


Fermigas–Modell

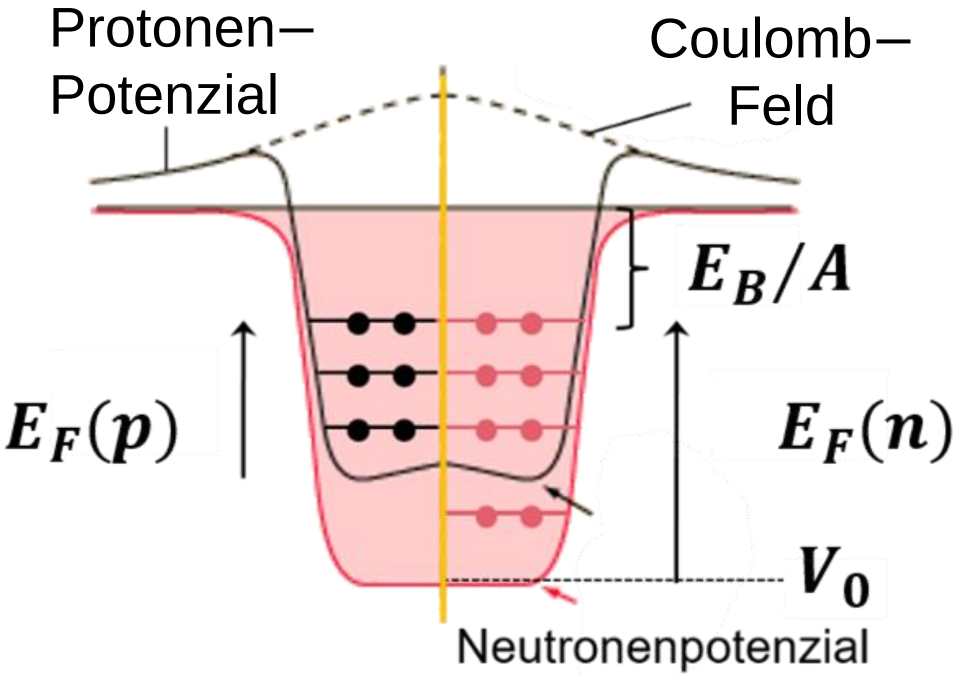
- **Grundlegende Eigenschaften des Kernmodells**

  - Kern–Eigenschaften können auch beschrieben werden durch Modell, in dem sich Nukleonen in einem **mittleren Potenzial frei bewegen**

  - **zwei** unabhängige $\boldsymbol{Fermionen}$ – Systeme: **Neutronen, Protonen**



Enrico Fermi

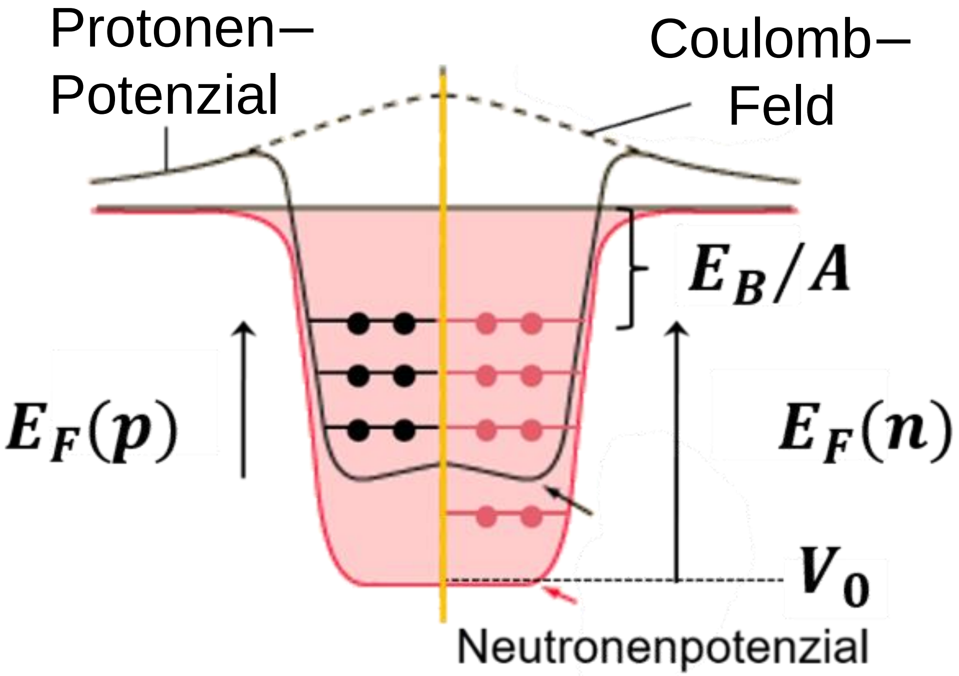


Fermigas–Modell

Grundlegende Eigenschaften des Kernmodells

- Definition eines **mittleren Kernpotenzials** aus der **Überlagerung** der einzelnen kurzreichweitigen Nukleon-Nukleon–Wechselwirkungen (Unterschiede im Potenzial für $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{n}$)

- Nukleonen bewegen sich unter Beachtung des **Pauli–Prinzips** (da Spin $\boldsymbol{S} = ½$ Teilchen) **im Kern wechselwirkungsfrei** (keine freien Zustände)



Fermigas – Modell

■ **Grundlegende Eigenschaften des Kernmodells**

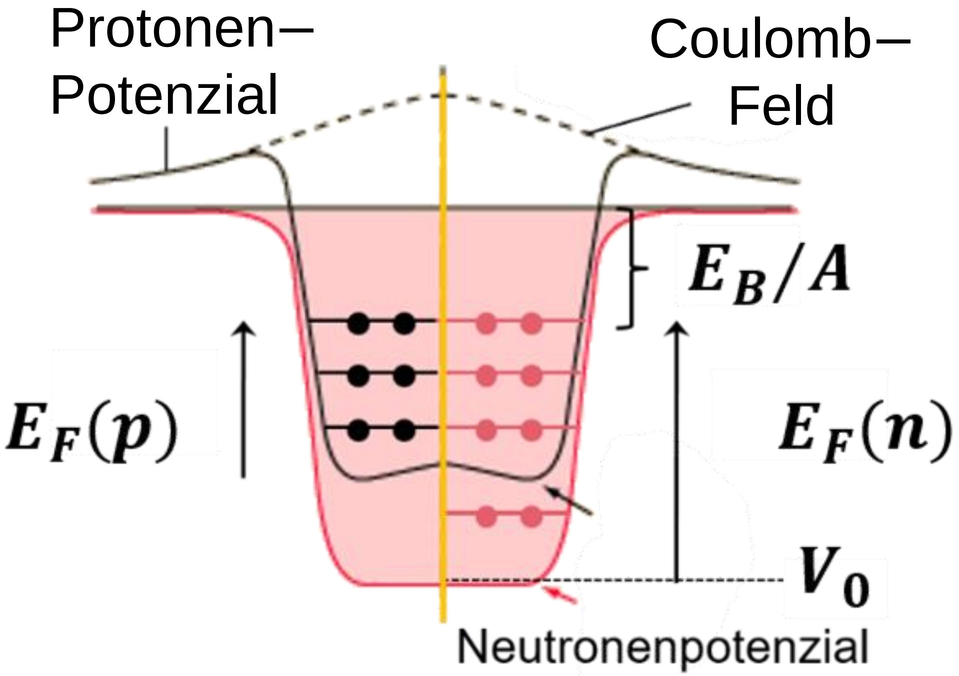
- Protonen $\boldsymbol{p}$ und Neutronen $\boldsymbol{n}$ besitzen verschiedene Potenziale (Coulombkraft)

- Neutronen $\boldsymbol{n}$: reines **Kastenpotenzial**

$$\boldsymbol{V(r)} = \begin{cases} -\boldsymbol{V_0} & \boldsymbol{0 \le r \le R} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{r > R} \end{cases}$$

- Protonen $\boldsymbol{p}$: **Kastenpotenzial**
$+$ **Coulombkraft**

⇨ geringere Potenzialtiefe $\boldsymbol{V_0}$

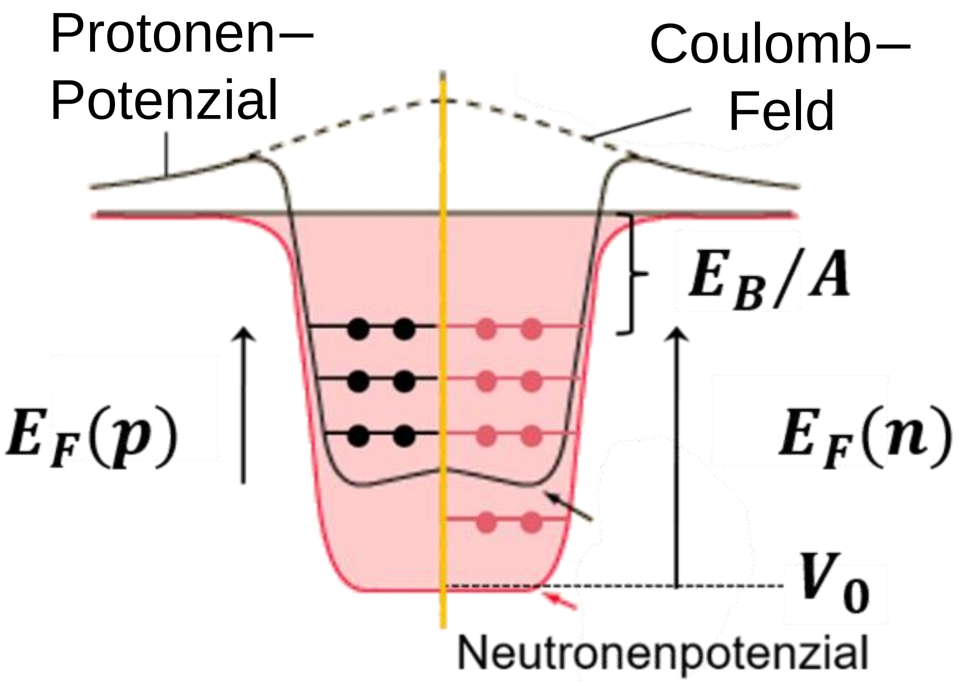


Fermigas–Modell

Grundzustand und Quantenstatistik

- Grundzustand: Protonen $\boldsymbol{p}$ und Neutronen $\boldsymbol{n}$ sind **wechselwirkungsfrei**

- alle Nukleon–Zustände bis zur maximalen Energie $\boldsymbol{E_F}$ **(Fermi–Energie)** sind besetzt: keine Stroßprozesse möglich bei $\boldsymbol{T = 0}$



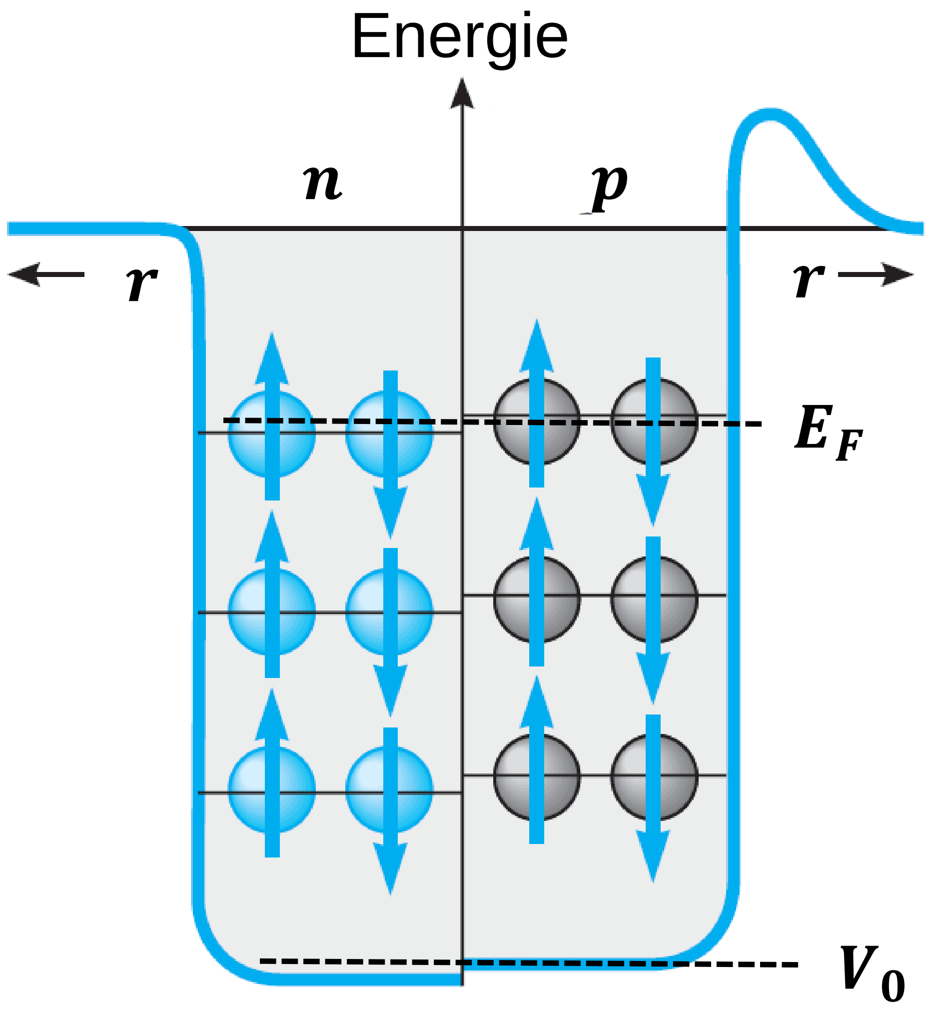
Fermigas–Modell: ein Einteilchenmodell

Grundzustand und Quantenstatistik

- Protonen $\boldsymbol{p}$ und Neutronen $\boldsymbol{n}$ bilden ein **wechselwirkungsfreies Fermigas,** d.h. ein **statistisches Ensemble**

- **Pauli–Prinzip**: jeder $\boldsymbol{p}$ – oder $\boldsymbol{n}$ – Zustand besetzt mit **2** Teilchen (Spin ⇧⇩)

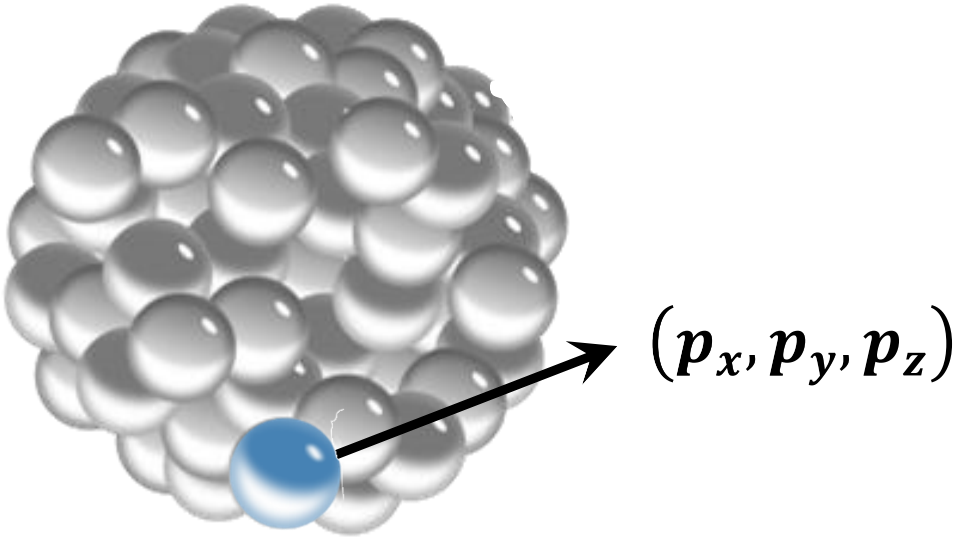
- quasi–identische **Fermi–Energie E_F** für $\boldsymbol{p}$ und $\boldsymbol{n}$ (ansonsten Zerfälle $\boldsymbol{n} \rightarrow \boldsymbol{p}$)

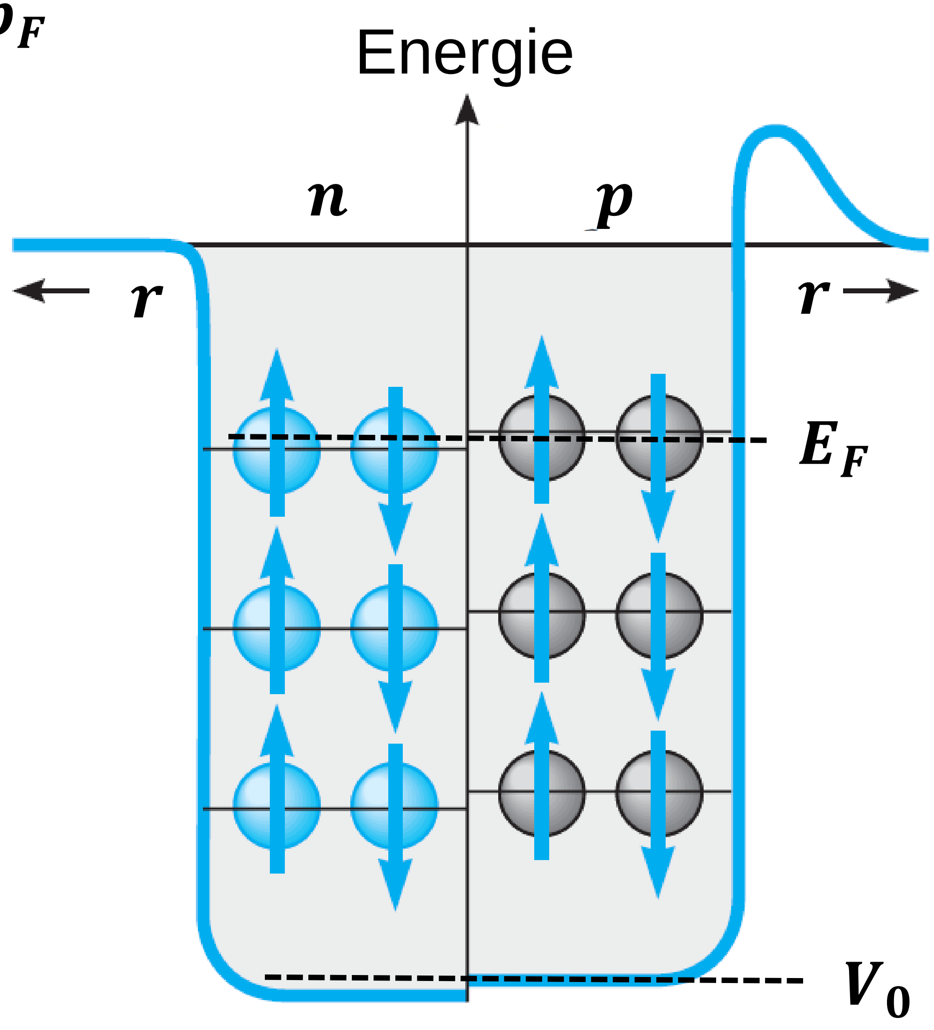


Fermigas–Modell: ein Einteilchenmodell

- **Nukleonen bewegen sich mit Fermi–Impuls p_F**

  - Protonen p und Neutronen n bewegen sich mit nicht vernachlässigbaren Impulsen (**Impulsspektrum**)





Fermigas–Modell: Quantenmechanik rules!

