
Experimentalphysik IV

Quantenphysik

Prof. Dr. Thomas Müller

Vorlesung Sommersemester 2015

Skript der Vorlesung EXPERIMENTALPHYSIK IV
gehalten von Herrn Prof. Dr. Thomas Müller im Sommersemester 2015

Stand 6. September 2015

Dieses Skript erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit und Korrektheit. Kommentare, Fehler, Vorschläge und konstruktive Kritik bitte an studium@steffenalbert.de.

Autoren:
Steffen ALBERT

Felix HERMANN

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Die fundamentalen Bausteine und Kräfte der Natur	1
1.1.1	Historischer Überblick	1
1.2	Bedeutung der Atomphysik	2
2	Experimentelle Grundlagen	3
2.1	Größe/Masse von Atomen	3
2.1.1	Definition	3
2.1.2	Loschmidtzahl	3
2.1.3	Größe von Atomen	5
2.2	Elementarladung, Spezifische Ladung	5
2.2.1	Quantelung der Ladung	5
2.2.2	Spezifische Ladung $\frac{e}{m}$	6
2.2.3	Einheiten	7
2.3	Struktur der Atome	8
2.3.1	Streuexperimente	8
2.3.2	Bestimmung atomarer Strukturen	9
3	Bohrsche Atommodell	15
3.1	Das optische Spektrum von Atomen	15
3.1.1	Beobachtung	15
3.1.2	Einheiten in der Spektroskopie	16
3.1.3	Wasserstoff Schema	16
3.1.4	Bohrsche Postulate (1913)	18
3.2	Bestimmung der Ionisationsenergie [Lenard 1902]	20
3.3	Franck-Hertz-Versuch (1913)	21
4	Photonen (Quanteneigenschaften des Lichts)	22
4.1	Wärmestrahlung	22
4.1.1	Schwarzer Strahler	22
4.1.2	Plank'sche Strahlungsformel	23
4.2	Photoeffekt (Hallwachs 1888)	25
4.3	Compton-Effekt (1921)	28
4.4	Ausblick	30
5	Materiewellen (Welleneigenschaften von Teilchen)	32
5.1	Beugung und Interferenz	32
5.1.1	Erste Beobachtungen	32
5.1.2	Weitere Versuche	34
5.2	Materiewellen	35
5.2.1	Kenntnis: Licht, Materie, Welle und Korpuskel	35
5.2.2	Wahrscheinlichkeitsinterpretation	37

5.3	Wellenpakete	37
6	Elemente der Quantenmechanik	39
6.1	Zusammenfassung	39
6.1.1	EM Wellen im Vakuum	39
6.1.2	Nicht-relativistische Materiewellen	39
6.1.3	Relativistische Materiewellen	40
6.1.4	Nicht-relativistische Materiewellen im Potential	41
6.2	Einfache quantenmechanische Systeme	41
6.2.1	Teilchen im Kasten (1d)	41
6.2.2	Teilchen im Kastenpotential mit endlich hohen Wänden	44
6.2.3	Tunneleffekt	45
7	Das Wasserstoffatom	50
7.1	Schrödngergleichung im Zentralfeld	50
7.2	Energiezustände des Wasserstoffs	52
7.3	Bahn- und Spin- Magnetismus	53
7.3.1	Klassisch	53
7.3.2	,	56
7.3.3	Stern-Gerlach-Versuch (1921)	58
7.4	Spin- Bahnkopplung,	58
7.4.1		58
7.4.2	Relativistische Effekte	61
7.4.3	Zusammenfassung	62
7.5		62
7.6	()	62
7.7	Alkali-Atome	64
8	Atome im magnetischen und elektrischen Feld	66
8.1	Zeeman-Effekt (1896)	66
8.2	Paschen-Back-Effekt	71
8.3	Elektronenspinresonanz ESR	73
8.4	Stark-Effekt (1915)	75
9	Mehrelektronensysteme (Pauliprinzip)	76
9.1	Das Heliumatom	76
9.1.1	Energiezustände	76
9.1.2	Wellenfunktion	77
9.1.3	Aufbau der Elemente ($z > 1$)	80
10	Exotische Systeme	81
10.1	Myonische Atome	81
10.2	Positronium	82
10.3	Myonium	82
10.4	Gebundene Quarksysteme	83
11	Emission von Lichtquanten	86
11.1	Linienbreite, Lebensdauer	86
11.2	Röntgenspektren	88
11.3	Maser und Laser	91
11.3.1	Allgemeines	91
11.3.2	Anwendung des Lasers	94

12 Einführung in die Physik der Moleküle und Festkörper	95
12.1 Bindungen	95
12.2 Energiezustände	97
12.3 Systeme mit vielen gebundenen Atomen	99

1. Einleitung

1.1 Die fundamentalen Bausteine und Kräfte der Natur

1.1.1 Historischer Überblick

6. Jarh. vor Chr.		Mythologie → Naturwissenschaft griechisch-türkischer Raum
Anaximenes	*610	Luft als Urstoff → versch. Aggregatzustände
Empedokles	*500	Licht als strömende Substanz. Wegen hoher Geschwindigkeit können wir dies nicht sehen.
Anaxagoras	*500	Materie aus gleichartigen kleineren Körpern zusammengesetzt.
Demokrit	*460	Substanzen aus kleinsten Teilchen, atomos = unteilbar, SScheinbar ist Farbe, Süßigkeit, Bitterkeit, wirklich nur Atome und Leeres."
Epikur	*341	Atome bewegen sich unaufhörlich, sind verschieden voneinander.
Mittelalter		
Alzhazen	*965	Jeder natürliche Körper ist bis zu einer gewissen Grenze teilbar, so lange er hinsichtlich seiner Form so bleibt, wie er ist. Wird er darüber hinaus geteilt, nimmt er eine andere Form an.
Moderne		
Lavoiser	*1789	Chemische Massenbestimmung
Dalton	*1808	Multiple Proportionen: Gewichte von Reaktionspartnern verhalten sich wie kleine Zahlen → Atommassen
Avogadro	*1811	Molekültheorie der Gasgesetze: Gleiche Volumina versch. Gase enthalten gleiche Zahl von Atomen
Proust	*1815	Massenzahlen Vielfaches des H (Wasserstoff: Urmaterie der Griechen)
Meyer-Mendeliev	*1868	Periodensystem der Elemente
Faraday	*1833	Quantelung der Ladung
Kirchhoff/Bunsen	*1859	Atomspektroskopie
Hittorf		Kathodenstrahlung
Röntgen	*1895	X-Strahlen
Bequerel	*1896	Radioaktivität
Thomson	*1897	e^- identifiziert (falsches Atommodell)
Planck	*1900	Quantenhypothese $E = h \cdot \nu$
Rutherford	*1911	Struktur der Atome, Größe des Kerns

Einstein	*1905	Lichtquanten $E = mc^2$; lichtel. Effekt
Bohr	*1913	Atommodell incl. Quantentheorie
Schrödinger	*1926	Materiewellengleichung
Heisenberg	*1927	Unschärferelation
Born	*1928	Wahrscheinlichkeitsdeutung der Materiewellen
Dirac	*1928	Antimaterie potenziert

1.2 Bedeutung der Atomphysik

- Ursprung, Grundlage aller modernen Forschung
- Moderne Anwendungen

Bezug zu anderen Bereichen:

Quantenelektrotechnik	Laser, optische Computer
Festkörperphysik	Supraleitung, Magnetismus, Quanten-Halleffekt
Medizinische Physik	NMR, CT-Scanner, Röntgengeräte
Messprozesse	Atomuhr
Chemie	Verständnis chem. Reaktionen
Astrophysik	Spektroskopie, Chemie der Sterne
Umwelt	Nachweis von Verunreinigungen

2. Experimentelle Grundlagen

2.1 Größe/Masse von Atomen

2.1.1 Definition

Atom: kleinster unveränderlicher Baustein chemischer Elemente

Loschmidt / Avogadrozahl: $N_L = 6,022 \cdot 10^{23} \frac{1}{\text{mol}}$

Mol: Relative Atommasse in g

Atommasse: $M(A) = \frac{1 \text{ mol}}{N_L}$

Rel. Atommasse $\hat{=}$ Atomgewicht A

1 u $\equiv$ 1 amu (atomar mass unit) $:= \frac{1}{12} M({}_{6}^{12}\text{C}) \approx 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$

Bs: H: A = 1; M(H) = 1,0078 u
 C: A = 12; M(C) = 12 u
 O: A = 16; M(O) = 15,9949 u

2.1.2 Loschmidtzahl

Bestimmung:

a) Verdampfungsenergie

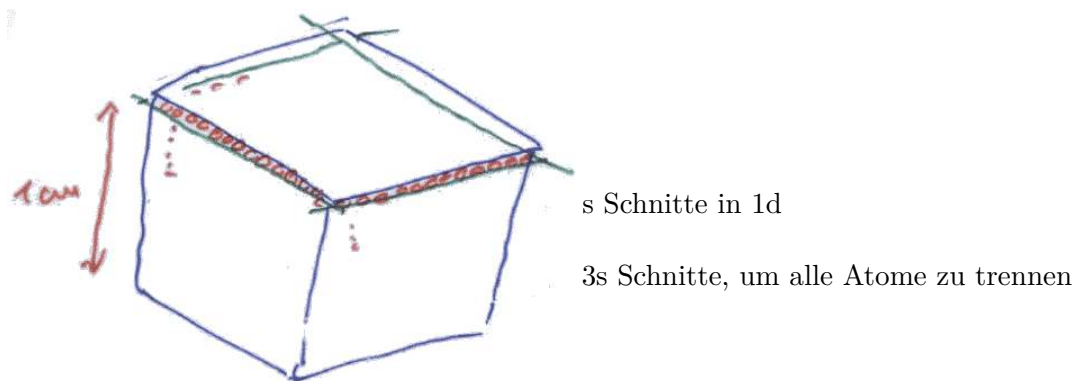


Abbildung 2.1: Verdampfungsenergie

Benötigte Energie: $E_V = 3 \cdot s \cdot 2E_0$

E_V Verdampfungsenergie

E_0 Oberflächenenergie

Atome/cm³ : $N = s^3 = \left(\frac{E_V}{6E_0}\right)^3$

Beispiel Wasser: $1 \text{ mol} = 18 \text{ g}$
 $E_V = 2,3 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{cm}^3}$
 $E_0 = 7,3 \cdot 10^{-6} \frac{\text{J}}{\text{cm}^2}$

$$\Rightarrow N_L = N \cdot V = \left(\frac{E_V}{6E_0}\right)^3 \cdot 18 \text{ cm}^3 \approx 10^{24}$$

$$\text{auch } s = 5,15 \cdot 10^7 \frac{1}{\text{cm}^3}$$

$$d_{H_2O} = 1,9 \cdot 10^{-8} \text{ m}$$

b) kinet. Gastheorie

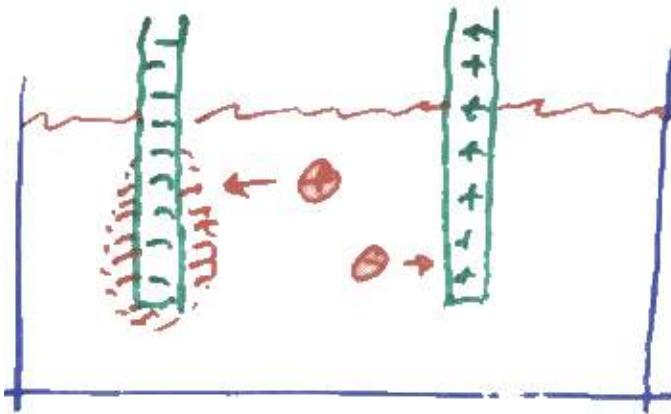
$$\text{Zustandsgleichung: } p \cdot V = n \cdot R \cdot T = n \cdot N_L k \cdot T$$

$$R = 8,3 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}} \text{ Gaskonstante}$$

$$k = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}} \text{ Boltzmannkonst.}$$

$$\Rightarrow N_L = \frac{R}{k} \approx 6 \cdot 10^{23}$$

c) Elektrolytische Abscheidung



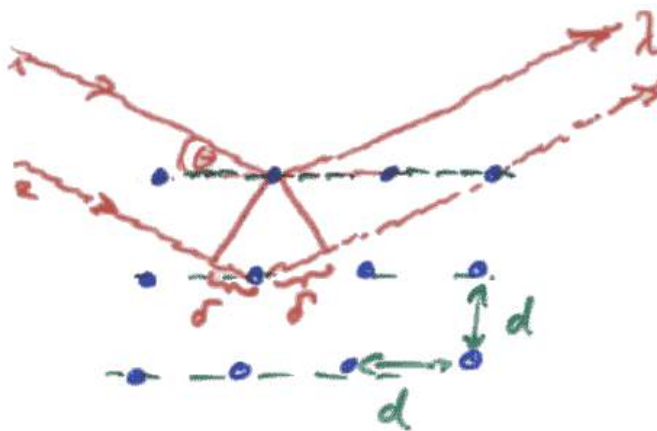
Beobachtung:
 Masse der Ablagerung
 $\propto I \cdot t$
 $\propto Q$

Abbildung 2.2: Elektrolyse

Für einwertige Elemente:

$$1 \text{ Mol braucht } Q_F = 96485 \text{ C mit } e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C} \Rightarrow N_L = \frac{Q_F}{e}$$

d) Röntgenbeugung in Kristallen



Strahl 2 hat
 2δ längeren
 Weg als Strahl 1

Abbildung 2.3: Röntgenbeugung

$$\left. \begin{array}{l} \text{Interferenz bei} \\ 2\delta = 2 \cdot d \sin \theta \\ = n \cdot \lambda \end{array} \right\} \text{ Braggsche Beziehung}$$

$$\Rightarrow d = \frac{n \cdot \lambda}{2 \sin \theta}$$

2.1.3 Größe von Atomen

- a) Röntgenstreuung (s. o.)
 b) Streuung $\rightarrow$ Wirkungsquerschnitt
 Streuung Teilchen 1 an Teilchen 2

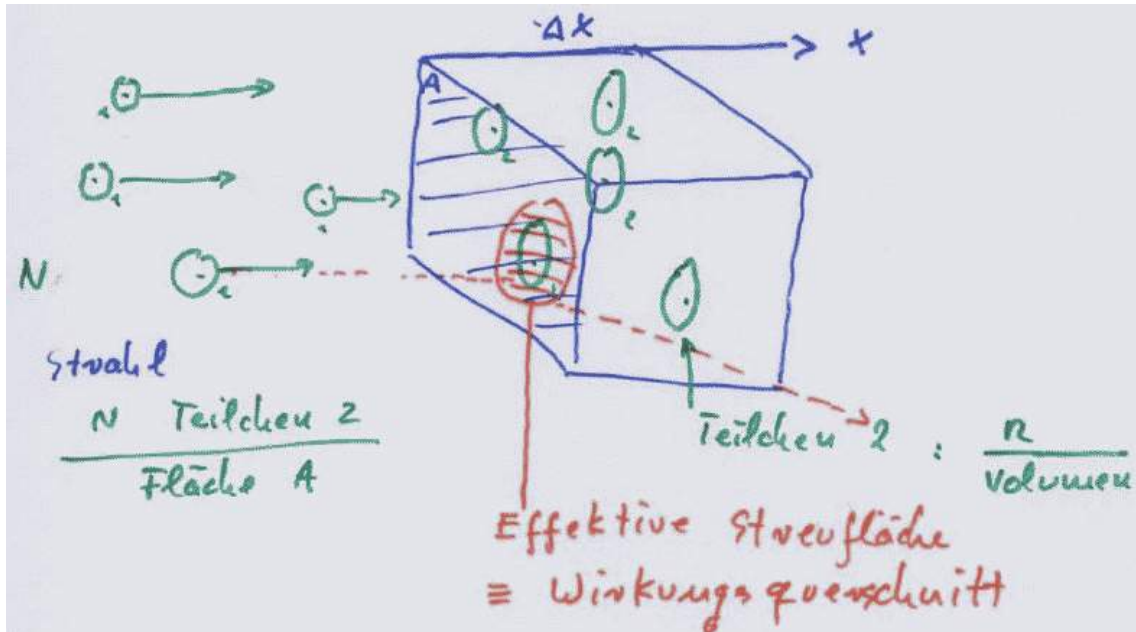


Abbildung 2.4: Röntgenstreuung

Wahrscheinlichkeit, dass ein Strahlteilchen im Volumen $\Delta V = A \cdot \Delta x$ streut:

$$W = \frac{\text{Gesamtfläche}}{A} = \frac{n \cdot \Delta x \cdot A \cdot \sigma}{A}$$

Rate der gestreuten Strahlteilchen

$$\Delta N = N \cdot W = N \cdot n \cdot \sigma \cdot \Delta x$$

$$\frac{DN}{N} = -m \cdot \rho dx$$

$$\Rightarrow \underline{N(x) = N \cdot e^{-m\rho x}}$$

Aus $N(x), x, m \rightarrow \rho$
 $\rightarrow$ Atomradius Anwendung in Molekül-, Kern- und Teilchenphysik.

- c) kann man Atome sehen?
 Auflösungsvermögen $d > \lambda$

Licht :	$\lambda = 5000 \text{ \AA} \gg 1 \text{ \AA} (d_{\text{Atom}})$	geht nicht
x-Ray:	$\lambda \sim 1 \text{ \AA} \approx d$	schwierig
Elektronenstrahlen:	$\lambda_{\text{el}} = 0,037 \text{ \AA}$ für 100 keV	geht

2.2 Elementarladung, Spezifische Ladung

2.2.1 Quantelung der Ladung

- a) Faraday (1833) : Abscheidung durch Elektrolyse

$$n \cdot Q_F = n \cdot 96\,485\text{ C} = n \cdot N_L \cdot e$$

$n = 1, 2 \dots$ Wertigkeit

Verschiedene Atome, Moleküle

immer ganze Vielfache von Q_F je Mol.

$$\Rightarrow e = \frac{Q_F}{N_L}$$

b) Millikan (1911) : Geschwindigkeit von Öltröpfchen im Feld E

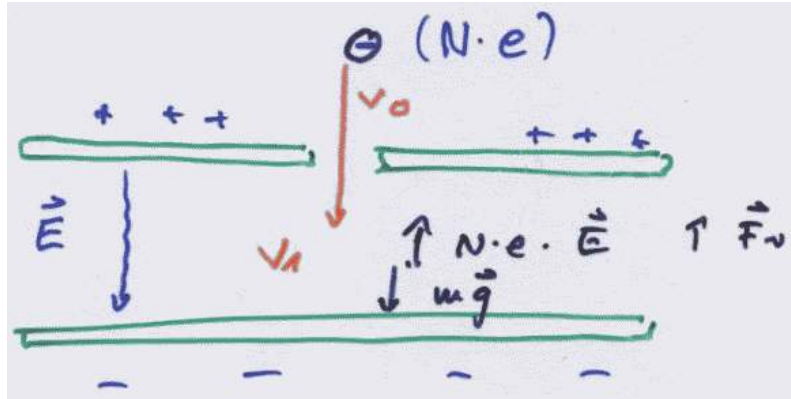


Abbildung 2.5: Millikan-Versuch

(r : Radius des Tröpfchens)

a) Ohne El. Feld:

$$\begin{aligned} m \cdot g &= \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot (\rho_{\text{Öl}} - \rho_{\text{Luft}}) \cdot g \\ &= 6\pi\eta \cdot r \cdot v_0 \\ \eta &: \text{Viskositätskonstante} \end{aligned}$$

Messung von v_0 : r

c) Mit El. Feld:

$$\begin{aligned} mg \cdot q \cdot E &= 6\pi\eta r v_1 \\ \text{Messung von } v_1, E : q &= N \cdot e \\ e &= 1,602 \cdot 10^{-19}\text{ C} \end{aligned}$$

2.2.2 Spezifische Ladung $\frac{e}{m}$

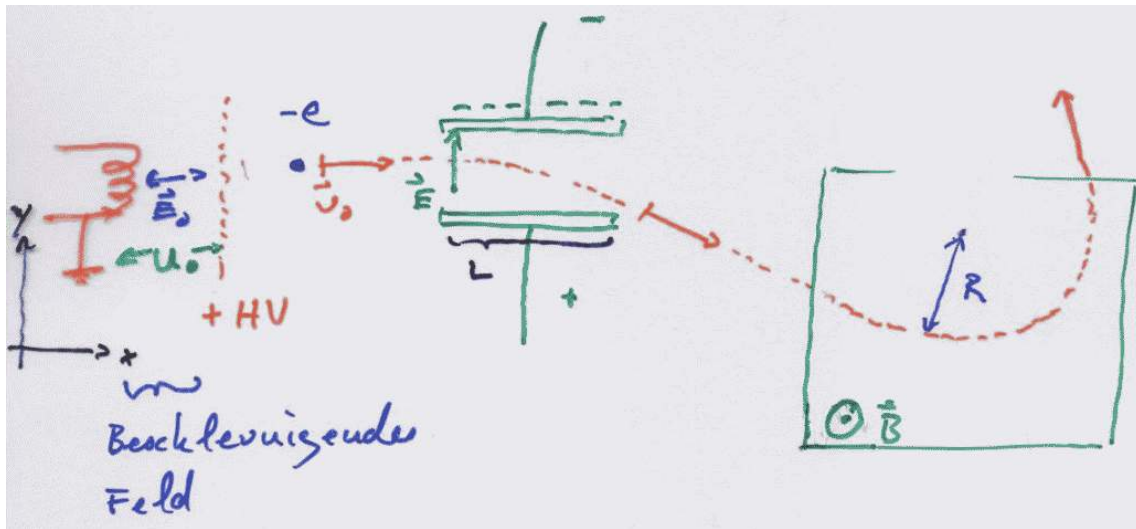
$$\begin{aligned} \text{Lorenzkraft } \vec{F} &= -e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \text{Für Elektronen} \\ &= m \frac{d\vec{v}}{dt} \end{aligned}$$

a) Ablenkung im homogenen $\vec{E}$ Feld:

$$\text{Parabel: } y(t) = -\frac{e}{m} \frac{E}{2} t^2$$

$$x(t) = v_0 t$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \text{nach } x = L : \quad y &= -\frac{e}{m} \frac{h}{2} \frac{L^2}{v^2} \\ &\Rightarrow v \end{aligned}$$