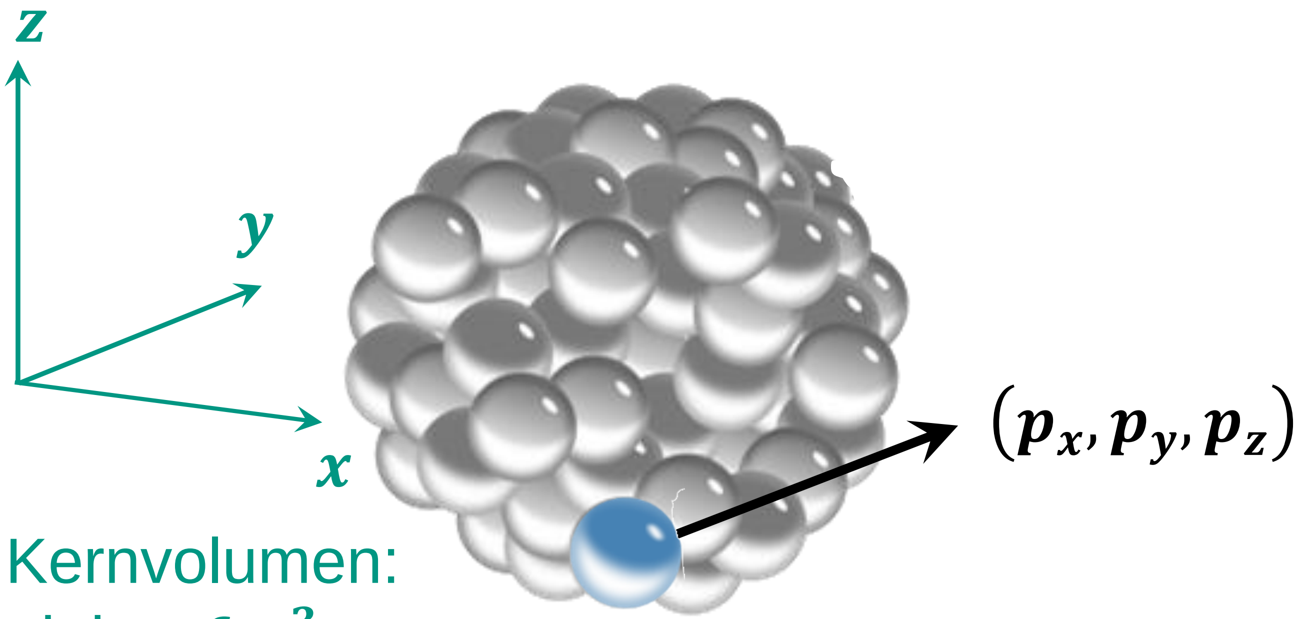
- **Nukleonen bewegen sich mit Fermi–Impuls p_F**

  - Impulse der Protonen p und Neutronen n resultieren aus der fundamentalen **Heisenberg´schen Unschärferelation**

$$\boxed{dx \cdot dp_x \geq \hbar/2}$$

dx: Kerndimension (einige fm)

dp_x: Fermi–Impuls $\sim 250\ MeV/c$



Kernvolumen: einige fm^3

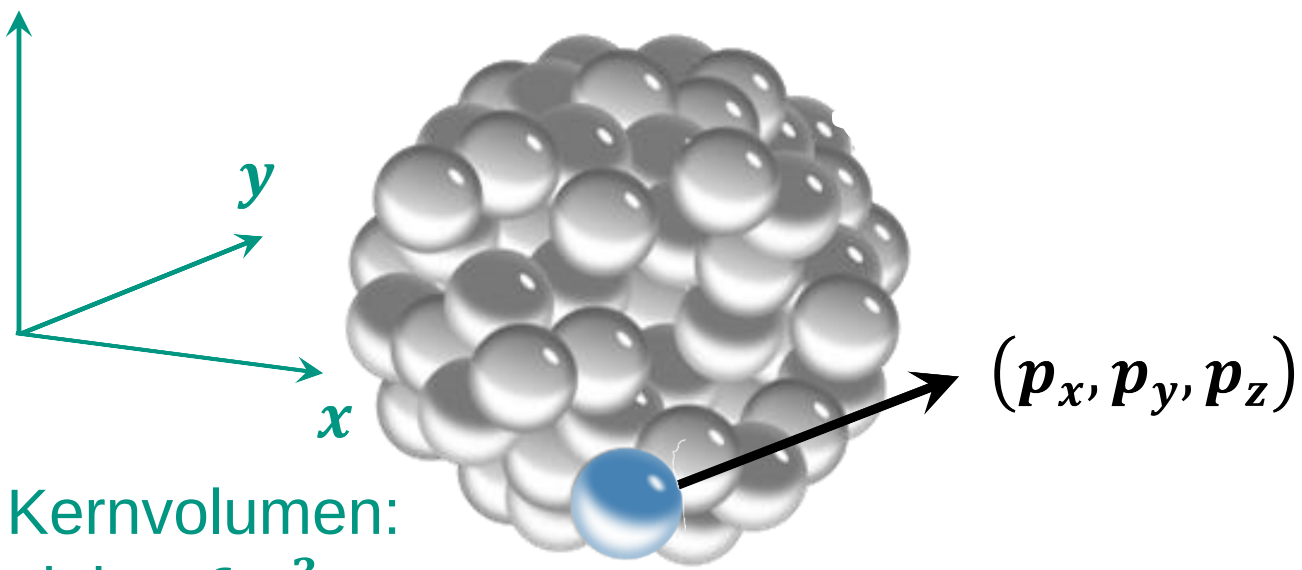
Fermigas–Modell: Quantenmechanik rules!

- **Nukleonen bewegen sich im $6-$ dimensionalen Phasenraum**

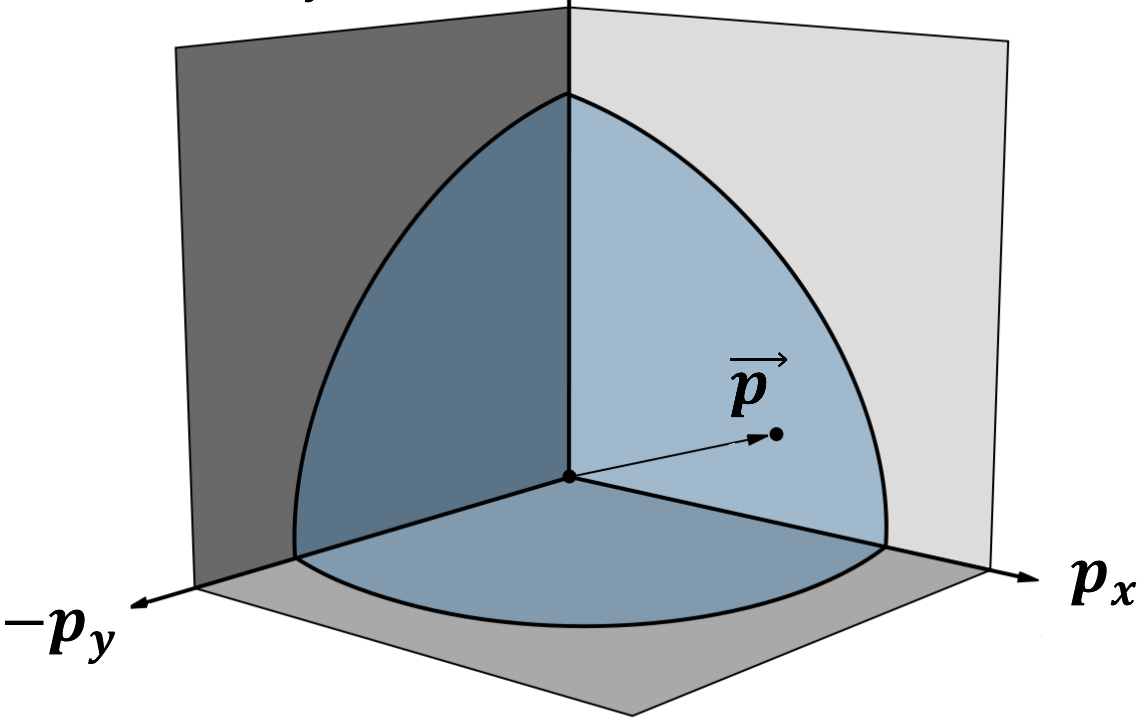
  - Protonen p & Neutronen n : **Ortsraum $dx \cdot dy \cdot dz$**

    Impulsraum $dp_x \cdot dp_y \cdot dp_z$

Ortsraum



Kernvolumen:
einige fm^3

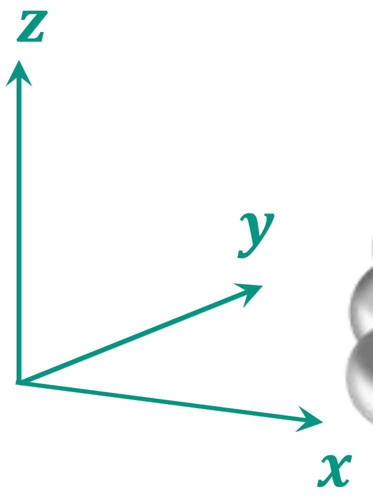


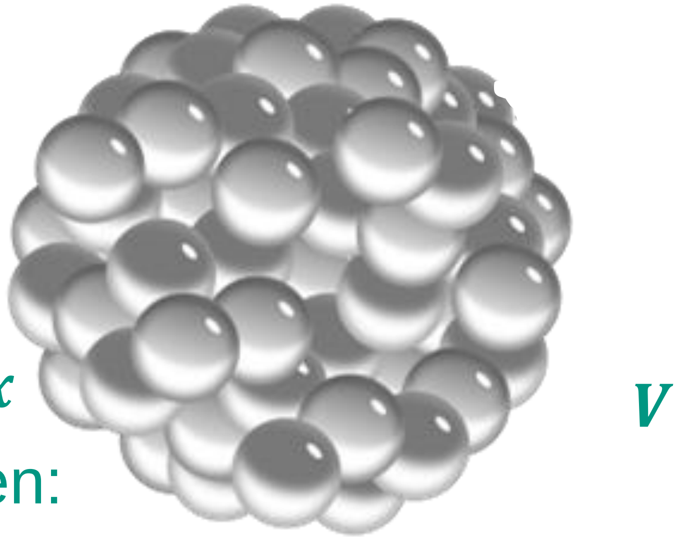
Fermigas–Modell: Quantenmechanik rules!

- **Nukleonenzustände k: Betrachtung im Phasenraum**

- wir möchten die $\boldsymbol{Gesamtzahl\ k}$ möglicher Nukleonen–Zustände im Kern hoch bis zur Fermi–Energie $\boldsymbol{E_F}$ bestimmen!

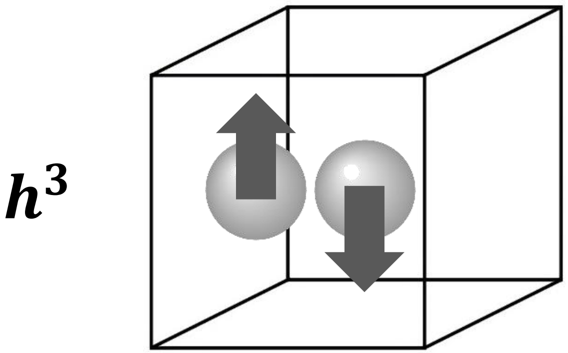
Ortsraum





Kernvolumen:
einige fm^3

- Pauli: jede Phasenraumzelle ($\sim \boldsymbol{h^3}$) ist mit 2 Zuständen (⇧⇩) besetzbar



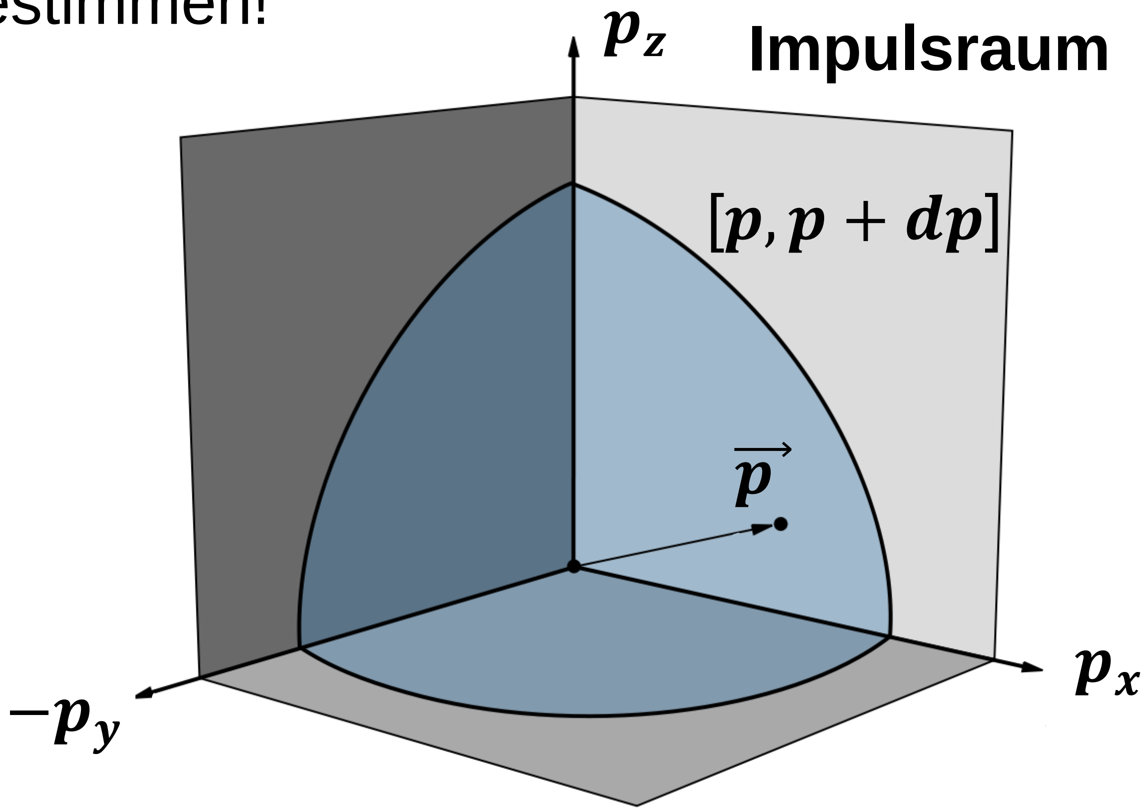
Fermigas–Modell: Quantenmechanik rules!

Nukleonenzustände k: Betrachtung im Phasenraum

- wir möchten die $\boldsymbol{Gesamtzahl\ k}$ möglicher Nukleonen–Zustände im Kern hoch bis zur Fermi–Energie $\boldsymbol{E_F}$ bestimmen!

- im **Impulsraum** $\boldsymbol{dp_x \cdot dp_y \cdot dp_z}$ betrachten wir zunächst das Impuls–Intervall $[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p} + \boldsymbol{dp}]$

- Kugel mit Oberfläche $\boldsymbol{4\pi \cdot p^2}$ und Kugelschalendicke $\boldsymbol{dp}$



Fermigas–Modell: Quantenmechanik rules!

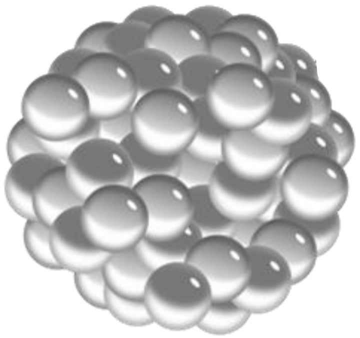
- **Gesamtzahl der Nukleonenzustände: integrieren hoch bis Fermi–Impuls p_F**

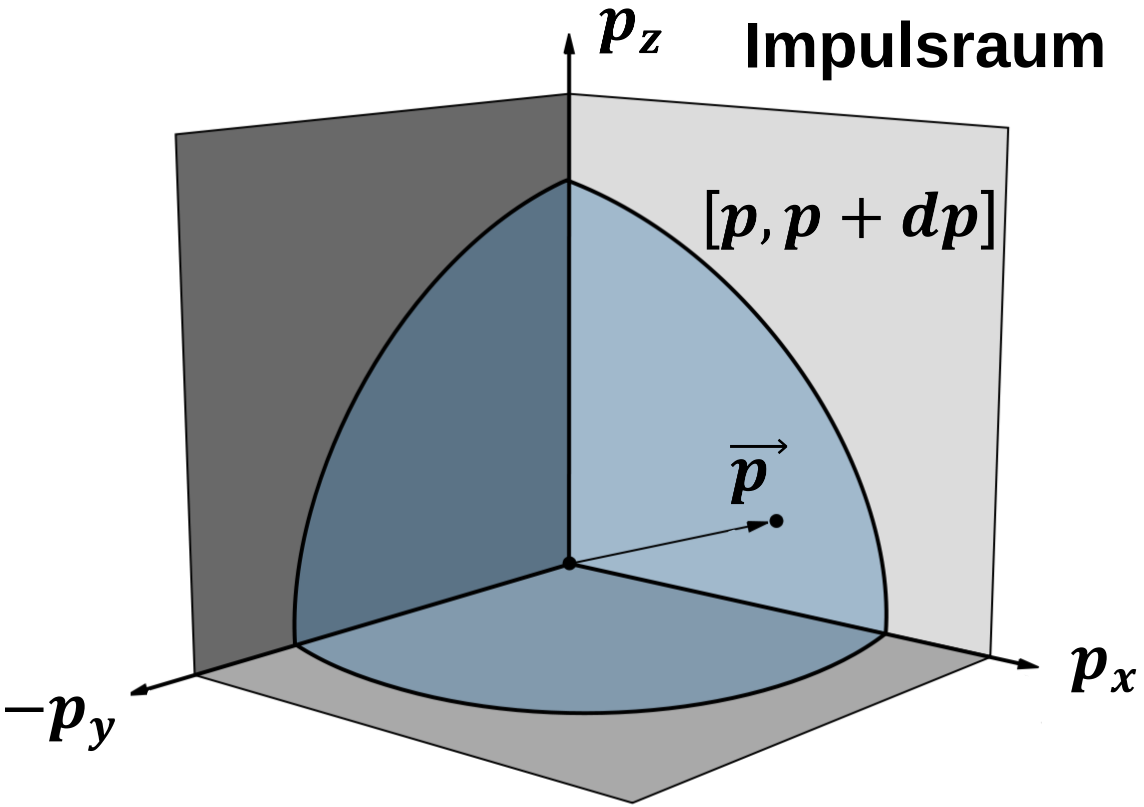
- Multiplikation von Ortsraum und Impulsraum

Nukleonspinfaktor

$$k = \frac{2}{(2\pi \cdot \hbar)^3} \cdot V \cdot 4\,\pi \cdot \int_0^{p_F} p^2\,dp$$

$$k = 2 \cdot \frac{V \cdot p_F^3}{6 \cdot \pi^2 \cdot \hbar^3}$$





Fermigas–Modell: Quantenmechanik rules!

- **Nukleonenzustände hoch bis zum Fermi–Impuls p_F**

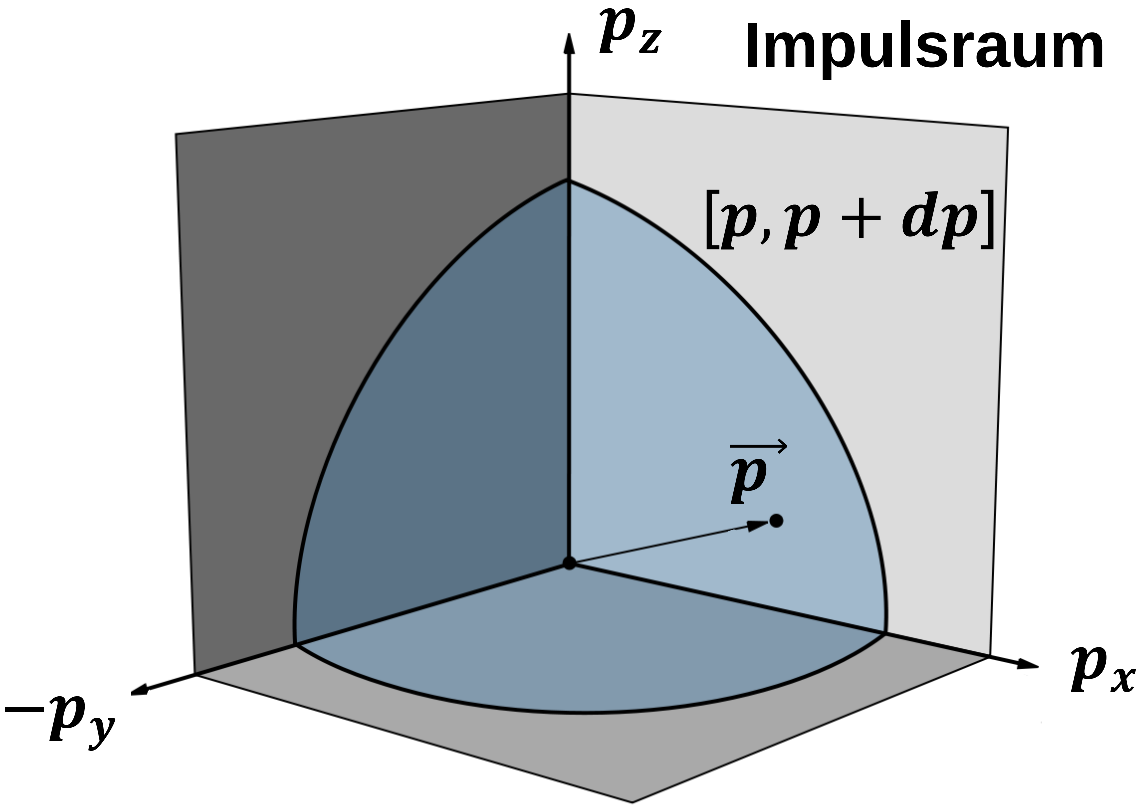
- wir integrieren separat für p und n

Anzahl N an Neutronen:

$$N = \frac{V \cdot p_F^3(n)}{3 \cdot \pi^2 \cdot \hbar^3}$$

Anzahl Z an Protronen:

$$Z = \frac{V \cdot p_F^3(p)}{3 \cdot \pi^2 \cdot \hbar^3}$$



Fermigas–Modell: Bestimmung von p_F

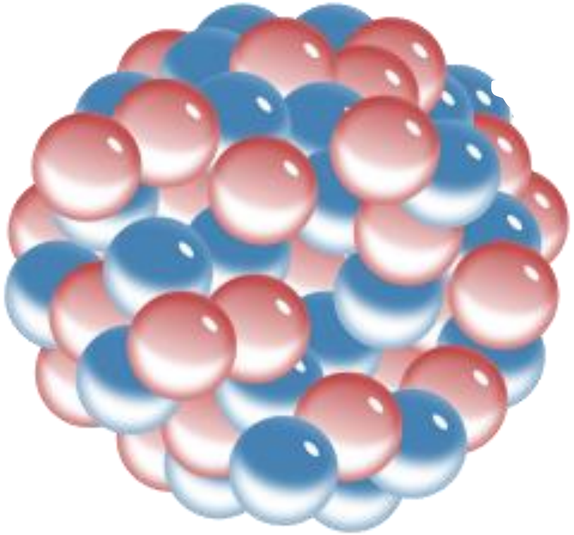
- **Abschätzung des Fermi–Impulses p_F allein aus V bzw. aus $R_0 = 1,21\ fm$**

- für Kerne mit $N = Z = A/2$

Radius $R = 1,21\ fm \cdot A^{1/3}$

$$N = \frac{V \cdot p_F^3(n)}{3 \cdot \pi^2 \cdot \hbar^3} \qquad Z = \frac{V \cdot p_F^3(p)}{3 \cdot \pi^2 \cdot \hbar^3}$$

$N = Z = A/2$



ergibt sich für p_F

$$p_F = \left(\frac{9\pi}{8}\right)^{1/3} \cdot \frac{\hbar}{1,21\ fm}$$

$$p_F \approx 250\ MeV/c$$

Kernvolumen V:

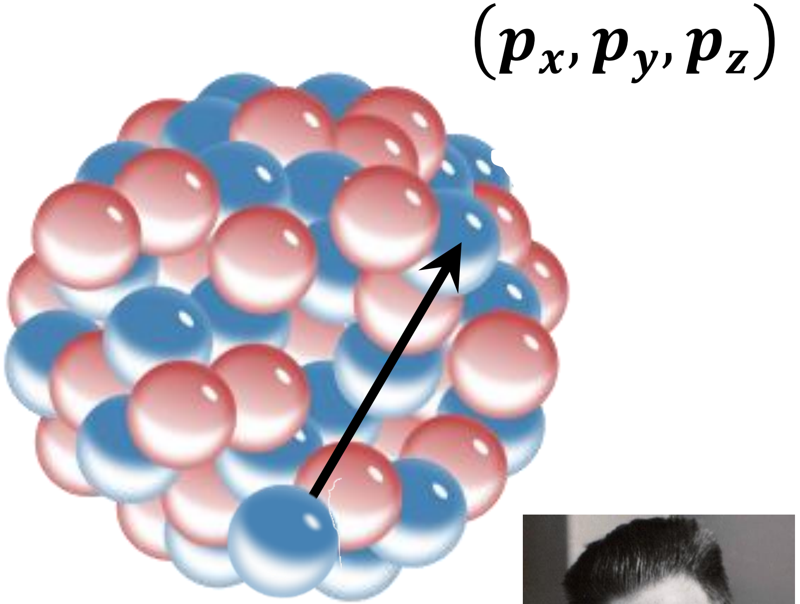
$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (1,21\ fm)^3 \cdot A$$

Fermigas–Modell: Bestimmung von p_F

- **Abschätzung des Fermi–Impulses p_F <u>allein</u> aus V bzw. aus $R_0 = 1,21\ fm$**

  - Nukleonen bewegen sich **stossfrei** mit nicht vernachlässigbarem Fermi–Impuls p_F im Kern

  - Fermi–Impuls p_F im Kern ist **rein quantenmechanisch** bedingt und kann aus Kenntnis von **Radius** R und der **Nukleonenzahl** A abgeschätzt werden



$$p_F \approx 250\ MeV/c$$

Fermigas–Modell: Bestimmung von E_F

Abschätzung des Fermi–Energie E_F

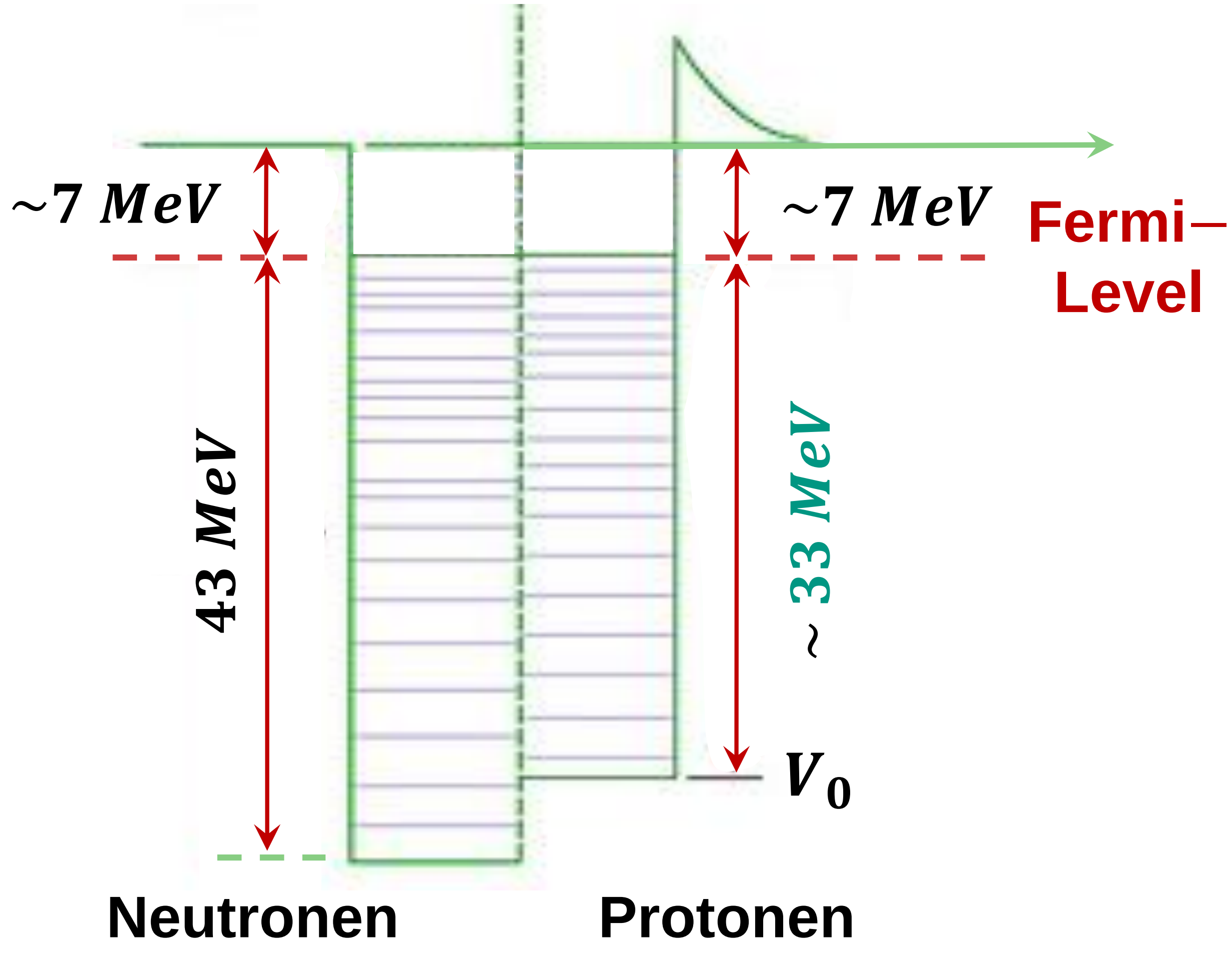
- nicht–relativistische Energie–Impuls Relation ergibt:

$$E_F \approx \frac{p_F^2}{2 \cdot M_{Nukl.}} = 33\ MeV$$

- Tiefe des Kernpotenzials (p)