Abbildung 2.6: $\frac{e}{m}$ Bestimmung

b) Ablenkung im B-Feld:

$$\begin{aligned}
 \text{Kreisbahn: } F &= e \cdot v_0 \cdot B &= m \frac{v^2}{r} \\
 &\text{Lorenzkraft} && \text{Zentripetalbesch.} \\
 &\equiv \text{Zentripetalkraft} \\
 &\Rightarrow \frac{e}{m} = \frac{v}{r \cdot B} \\
 \frac{e}{m} &= 1,7588 \cdot 10^{11} \frac{\text{C}}{\text{kg}} \text{ Für Elektronen} \\
 \Rightarrow m_e &= 9,81 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \\
 &\hat{=} 5,5 \cdot 10^{-4} \text{ u} \\
 &\hat{=} \frac{1}{2000} m_P
 \end{aligned}$$

a) Mit dieser Methode 1920 Isotope gefunden (... C^{12} , C^{14} ...)

b) Relativistische Effekte:

$$\begin{aligned}
 \text{Für } U_0 &\approx 0V : \frac{e}{m} = 1,76 \cdot 10^{11} \frac{\text{C}}{\text{kg}} \\
 U_0 &\approx 500kV : \frac{e}{m} = 0,88 \cdot 10^{11} \frac{\text{C}}{\text{kg}} \\
 U_0 &\approx 1500kV : \frac{e}{m} = 0,44 \cdot 10^{11} \frac{\text{C}}{\text{kg}}
 \end{aligned}$$

Kaufmann 1902:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (\text{Einstein } E = m_0 c^2 \text{ 1905})$$

Zur Erinnerung:

$$\begin{aligned}
 P_\mu P^\mu &= p^2 = (m_0 c^2)^2 \\
 &= E^2 / c^2 - \vec{p}^2 \\
 &= (\gamma m_0)^2 c^2 - \vec{p}^2
 \end{aligned}$$

2.2.3 Einheiten

1	eV	Kin. Energie einer Ladung, beschleunigt in $U = 1V = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$
1	keV	Röntgenstrahlung
1	MeV	β Zerfall
1	GeV	Erzeugung von Hadronen
1	TeV	SUSY, Higgs
1	PeV	Höhenstrahlung

$m_e =$	$511 \text{ keV}/c^2$
$m_p =$	$938,3 \text{ MeV}/c^2$
$m_u =$	$939,6 \text{ MeV}/c^2$
$m_Z =$	$91,2 \text{ GeV}/c^2$
$m_{\text{Zeichenkennichnicht,vielleichttopQuark}} =$	$171 \text{ GeV}/c^2$

2.3 Struktur der Atome

Gasttheorie: Atome erscheinen als "feste" Kugeln

2.3.1 Streuexperimente

1. Absorption im dicken Streukörper (Target)

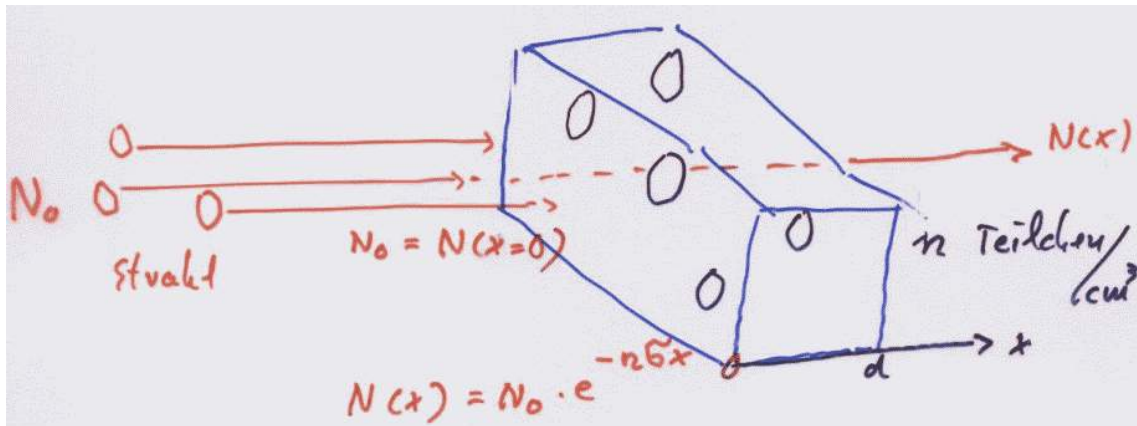


Abbildung 2.7: Streuexperimente

$$N(x) = N_0 \cdot e^{-n\sigma x}$$

σ Wirkungsquerschnitt [in cm^2 oder $\text{barn} \equiv 10^{-24} \text{ cm}^2$]

λ : Mittlere freie Weglänge: $\lambda = \frac{1}{n \cdot \sigma}$
 $N(\lambda) = N_0 e^{-1}$

2. Dünne Streukörper ($d \ll \lambda$)

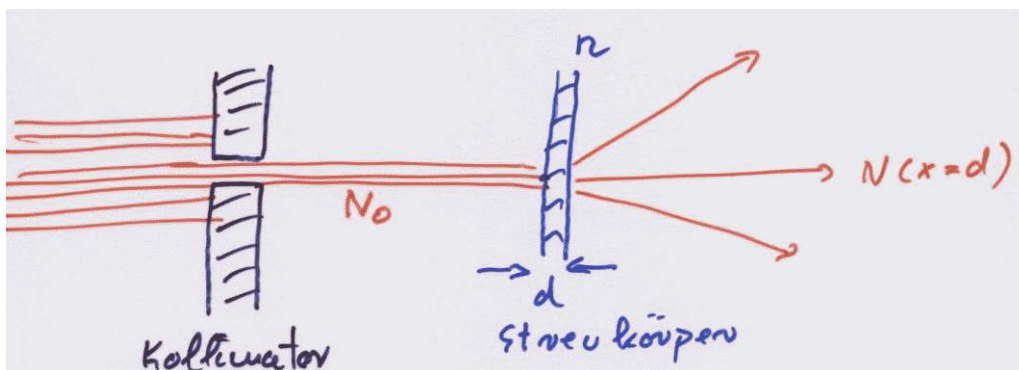


Abbildung 2.8: Dünne Streukörper

a) Messen $N_0, N(d) \Rightarrow \sigma = \frac{N_0 - N(d)}{N_0 \cdot n \cdot d}$
 $(e^{-\epsilon} \approx 1 - \epsilon)$

b)

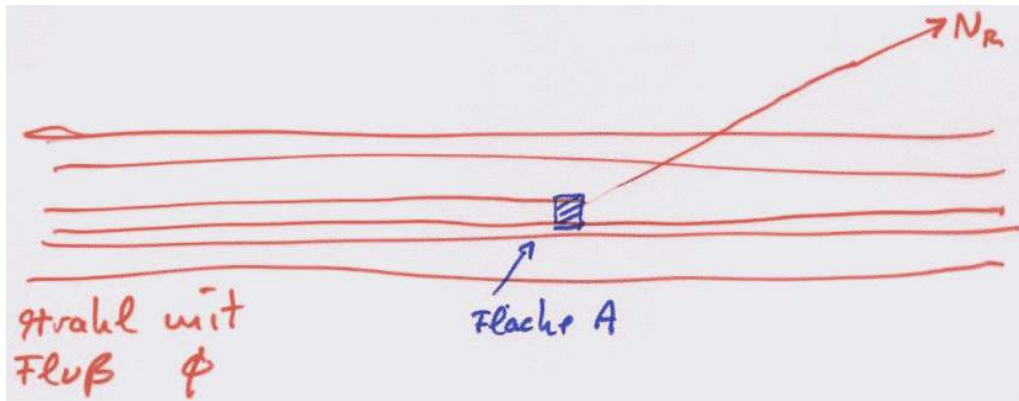


Abbildung 2.9: Dünne Streukörper

$$\text{Messen } \phi, N_Z \Rightarrow \sigma = \frac{N_R}{\phi \cdot A \cdot n \cdot d}$$

3. Differentieller WQ

a) Raumwinkelstreuung

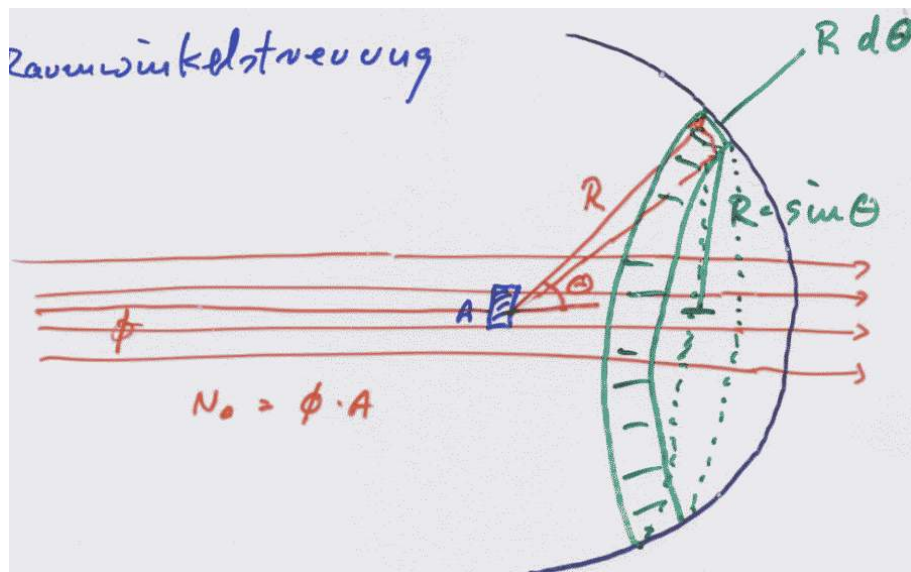


Abbildung 2.10: Raumwinkelstreuung

$$\begin{aligned} \text{Mit } \frac{dN_R}{d\Omega} & \quad \text{Rate gestreuter Teilchen im Raumwinkelement } d\Omega \\ d\Omega &= 2\pi \sin \Theta d\Theta \\ \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{dN_R}{d\Omega} \cdot \frac{1}{N_0 \cdot n \cdot d} \end{aligned}$$

b) Anderes Beispiel

$$\frac{d\rho}{dE} \dots (\text{Bs. Rutherford: } \sim \frac{1}{E^2})$$

2.3.2 Bestimmung atomarer Strukturen

1. Versuch von Lenard (ca. 1890)

Beobachtung: e^- durchqueren 10^4 Atomlagen und Luft; werden nur selten gestreut.

Falls Atome feste Kügelchen: erwarte volle Absorption [$\lambda_{Luft} \sim 10^{-5} \text{ cm}$]

Qualitativ:

Fluoreszenzlicht zeigt, dass es $e^- 10^4$ Atomlagen und einige cm Luft durchqueren

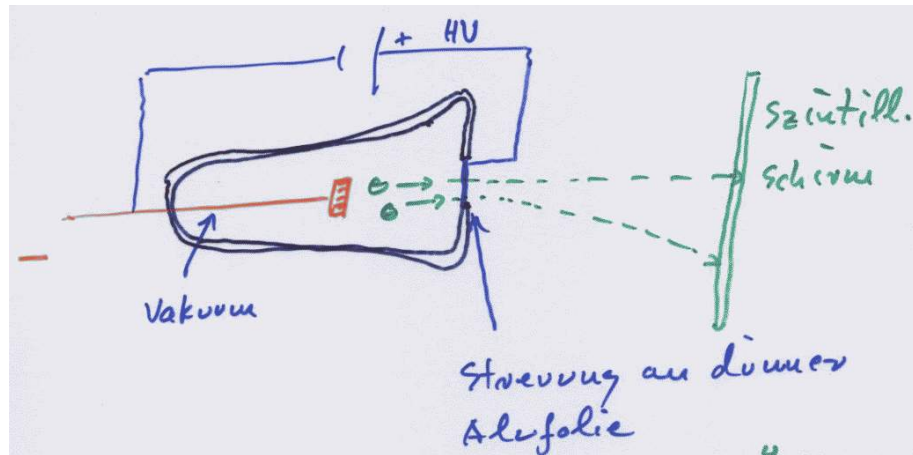


Abbildung 2.11: Versuch von Lenard

können. Wenn Atome für e^- undurchdringlich wären (feste Kügelchen) würde Streuung auf Größenordnung der kin. freien Weglänge ($\lambda_{ges} 10^{-5}$) erfolgen.

Quantitativ:

Messung des WG's über den Schirm.

Lenard: „Das Innere des Atoms ist so leer wie das Weltall“

2. Versuch von Rutherford (1911-1913)

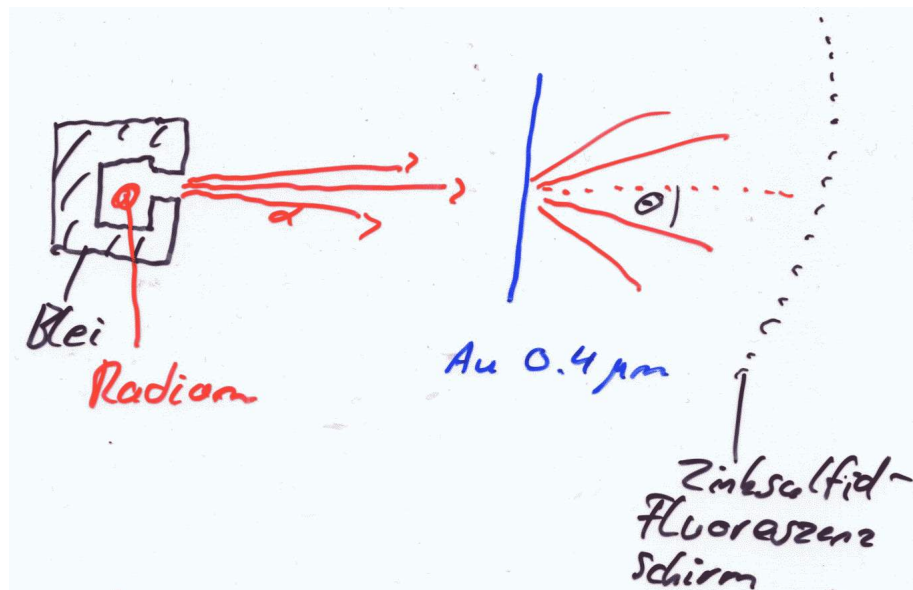


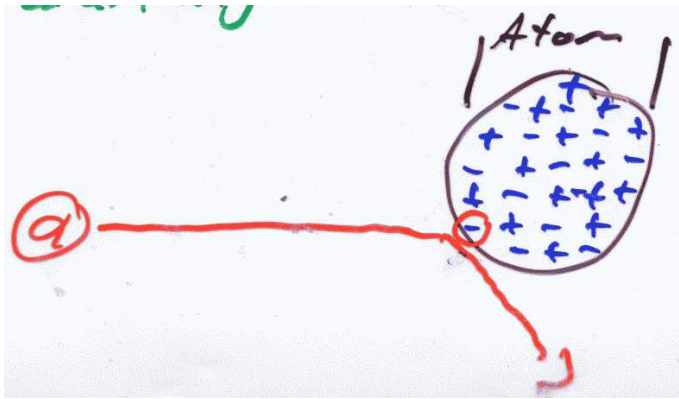
Abbildung 2.12: Rutherford Streuung

Streuung von α - Teilchen (${}^4_2\text{He}$ - Kerne) an Goldfolie

Beobachtung: Die meisten α - Teilchen gingen wenig abgelenkt durch Folie, einige wenige aber unter großen Winkeln $P(90^\circ) \sim 10^{-4}$

Wie kann das sein?

Erwartung nach Thomson (Abb. 2.13):



2 Möglichkeiten:

- i) Streuung von α an e^-
- ii) Streuung an geladener Kugel

Abbildung 2.13: Thomsonstreuung

- i) Streuung von α an e^-

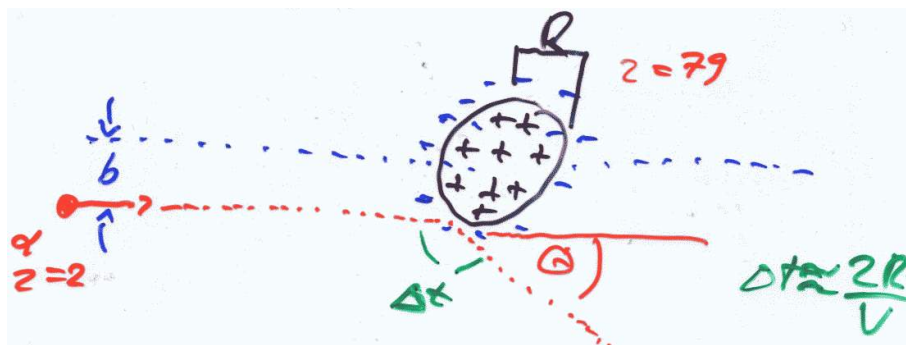


Abbildung 2.14: Rutherford Streuung

Zentraler Stoß:

$$\begin{aligned}
 \Delta E &= m_\alpha(v - v') &= m_e v_e & (I) \\
 \Delta E &= \frac{m_\alpha}{2}(v^2 - v'^2) &= \frac{m_e}{2}v_e^2 & (II) \\
 (I : II) & \quad \frac{1}{2}(v + v') &= \frac{1}{2}v_e \\
 \Rightarrow m_\alpha(v - v') &= m_e(v + v') & \text{(eliminiere } v_e) \\
 & \Leftrightarrow v' = v \left(\frac{m_\alpha - m_e}{m_\alpha + m_e} \right) \\
 \Rightarrow \Delta v &= v - v' = v \left(1 - \frac{m_\alpha - m_e}{m_\alpha + m_e} \right) = \frac{v 2m_e}{m_\alpha + m_e} \\
 \Rightarrow \theta_{max} < \frac{\Delta P}{P} = \frac{\Delta V}{V} = \frac{2m_e}{m_\alpha + m_e} &= 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \\
 &= 0,01^\circ \quad \text{Widerspruch}
 \end{aligned}$$

- ii) Streuung an geladener Kugel



Für $b > R$: $F_C = 0$ (Kugel elektr. neutral)

Für $b \leq R$: $F_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2e \cdot 79e}{R^2}$

$$\frac{dp}{dt} = F$$

$$\Delta p = F \cdot \delta t = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2e \cdot 79e}{R^2} \frac{2R}{V}$$

$$\begin{aligned} \theta_{max} &< \frac{\Delta P}{P} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2 \cdot 79e^2}{R^2} \frac{2R}{V} \frac{1}{m_e V} \\ &= 1,8 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \\ &\quad \downarrow \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Thomsonsches Atommodell ist falsch.

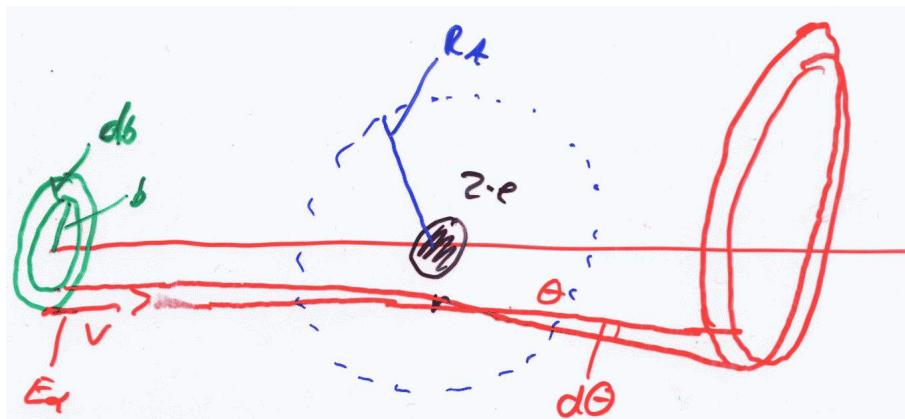
$$\Theta_{max} < \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \underbrace{\frac{4 \cdot 79 \cdot e^2}{R}}_{!} \frac{1}{m_e v^2}$$

$\Rightarrow$ Große Θ_{max} nur wenn $R \ll R_{max}$

$\Rightarrow$ D. h. positive Ladung muss auf viel kleineren Radius verteilt sein!

Bsp: Radius für $\Theta_{max} = 1 \text{ rad}$

$$\frac{R}{R_u} = \frac{1,8 \cdot 10^{-4} \text{ rad}}{1 \text{ rad}} \Rightarrow R \approx 5 \cdot 10^{-14} \text{ m}$$



α mit Stoßparameter $b \dots b + db$ werden in den Raumwinkelbereich $d\Omega$ gestreut.

$$\frac{db}{d\Omega} = \left(\frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \cdot \frac{1}{18 \sin^4 \frac{\Theta}{2}} \cdot \frac{1}{E_\alpha^2} \sim \frac{1}{v^4}$$

Diskussion:

Energiebilanz:

$$E_\alpha = \frac{1}{2} m_\alpha v^2 + \sigma = \frac{1}{2} m_\alpha v^2(r) + \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 v}$$

Für zentralen Stoß:

$$v(r_{min}) = 0$$

$$\Rightarrow E_{\alpha} = \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 v_{min}} \Rightarrow r_{min} = \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 E_{\alpha}}$$

Bsp: 5 MeV α ; $Z_{Au} = 79$; $Z_{He} = 2$

$$\Rightarrow r_{min} = 5 \cdot 10^{-14} \text{ m} > r_{Au}$$

8 MeV α stoßen nicht auf Kern, da $r_{min} > r_{Au}$

$$r_{Kern} = 1,3 \cdot A^{\frac{1}{3}} \text{ fm}$$

3. Experimentelle Ergebnisse

Sogar α -Teilchen von 8 MeV & Streuwinkel von 180° zeigen keine Abweichung

$$\Rightarrow \text{äquivalent } b = 6 \cdot 10^{-15} \text{ m}$$

$\Rightarrow$ Das Coulombgesetz wird auch bei sehr kleinen Stoßparametern eingehalten

$$\Rightarrow \text{Der Kernradius} < 6 \cdot 10^{-15} \text{ m}$$

Aber: anomale Rutherford Streuung:

schnelle α -Teilchen ($E > 6 \text{ MeV}$) und große Streuwinkel (kleine b /fast zentrale Stöße / liefern Abweichungen von der Rutherford Formel.