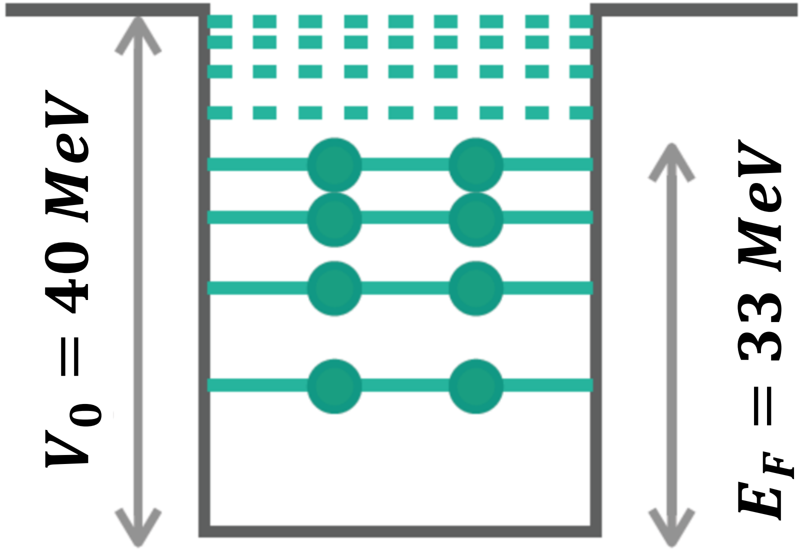
$$V_0 > E_F$$

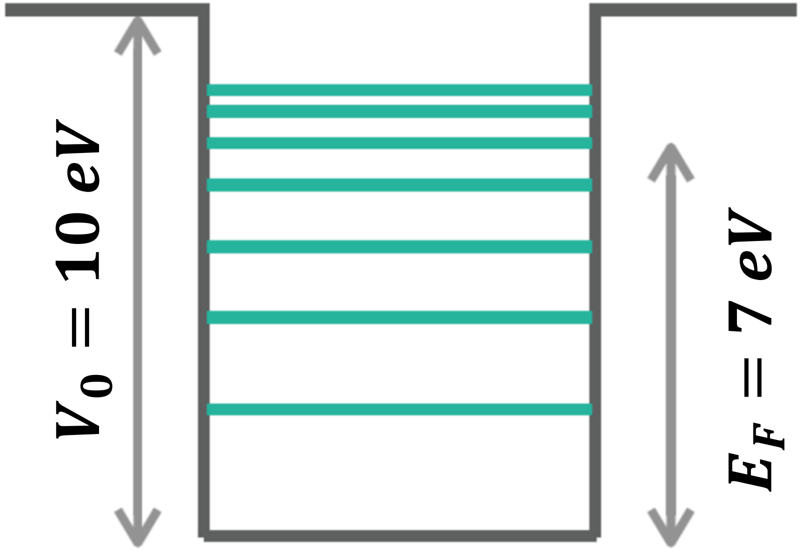
$$V_0 = E_F + E_B/A$$
$$= 33\ MeV + 7MeV = 40\ MeV$$



Fermigas–Modelle: Kerne vs. Festkörper

- **Analogie der Modelle: freies Nukleonengas & freies Elektronengas (z.B. Cu)**





Fermi–Energie: $E_F = 33\ MeV$	Fermi–Energie: $E_F = 7\ eV$
Austrittsarbeit: $W \sim 7\ MeV$	Austrittsarbeit: $W \sim 3 \dots 4\ eV$
Potenzialtiefe: $V_0 = 40\ MeV$	Potenzialtiefe: $V_0 = 10\ eV$

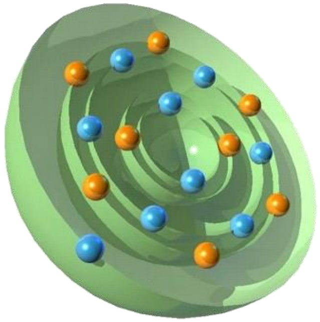
RECAP: Tröpfchenmodell

- **Empirisches Modell und Daten**

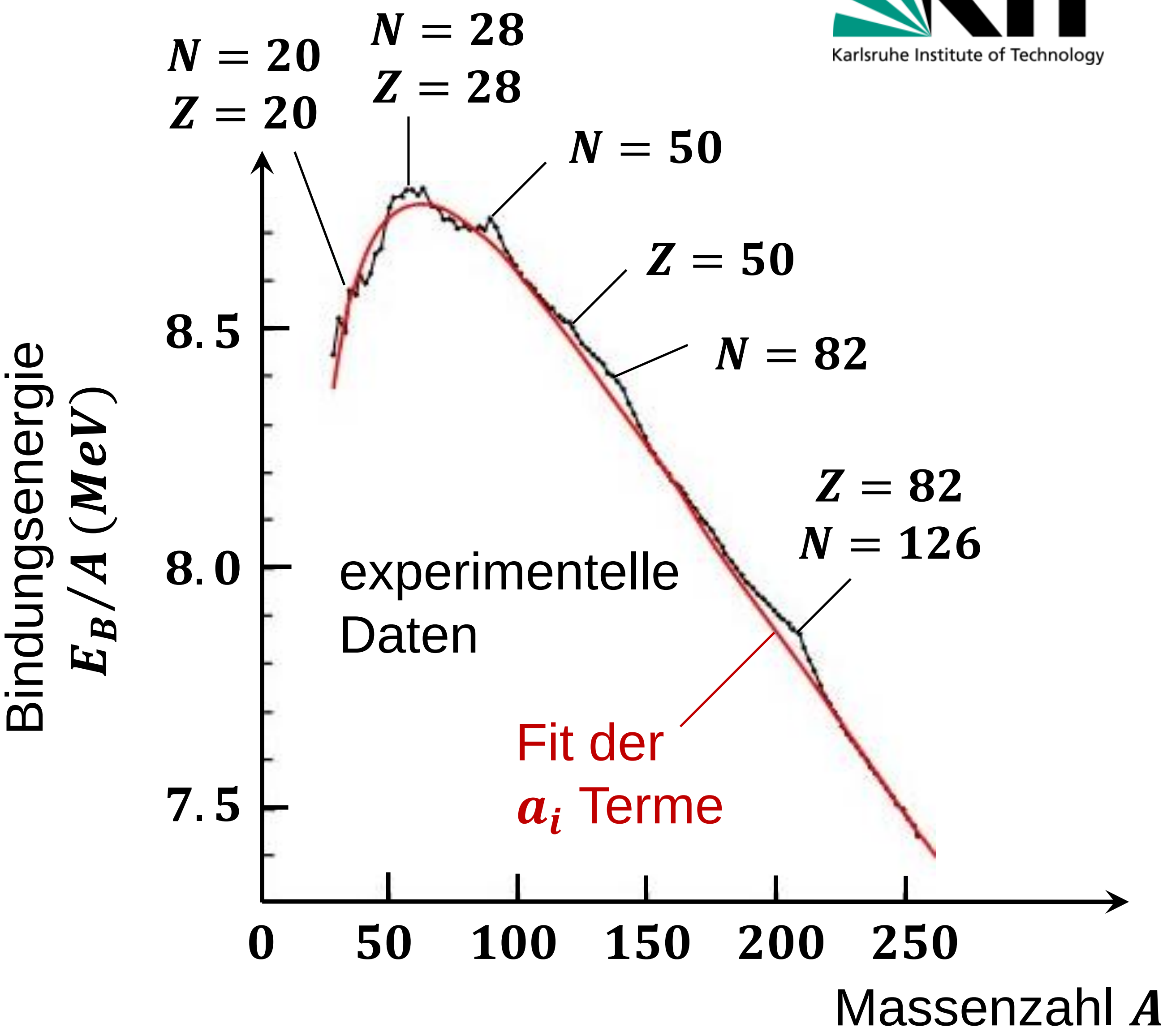
  - Tröpfchenmodell beschreibt nur den generellen Verlauf

aber: **magische Zahlen**

$\boldsymbol{Z}$ **oder** $\boldsymbol{N = 20, 28, 50, 82, 126}$



Schalenstruktur der Kerne



Schalenmodell: Nuklide mit magischen Zahlen

- **Nuklide mit den ´magischen´ Zahlen**

Z oder $N = 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126$

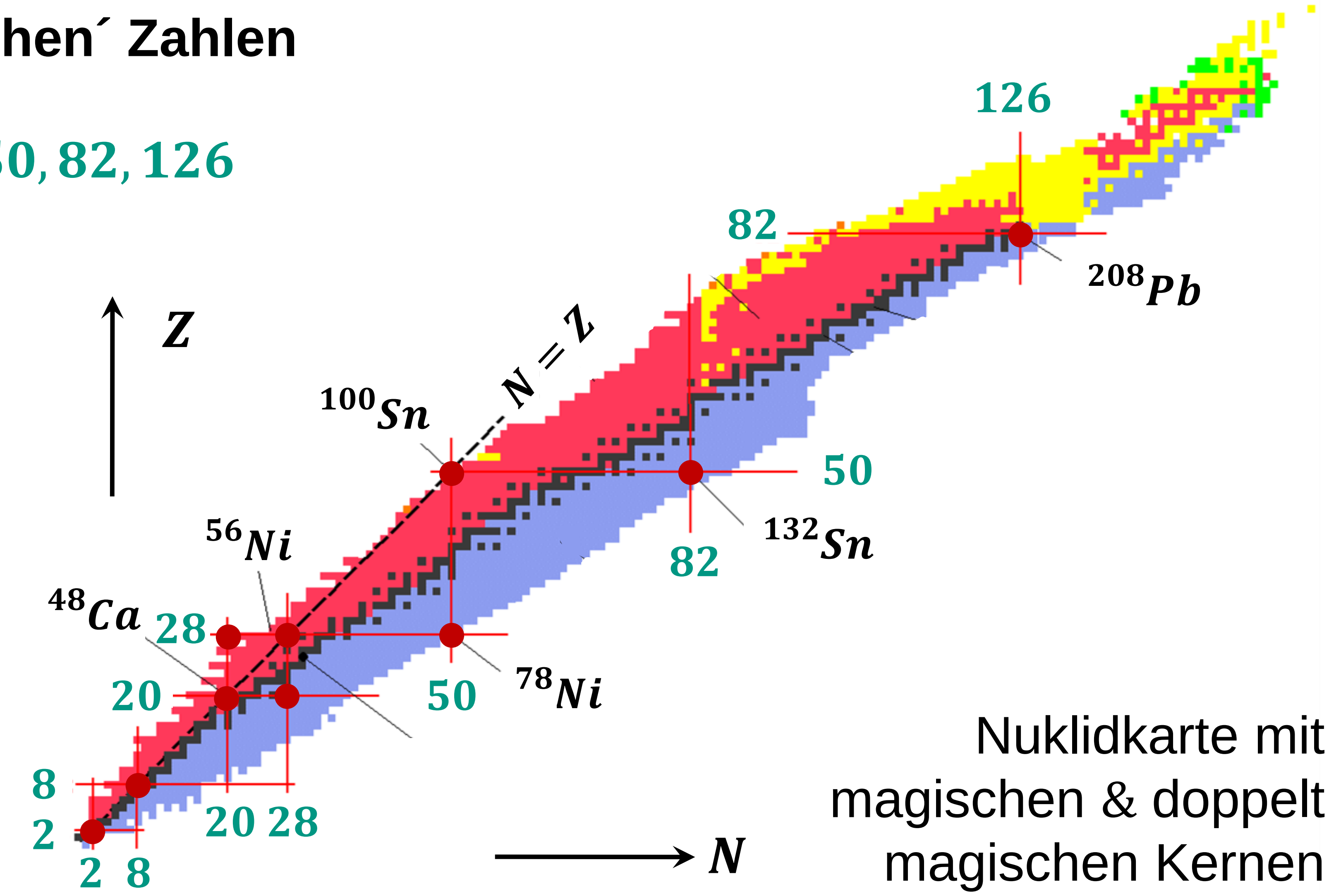
doppelt magisch:

^{4}He

^{48}Ca

^{132}Sn

^{208}Pb

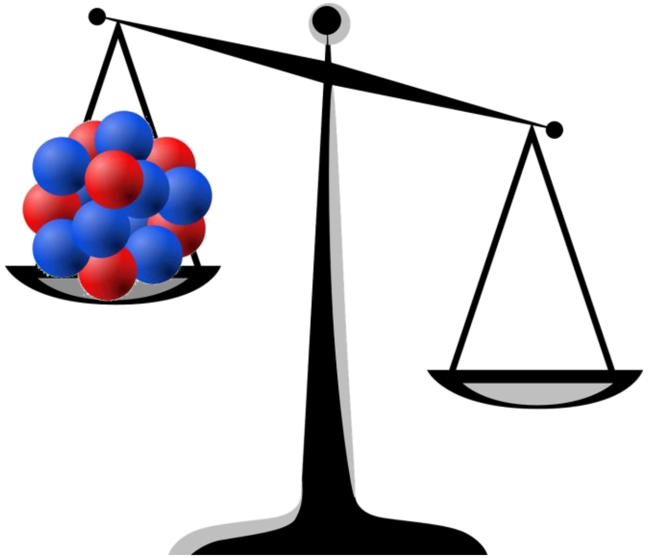


Nuklidkarte mit magischen & doppelt magischen Kernen

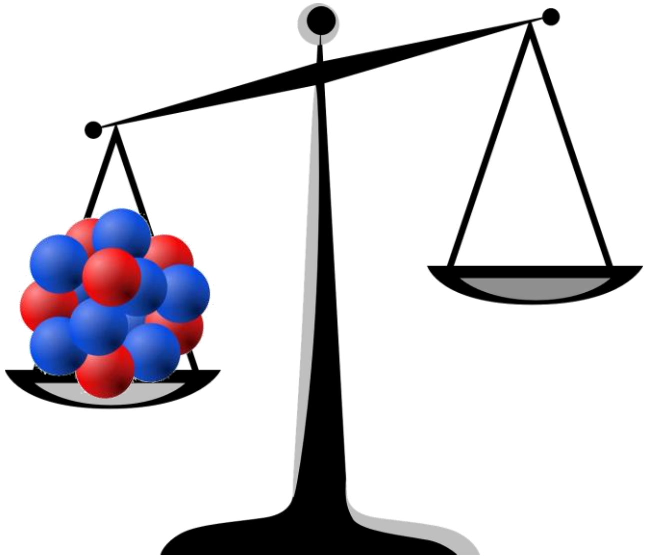
QUIZ: Nuklide mit magischen Zahlen

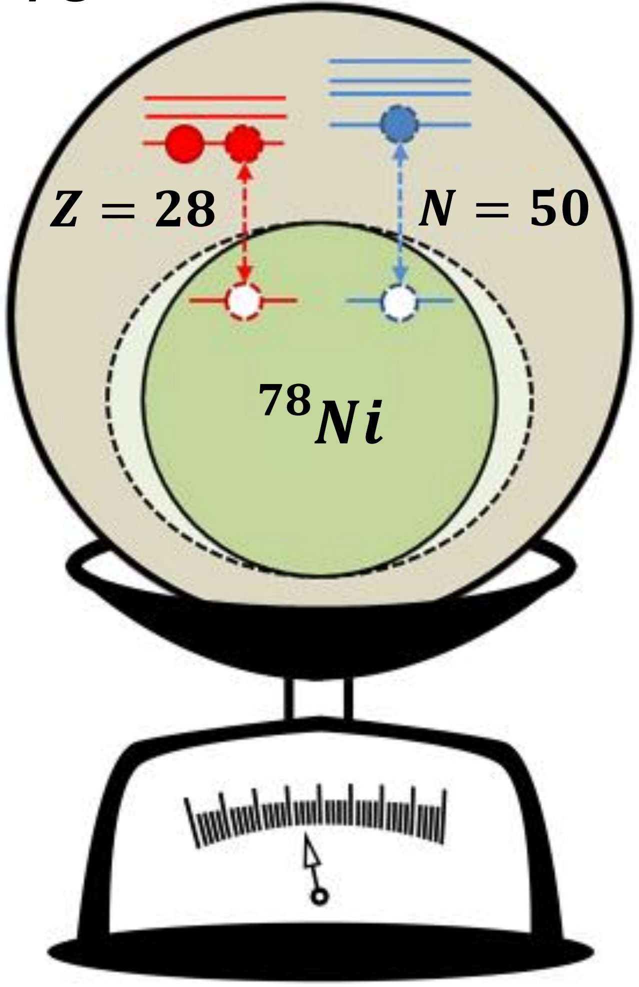
- Nuklide mit den ´doppelt−magischen´ Zahlen: $Nickel - 78$ ist entsprechend des Schalenmodells besonders…

A) leicht



B) schwer





Schalenmodell: Nuklide mit magischen Zahlen

- **Nuklide mit den ´magischen´ Zahlen zeigen eine**

  - hohe **Bindungsenergie** / Separationsenergie

  - hohe **Anregungsenergie** des ersten angeregten Zustands

  - **große Anzahl** an Isotopen (Isotonen) bei gleichem $\boldsymbol{Z}$ ($\boldsymbol{N}$)

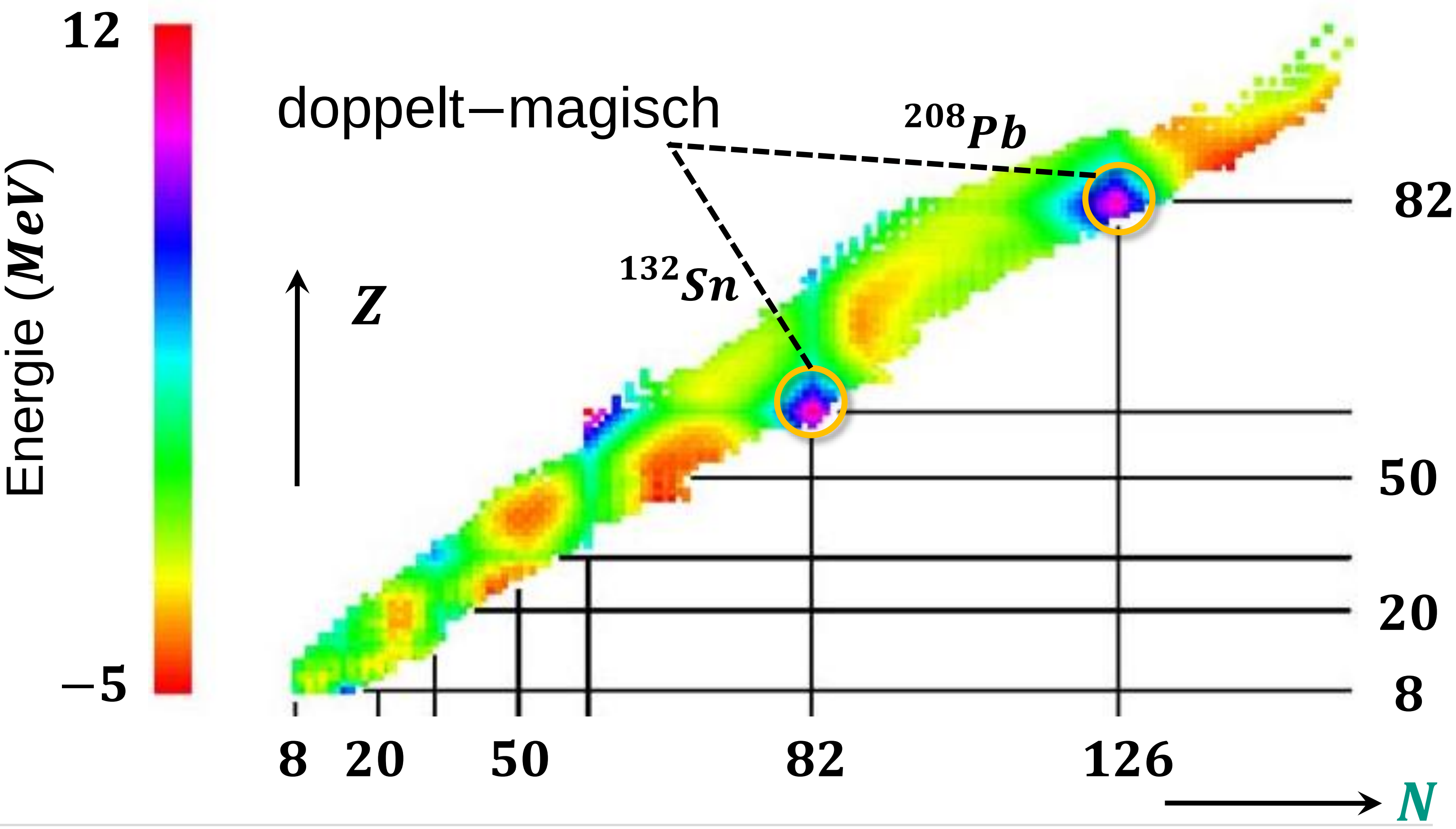
  - **kleine Einfangquerschnitte** für (thermische) Neutronen

  - große relative **Häufigkeit**

Magische Zahlen: experimentelle Befunde

- **Bindungsenergie: Abweichung gegenüber Tröpfchenmodell**

hohe Bindung
bei magischen Zahlen



Schalen & magische Zahlen: Atome vs. Kerne

Karlsruhe Institute of Technology

Analogien und Unterschiede

Atomphysik

- magische Zahlen:
  $\mathbf{2, 10, 18, 36, 54, 86}$

- **erzeugendes Potenzial**:
  langreichweitiges Coulombfeld
  $\boldsymbol{V(r) \sim -Z \cdot e^2 / r}$

Kernphysik

- magische Zahlen:
  $\mathbf{2, 8, 20, 28, 50, 82, 126}$

- **erzeugendes Potenzial**:
  kurzreichweitige Kernkraft
  $\boldsymbol{V(r)} \sim ?$

  ⇨ Kastenpotenzial ?

  ⇨ harmonischer Oszillator ?

  ⇨ Woods–Saxon Potenzial !

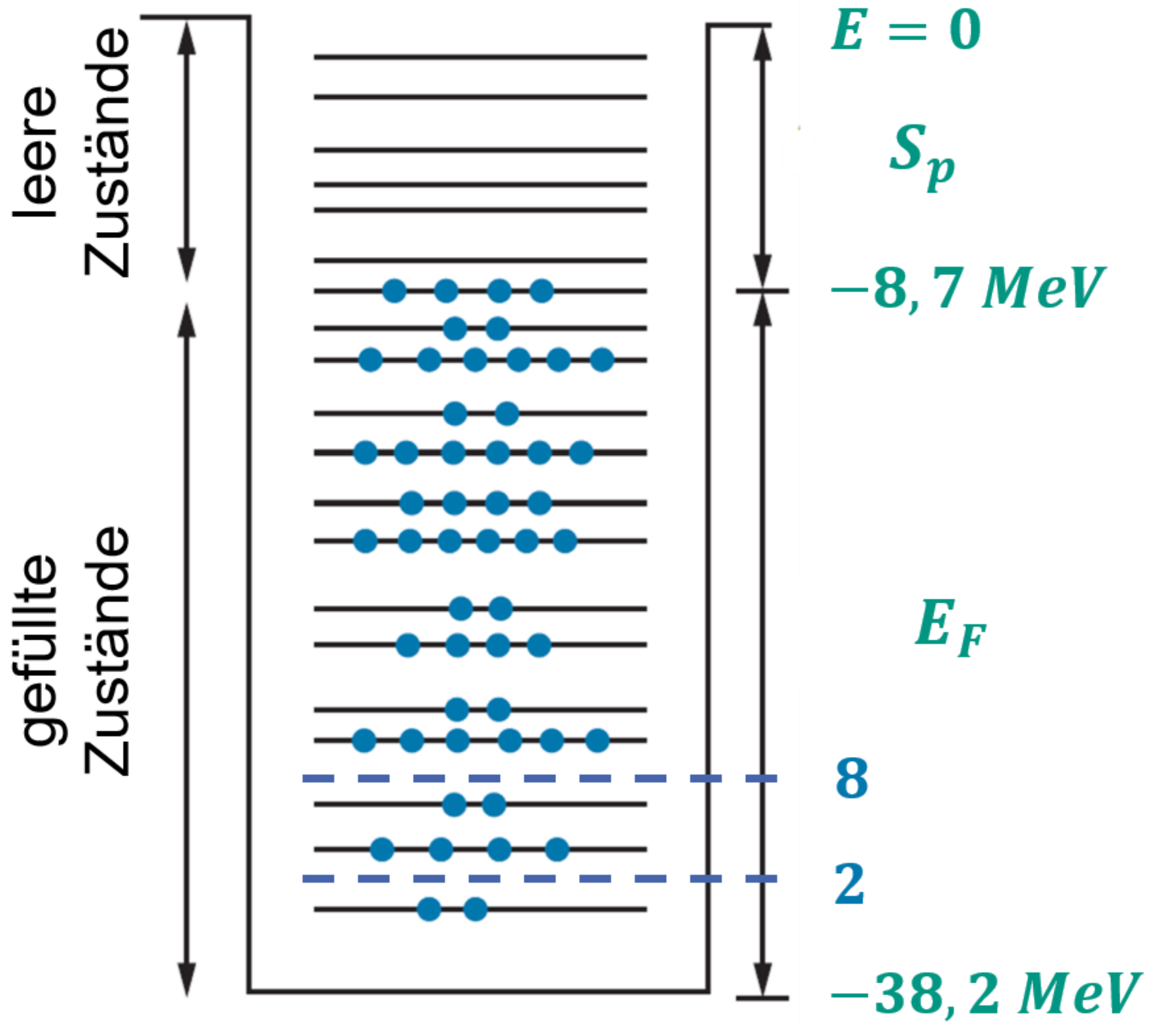
Anpassung bis Zahlen alle korrekt

gleiche Notationen: $\boldsymbol{n, \ell, j}$

Schalenmodell: Beispiel–Kern $Tellur - 125$

- **Visualisierung unseres Ziels: ein Potenzial für alle Nukleon–Schalen**

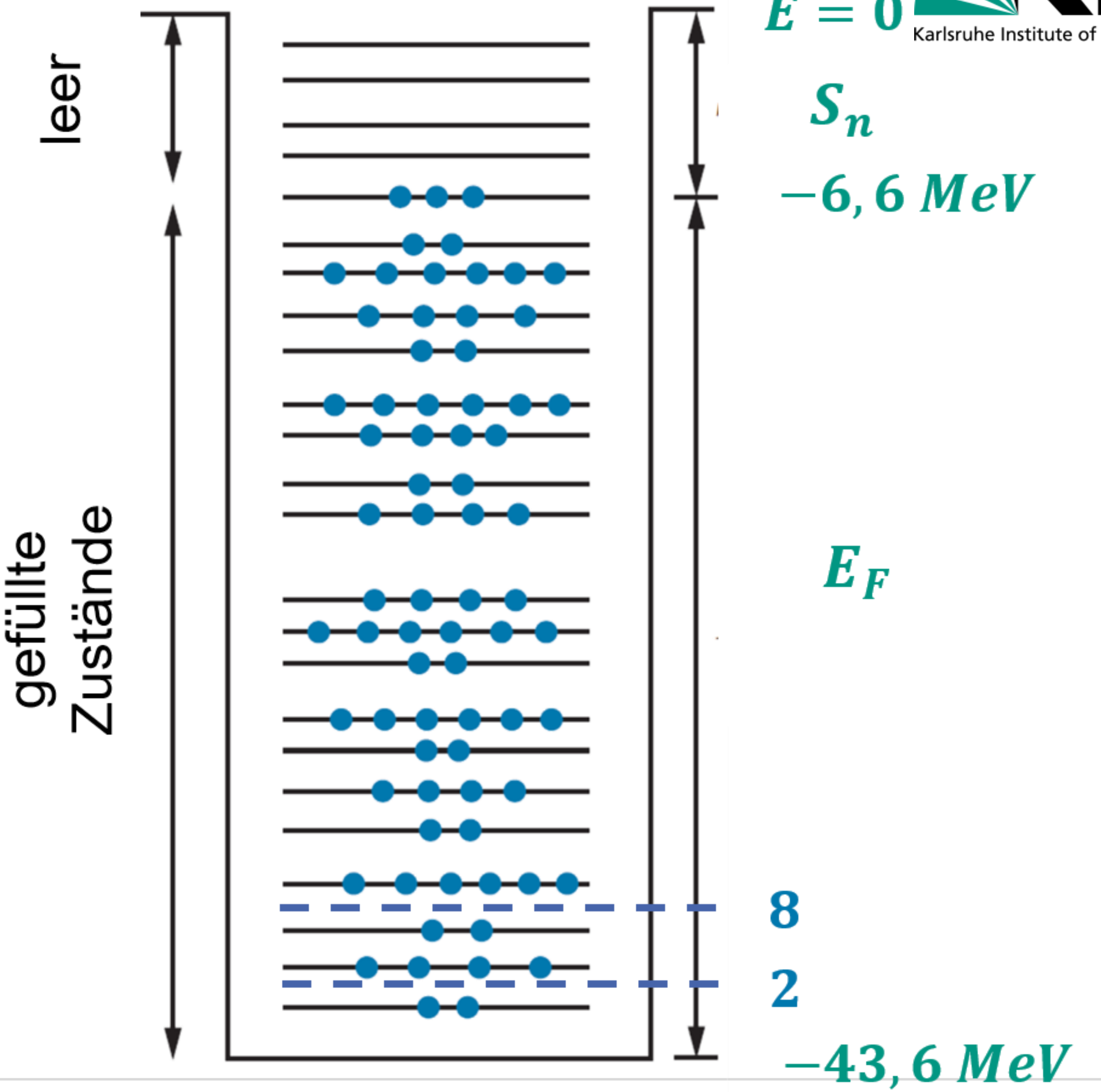
Zustände von
$\mathbf{52}$ Protonen…



Schalenmodell: Beispiel–Kern $Tellur - 125$

- **Visualisierung unseres Ziels: ein Potenzial für alle Nukleon–Schalen**

Zustände von
$\mathbf{73}$ Neutronen…



Ansatz Kastenpotenzial

- **Fallstudie #1: Nukleonen im Kasten**

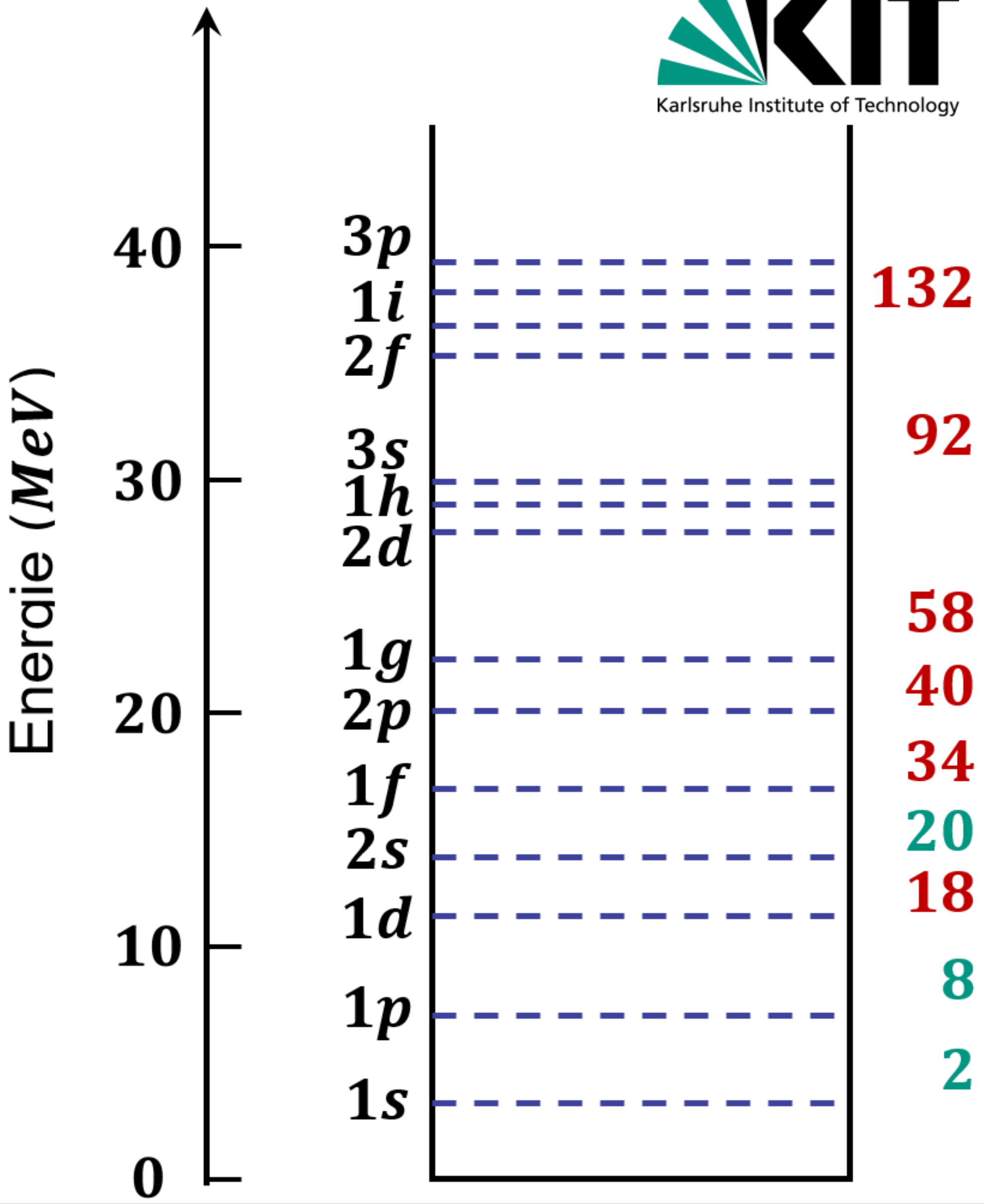
  - Nukleonen in einem **Kastenpotenzial** mit Tiefe $V_0 = 40\ MeV$ (s. Fermigas)

$$V(r) = -V_0 \text{ für } r < R$$
$$V(r) = 0 \text{ für } r > R$$

  für $\ell = 0$ (Zentrifugalterm für $\ell \neq 0$)

  - Schalenabschlüsse stimmen für schwere Kerne nicht mehr mit magischen Zahlen überein