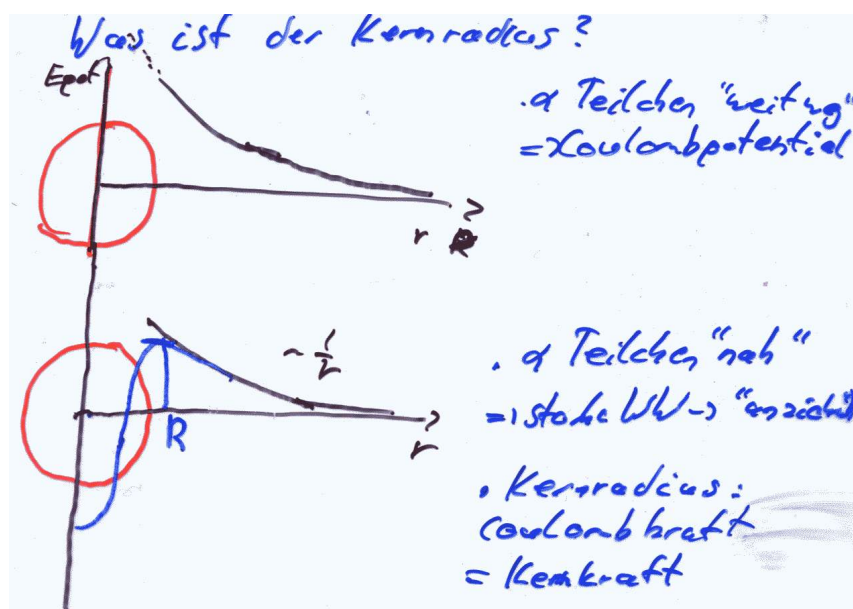
$\Rightarrow$ Coulombgesetz gilt nicht mehr

α -Teilchen kommen so nahe an Kern, dass eine andere, kurzreichweitige, Kraft bedeutend wird: starke WW

NB: Kerngröße $R \cong 10^{-15} \text{ m} = 1 \text{ fm}$

$\Rightarrow$ Dichte des Atomkerns um Faktor 10^{15} größer als Dichte des Atoms

Was ist der Kernradius?



Empirisch durch energetische α -Teilchen bestimmt:

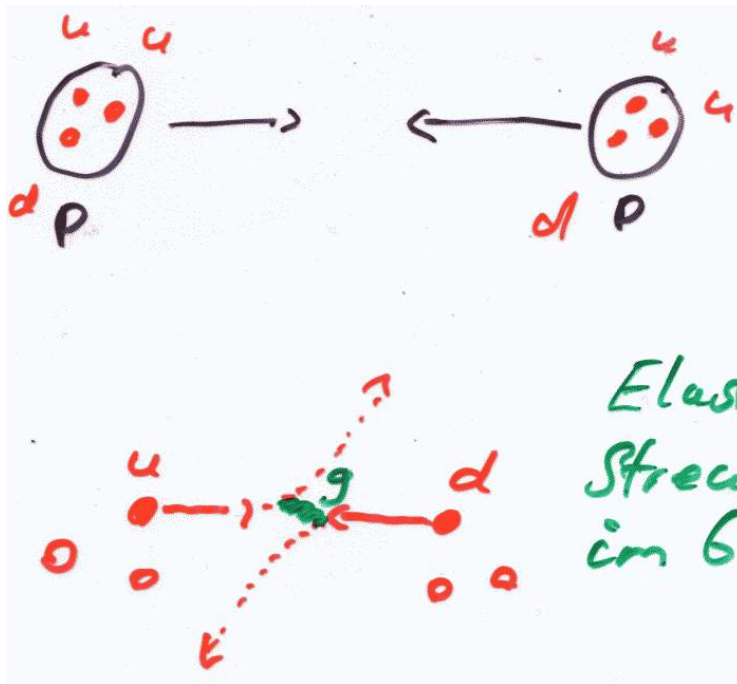
$$R = (1,3 \pm 0,1) A^{1/3} 10^{-15} \text{ m}$$

$$A = 12R({}_6^{12}\text{C}) = 2,7 \cdot 10^{-15} \text{ m}$$

$$A = 208R({}_8^{208}\text{Pb}) = 7,1 \cdot 10^{-15} \text{ m}$$

Die Relation zwischen Kernmasse(A) und Kernradius(R) impliziert, dass die Dichte der Kernmaterie konstant ist und unabhängig von der KerngröÙes ist.

Anwendung: Die GröÙe der Quarks



Elastische ("Rutherford")
Streuung zweier Quarks im
Gluonenfeld.

Am Fermilab und jetzt LHC: elastische Streuung an "Coulombartigen" Potential bis $r \sim 10^{-19} \text{ m}$.

3. Bohrsche Atommodell

3.1 Das optische Spektrum von Atomen

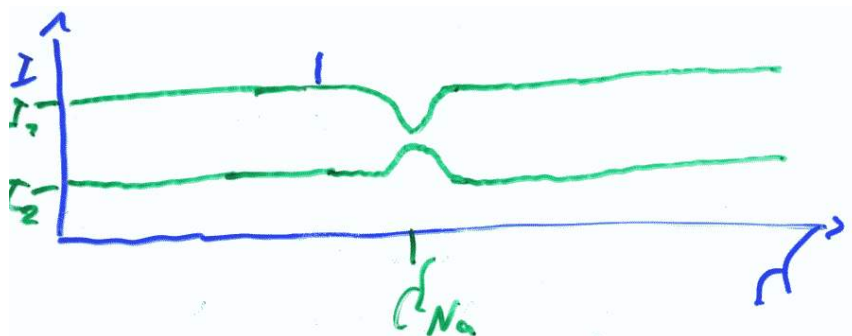
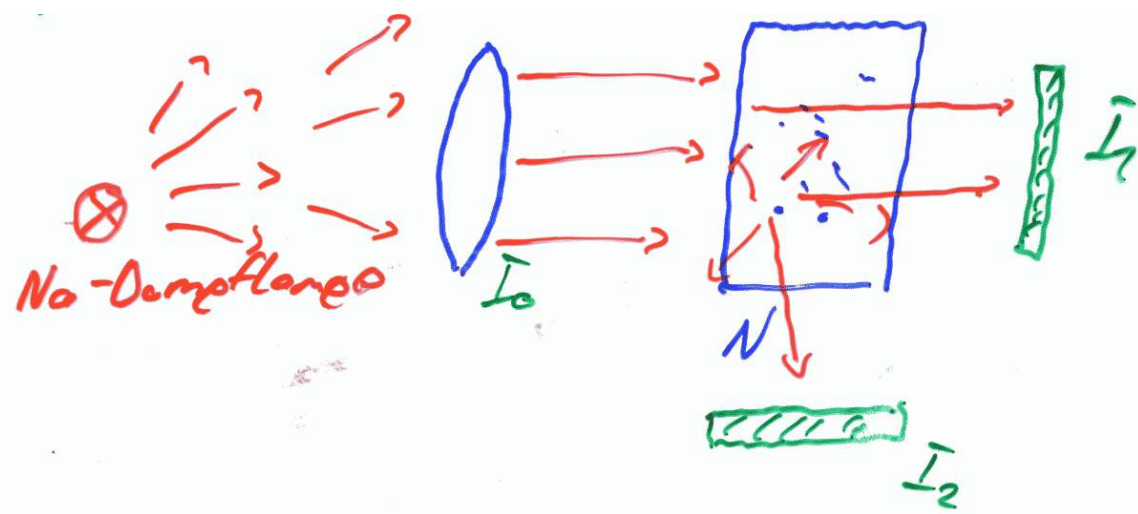
3.1.1 Beobachtung

Atome absorbieren und emittieren Licht mit diskreten Wellenlängen

⇒ Linienspektrum

[Kirchhoff und Bunsen 1850]

a) Resonanzfluoreszenz von Na Dampf



⇒ Na-Atome emittieren und absorbieren Licht einer bestimmten Wellenlänge.

b) Wasserstoffspektrum

3 charakteristische Linien im sichtbaren Bereich:

6563 Å, $H_\alpha \leftarrow$ 1833 von Angström

4861 Å, H_β

4340 Å, H_γ



Abbildung 3.1: Balmer Serie

Balmer (1885): Wellenlängen lassen sich durch die Relation

$$\lambda = \left(\frac{n_1^2}{n_1^2 - 4} \right) \cdot 6$$

beschreiben

n_1 : natürliche Zahl

3.1.2 Einheiten in der Spektroskopie

Wellenlänge $[\lambda] = \text{Å}$; $1 \text{ Å} = 10 \cdot 10^{-10} \text{ m} = 10^{-1} \text{ nm}$

- Messung mit Spektrometern (Fabry-Perot Interferometer)

- $\lambda_{\text{medium}} = \frac{\lambda_{\text{Vakuum}}}{n_{\text{med}}}$

Frequenz $\nu = \frac{c_{\text{med}}}{\lambda_{\text{med}}} = \frac{c}{\lambda}$

$[v] = \text{Hz} \frac{1}{s}$

Wellenzahl: $\bar{\nu} = \frac{1}{\lambda}$

$[\bar{\nu}] = \text{Kayser} = \frac{1}{\text{cm}}$ (nicht SI-System)

Energie: $E_\gamma = h\nu = \hbar\omega$

$h = 4,14 \cdot 10^{-15} \text{ eV s}$ Planck
 $= 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$

3.1.3 Wasserstoff Schema

Balmer(1885): $\bar{\nu} = R_H \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right)$

$n' \geq 1; \quad n > n'$
 e^- fällt von
 $n \rightarrow n'$

Endzustand

$n'=1$:	Lyman Serie	UV
$n'=2$:	Balmer Serie	sichtbar
$n'=3$:	Pascha	IR
$n'=4$:	Bracket	IR
$n'=5$:	Pfund	IR

R_H : Rydbergkonstante
 209677,6 / cm (exp.)
 109733,3 / cm (lit.) $m_k \rightarrow \infty$

Einschub: Exkurs in den Weltraum

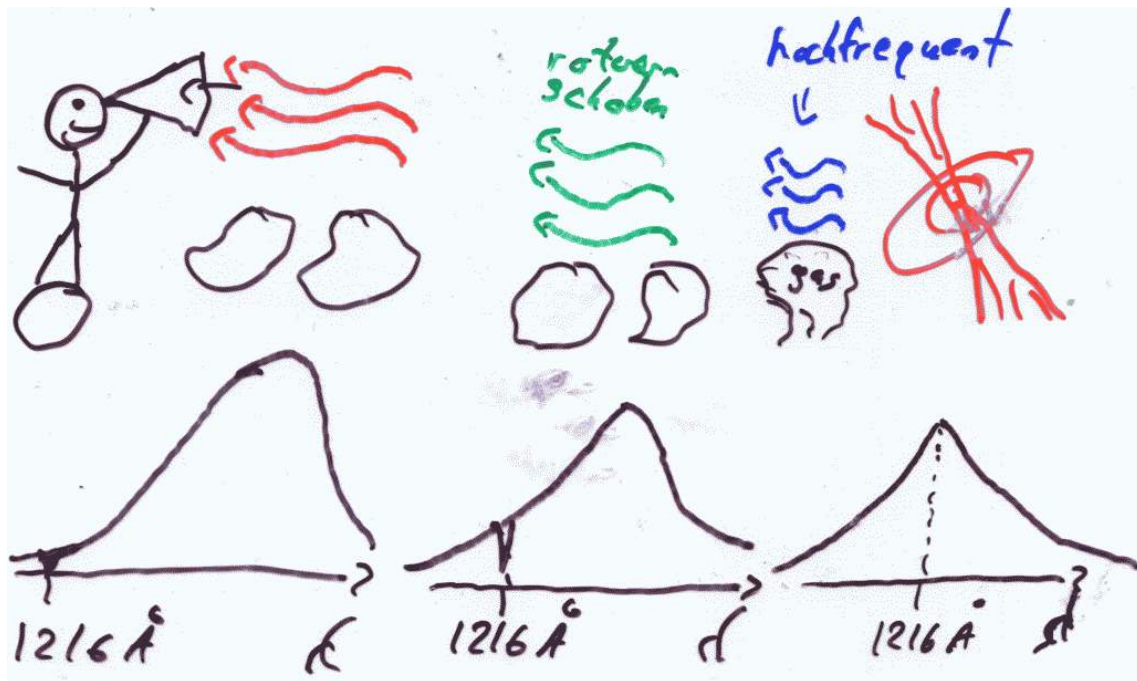


Abbildung 3.2: „Lyman - α - Forrest“

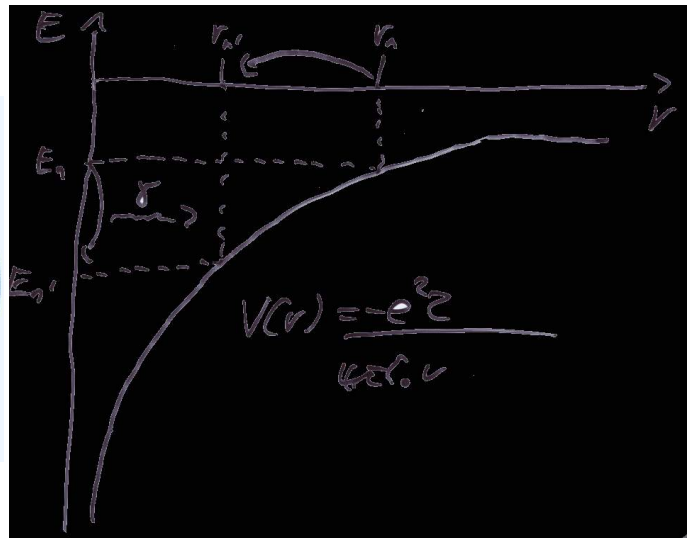
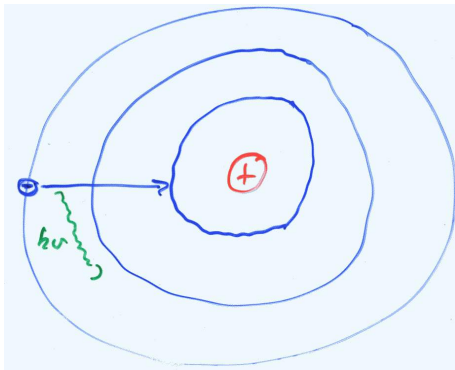
3.1.4 Bohrsche Postulate (1913)

- Atome sind aufgebaut wie Planetensysteme aber Elektronen bewegen sich auf diskreten Bahnen.

- Bahnenimpuls ist gequantelt:

$$l_n = m_e v \cdot r_n = n \frac{h}{2\pi} = n \cdot \hbar$$

- Übergänge zwischen Bahnen erfolgt durch Absorption (Emission von Lichtquanten mit $\Delta E = h\nu = E_n - E_{n'}$)



$$V(r) = \frac{-e^2 Z}{4\pi\epsilon_0 r}$$

a) Bahnradius

$$F_{\text{coul}} = F_Z$$

$$\Leftrightarrow \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_n^2} = \frac{m_e v_n^2}{r_n} \Leftrightarrow v_n^2 = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m_e r_n} \quad (1)$$

$$l_n = m_e v_n r_n = n\hbar \Leftrightarrow v_n = \frac{n\hbar}{m_e r_n} \quad (2)$$

$$\stackrel{(1)=(2)}{\Rightarrow} \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m_e r_n} = \frac{n^2 \hbar^2}{m_e^2 r_n^2}$$

$$\Leftrightarrow r_n = n^2 \frac{\hbar^2}{m_e} \frac{4\pi\epsilon_0}{2e^2} \propto n^2 \quad (3)$$

für $n=1, Z=1$: $r_1 = 0,53 \text{ \AA}$ Bohrscher Radius $\hat{=}$ Größe des H-Atoms

b) Energieniveau

$$E_n = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}}$$

$$= \frac{1}{2} m_e v_n^2 - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_n}$$

aus (1):

$$m_e v_n^2 = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_n}$$

$$\Rightarrow E_n = -\frac{1}{2} \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_n} \stackrel{(3)}{=} -\frac{1}{2} \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{n_e Ze^2}{n^2 \hbar^2 4\pi\epsilon_0}$$

$$= \underline{\underline{\frac{Z^2 e^4 m_e}{32\pi^2 \epsilon_0 \hbar^2} \frac{1}{n^2}}}$$

c) Wellenzahlen $E = h\nu = h\frac{c}{\lambda} = hc\bar{\nu}$

$$\begin{aligned}
 \bar{\nu} &= \frac{1}{hc} (E_{n'} - E_n) \\
 &= R \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right) \\
 R &= \frac{Z^2 e^4 m_e}{32 \pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2 hc} = \frac{Z^2 e^4 m_e}{8 \epsilon_0^2 h^3 c} \\
 &\approx 109\,737,3 \frac{1}{\text{cm}} \\
 c &\hat{=} 13,6 \text{ eV}
 \end{aligned}$$

d) Mitbewegung des Kerns

$$\begin{aligned}
 R_H &= 109\,677,6 \frac{1}{\text{cm}} \\
 \text{Experiment: } R_{He} &= 109\,707,4 \frac{1}{\text{cm}} \\
 &\hat{=} R
 \end{aligned}$$

$m_e \rightarrow \frac{m_e}{1 + \frac{m_e}{m_k}}$ „Reduzierte Masse“

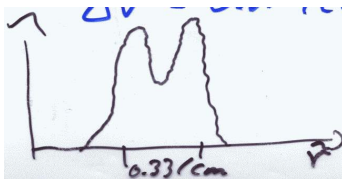
$$\Rightarrow R_H = R \cdot \frac{m_k}{m_k + m_e}$$

$\Rightarrow$ vers. Isotope des gleichen Kern haben leicht verschobene Spektrallinien

$\Rightarrow \frac{m_p}{m_e} = 1837$ (durch Spektroskopie!)

e) Sommerfeldsche Erweiterung

Beobachtung: Balmer Linien keine Einzellinien $\rightarrow$ Substruktur



$$\begin{aligned}
 H_\alpha : \bar{\nu} &= 15233/\text{cm} \\
 \Delta \bar{\nu} &= 0,33/\text{cm}
 \end{aligned}$$

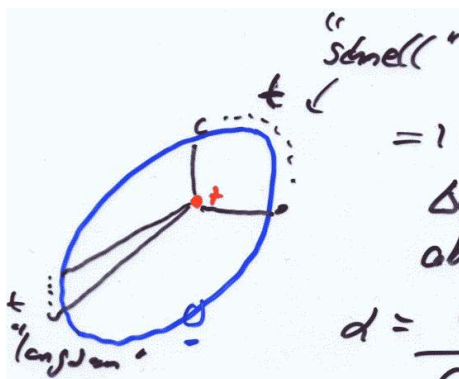
$\Rightarrow$ Hypothese: Ellipsenbahnen liefern Massekorrekturen (analog Kepler) $\nrightarrow$ falsch

Aber: 2. Quantenzahl eingeführt

n : große Halbachse

k : $k \leq n$ kleine Halbachse ($\langle \text{Rechtspfeil} \rangle l = k - 1$)

$\rightarrow$ rel. Masseänderung.