  $= 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126$



Ansatz harmonischer Oszillator

- **Fallstudie #2: Nukleonen im harmonischen Oszillatorpotenzial**

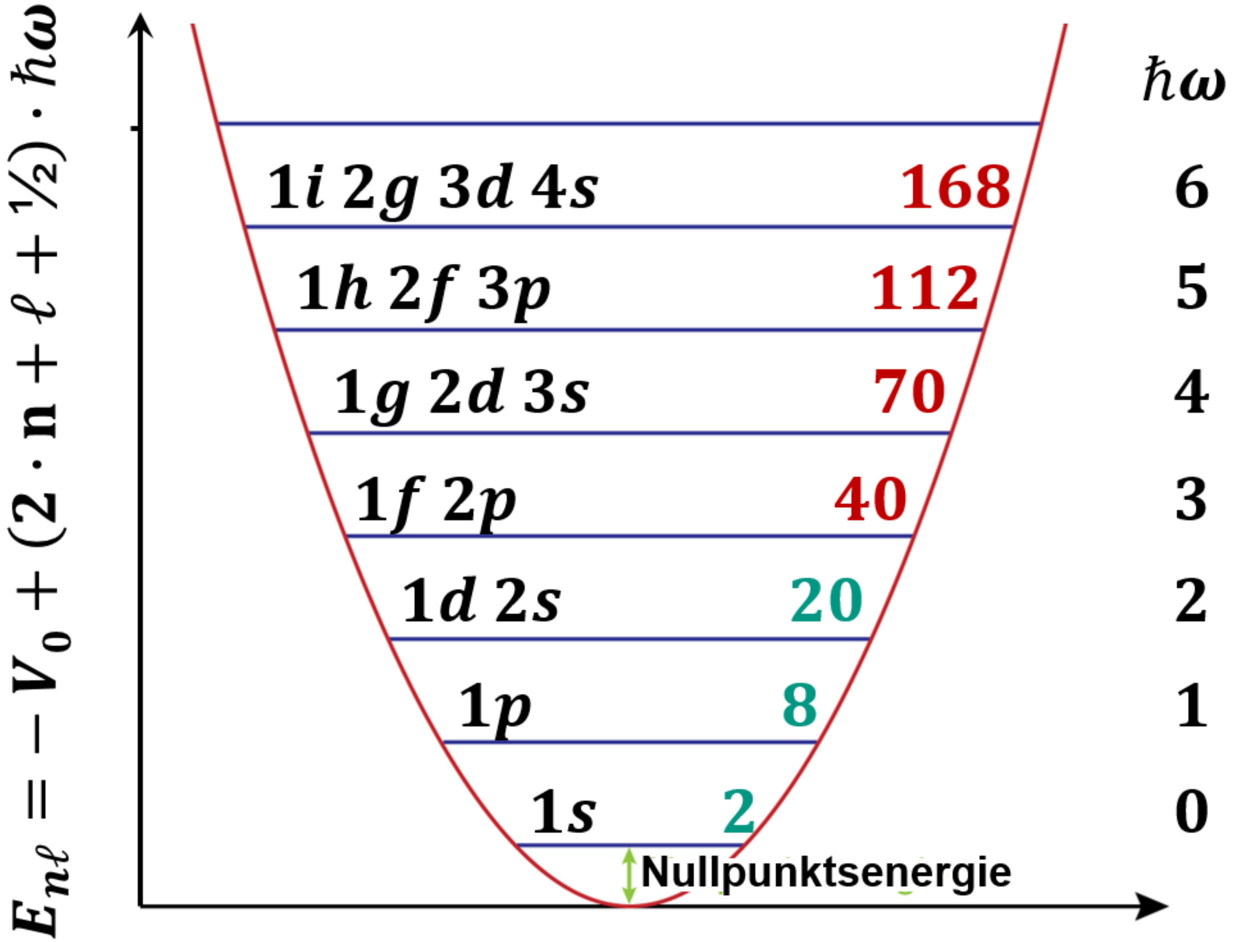
  - Nukleonen im **Oszillatorpotenzial** mit Tiefe $V_0 = 40\ MeV$ (s. Fermigas)

$$V(r) = -V_0 + ½ \cdot M_N \cdot \omega^2 \cdot r^2$$

mit $\hbar\omega$ – Schale: $2 \cdot (n-1) + \ell$

  - Schalenabschlüsse stimmen für schwere Kerne nicht mehr mit magischen Zahlen überein

$= 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126$



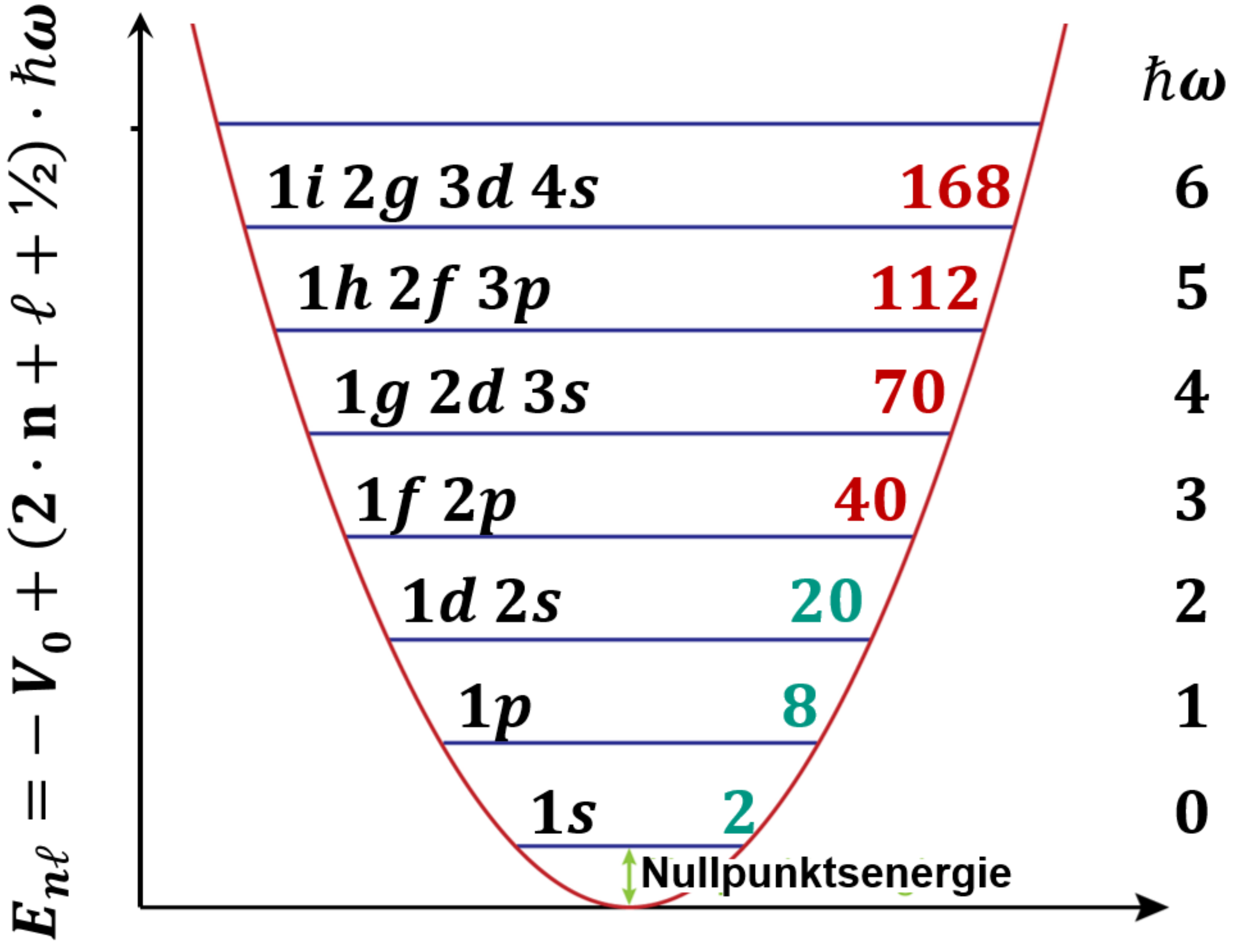
Ansatz harmonischer Oszillator

- **Fallstudie #2: Nukleonen im harmonischen Oszillatorpotenzial**

- Summe Zustände im **Oszillator-potenzial** bis zu einzelnen Schalen

$$\sum 2 \cdot (2\ell + 1)$$

$\hbar\omega$	n	ℓ	Zustand	$\Sigma\, 2 \cdot (2\ell + 1)$
3	2 1	1 3	$2p$ $1f$	40
2	2 1	0 2	$2s$ $1d$	20
1	1	1	$1p$	8
0	1	0	$1s$	2



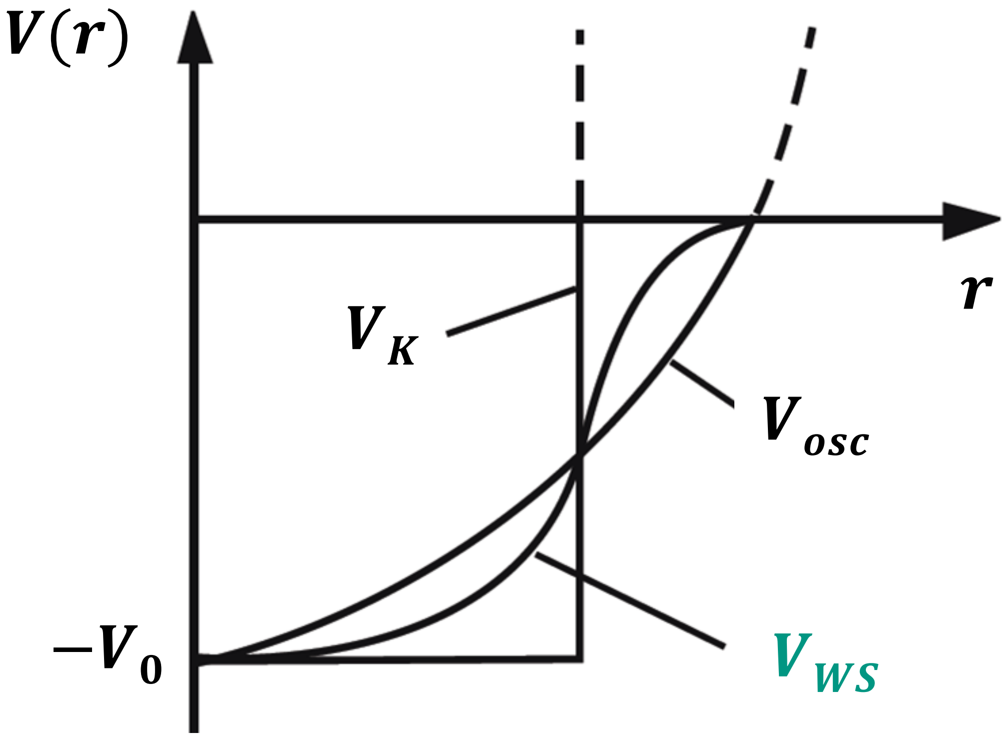
Ansatz Woods–Saxon Potenzial

- **Fallstudie #3: Nukleonen in Potenzial, welches die beobachtete Ladungsverteilung $\rho(r)$ von Kernen nachbildet**

- **Woods–Saxon Potenzial V_{WS}** liegt zwischen einem harmonischen Oszillator V_{osc} und dem Kasten–Potenzial V_K

$$V_{WS}(r) = \frac{V_0}{1 + e^{(r-a)/d}}$$

a: Kernradius d: Skindicke



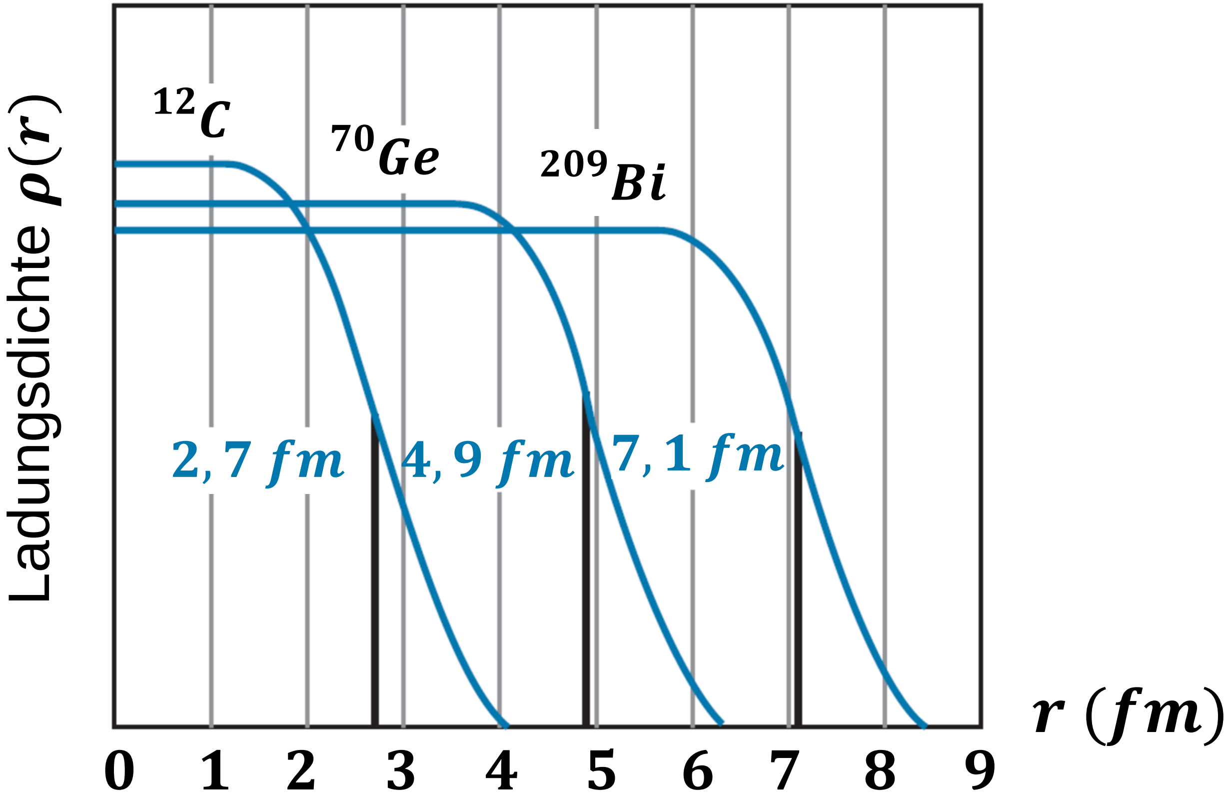
Ansatz Woods–Saxon Potenzial

- **Fallstudie #3: Nukleonen in Potenzial, welches die beobachtete Ladungsverteilung $\rho(r)$ von Kernen nachbildet**

- **Woods–Saxon Potenzial V_{WS}** liegt zwischen einem harmonischen Oszillator V_{osc} und dem Kasten–Potenzial V_K

$$V_{WS}(r) = \frac{V_0}{1 + e^{(r-a)/d}}$$

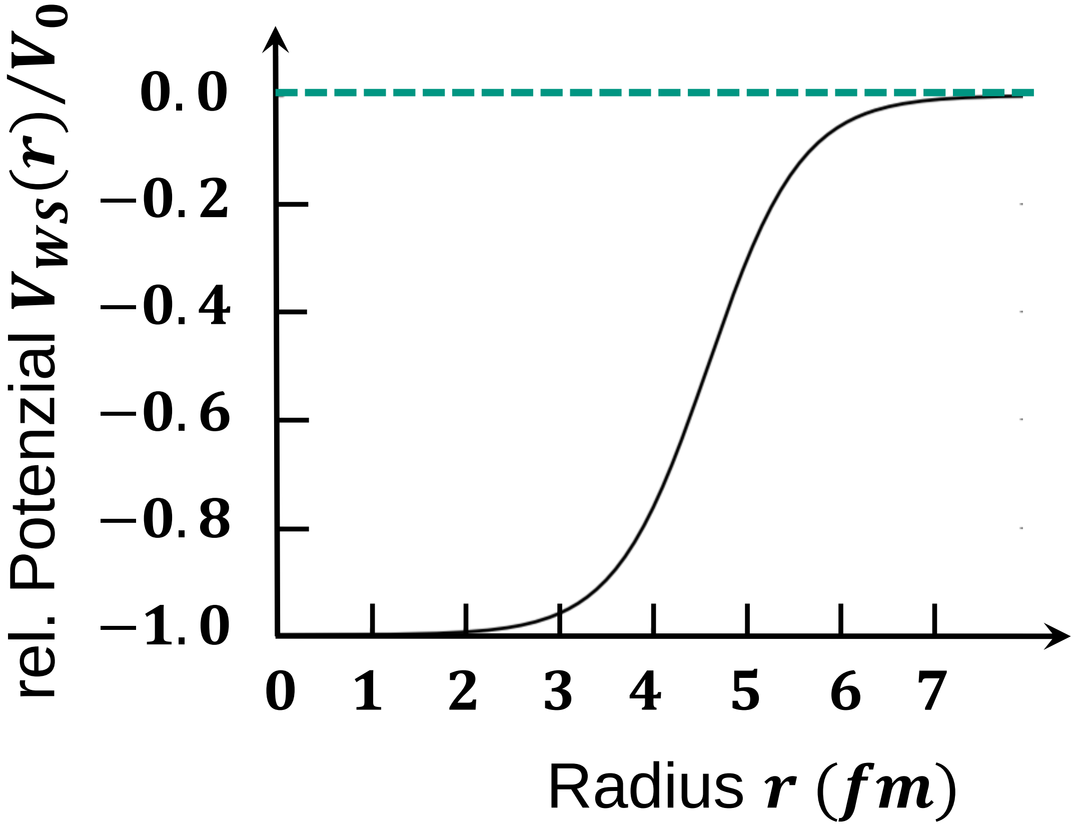
a: Kernradius d: Skindicke



Ansatz Woods–Saxon Potenzial

- **Fallstudie #3: Nukleonen in Potenzial, welches die beobachtete Ladungsverteilung $\rho(r)$ von Kernen nachbildet**

- **Woods–Saxon Potenzial V_{WS}** liegt zwischen einem harmonischen Oszillator V_{osc} und dem Kasten–Potenzial V_K
- magische Zahlen $2, 8, 20$ werden korrekt vorhergesagt
- magische Zahlen ab 28 werden nicht korrekt abgebildet



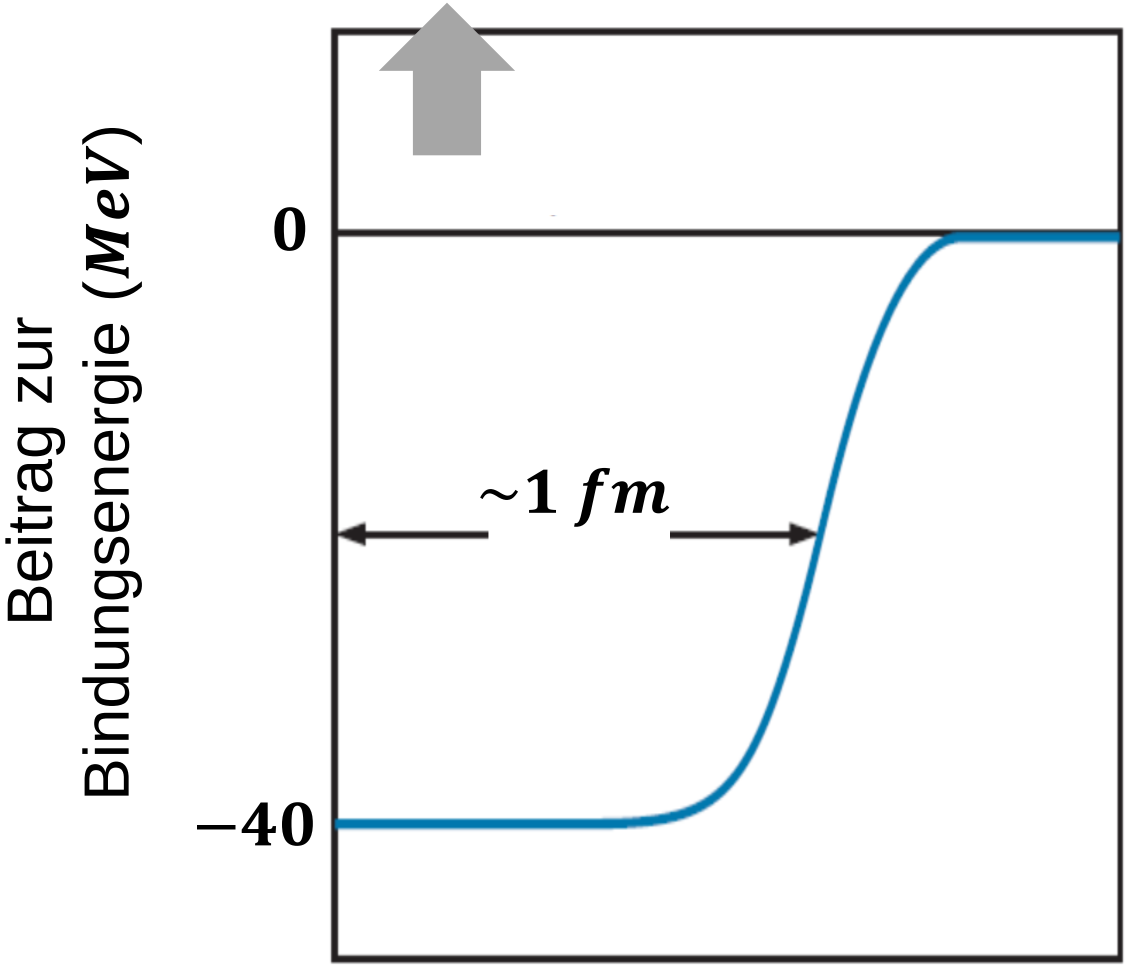
Ansatz Woods–Saxon Potenzial & Pionen

- **Kurzreichweitiges Potenzial der anziehenden Kernkräfte**

- anziehende Kernkräfte mit mittlerem Potenzial (Verlauf nicht identisch mit dem $\boldsymbol{N}-\boldsymbol{N}$ Potenzial)

- mikroskopisches Bild: anziehende Kraft vermittelt durch Austausch massebehafteter Pionen

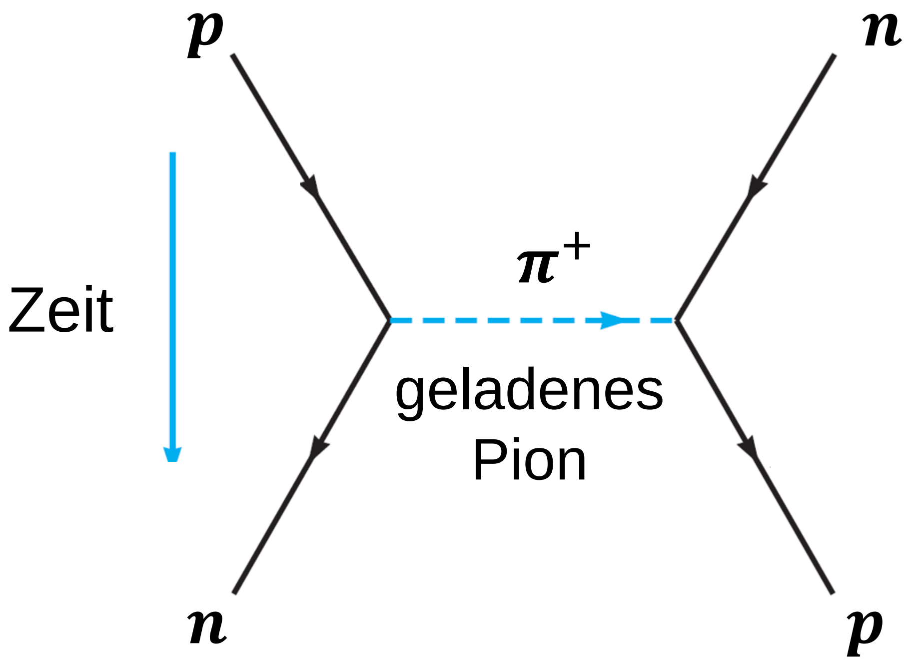
$\mathbf{3}$ Pionenzustände: $\left(\boldsymbol{\pi}^{+}\,\boldsymbol{\pi}^{0}\,\boldsymbol{\pi}^{-}\right)$

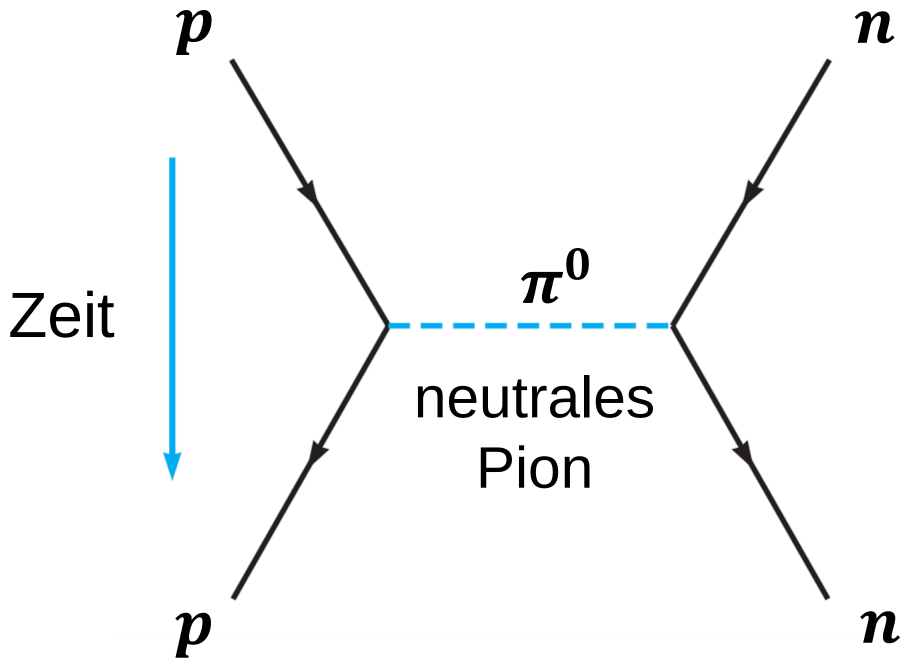


Pionen und die starke Kernkraft

- **Pionen vermitteln eine kurzreichweitige, anziehende Kernkraft**

- Feynman–Diagramme zum **Pionaustausch**: Reichweite $\sim \mathbf{1}\ \boldsymbol{fm}$

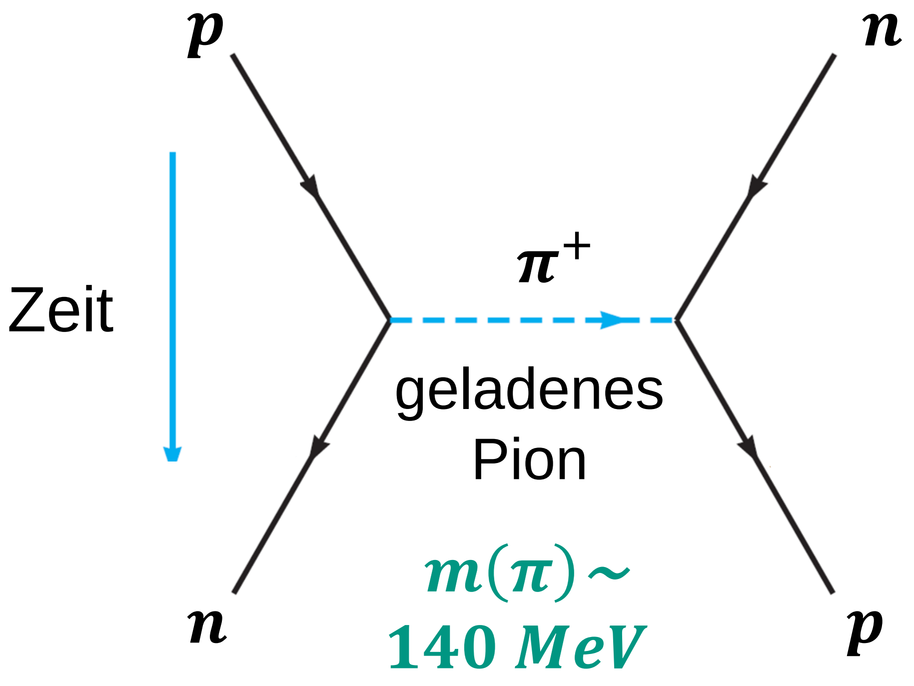




Pionen und die starke Kernkraft

- **Pionen $(\pi^+\,\pi^0\,\pi^-)$ sind kurzlebige Quark–Antiquark–Systeme**

- **Hideki Yukawa** sagt die Existenz von Pionen als Träger der starken Kraft voraus ($\mathbf{1935}$), er erhält $\mathbf{1938}$ sein $\boldsymbol{PhD}$ auf Basis seiner theoret. Arbeiten zu Pionen



Nobel-preis $\mathbf{1949}$

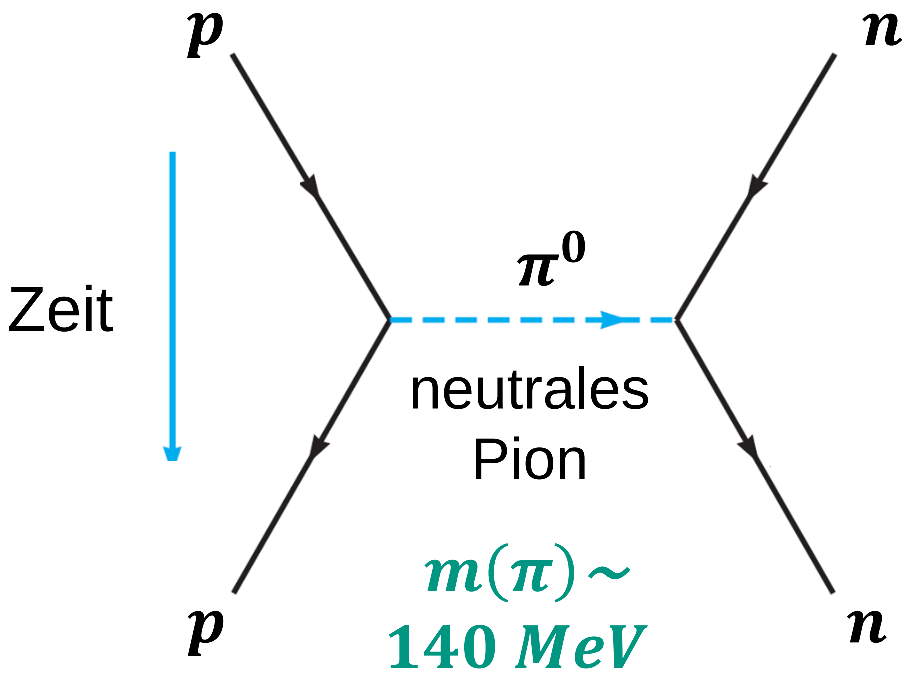
“for his prediction of the existence of mesons on the basis of theoretical work on nuclear forces"

湯川 秀樹

Pionen und die starke Kernkraft

- **Pionen $(\pi^+ \pi^0 \pi^-)$ sind kurzlebige Quark–Antiquark–Systeme**

- Pionen sind **virtuelle Austauschteilchen** und unterliegen der Heisenberg´schen Unschärferelation



$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

$140\ MeV/c^2$ Weg $c \cdot \Delta t \sim 1\ fm$

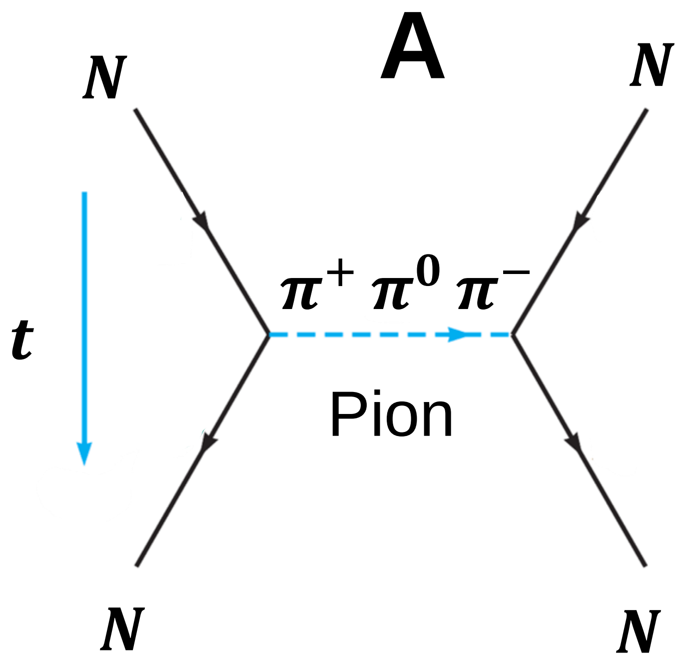
QUIZ: Pionen als Austauschteilchen

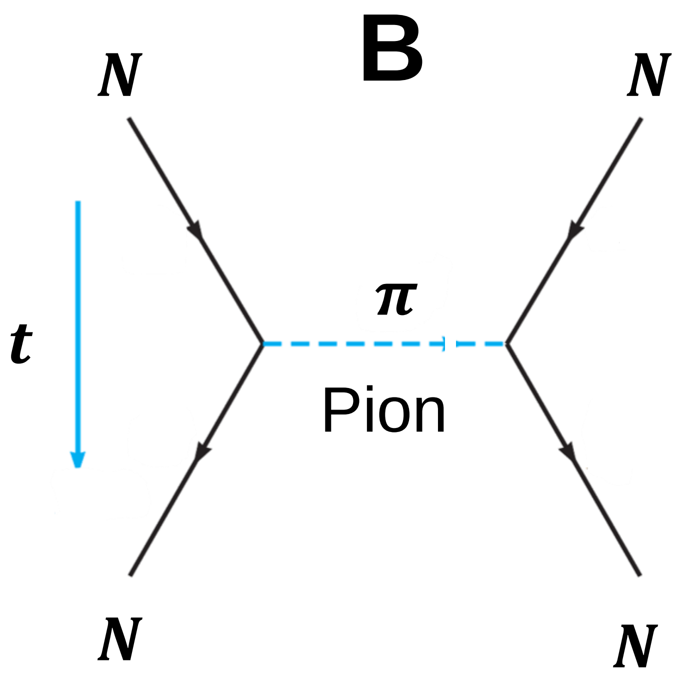
- **Ist feststellbar, welcher Ladungszustand $(\pi^+\,\pi^0\,\pi^-)$ ausgetauscht wurde ?**