$\Rightarrow$ 1 rel. Energieänderung:

$$\Delta E \sim \alpha^2 = 10^{-5}$$

(klein, aber beobachtbar)

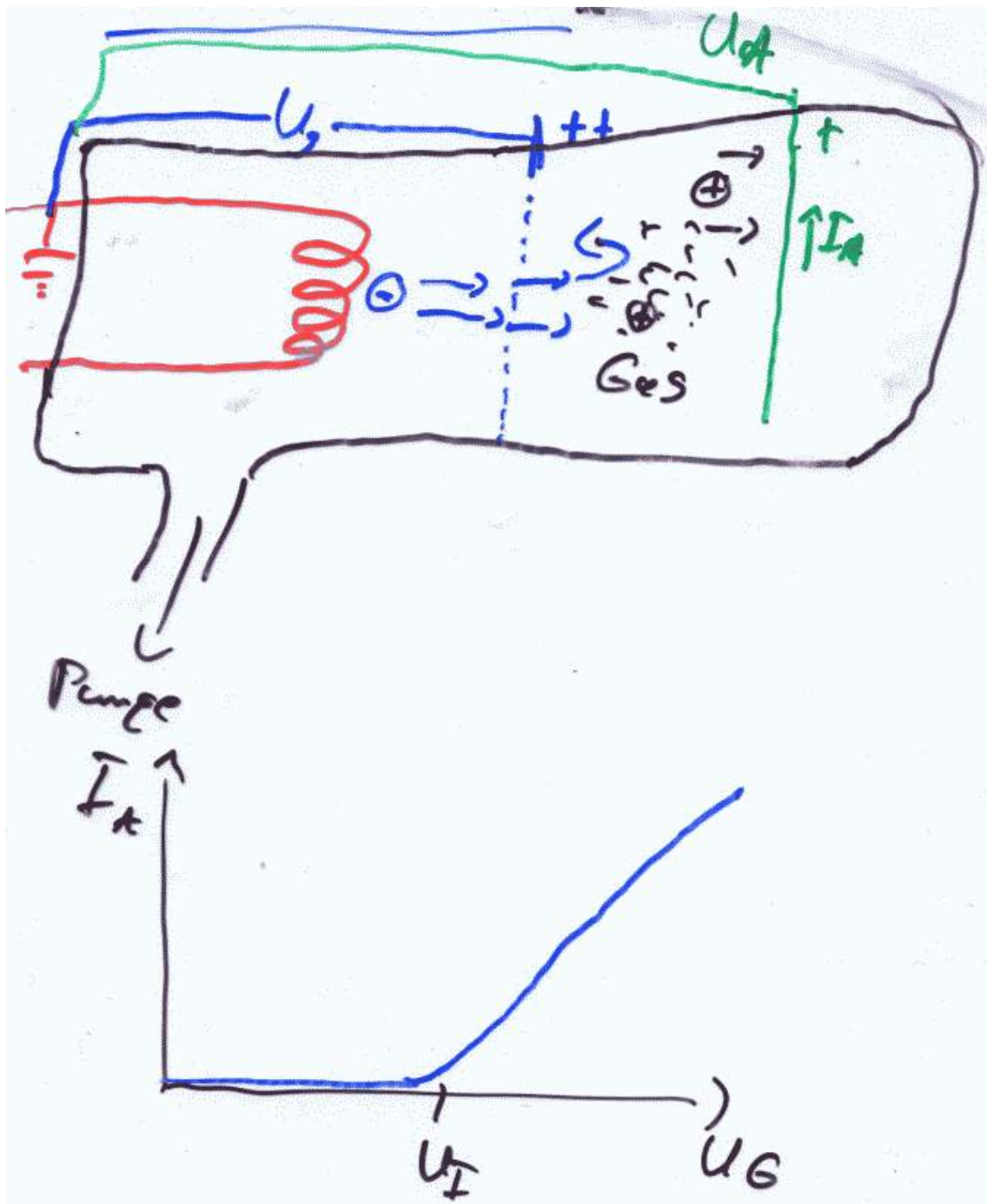
$\alpha = \frac{r_1}{a} \leftarrow$ 1. Bohr Orbit

Feinstrukturkonstante:

$$\alpha = \frac{e^2}{2\epsilon_0 hc} = \frac{1}{137}$$

$\nrightarrow$ Orbit und Spinmagnetismus

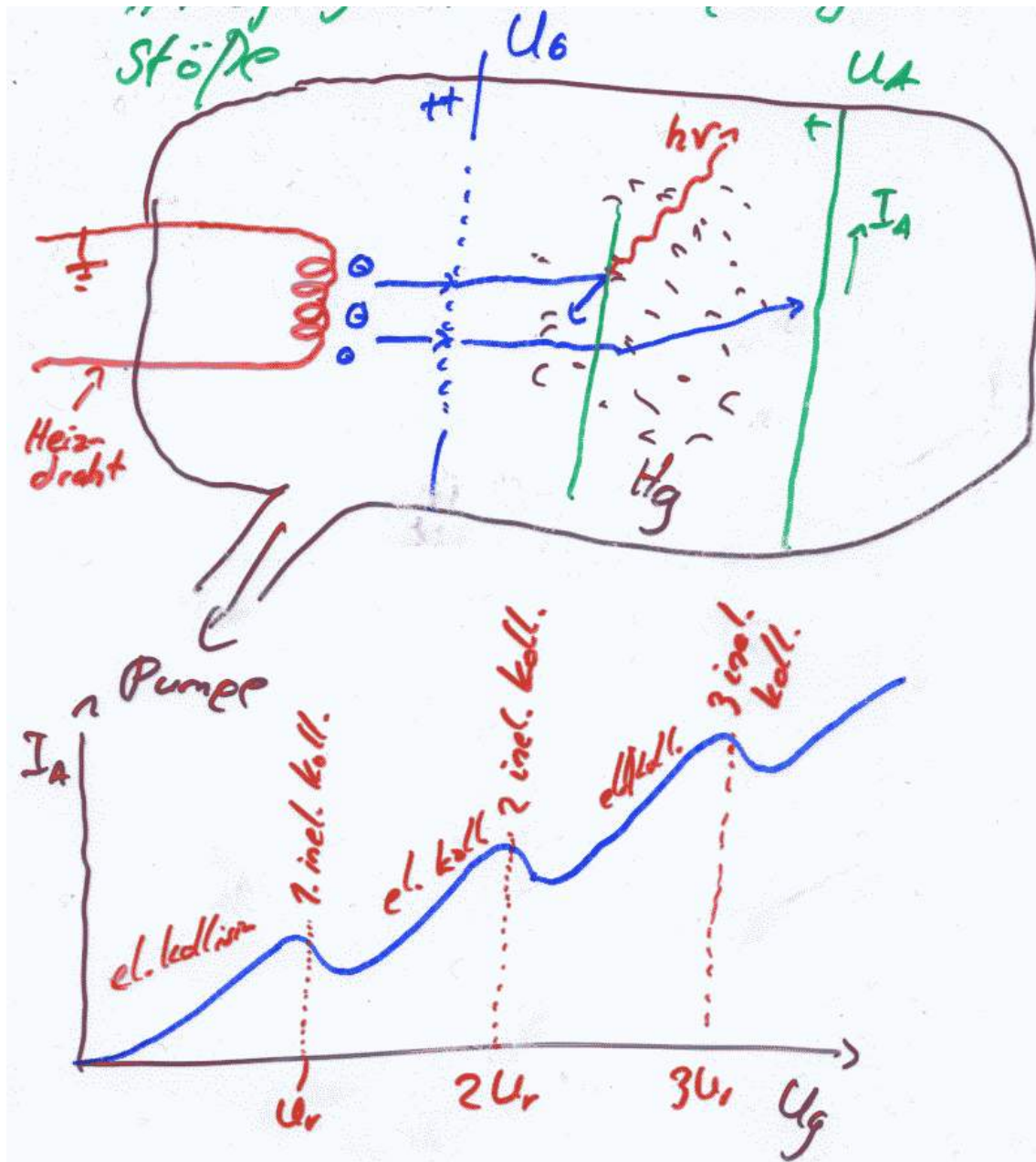
3.2 Bestimmung der Ionisationsenergie [Lenard 1902]



Ionisationsenergie: $E_{ion} = eU_I$

3.3 Franck-Hertz-Versuch (1913)

Anregung von Quantensprüngen durch Stöße



Anregungsenergie von Hg:

$$U_r = 4,85 \text{ eV} \hat{=} 2536,5 \text{ \AA}$$

4. Photonen (Quanteneigenschaften des Lichts)

Licht als Welle:

Interferenzversuche von Huygens, Young (18. Jh.)

E/M Welle: Maxwellgleichungen (1883), H. Hertz (1887)

Erzeugung von Photonen:

		ν
Schwingende Ladungen	in Antennen	$10^4 \dots 10^8 \text{ Hz}$
	in Hohlräumen	$10^8 \dots 10^{10} \text{ Hz}$
Wärmestrahlung		$10^{12} \dots 10^{15} \text{ Hz}$
Röntgenstr.	Abbremsung von Elektronen	$10^{17} \dots 10^{19} \text{ Hz}$
Synchtronstr.:	Ablenkung von Elektronen	
	im Magnetfeld	$10^{14} \dots 10^{19} \text{ Hz}$
Gammastrahlung:	Radioaktivität	
	Teilchenphysik	$> 10^{20} \text{ Hz}$

4.1 Wärmestrahlung

4.1.1 Schwarzer Strahler

a) Allgemein:

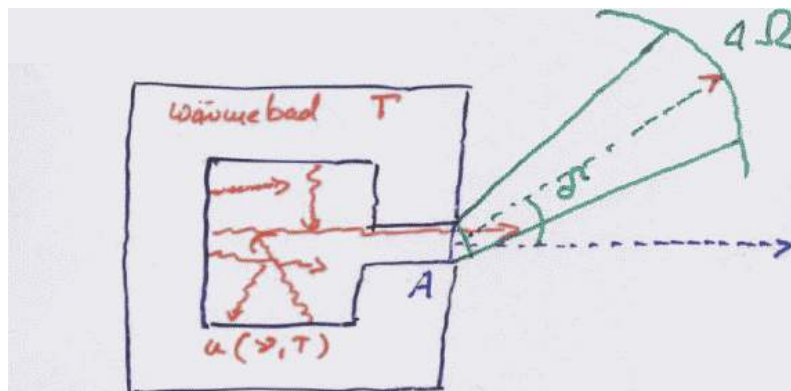


Abbildung 4.1: Der schwarze Strahler

Theorie: Energiedichte im Bereich $\nu - \nu + d\nu$:

$$u(\nu, T)d\nu = \frac{\text{Strahlungsenergie}}{\text{Volumen}} \quad (4.1)$$

Experiment: Intensität der Strahlungsleistung

$$\underbrace{2}_{*} \cdot P(\nu, T) d\nu = \frac{\text{Strahlungsleistung}}{\text{Fläche} \cdot \text{Raumwinkel}} \quad (4.2)$$

*Anzahl der Polarisationsrichtungen

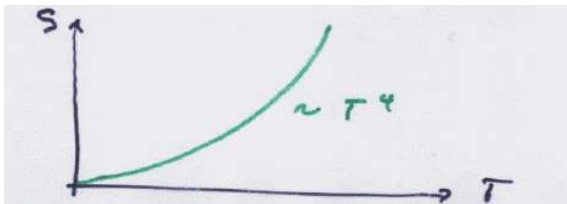
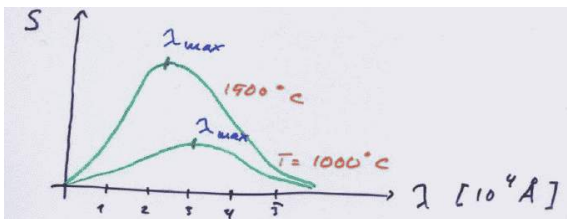
Mit $\Delta E = u(\nu, T) d\nu \cdot \underbrace{A \cdot \cos \delta c \Delta t}_{\text{durchflossenes Volumen in } \Delta t} \cdot \frac{\Delta \Omega}{4\pi}$

Strahlungsleistung:

$$\begin{aligned} P(\nu, T) &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} d\eta \sin(\eta) \cdot u(\nu, T) \cdot c \cdot \Delta t \cdot A \cdot \frac{\cos \eta}{4\pi} \frac{A \cdot \Delta t}{4\pi} \\ &= \frac{c}{8} u(\nu, T) \end{aligned} \quad (4.3)$$

b) Experimentelle Beobachtung: Strahlungsleistung:

$$S = \int_0^\infty P(\nu, T) d\nu = \underbrace{\lambda \int_0^\infty \cdot c 8 u(\nu, T) d\nu}_{\rightarrow \text{Theorie}} = \underbrace{\Sigma \cdot T^4}_{\rightarrow \text{Exp. Beobachtung}} \quad (4.4)$$

**Abbildung 4.2:** Stephan-Boltzmann-GesetzBeobachtung: Wellenlänge: $\lambda_{max} = \frac{0,29 \text{ cm K}}{T}$ Wien'sches VerschiebungsgesetzBsp.: Sonne: $T \sim 6000 \text{ K}$
 $\lambda_{max} \sim 480 \text{ nm}$ **Abbildung 4.3:** Wiensches Verschiebungsgesetz $\Rightarrow$ Formuliere Theorie zu $u(\nu, T)$ **4.1.2 Plank'sche Strahlungsformel****Klassischer Ansatz (Rayleigh, Jeans):**

$$P(\nu, T) = \frac{\nu^2}{c^2} kT \quad (4.5)$$

 $\rightarrow$ klassische Elektrodynamik**- Problem:**

$$P \rightarrow \infty \text{ für } \nu \rightarrow \infty \quad (4.6)$$

+ **Bonus:** gute Übereinstimmung mit Exp. bei kleinen ν

Planck:

$$u(\nu, T) d\nu = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \cdot \frac{d\nu}{e^{h\nu/kT} - 1} \quad (4.7)$$

Annahmen:

$$E_N = n \cdot \nu \cdot k$$

- Atome sind EM Oszillatoren mit diskreten Energiewerten
- Strahlung: stehende Wellen im Strahler mit $h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$
- Atome sind im therm. Gleichgewicht mit Strahlung

Ableitung (Interpretation) von Einstein (1917)

- Atome besitzen Energiezustände E_1, E_2
- Therm. Gleichgewicht: klassische Boltzmannverteilung

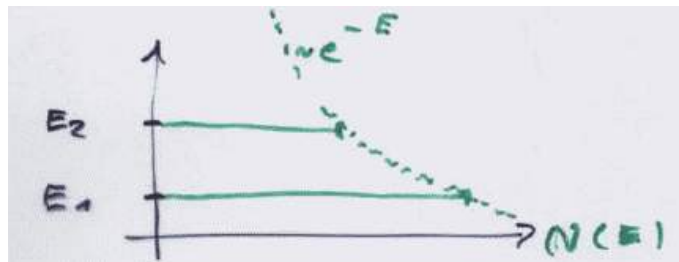


Abbildung 4.4: klassische Boltzmannverteilung mit $\frac{N_1}{N_2} = \frac{e^{-E_1/kT}}{e^{-E_2/kT}}$

- Übergänge zwischen E_1 und E_2 durch Absorption oder Emission von γ

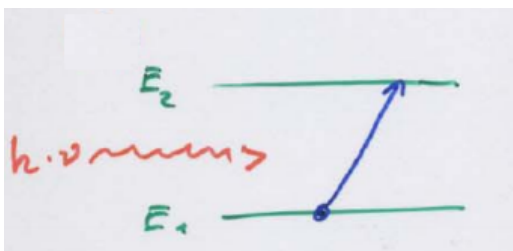


Abbildung 4.5: Absorption

i) **Absorption**

Übergangswahrscheinlichkeit B_{12}

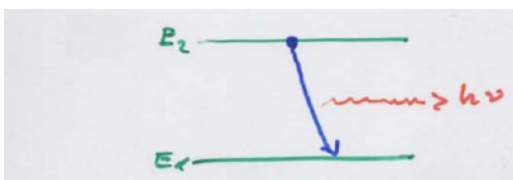
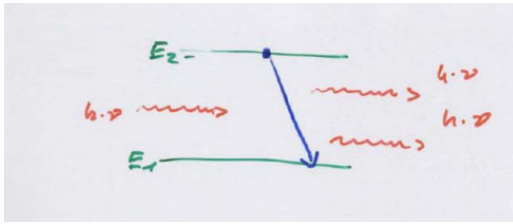


Abbildung 4.6: Emission

ii) **Spontane Emission**

Übergangswahrscheinlichkeit A_{21}


 iii) **Induzierte Emission**

 Übergangswahrscheinlichkeit B_{21}

Abbildung 4.7: induzierte Emission

 • **Übergangsraten:**

$$dN_{12} = B_{12} \cdot u(\nu, T) \cdot N_1 \cdot dt \quad (4.8)$$

$$dN_{21}^S = A_{21} \cdot N_2 \cdot dt \quad (4.9)$$

$$dN_{21}^I = B_{21} \cdot u(\nu, T) \cdot N_2 dt \quad (4.10)$$

 • **Thermisches Gleichgewicht**

$$dN_{12} = dN_{12}^S + dN_{21}^I \quad (4.11)$$

$$\Rightarrow \frac{N_2}{N_1} = \frac{B_{12} \cdot u}{A_{21} + B_{21} \cdot u} \quad (4.12)$$

$$= \frac{e^{-E_2/kT}}{e^{-E_1/kT}} \quad \text{mit: } h\nu = E_2 - E_1 \quad (4.13)$$

$$\Rightarrow u(\nu, T) = \frac{A_{12}}{B_{12} \cdot e^{\frac{h\nu}{kT}} - B_{21}} \quad (4.14)$$

 • **Randbedingungen:**

$$T \rightarrow \infty : u(\nu, T) \rightarrow \infty \quad (4.15)$$

$$\Rightarrow B_{21} = B_{12} \quad (4.16)$$

$$h \cdot \nu \ll kT : u(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} kT \quad (4.17)$$

$$\Rightarrow \frac{A_{21}}{B_{12}} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} kT \quad (4.18)$$

$$\Rightarrow u(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \quad (4.19)$$

Das ist das Plank'sche Strahlungsgesetz

 • **Test mit Stefan-Boltzman Gesetz:**

$$S = \int_0^\infty \frac{c}{4} u(\nu, T) d\nu = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2 h^3} T^4 \quad (4.20)$$

$$\left[\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{1}{15} \pi^4 \right] \quad (4.21)$$

4.2 Photoeffekt (Hallwachs 1888)

 Befreiung von e⁻ durch Licht aus Stoffen

 a) **Entladung eines Elektrometers:**

 b) **Quantitative Messung des Photoeffekts**

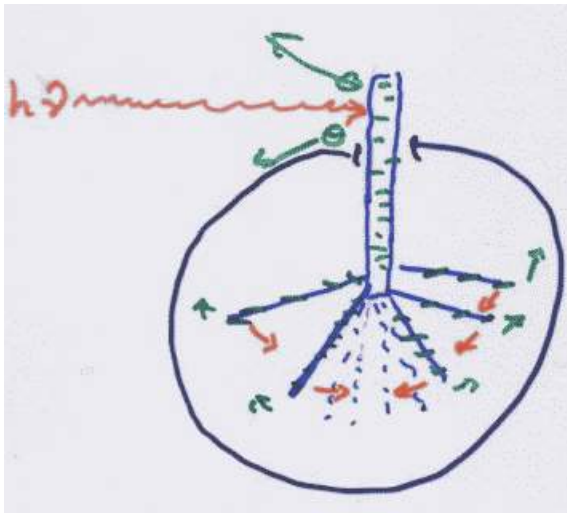


Abbildung 4.8: Oberhalb bestimmter Frequenz: negative Platte entlädt sich

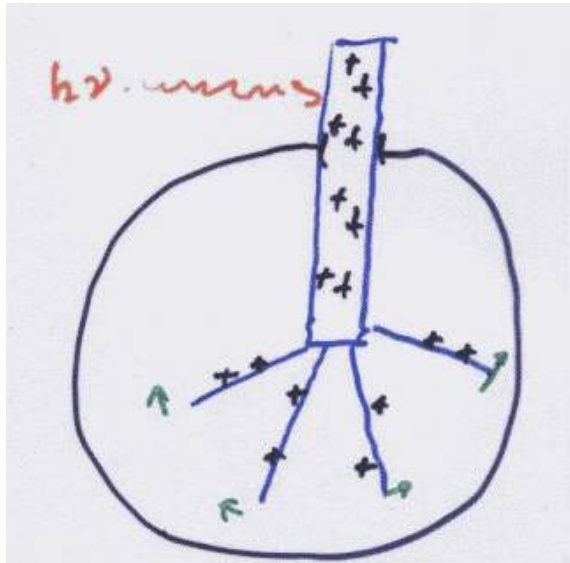


Abbildung 4.9: Hier passiert nichts!

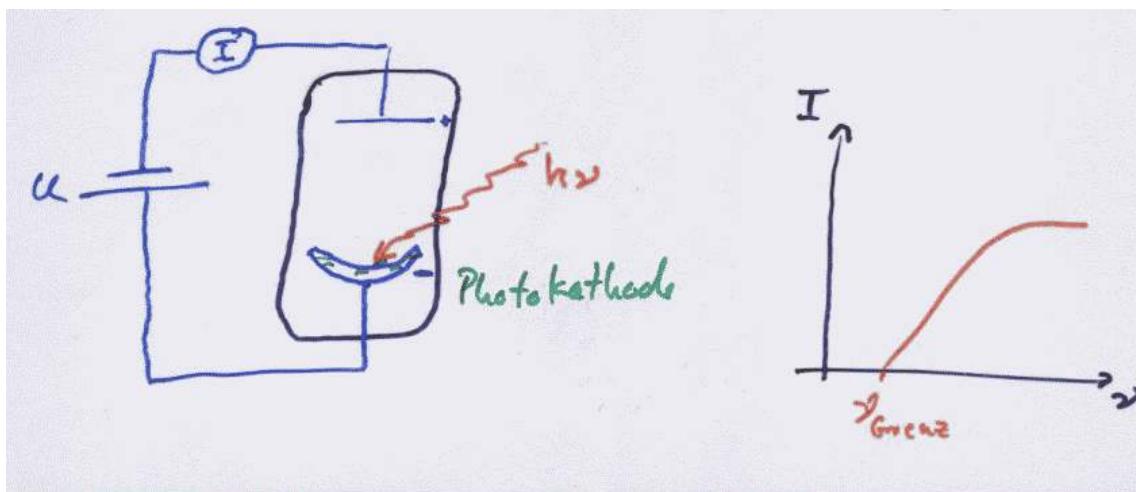


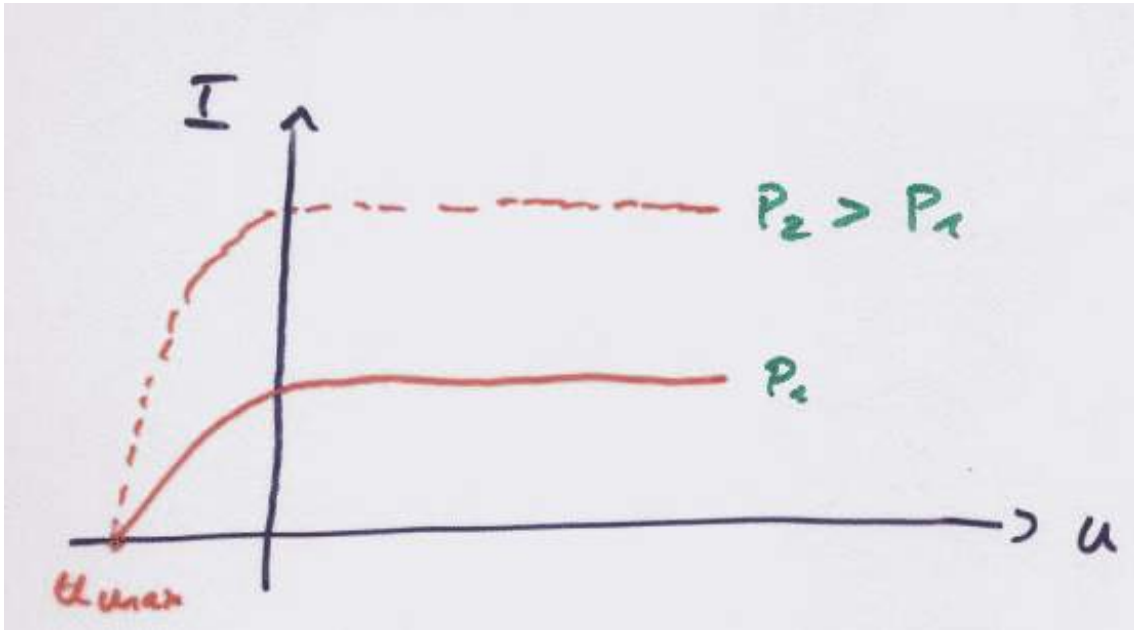
Abbildung 4.10

Beobachtung:

- Sättigungsstrom $\sim P$
Hierbei ist P die Lichtintensität. Das hätte man auch klassisch erwartet
 - Strom fließt schon bei $U < 0$!
- $\Rightarrow$ Kin. Energie der Elektronen $E_{Kin.} = \frac{m}{2}v^2 = e \cdot U$
- unabhängig von P (klassisch: $P \propto E^2 \Rightarrow E_{Kin.} \propto \sqrt{P}$)
 - abhängig von ν

c) Deutung von Einstein (1905): Licht besteht aus Quanten mit Energie $E_\gamma = h \cdot \nu$

1. $N_{e^-} \sim N_\gamma \sim P$
2. $h \cdot \nu > h \cdot \nu_{Grenz} - e \cdot U_A$
Hier ist U_A die Austrittsarbeit
3. $\frac{1}{2}mv^2 = e \cdot U_{max} = h \cdot \nu - e \cdot U_A$

Abbildung 4.11: $\nu > \nu_{\text{Grenze}}$ **Beispiele für Austrittsarbeiten:**

Li: $e \cdot U_A = 2,46 \text{ eV} \hat{=} 504 \text{ nm}$

Cs: $= 1,96 \text{ eV} \hat{=} 639 \text{ nm}$

Cu: $= 4,48 \text{ eV} \hat{=} 277 \text{ nm}$

- d) Anwendung** Photomultiplier (Sekundärelektronenvervielfacher wie z.B. im Versuch Gammaspektroskopie im P2)

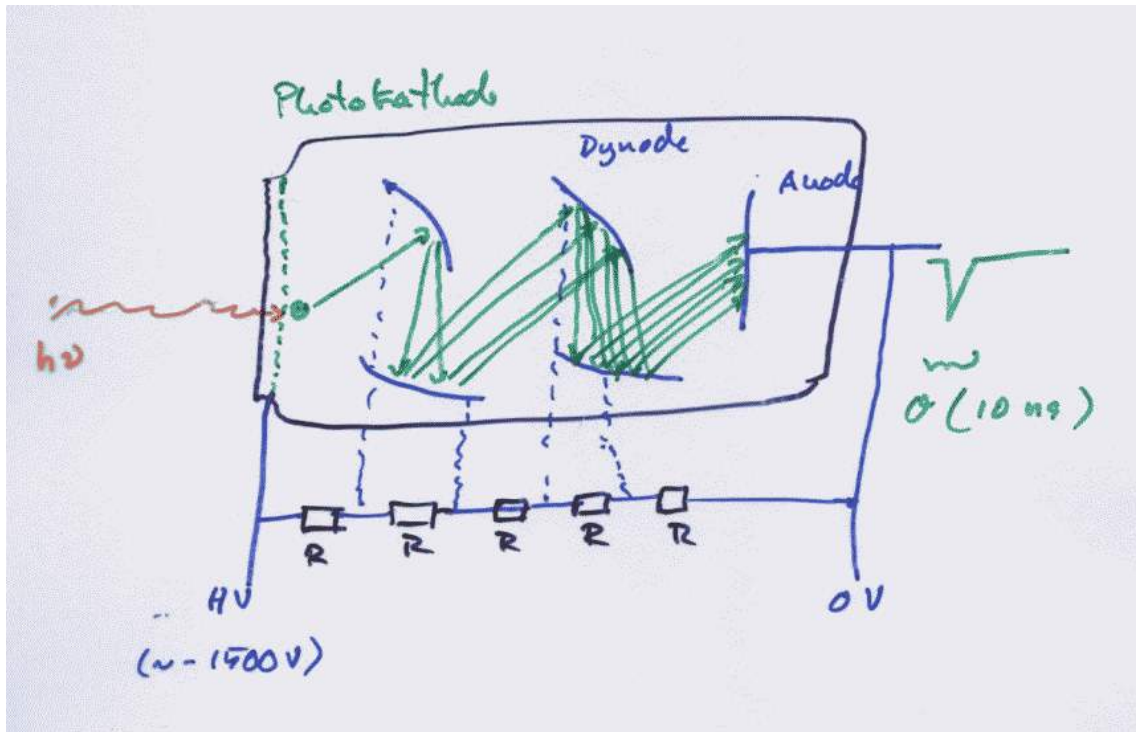


Abbildung 4.12: Ein Elektron schlägt aus der ersten mehrere, die dann wieder mehr und noch mehr aus den folgenden Platten schlagen. So erhält man Verstärkungsfaktoren von bis zu 40%

- Photokathode aus Phosphor, Caesium o.ä.
- Verstärkung: $1\gamma \rightarrow 1e^- \rightarrow \left(\frac{\text{Verstärkung}}{\text{Dynode}}\right)^{N_{\text{Dynode}}}$
typischerweise: $2^8 \dots 3^8$ je nach Spannung
- Quanteneffizienz: $\frac{\text{Wahrscheinlichkeit eines } e^-}{\gamma}$

4.3 Compton-Effekt (1921)

Streuung von EM-Strahlung an (fast) freien Elektronen

a) Beobachtung Erwartung: Streuung von Lichtwelle an N Elektronen

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \sim 1 + \cos \theta \quad ; \text{unabhängig von } \nu \quad (4.22)$$

Dies nennt man Rayleigh-Streuung

$$\Delta\lambda = \lambda_C(1 - \cos \theta) \quad \text{mit der Comptonwellenlänge: } \lambda_C = 2,4 \cdot 10^{-12} \text{ m} \quad (4.23)$$

item[Erklärung:] **Elastische Streuung an freien Elektronen**

$$E_\gamma = h \cdot \nu \quad (4.24)$$

$$|\vec{P}| = h\nu/c \quad (4.25)$$

$$\rightarrow \text{Energieerhaltung: } h \cdot \nu + m_0 c^2 = h\nu' + \gamma m_0 c^2 \quad (4.26)$$

$$\rightarrow \text{Impuls in y-Richtung: } 0 = \frac{h \cdot \nu'}{c} \cdot \sin \theta - \gamma m_0 v \cdot \sin \phi \quad (4.27)$$

$$\rightarrow \text{Impuls in x-Richtung: } \frac{h\nu}{c} = \frac{h\nu'}{c} \cos \theta + \gamma m_0 v \cos \phi \quad (4.28)$$

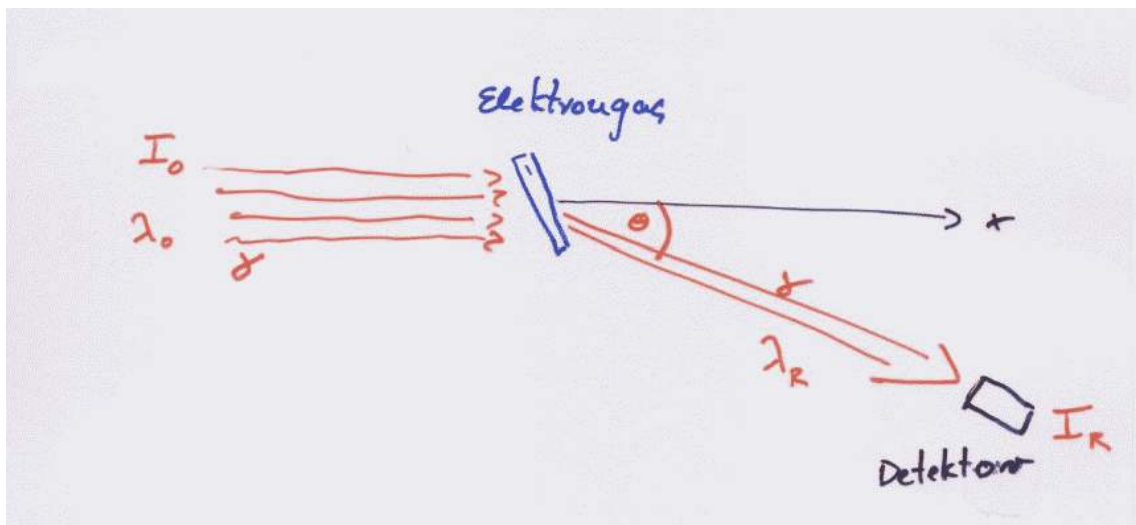


Abbildung 4.13

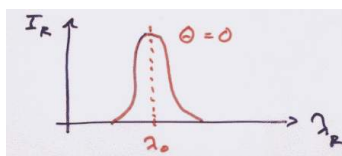
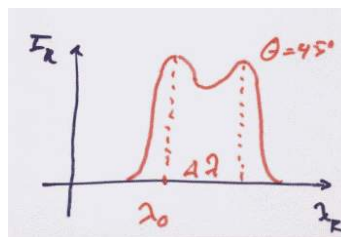
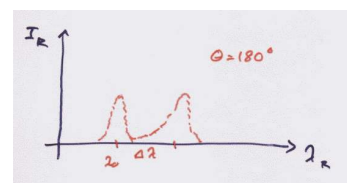
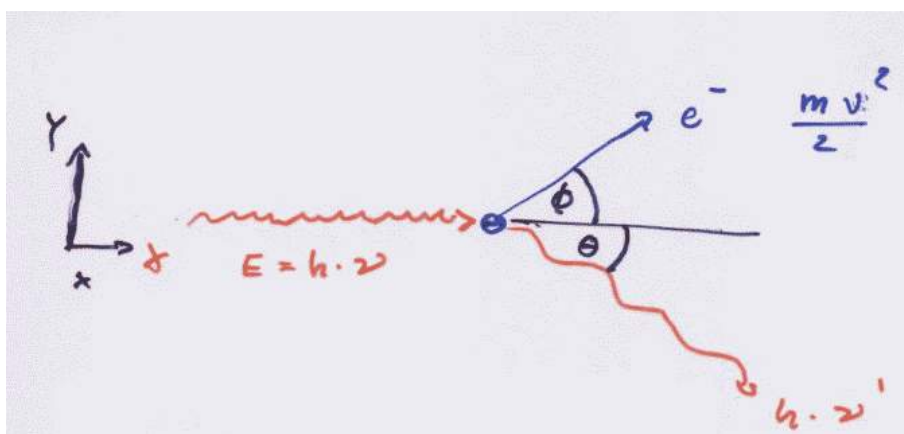

 Abbildung 4.14:
Rayleighstreuung
für einen Winkel
 $\Theta = 0^\circ$

 Abbildung 4.15:
Rayleighstreuung
für einen Winkel
 $\Theta = 45^\circ$

 Abbildung 4.16:
Rayleighstreuung
für einen Winkel
 $\Theta = 180^\circ$


Abbildung 4.17

Umformungen: Energie quadrieren und Impuls quadrieren, addieren

$$\Rightarrow \Delta\lambda = \frac{c}{\nu} - \frac{c}{\nu \cdot \Delta\nu} = \frac{c \cdot \Delta\nu}{\nu(\nu - \Delta\nu)} \quad (4.29)$$

$$\Rightarrow \Delta\lambda = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos \theta) \quad \text{mit: } \lambda_c = 0,024 \text{ \AA} \quad (4.30)$$

Das ist unabhängig von λ !! Daraus folgen die interessanten Konsequenzen, dass Licht Druck ausübt und ein strahlender Körper auch Masse verliert.

Bsp. Sonne:

$$W = 10^{26} \text{ W} \quad (4.31)$$

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{W}{c^2} \approx 10^9 \frac{\text{kg}}{\text{s}} \approx 3 \cdot 10^{13} \text{ t/Jahr} \quad (4.32)$$

Zum Glück hat die Sonne eine Masse von ungefähr $2 \cdot 10^{27} \text{ t}$

4.4 Ausblick

Bisher wurde nur die Kinematik berechnet. Die Raten und Warscheinlichkeiten von solchen Prozessen werden dann in der Quantenfeldtheorie behandelt. Nun folgen noch einige Elementare Beschreibungen:

Feynman-Diagramme

- Comptonprozess

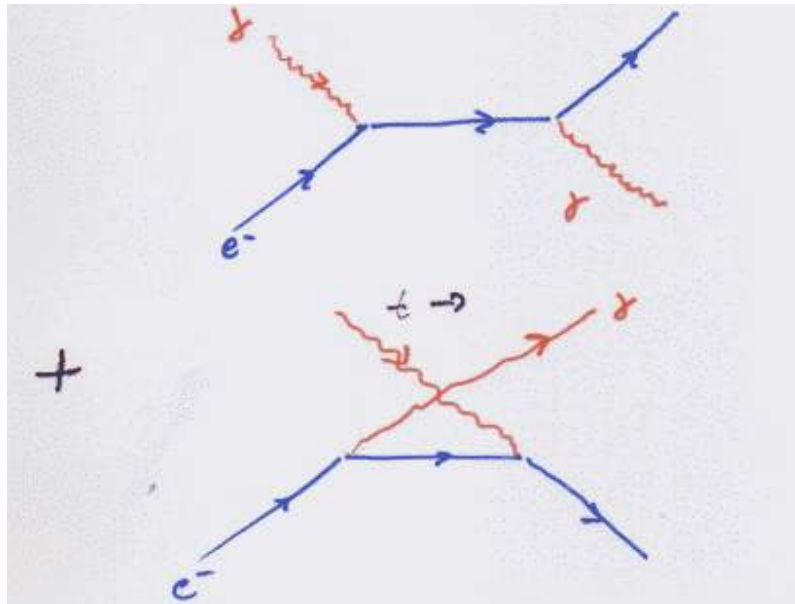


Abbildung 4.18: Wahrscheinlichkeit: $\sim (\text{Kopplungskonstant})^2 = (\text{el.Ladung})^2$

- Coulombstreuung

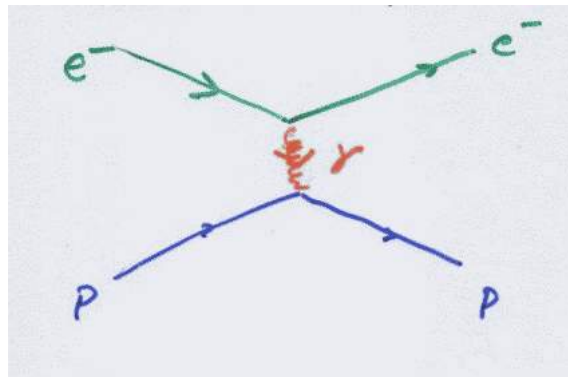


Abbildung 4.19

5. Materiewellen (Welleneigenschaften von Teilchen)

5.1 Beugung und Interferenz

5.1.1 Erste Beobachtungen

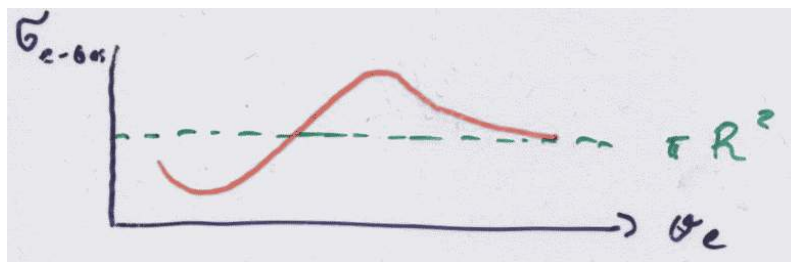


Abbildung 5.1: Wirkungsquerschnitt von El.-Gas-Streuung

Ramsauer-Effekt (1921):

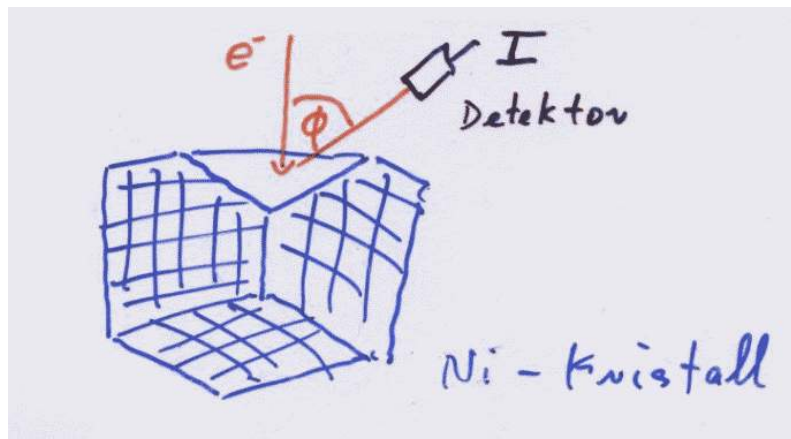
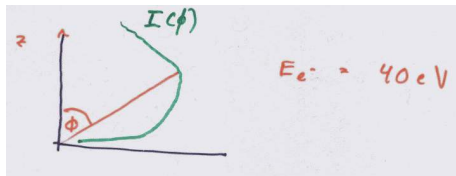


Abbildung 5.2

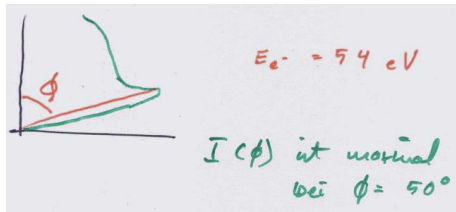
Davisson, Gemser (1919, Erklärung 1927) **Beobachtung:**



a)

$$E_{e^-} = 40 \text{ eV} \quad (5.1)$$

Abbildung 5.3

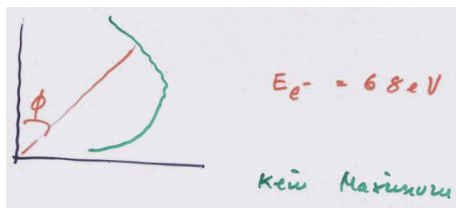


b)

$$E_{e^-} = 54 \text{ eV} \quad (5.2)$$

 $I(\Phi)$ ist maximal für $\Phi = 50^\circ$

Abbildung 5.4



c)

$$E_{e^-} = 68 \text{ eV} \quad (5.3)$$

kein Maximum

Abbildung 5.5

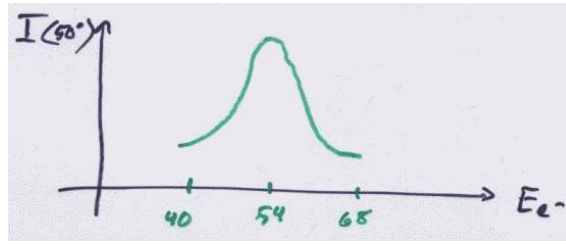


Abbildung 5.6

Interpretation: e^- sind Wellen

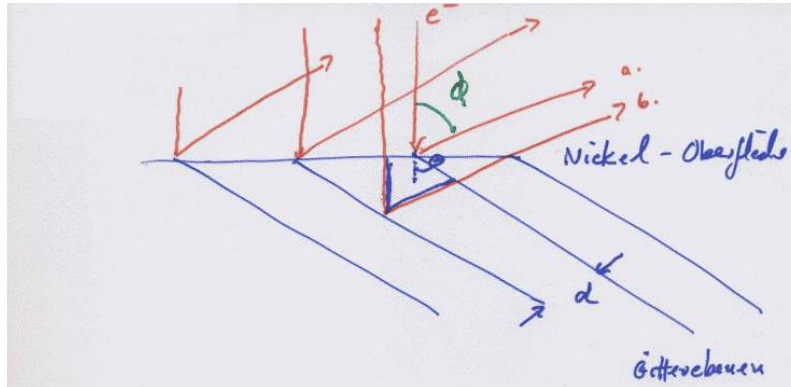


Abbildung 5.7

Hierbei gilt für den Gangunterschied von a. und b.:

Bragg-Beziehung: Interferenzmax für $n \cdot \lambda = 2d \sin \theta$ mit $n \in \mathbb{N}$

Bsp.: Für Nickel: $d = 0,91 \text{ \AA}$ $\Rightarrow \lambda_{e^-} = 1,65 \text{ \AA}$

Das entspricht der Materiewellenlänge von Elektronen mit $E = 59 \text{ eV}$

de Broglie (1924) in seiner Doktorarbeit:

Analog zu Licht besitzen Materieteilchen Welle- und Korpuskel-Natur!

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad (5.4)$$

Tabelle 5.1

$E_{Kin} [\text{eV}]$	10	100	1000	10^6	10^9
$\lambda [\text{\AA}]$	3,5	1,2	0,4	10^{-2}	10^{-5}
	$\sim$ Atome			$\sim$ Protonen	

Die Anwendung davon findet man zum Beispiel in einem Elektronenmikroskop

5.1.2 Weitere Versuche

Beugung von Atomstrahlen (Stern, Frisch, Estermann 1931)

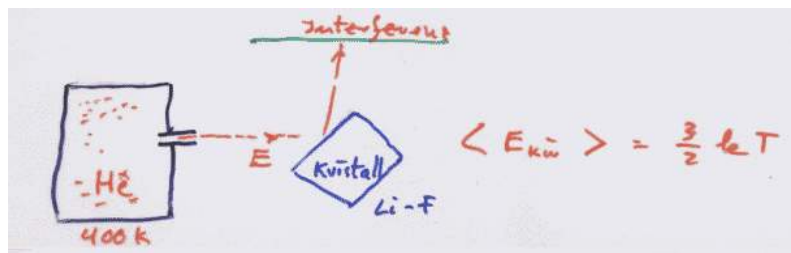


Abbildung 5.8

Hier gilt:

$$\langle E_{Kin.} \rangle = \frac{3}{2} k \cdot T \quad (5.5)$$

Und weiter:

$$\lambda_{He} = \frac{h}{\sqrt{2 \cdot m_{He} \cdot E_{Kin.}}} = \frac{h}{\sqrt{3 \cdot m_{He} k \cdot T}} \quad (5.6)$$

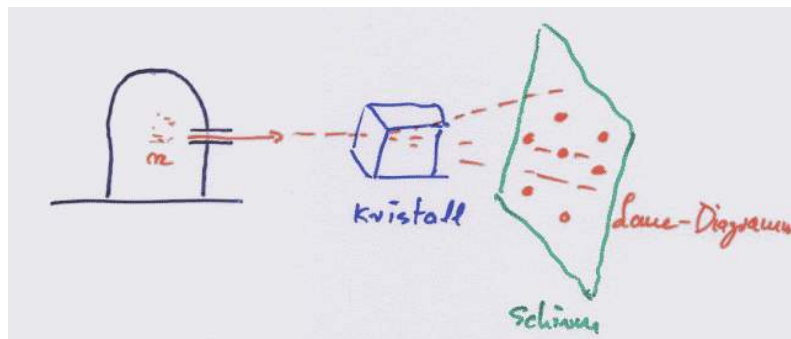


Abbildung 5.9

Neutronenbewegung Dieser Effekt findet in Materialstudien Anwendung.

5.2 Materiewellen

5.2.1 Kenntnis: Licht, Materie, Welle und Korpuskel

Licht:

$$E = h \cdot \nu \quad (5.7)$$

$$p = h \cdot \frac{\nu}{c} \quad (5.8)$$

Materie:

$$E = h \cdot \nu \quad (5.9)$$

$$p = \frac{h}{\lambda} = h \cdot \underbrace{\frac{1}{\lambda}}_{\text{Wellenzahl}} \quad (5.10)$$

Doppelspaltversuch:

Dazu gilt:

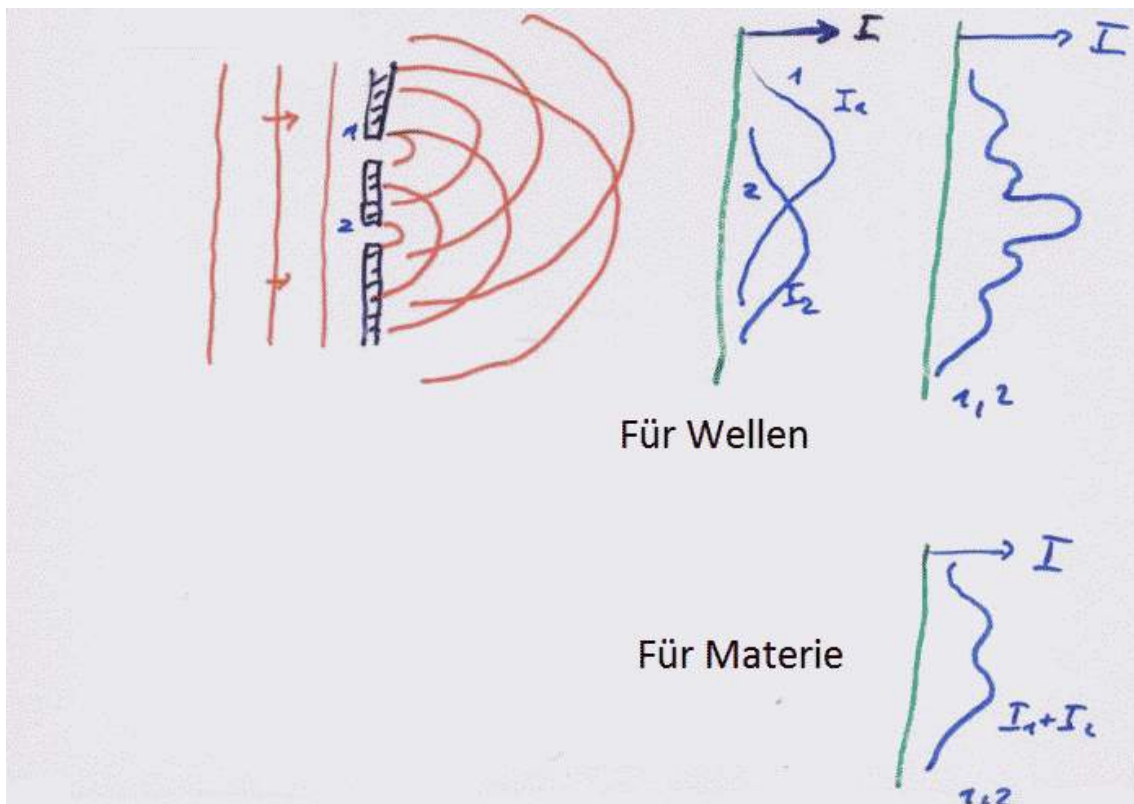


Abbildung 5.10

$$I_{1,2} = |A_1 + A_2|^2 \text{ mit den Amplituden } A_1 \text{ und } A_2 \quad (5.11)$$

$$= |a_1 \cdot e^{i(\omega t + \phi_1)} + a_2 \cdot e^{i(\omega t + \phi_2)}|^2 \quad (5.12)$$

$$= I_1 + I_2 + 2 \cdot \sqrt{I_1 \cdot I_2} \cdot \cos(\phi_2 - \phi_1) \quad (5.13)$$

Ein Gedankenexperiment:

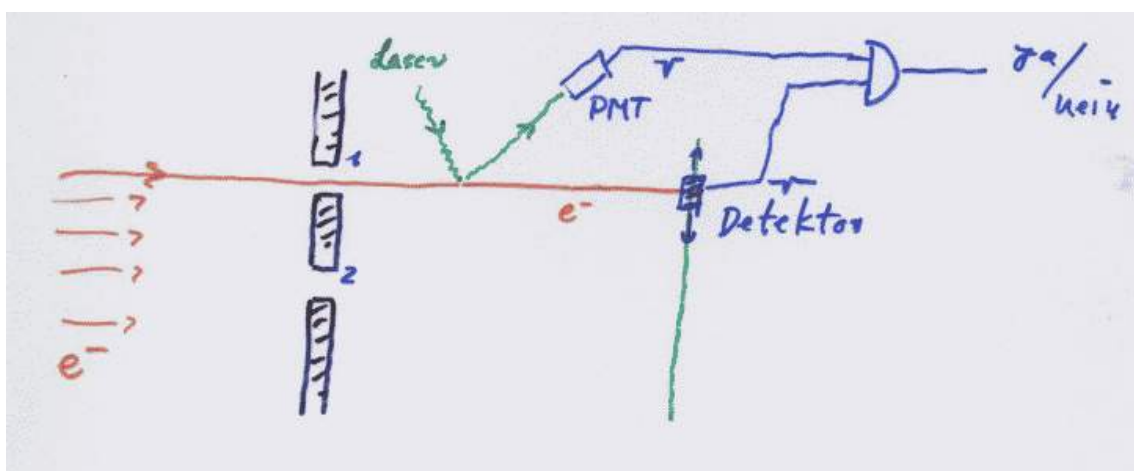


Abbildung 5.11

In der Realität sieht das Interferenzbild dann so aus:

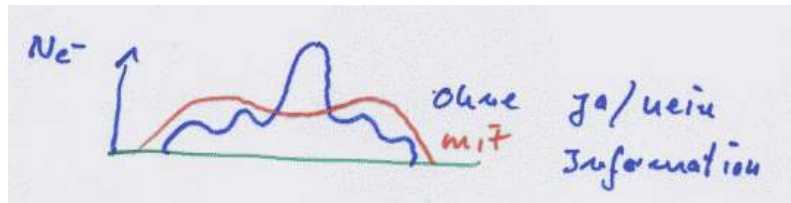


Abbildung 5.12

5.2.2 Wahrscheinlichkeitsinterpretation

$\Psi(x, t)$: Wahrscheinlichkeitsamplitude, ein Teilchen am Ort x zur Zeit t „messen“.

$$P(x, t) = |\Psi(x, t)|^2 \quad \text{Wahrscheinlichkeit} \quad (5.14)$$

Für $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 \Rightarrow P = |\Psi_1 + \Psi_2|^2$

Bsp: freie Materiewelle

$$\Psi(\vec{r}, t) = ae^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \text{ 3d} \quad (5.15)$$

$$\Psi(x, t) = ae^{ikx - \omega t} \text{ 1d} \quad (5.16)$$

Wahrscheinlichkeit muss unabhängig von Bezugssystem sein (Lorentzinvariant)

$$\text{System 1: } \Psi(t) = ae^{i\omega t} \quad \text{in Ruhe, } x = 0 \quad (5.17)$$

$$\text{System 2: } t = \gamma \left(t' - \frac{x'}{c} \beta \right) \quad (5.18)$$

$$(5.19)$$

$$\Rightarrow \Psi(x', t') = a \cdot e^{-i\omega \left(\gamma t' - \frac{x'}{c} \beta \right)} \quad (5.20)$$

$$\stackrel{\text{mit}}{=}_{E_0 = \hbar \cdot \omega} a \cdot e^{i/\hbar \left(\frac{E_0}{c} \beta \gamma x' - E_0 \gamma t' \right)} \quad (5.21)$$

$$\stackrel{\text{mit}}{=}_{P = \gamma \cdot m_0 v} a \cdot e^{i(P'/\hbar x' - E'/\hbar t')} \quad (5.22)$$

$$\stackrel{\text{mit}}{=}_{P = \hbar k} a \cdot e^{ik'x' - \omega't'} \quad (5.23)$$

Das entspricht einer freien Welle mit:

$$\Psi(x, t) = ae^{i/\hbar(px - Et)} \quad (5.24)$$

$$P(x, t) = |a'| \cdot 1 = \text{const.} \quad (5.25)$$

5.3 Wellenpakete

Überlagerung verschiedener Wellenpakete

Bsp.:

a)

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 \quad (5.26)$$

$$= a \cos(k_1 x - \omega_1 t) + a \cos(k_2 x - \omega_2 t) \quad (5.27)$$

$$= 2a(kx - \omega t) \cdot \underbrace{\cos(\Delta kx - \Delta \omega t)}_{\text{Einhüllende}} \text{ mit } k = \frac{1}{2}(k_1 + k_2), \Delta k = \frac{1}{2}(k_1 - k_1); \quad \omega \text{ und } \omega \text{ analog!} \quad (5.28)$$

6. Elemente der Quantenmechanik

6.1 Zusammenfassung

Dualismus Korpuskel-Welle bei

$$\begin{array}{ll} \text{Impuls} & \\ \text{Licht: } mc = & \frac{h}{\lambda} = \frac{h\nu}{c} \\ \text{Materie: } mv = & \frac{h}{\lambda} \quad (\text{de Broglie}) \end{array}$$

Konsequenzen: Interferenzeffekte
Orts- und Impulsunschärfe

6.1.1 EM Wellen im Vakuum

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi(\vec{r}, t) = c^2 \Delta \Psi(\vec{r}, t) \quad (6.1)$$

$$\text{Lösung: } \Psi(\vec{r}, t) = \int d^3k \, a(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \quad (6.2)$$

$$\Rightarrow \omega^2 = c^2 k^2 \quad (6.3)$$

$$\underline{\omega(k) = c \cdot k} \text{ Dispersionsrelation für EM Wellen} \quad (6.4)$$

6.1.2 Nicht-relativistische Materiewellen

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{h}{mv_g} \\ \Rightarrow v_g &= \frac{h}{m} \frac{1}{\lambda} = \frac{\hbar}{m} \cdot k = \frac{d\omega}{dk} \\ \Rightarrow \omega(k) &= \omega_0 + \frac{\hbar}{2m} k^2 \end{aligned} \quad (6.5)$$

Dispersionsrelation für nichtrelativistische Materiewellen

Allgemeiner Ansatz:

$$\Psi(\vec{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \, A(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \quad (6.6)$$

„Zuständige“ Gleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi(\vec{r}, t) \quad (6.7)$$

Schrödingergleichung

Lösung: Dispersionsrelation

$$\omega(k) = \frac{\hbar}{2m} k^2 \quad (6.8)$$

6.1.3 Relativistische Materiewellen

$$\begin{aligned} (E_{tot} &= \hbar \cdot \omega) \\ \omega(\vec{k}) &= \sqrt{\left(\frac{m_0 c^2}{\hbar}\right)^2 + k^2 c^2} \\ \frac{\omega^2}{c^2} &= \left(\frac{m_0 c}{\hbar}\right)^2 + k^2 \\ \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta + \left(\frac{m_0 c}{\hbar}\right)^2\right) \Psi(\vec{r}, t) &= 0 \\ \hat{=} \left(\square + \left(\frac{m_0 c}{\hbar}\right)^2\right) \Psi(\vec{r}, t) &= 0 \end{aligned} \quad (6.9)$$

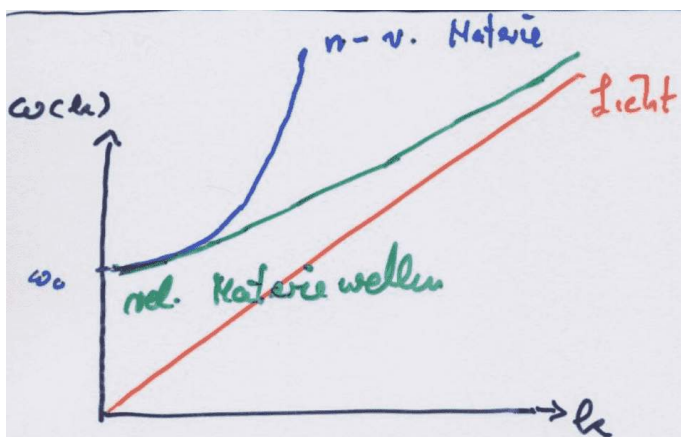
Klein-Gordon-Gleichung

Spezialfälle:

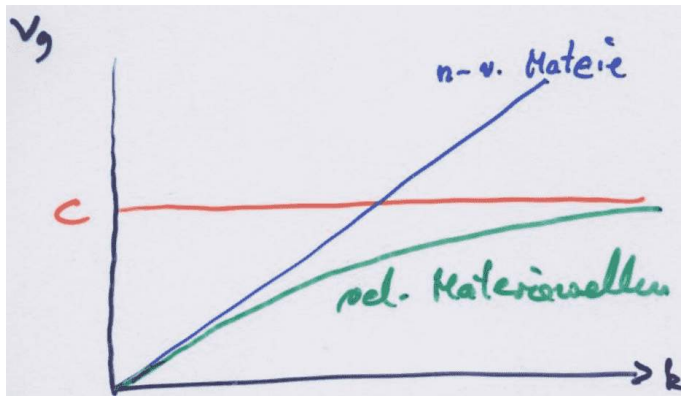
- a) $k \ll \frac{m_0 c}{\hbar}$ (nicht relativistisch)
 $(v_g \ll c)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \omega &\approx c \cdot \frac{m_0 c}{\hbar} + \frac{c}{2 \frac{m_0 c}{\hbar}} k^2 \\ &= \omega_0 + \frac{\hbar}{2m} k^2 \\ &\text{„Schrödinger“} \end{aligned} \quad (6.10)$$

- b) $k \gg \frac{m_0 c}{\hbar}$
 $(v_g \approx c)$
 $\rightarrow \omega = ck$ (wie bei EM Wellen)



Dispersion



Gruppengeschwindigkeit

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = c \cdot \frac{k}{\sqrt{(\frac{m_0 c}{\hbar})^2 + k^2}}$$

6.1.4 Nicht-relativistische Materiewellen im Potential

$$\text{Wir hatten: } \left. \begin{aligned} \omega(\vec{k}) &= \frac{\hbar}{2m_0} k^2 \\ E &= \hbar\omega(\vec{k}) = \frac{\hbar^2}{2m_0} k^2 \\ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi &= -\frac{\hbar^2}{2m_0} \Delta \Psi \end{aligned} \right\} \text{Freie Materiewellen} \quad (6.11)$$

$$\begin{aligned} \text{Mit Potential: } E_{ges} &= \frac{p^2}{2m} + V(\vec{r}) \\ &= \frac{\hbar^2}{2m} k^2 + V(\vec{r}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow E \cdot \Psi(\vec{r}, t) &= \frac{\hbar^2}{2m} k^2 \Psi(\vec{r}, t) + V(\vec{r}) \cdot \Psi(\vec{r}, t) \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + V \cdot \Psi \\ &\text{einerseits} \\ &= \hbar\omega(\vec{k}) \Psi \\ &= i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi \text{ andererseits} \\ \Rightarrow \underbrace{\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\vec{r}) \right)}_H \Psi(\vec{r}, t) &= i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t) \end{aligned} \quad (6.12)$$

Schrödingergleichung mit Potential

H Hamiltonoperator

$$\begin{array}{ccc} \text{H} \Psi(\vec{r}, t) & = & E \Psi(\vec{r}, t) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \text{Operator} & & \text{Eigenwert} \end{array}$$

6.2 Einfache quantenmechanische Systeme

6.2.1 Teilchen im Kasten (1d)

Im Kasten: Freies Teilchen

Ansatz:

$$\Psi(x, t) = a_1 e^{i(kx - \omega t)} + a_2 e^{-i(kx - \omega t)} \quad (6.13)$$

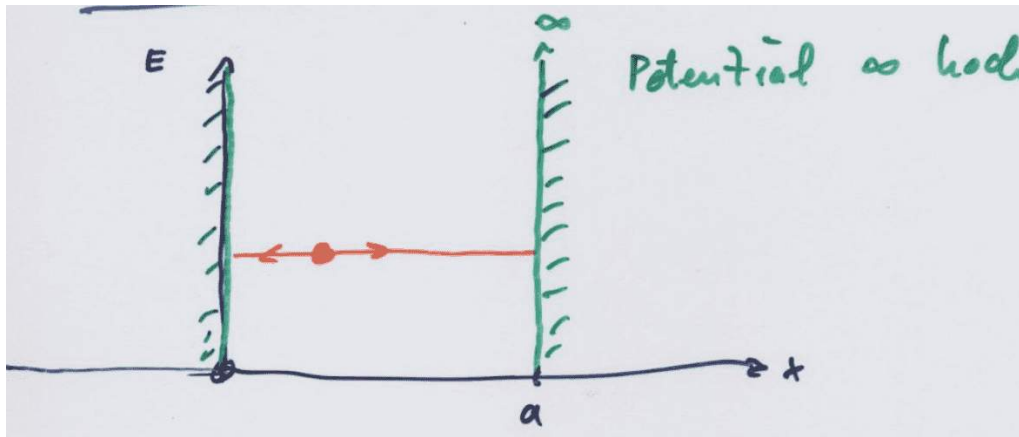


Abbildung 6.1: Kastenpotential

2 Wellen: $E = \frac{p^2}{2m}$
 $k = \pm \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$

speziell: stationärer Fall: $t = 0$

$$u(x) = a_1 e^{ikx} + a_2 e^{-ikx} \quad (6.14)$$

Randbedingungen:

$$\begin{aligned} u(x) &= 0 \text{ für: } x \geq a, x \leq 0 \\ \Rightarrow u(0) &= a_1 + a_2 = 0 \\ \Rightarrow u(x) &= a_1 (e^{ikx} - e^{-ikx}) \\ u(a) &= 0 \\ &= 2ia_1 \sin ka \\ \Rightarrow k \cdot a &= n \cdot \pi \\ k &= n \frac{\pi}{a}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \infty \end{aligned} \quad (6.15)$$

Lösung:

$$\underline{\Psi(x, t) = a_1 (e^{in \frac{\pi}{a} x} - e^{-in \frac{\pi}{a} x}) e^{-i\omega t}} \quad (6.16)$$

Wahrscheinlichkeit Teilchen im Kasten zu finden : 1

$$\begin{aligned} \int_0^a |u(x)|^2 dx &= |a_1|^2 \int_0^a dx (e^{in \frac{\pi}{a} x} - e^{-in \frac{\pi}{a} x}) \\ &= |a_1|^2 \cdot 2a \stackrel{!}{=} 1 \\ \Rightarrow a_1 &= \frac{1}{\sqrt{2a}} \end{aligned} \quad (6.17)$$

a) Wellengleichung

$$\Rightarrow \Psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2a}} (e^{in \frac{\pi}{a} x} - e^{-in \frac{\pi}{a} x}) e^{-i\omega t} \quad (6.18)$$

b) Wahrscheinlichkeitsdichte

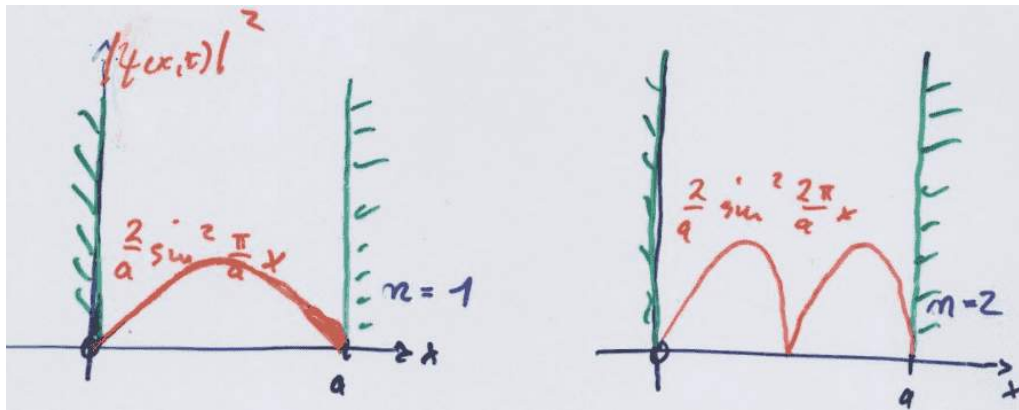


Abbildung 6.2: Wahrscheinlichkeitsdichte

 c) Energiezustände

$$E = E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m a^2} n^2, \quad n = 1, \dots, \infty \quad (6.19)$$