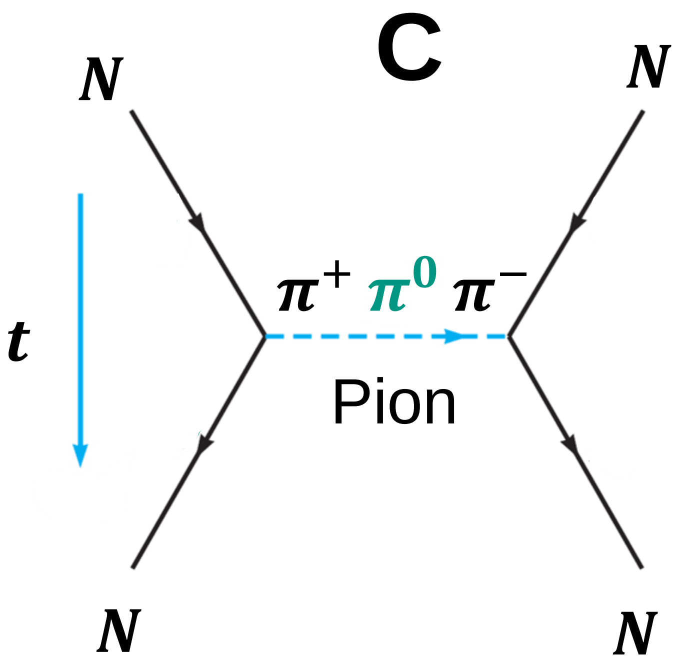
A) **Ja**, über die Ladung des Nukleons N

B) **Nein**, das Pion ist virtuell

C) **Ja**, über die Masse des Pions ($\mathbf{140/135}\ \boldsymbol{MeV}$)







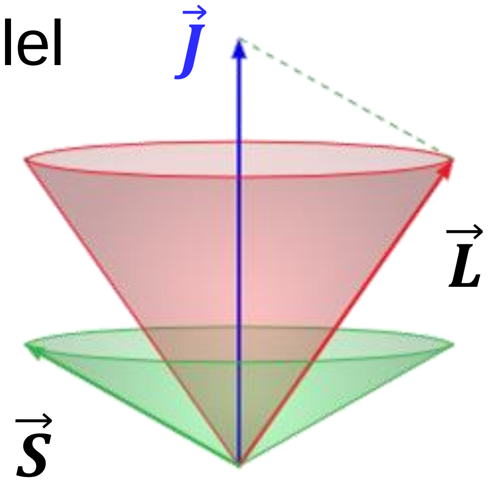
Schalenmodell: erweitertes Potenzial

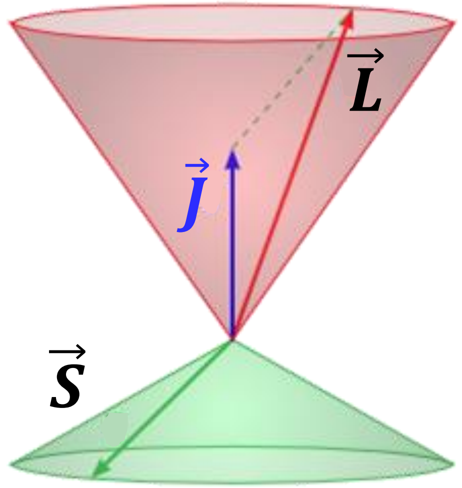
- **Lösungsansatz: nicht nur radial abhängiges Potenzial, vgl. mit Beobachtungen in der Atomphysik (LS – Kopplung)**

  - **RECAP:**

    Atomphysik: **Spin–Bahn–Kopplung** erzeugt **Feinstruktur–Aufspaltung** mit **neuer Quantenzahl Gesamtdrehimpuls** J (s. Kap. 6.5)

parallel





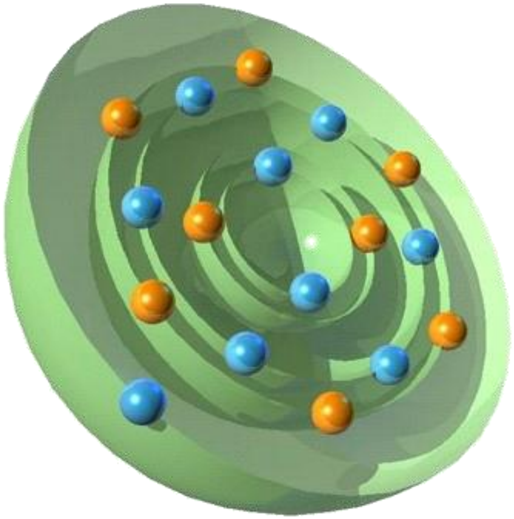
anti–parallel

Maria Goeppert–Mayer

Schalenmodell: erweitertes Potenzial

- **Lösungsansatz: nicht nur radial abhängiges Potenzial, vgl. mit Beobachtungen in der Atomphysik (*LS* – Kopplung)**

- Kernphysik: **Spin–Bahn–Kopplung** erzeugt **deutliche Aufspaltung** mit **korrekt vorhergesagten magischen Zahlen** $\mathbf{2, 8, 20, 28, 50, 82, 126}$



Nobel-preis **1963**

´for her discoveries concerning the nuclear shell structure´

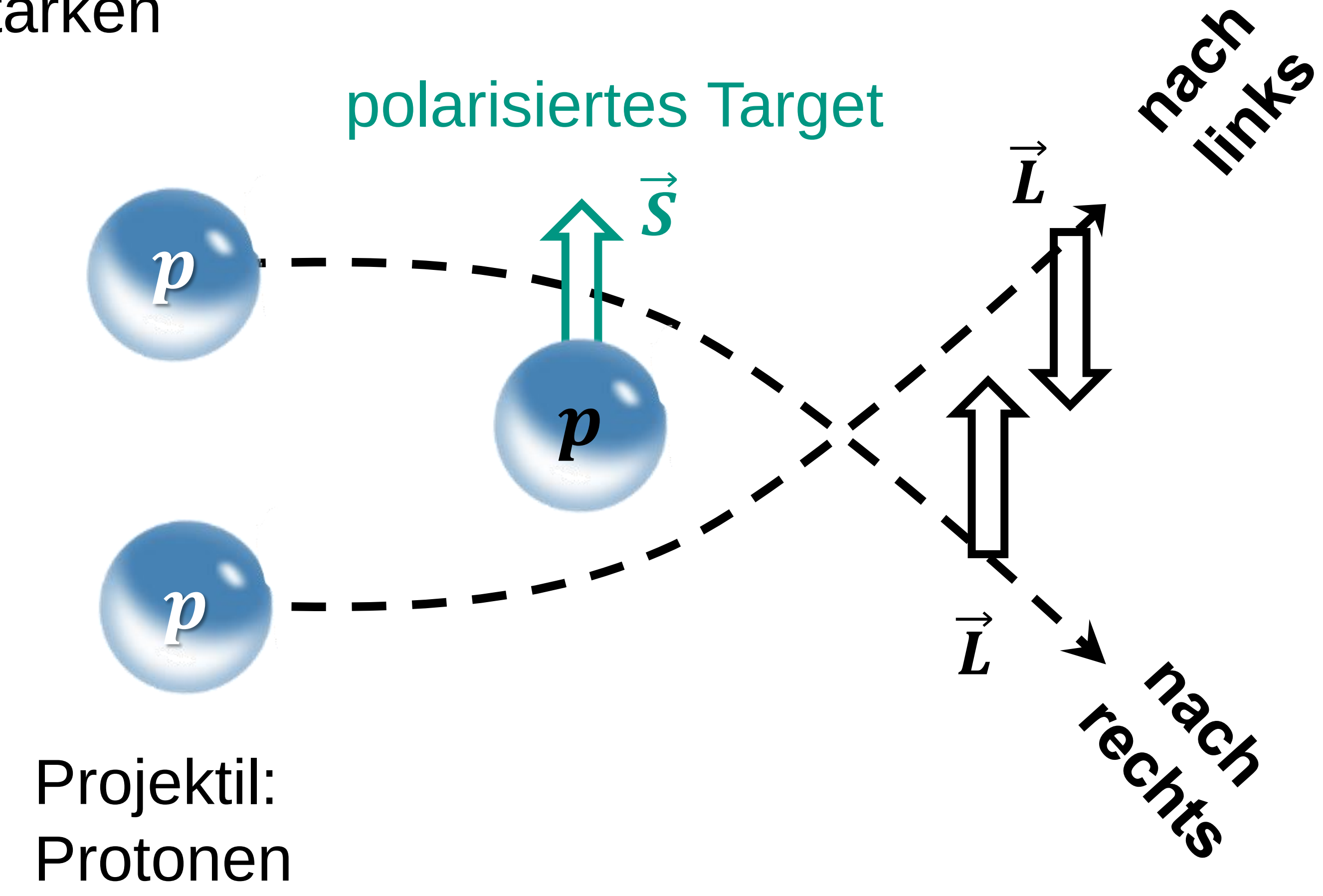
Maria Goeppert–Mayer

Schalenmodell: LS – Kopplung

- **Experimentelle Überprüfung der LS – Kopplung bei Kernen**

- Spin–Bahn–Kopplung bei der starken Kernkraft tritt auf bei **Streuung von Protonen an polarisierten Protonen–Targets (polarisierter atomarer Wasserstoff)**

- man beobachtet eine links–rechts **Asymmetrie** in den Streuraten durch LS – Kopplung

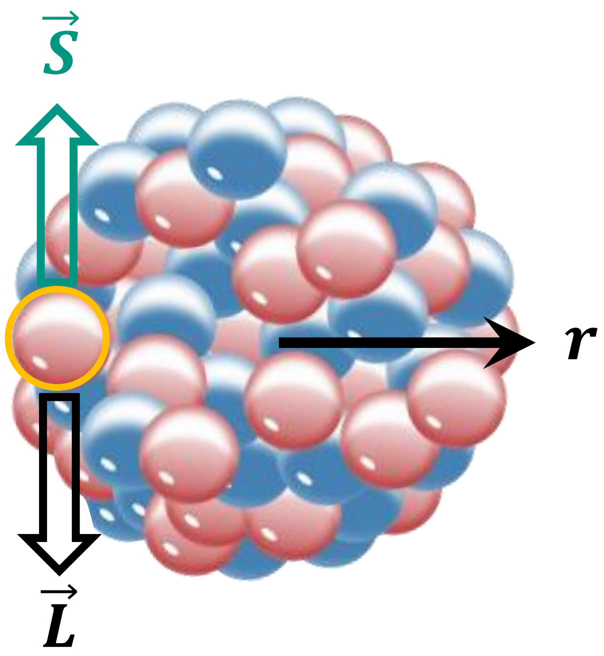


Schalenmodell: LS – Kopplung

- **Lösungsansatz: radial abhängiges Woods-Saxon Potenzial mit einem Zusatzterm zur Beschreibung der LS – Kopplung bei Kernen**

- Kernphysik: Spin–Bahn–Kopplung bei der starken Kernkraft führt zu **wesentlich größeren Niveau–Aufspaltungen**

Spin $\vec{S}$ und Bahn-Drehimpuls $\vec{L}$ eines Nukleons koppeln



neuer Zusatzterm:

$$+ V_{LS}(r) \cdot \left(\vec{L} \cdot \vec{S}\right)$$

Maria Goeppert–Mayer

Schalenmodell: LS – Kopplung

■ **Betrachtung der LS – Kopplung von Nukleonen im Kern**

- Testnukleon ($\vec{L}_0$ $\vec{S}_0$) wechselwirkt mit anderen Nukleonen im Kern via LS – Kopplung:

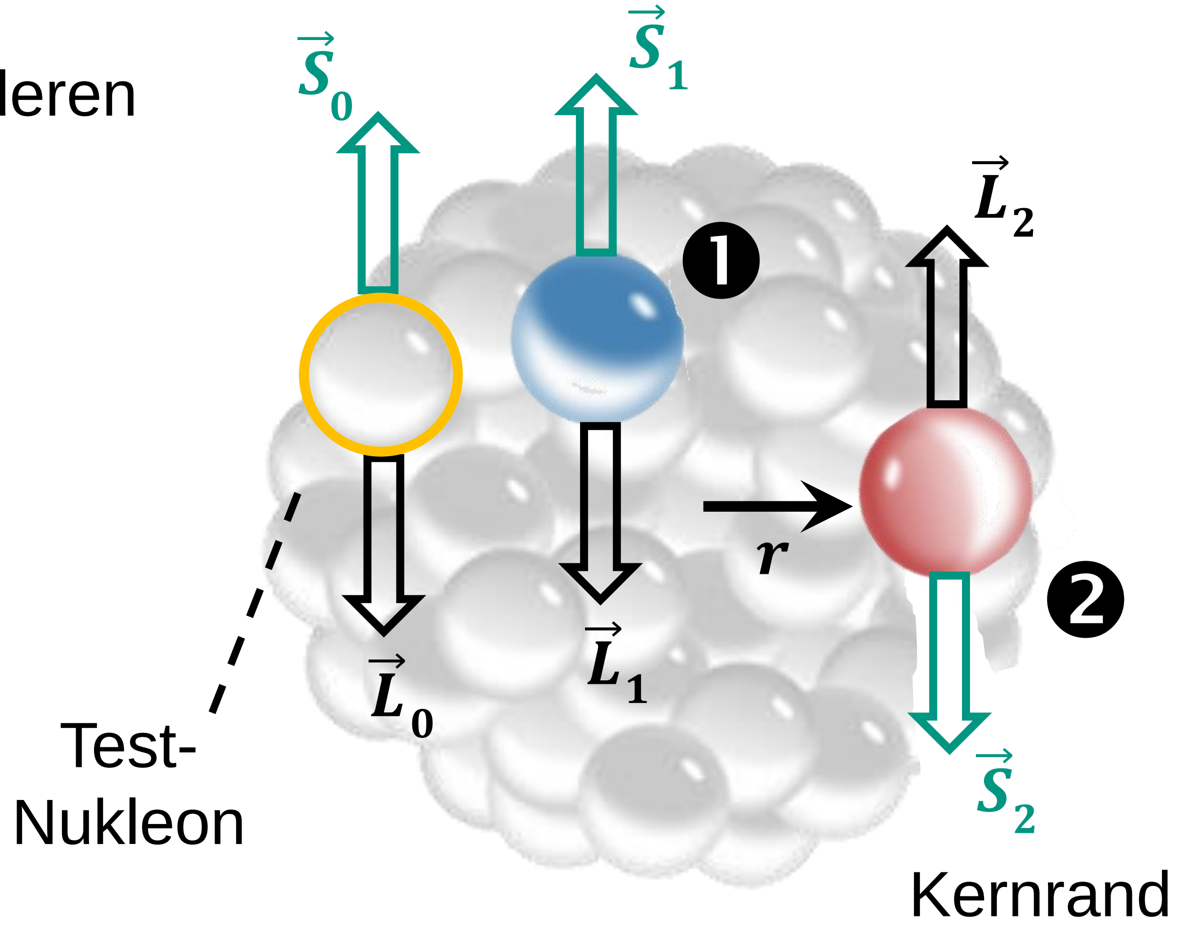
  ❶ Nukleon im Kerninnern

  ❷ Nukleon am Kernrand

- Wechselwirkung ist abhängig von $\vec{L} = \vec{L}_0 + \vec{L}_i, \vec{S} = \vec{S}_0 + \vec{S}_i$:

  parallel ⇧⇧: $+\vec{L}\cdot\vec{S}$

  anti–parallel ⇧⇩: $-\vec{L}\cdot\vec{S}$



Schalenmodell: LS – Kopplung

- **Betrachtung der LS – Kopplung von Nukleonen im Kern**

- Wechselwirkungen ´mitteln´ sich
  ⇨ **Reduktion auf Einteilchen– Zustand mit Quantenzahl Bahndrehimpuls $\vec{L}_i$, Spin $\vec{S}_i$**

- wir erhalten ein **radialabhängiges LS – Potenzial** mit der Form (wichtig: im Innern mittelt sich alles)

$$\boxed{V_{LS}(r) \sim \frac{1}{r} \cdot \frac{d\rho}{dr}}$$