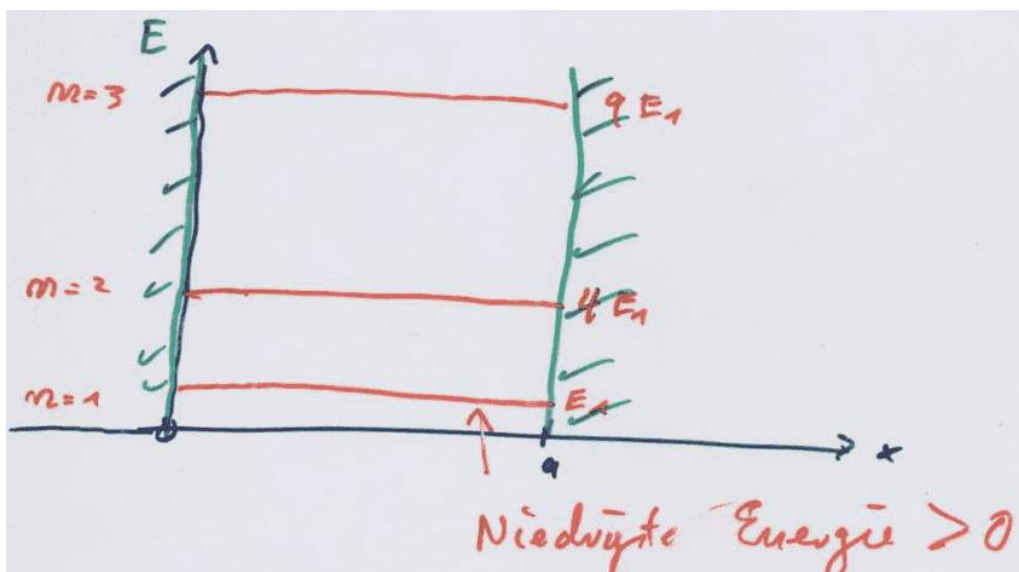


Abbildung 6.3: Energie

 d) Erfüllt $\Psi(\vec{r}, t)$ die Schrödingergleichung?

$$\begin{aligned}
i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi &= i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(e^{in\frac{\pi}{a}x} - e^{-in\frac{\pi}{a}x} \right) e^{-i\omega t} \right) \\
&= -i\omega i\hbar \Psi(x, t) \\
&= \hbar\omega \Psi(x, t) \\
&= E \Psi(x, t) \\
&\text{einerseits}
\end{aligned} \tag{6.20}$$

$$\begin{aligned}
-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(x, t) &= \frac{\hbar^2}{2m} \frac{n^2 \pi^2}{a^2} \Psi(x, t) \\
&= \frac{\hbar^2}{2m} k^2 \Psi(x, t) \\
&= E \cdot \Psi(x, t) \\
&\text{andererseits}
\end{aligned}$$

i) e^- im Kasten von $a = 5 \text{ \AA}$ (atomare Dimension)

$$\begin{aligned}
E_1 &= \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\pi^2}{1} = 2,4 \cdot 10^{-19} \text{ J} \\
&= 1,5 \text{ eV}
\end{aligned} \tag{6.21}$$

ii) Neutronen im Kern $a = 5 \text{ fm} \Rightarrow E_1 = 8 \text{ MeV}$

6.2.2 Teilchen im Kastenpotential mit endlich hohen Wänden

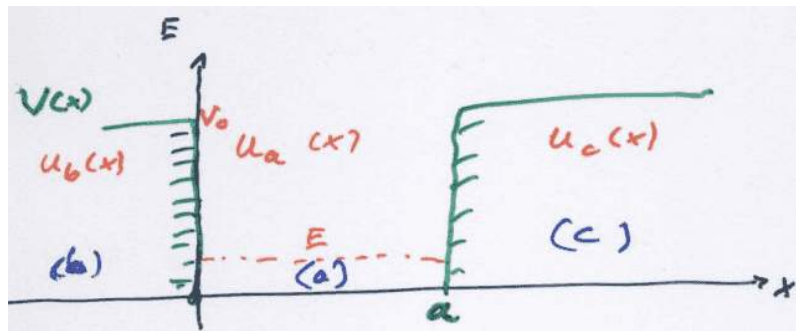


Abbildung 6.4: Kasten mit endlich hohen Wänden

Erwartet klassisch $u_b, u_c = 0$
sofern $E < V_0$

a) $V(x) = 0$ für $x = [0, a]$ Freies Teilchen

$$\text{Schrödinger: } -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi = E \Psi \tag{6.22}$$

$$\hookrightarrow t = 0 : \frac{d^2}{dx^2} u_a(x) = -\frac{2mE}{\hbar^2} u_a(x) \tag{6.23}$$

$$\text{Ansatz: } u_a(x) = C_1 \sin \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} x + C_2 \cos \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} x \tag{6.24}$$

b, c) $V(x) = V_0$ für $x < 0$ oder $x > a$

$$\frac{d^2}{dx^2} u_b(x) = -\frac{2m}{\hbar} \underbrace{(E - V_0)}_{<0} \cdot u_b(x) \quad (6.25)$$

$$\text{Ansatz: } u_b(x) = D_2 e^{\frac{\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar} x} \quad (6.26)$$

$$u_c(x) = D_3 e^{-\frac{\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar} x} \quad (6.27)$$

$$\text{Randbedingungen: } \left. \begin{array}{l} u_a(0) = u_b(0) \Rightarrow C_2 = D_2 \\ u_a(a) = u_c(a) \Rightarrow C_1 = D_1 \end{array} \right\} \text{Stetigkeit} \quad (6.28)$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{du_a(0)}{dx} = \frac{du_b(0)}{dx} \\ \frac{du_a(a)}{dx} = \frac{du_c(a)}{dx} \end{array} \right\} \text{Stetige Diff-barkeit} \quad (6.29)$$

↳ Wellenfunktion

↳ Energiezustände



Abbildung 6.5: Aufenthaltswahrscheinlichkeit in endlich hohem Kasten

⇒ Endliche Aufenthaltswahrscheinlichkeit außerhalb der Potentialwände. (QM)

6.2.3 Tunneleffekt

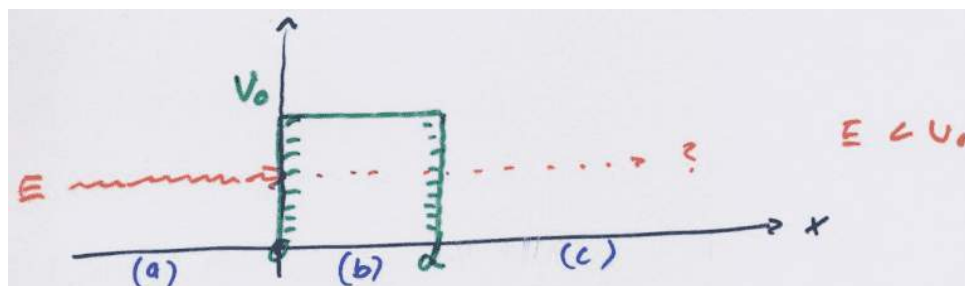


Abbildung 6.6: Tunneleffekt

$$\text{Ansatz : } u_a(x) = a_1 e^{ik_1 x} + b_1 e^{-ik_1 x} \quad (6.30)$$

$$k_1 = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mE} \quad (6.31)$$

$$u_b(x) = a_2 e^{k_2 x} + b_2 e^{-k_2 x} \quad (6.32)$$

$$k_2 = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(V_0 - E)} \quad (6.33)$$

$$u_c(x) = a_3 e^{ik_1 x} \quad (6.34)$$

$$\text{Randbedingungen: } u_a = u_b; u'_a = u'_b \text{ für: } x = 0 \quad (6.35)$$

$$u_b = u_c; u'_b = u'_c \quad x = d \quad (6.36)$$

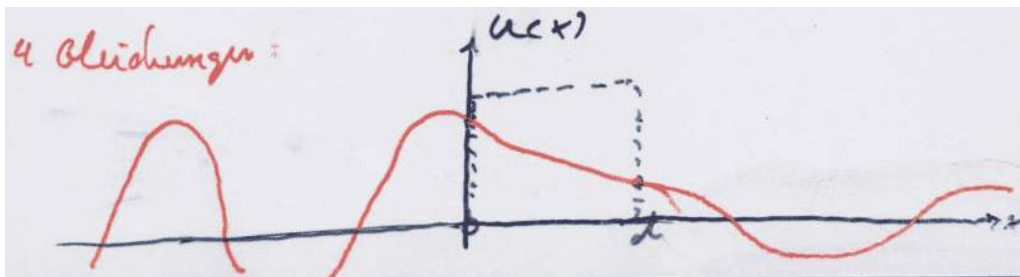


Abbildung 6.7: Materiewelle bei dem Tunneleffekt

Physikalisch interessant ist die Tunnelwahrscheinlichkeit:

$$T = \frac{|U_c(x=d)|^2}{|U_a(x=0)|^2} \quad \left(\frac{\text{Auslaufend}}{\text{Einlaufend}} \right) \quad (6.37)$$

$$= \frac{|a_3 e^{ik_1 d}|^2}{|a_1 e^{ik_1 0}|^2} = \frac{|a_3|^2}{|a_1|^2} \quad (6.38)$$

... nach einigen Rechenschritten:

$$\frac{1}{T} = 1 + \frac{1}{4} \left(2 + \left(\frac{k_1}{k_2} \right)^2 + \left(\frac{k_2}{k_1} \right)^2 \right) \cdot \sin^2(k_2 d) \quad (6.39)$$

$$\text{Mit } \left(\frac{k_2}{k_1} \right)^2 = \frac{V_0 - E}{E}$$

„Dicke Wand“ mit $d \gg \lambda = \frac{1}{k_2}$

$$T \approx e^{-\frac{2}{\hbar} \sqrt{2m(V_0 - E)} \cdot d} \quad (6.40)$$

Beispiele

a) Elektron im Kristallgitter

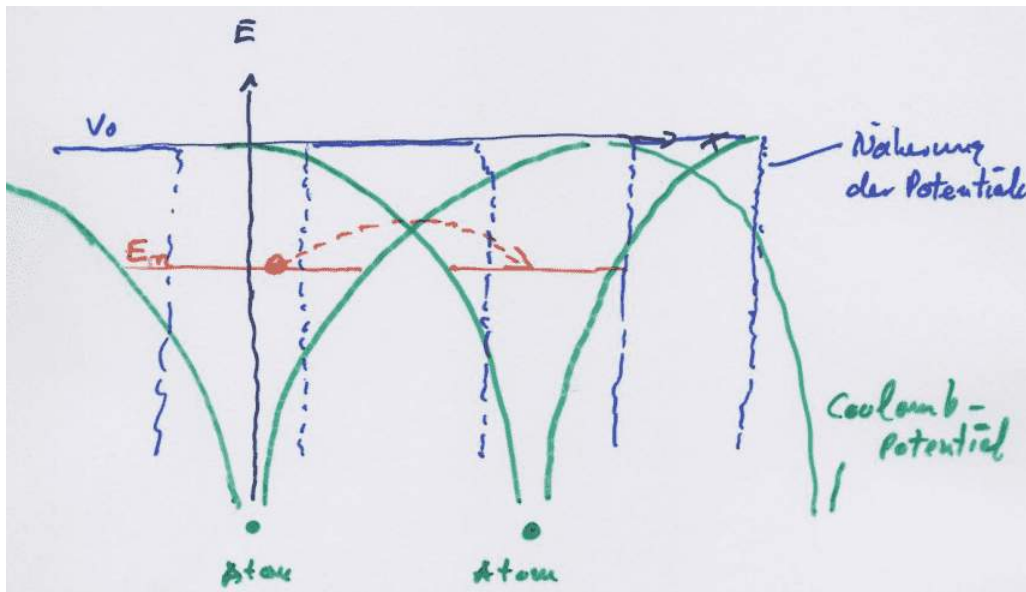


Abbildung 6.8: Potential in einem Kristallgitter

Tunnelwahrscheinlichkeit für Näherung einer Stufe:

$$d \approx 0,5 \text{ \AA} \text{ (Bohr-Radius)} \quad (6.41)$$

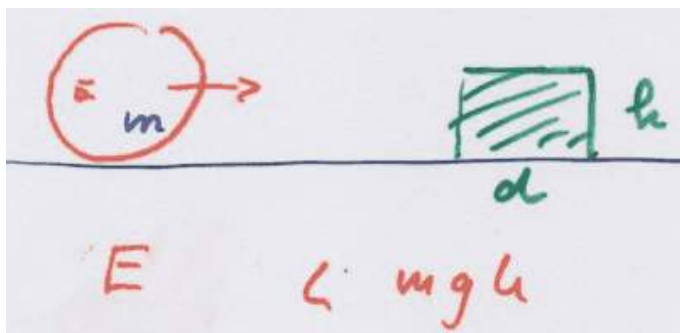
$$V_0 - E_n = \frac{1}{2} \frac{Z^2 m e^4}{\hbar^2 n^2} \cdot \frac{1}{(4\pi\epsilon_0)^2} \quad (6.42)$$

$$T = e^{-\frac{2}{\hbar} \sqrt{2m \cdot \frac{1}{2} \frac{Z^2 m e^4}{\hbar^2 n^2} \cdot \frac{\hbar^2}{e^2 m}}} \quad (6.43)$$

$$= e^{-\frac{2Z}{n}} \quad (6.44)$$

Beispiel: $Z = 1$ $n = 10$: $T \approx 80 \%$
 $n = 1$: $T \approx 14 \%$

b) Tunnelwahrscheinlichkeit einer Glasmurmelt



$$m = 10g$$

$$h = 1mm$$

$$d = 1cm$$

Abbildung 6.9: Tunnelwahrscheinlichkeit einer Glasmurmelt

$$T \approx e^{-\frac{2}{\hbar} \sqrt{2mV_0} \cdot d} \quad (6.45)$$

$$\approx e^{-\frac{2}{\hbar} \sqrt{2m^2 g \hbar} \cdot d} \quad (6.46)$$

$$\approx e^{-\frac{2}{10^{-34} \text{ Js}} \sqrt{2 \cdot 10^{-4} \text{ kg}^2 \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} 10^{-3} \text{ m} \cdot 10^{-2} \text{ m}}} \quad (6.47)$$

$$\approx e^{-10^{24}} \ll 1 \quad (6.48)$$

c) α - Zerfall

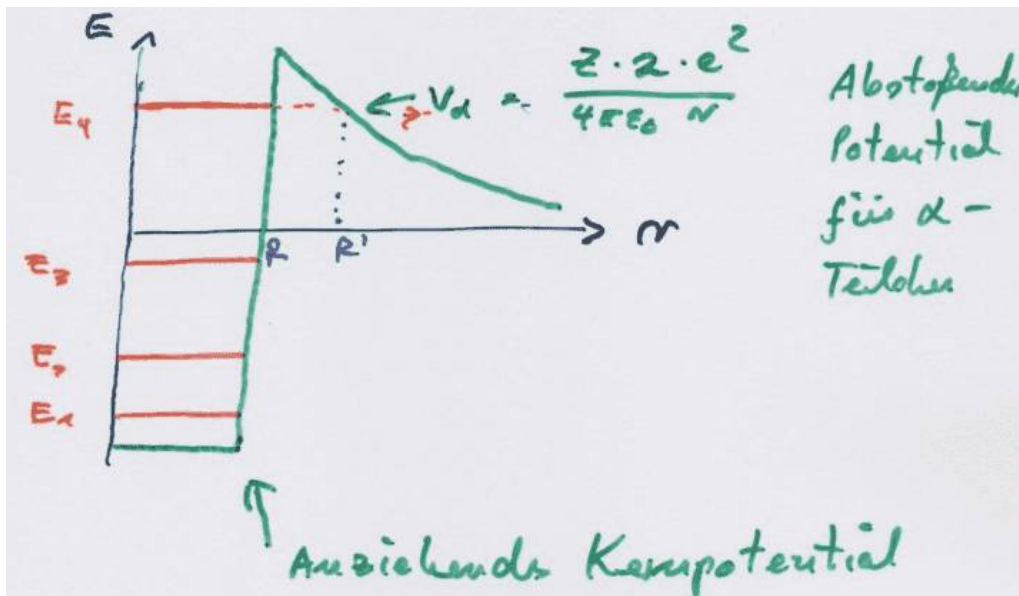


Abbildung 6.10: Potential eines α -Teilchens im Kern

E_α : Energie eines im Kernpotential gebildeten Heliumkerns (α -Teilchen), das dann tunneln kann.

Das Potential kann durch ein Stufenpotential wie in Abb. 6.11 angenähert werden.

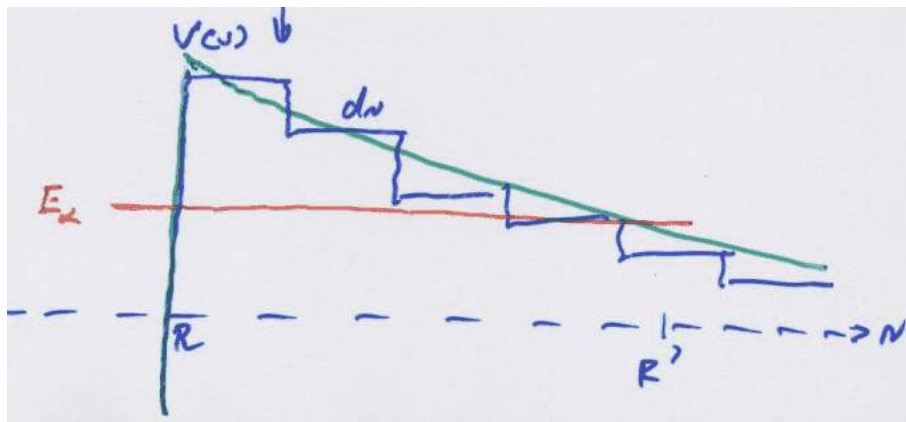


Abbildung 6.11: Näherung des Potential eines α -Teilchens im Kern

Die Tunnelwahrscheinlichkeit ergibt sich aus dem Integral über alle Stufen.

$$T = e^{-\frac{2}{\hbar} \int \sqrt{2m_\alpha(V(r) - E_\alpha)} dr} \quad (6.49)$$

$$= e^{-\frac{2\sqrt{2m_\alpha}}{\hbar} \int_R^{R'} \sqrt{\frac{Z \cdot 2e^2}{4\pi\epsilon_0 r} - E_\alpha} dr} \quad (6.50)$$

Beispiele:	${}_{214}^{84}\text{Po}$:	T	$= 1,3 \cdot 10^{-13}$
		E_α	$= 8,8 \text{ MeV}$
		$t_{1/2}$	$= 0,3 \mu\text{s}$
	${}_{224}^{88}\text{Ra}$:	T	$= 5,9 \cdot 10^{-26}$
		E_α	$= 5,7 \text{ MeV}$
		$t_{1/2}$	$= 3,6 \text{ Tage}$
	${}_{144}^{66}\text{Nd}$:	T	$= 2,2 \cdot 10^{-42}$
		E_α	$= 1,8 \text{ MeV}$
		$t_{1/2}$	$= 2 \cdot 10^{15} \text{ Jahre}$

7. Das Wasserstoffatom

7.1 Schrödingergleichung im Zentralfeld

verwende Kugelkoord.:

$$x = r \cdot \sin \theta \cos \phi \quad (7.1)$$

$$y = r \cdot \sin \theta \sin \phi \quad (7.2)$$

$$z = r \cdot \cos \theta \quad (7.3)$$

Berücksichtige, dass $m < \infty$

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m_1}\Delta_1 - \frac{\hbar^2}{2m_2}\Delta_2\right)\Psi + V(r_{12})\Psi = E\Psi \quad (7.4)$$

$$r_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \equiv \vec{r} \quad (7.5)$$

$$\text{reduzierte Masse: } m = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \quad (7.6)$$

Dabei gilt:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (7.7)$$

$$= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \quad (7.8)$$

1. Lösungsansätze:

i)

$$\Psi(r, \theta, \phi) = R(r) \cdot Y(\theta, \phi) \quad (7.9)$$

$$\text{Separation möglich, da } V \text{ nur von } r \text{ abhängt} \quad (7.10)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) Y + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V(r)) R Y \quad (7.11)$$

$$= -\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) R - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} R \cdot \frac{r^2}{R \cdot Y} \quad (7.12)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{2mr^2}{\hbar^2} (E - V(r)) \quad (7.13)$$

$$= \text{const.} = l(l+1) \quad (7.14)$$

ad hoc!

ii)

$$Y(\theta, \phi) = T(\theta) \cdot F(\phi) \quad (7.15)$$

$$\text{Separation möglich, da Potential isotrop.} \quad (7.16)$$

$$-\frac{1}{T \cdot F} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} (\sin \theta \frac{dT}{d\theta}) \cdot F + \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\frac{d^2}{d\phi^2} F \right) \cdot T \right) = l(l+1) \quad (7.17)$$

$$\cdot (-\sin^2 \theta) \quad (7.18)$$

$$\Rightarrow \sin^2 \theta \left(\frac{1}{T \sin \theta} \frac{d}{d\theta} (\sin \theta \frac{dT}{d\theta}) + l(l+1) \right) = -\frac{1}{F} \frac{d^2 F}{d\phi^2} = \text{const.} = m^2 \quad (7.19)$$

ad hoc!

Ergebnis:

$$\frac{d^2 F}{d\phi^2} + m^2 F = 0, \text{ Azimuthalgleichung} \quad (7.20)$$

$$\frac{1}{T \sin \theta} \frac{d}{d\theta} (\sin \theta \frac{dT}{d\theta}) + l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} = 0, \text{ Polargleichung} \quad (7.21)$$

$$\frac{1}{r^2} \cdot \frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V(r) - \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2}) = 0, \text{ Radialgleichung} \quad (7.22)$$

Zur Lösung:

- Die Gleichungen verschwinden für $r \rightarrow \infty$
- Die Gleichungen sind eindeutig auf der Kugel
 $F(\phi) = F(\phi + 2\pi)$
 $T(\theta) = T(\theta + 2\pi)$
- Die Gleichungen sind quadratintegrierbar

i) Ansatz:

$$F_m = A \cdot e^{\pm im\phi} \quad (7.23)$$

Normierung:

$$\int_0^{2\pi} |F_m|^2 d\phi \stackrel{!}{=} 1 \quad (7.24)$$

$$= |A|^2 \cdot \int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi |A|^2 \quad (7.25)$$

$$\Rightarrow F_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\phi} \quad (7.26)$$

$$m = 0, \pm 1, \pm 2 \quad (7.27)$$

 Eindeutigkeit, z.B.: $m = 7, 3 \Rightarrow e^{i \cdot 7, 3\phi} \neq e^{i \cdot 7, 3(\phi + 2\pi)}$

ii) Polargleichung:

 Ansatz: Legendre-Polynome ($m=0$), Zugeordnete L-P ($m \neq 0$)

$$T_l^m(\theta) = \sqrt{\frac{2l+1}{2} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) \quad (7.28)$$

$$|m| < l \quad (7.29)$$

Insgesamt(für ALLE radialsymmetrische Q-M. Systeme):

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = T \cdot F \quad (7.30)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} N_l^m \cdot P_l^m \cdot e^{im\phi}}_{\text{Kugelflächenfunktion}} \quad (7.31)$$

unabhängig von $V(r)$

- QM Wellen
- Quadratintegrierbar
- Eindeutigkeit
- Kugelsymmetrie

7.2 Energiezustände des Wasserstoffs

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E_n + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{l(l+1)\hbar}{2mr^2} \right) u = 0 \quad (7.32)$$

Ansatz: $u_{nl}(r) = r^{l+1} e^{-r/a_0} \cdot G_n^l(r)$

wobei: $a_0 = \frac{\hbar^2 \cdot 4\pi\epsilon_0}{e^2 m}$ Bohrscher Radius

G Polynom mit n Elementen

i) Für $r \rightarrow \infty$:

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E_n \cdot u = 0 \quad (7.33)$$

$$\Rightarrow u(r) = A \cdot e^{-r/a_0 \cdot n} \quad (7.34)$$

$$E_n = -\frac{me^4}{2\hbar(4\pi\epsilon_0)^2} \cdot \frac{1}{n^2} \quad (7.35)$$

ii) Für $r \rightarrow 0$:

$$\frac{d^2u}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} u = 0 \quad (7.36)$$

$$\Rightarrow B \cdot r^{l+1} \quad (7.37)$$

Generell:

$$R_{nl}(r) = \sqrt{\frac{(n-l-1)!}{2n((n+l)!)^3}} \left(\frac{2}{n \cdot a_0}\right)^{3/2} \left(\frac{2r}{na_0}\right)^l \cdot e^{-\frac{r}{a_0}} \cdot \underbrace{L_{n+l}^{2l+1}\left(\frac{2r}{na_0}\right)}_{\text{Zugeord. Laguerre-Polynome}} \quad (7.38)$$

Zusammenfassung:

$$\Psi_{nlm}(r, \theta, \psi) = R_{nl}(r) \cdot Y_{lm}(\theta, \psi) \quad (7.39)$$

$$\text{mit } n = 1, 2, \dots; \quad l = 0, 1, \dots, n-1; \quad m = -l, -l+1, \dots, 0, 1, \dots, +l \quad (7.40)$$

$$(7.41)$$

Zu jeder Hauptquantenzahl n gibt es $\sum_{l=0}^{n-1} (2l+1) = n^2$ Wellenfunktionen mit der selben Gesamtenergie $E_n = -\frac{me^4}{2\hbar(4\pi\epsilon_0)^2} \cdot \frac{1}{n^2}$ für n^2 verschiedene Zustände!
 $\hat{=}$ System ist entartet!

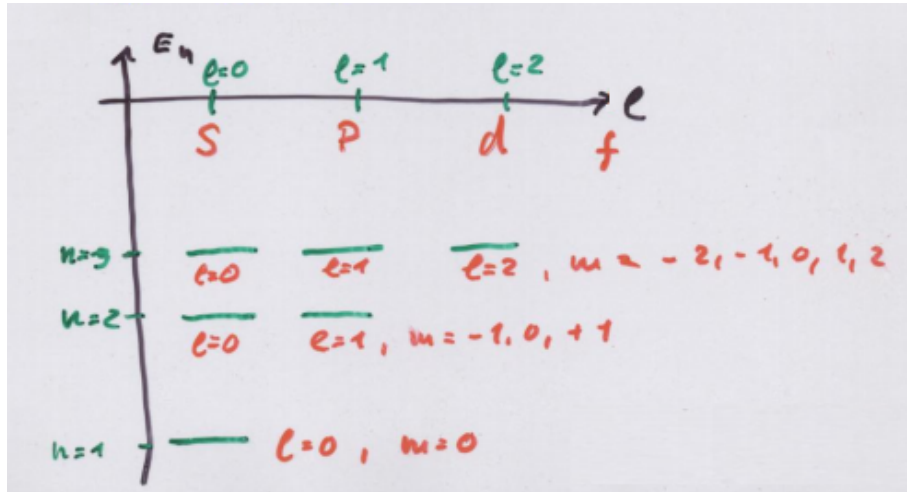


Abbildung 7.1: Termschema

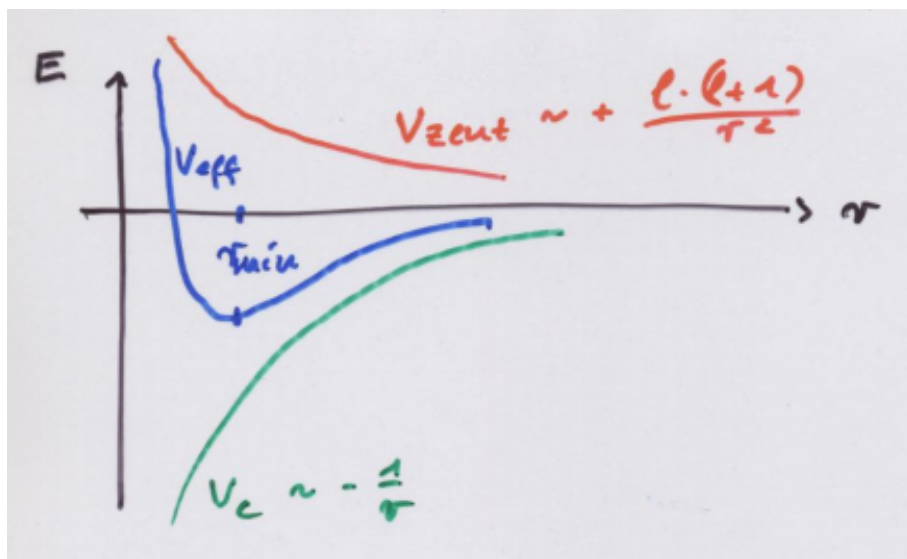


Abbildung 7.2

$$r_{min} = l(l+1) \frac{\hbar^2 4\pi\epsilon_0}{e^2 m} \quad (7.42)$$

7.3 Bahn- und Spin- Magnetismus**7.3.1 Klassisch**

Elektron auf Kreisbahn: Kreisstrom $\Rightarrow$ Magn. Moment μ

a) Magnet. Moment

$$\vec{\mu} = I \cdot A \vec{n} \quad [\text{A m}^2] \quad (7.43)$$

$$(\vec{m}u = \frac{1}{c} I A \vec{n} \text{ im Gaußschen System}) \quad (7.44)$$

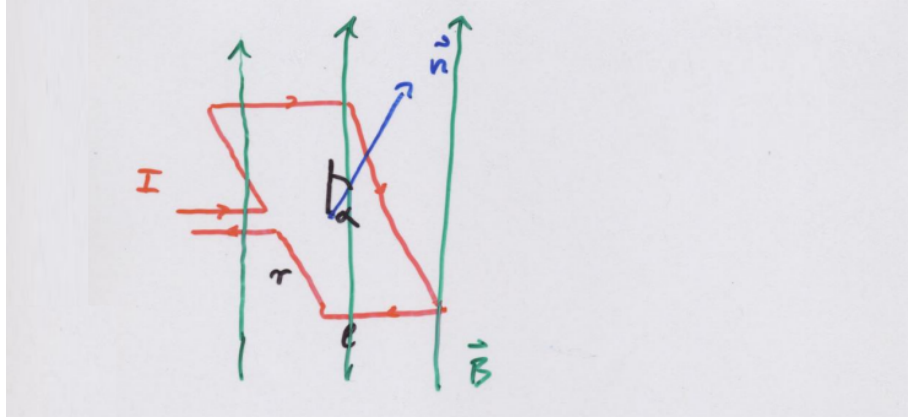


Abbildung 7.3

i) Schleife erhält Drehmoment:

$$\vec{D} = 2\vec{r} \times \vec{F} = 2\vec{r}(q\vec{v} \times \vec{B}) \quad (7.45)$$

$$\text{Für } \alpha = 90^\circ : \quad (7.46)$$

$$D = 2r \cdot l \cdot B \cdot \frac{q \cdot v}{l} = A \cdot I \cdot B = \mu \cdot B \quad (7.47)$$

$$\text{Generell:} \quad (7.48)$$

$$\vec{D} = \vec{\mu} \times \vec{B} \quad (7.49)$$

ii) Energie:

$$V_{HogM.} = \int_{\pi/2}^{\alpha} D d\alpha = -\mu \cdot B \cdot \cos \alpha = \quad (7.50)$$

$$\vec{\mu} \cdot \vec{B} \quad (7.51)$$

1 Elektron im Atom

$$I = \frac{q}{T} = -\frac{e\omega}{2\pi} \quad (7.52)$$

$$\mu = A \cdot I = -\frac{e\omega}{2\pi} A \quad (7.53)$$

$$A = \pi r^2; \quad l = m \cdot v \cdot r = m\omega r^2 \quad (7.54)$$

$$\Rightarrow \mu = -\frac{1}{2} e\omega r^2 \Rightarrow \vec{\mu} = -\frac{e}{2m} \vec{l} \quad (7.55)$$

$$\mu_B := \frac{e}{2m} \hbar = 9,27 \cdot 10^{-24} \text{ A m}^2 \quad (7.56)$$

$$= 0,58 \cdot 10^{-4} \frac{\text{eV}}{T} \text{ Bohrsches Magneton} \quad (7.57)$$

b) Präzession im Magnetfeld Drehmoment $\Rightarrow$ Präzession (Analog zum Kreisel)

$$D = \vec{\mu} \times \vec{B} = \frac{d\vec{l}}{dt} \quad (7.58)$$

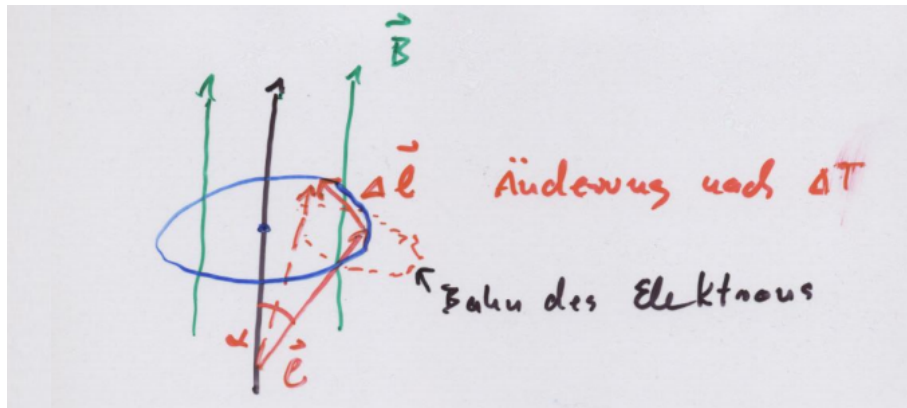


Abbildung 7.4

$$|\Delta \vec{l}| = |\vec{l}| \cdot \sin \alpha \cdot \omega \cdot \Delta T \quad (7.59)$$

$$\Rightarrow \frac{d|\vec{l}|}{dt} = |\vec{l}| \cdot \omega \cdot \sin \alpha \quad (7.60)$$

$$= \mu \cdot B \cdot \sin \alpha \quad (7.61)$$

$$\Rightarrow \omega_L = \frac{\mu \cdot B}{|\vec{l}|} \text{ Larmorfrequenz} \quad (7.62)$$

$$= \frac{\mu_D}{\hbar} \cdot B \quad (\text{QM}) \quad (7.63)$$

Drehimpulsquantelung:

diskrete Werte l, l_z

$$l_z = m_l \cdot \hbar; m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l \quad (7.64)$$

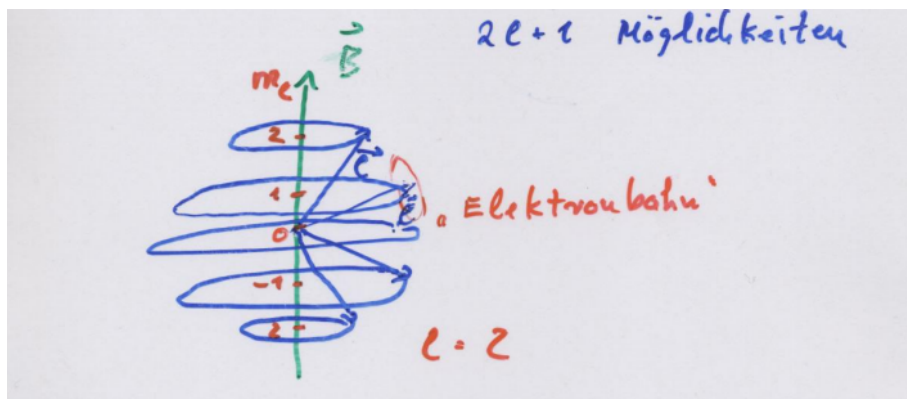


Abbildung 7.5

Messbar: Präzession: Komponenten in x, y-Richtung mitteln sich weg. Nur Komponenten $\parallel B$ ist messbar. Änderung der Drehimpulsrichtung $\parallel \vec{B}$ Für $\Delta m_l = 1$

$$\Delta V_{mag} = -\Delta \mu_Z \cdot B \quad (7.65)$$

$$= -\mu_B \cdot \Delta m_l \cdot B \quad (7.66)$$

$$= -\mu_B \cdot B = -\hbar \omega_l \quad (7.67)$$

7.3.2 ,

Erwartung:

Atome im s-Zustand ($l = 0$) sind nicht magnetisch ($\mu = 0$)

Beobachtung:

- Atome mit $l = 0$ und 1 Hüllenelektron (oder 3, 5, ...) sind paramagnetisch
- Ablenkung im inhomogenen Magnetfeld
- Feinstruktur in Spektrallinien

Erklärung:

Elektronen besitzt magn. Moment und Spin (Eigendrehimpuls)

Ansatz:

Spin $|\vec{s}| = \sqrt{s(s+1)}\hbar$

Magn. Moment $\vec{\mu}_s = -\frac{e}{2m}\vec{s} \cdot g_s$ mit g_s als Landéfaktor

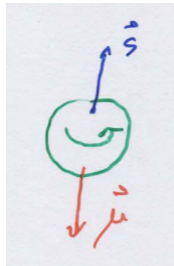


Abbildung 7.6

$$s = \frac{1}{2}$$

$$|\vec{s}| = \sqrt{\frac{3}{4}}\hbar$$

$$m_s = \pm \frac{1}{2}$$

$$g_s = 2,0023$$

($g_l = 1$ Für Bahndrehimpuls)

Im Magnetfeld

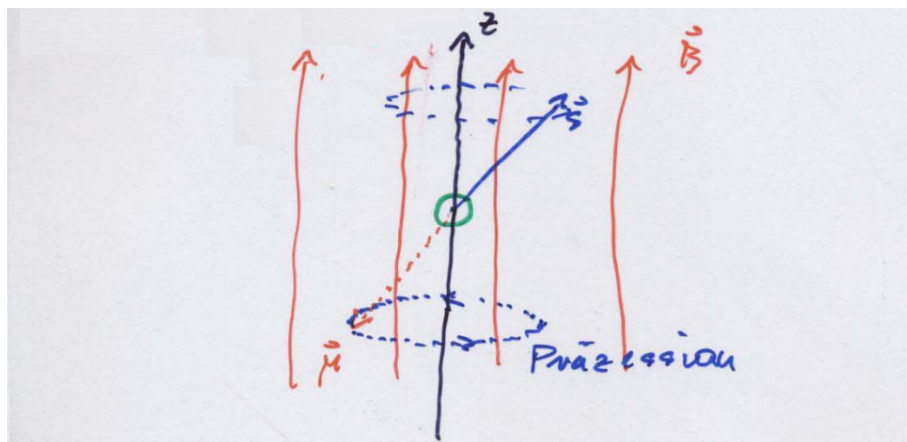


Abbildung 7.7

$$s_z = \pm \frac{\hbar}{2} \quad (7.68)$$

$$\mu_z = \mp 1,0012\mu_B \quad (7.69)$$

Gyromagnet. Verhältnis:

$$\gamma_s = \frac{|\vec{\mu}|}{|\vec{s}|} = \frac{g_s \cdot l}{2m} \quad (7.70)$$

$$\text{Spin: } \gamma_s = \frac{e}{m} \quad (7.71)$$

$$\text{Bahn: } \gamma_l = \frac{e}{2m} \quad (= 1\mu_B) \quad (7.72)$$

Messung der gyromagnetischen Verhältnisse (Einstein, de Haas 1915)

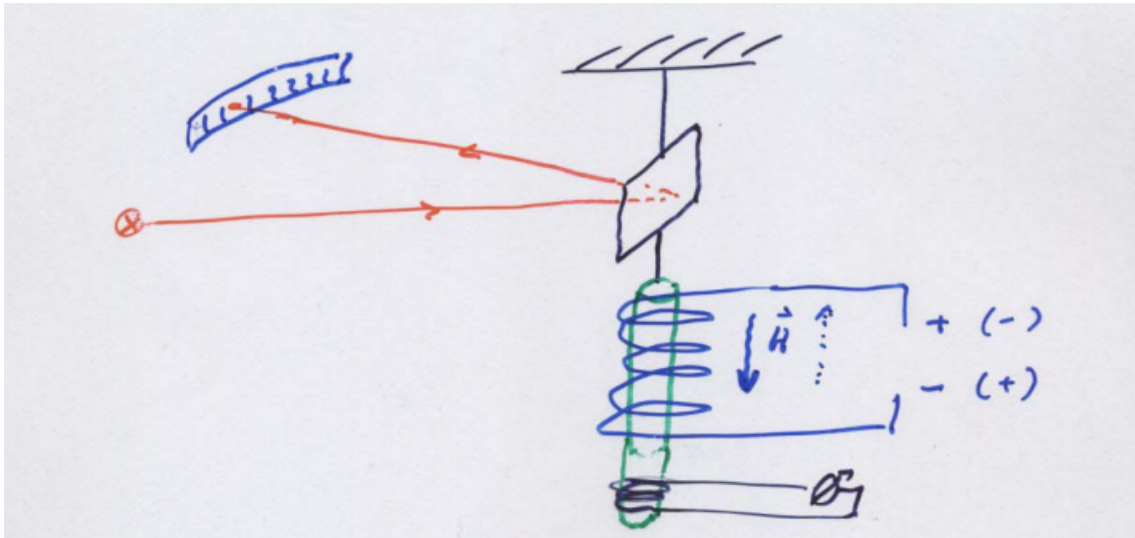


Abbildung 7.8

- i) Nach Anlegen von H : Ausrichtung der magn. Momente (Versuche energetisch niedrigsten Zustand zu erreichen)

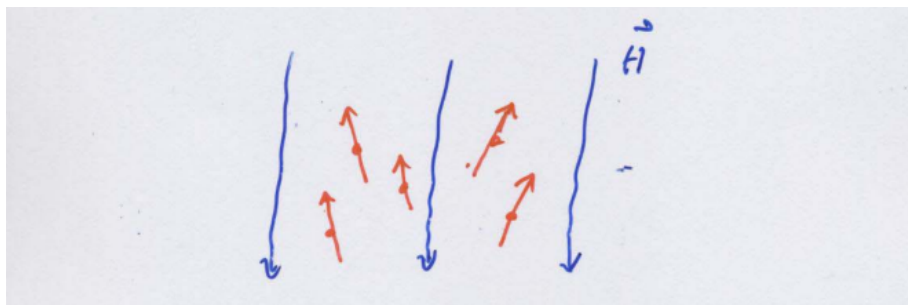


Abbildung 7.9

Das wird durch thermische Stöße.

- ii) Nach Umpolung: Umklappen des Spins

$$\Rightarrow \Delta L = \sum_1^n \Delta l_z = n \cdot 2l_z \quad (7.73)$$

$$\Delta \vec{M} = \sum_1^n \Delta \mu_z = n \cdot 2\mu_z \quad (7.74)$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta M}{\Delta L} = \frac{\mu_z}{l_z} \quad (7.75)$$

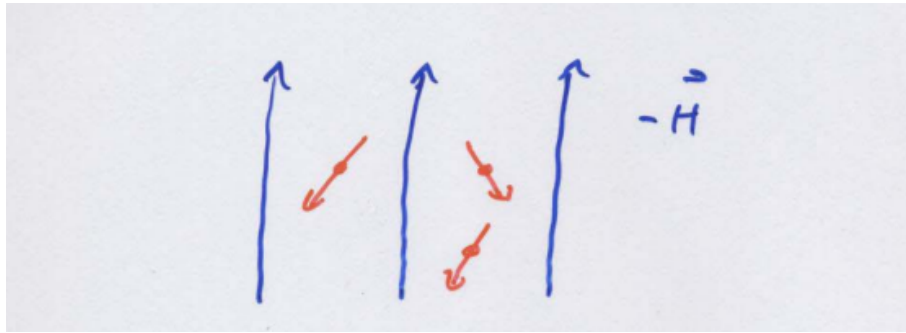


Abbildung 7.10

Speziell für reinen Spinnmagnetismus:

$$\frac{\Delta M}{\Delta L} = \frac{\mu_z}{s_z} = \frac{g_s}{2} \frac{e}{m} \Rightarrow g_s = 2 \quad (7.76)$$

7.3.3 Stern-Gerlach-Versuch (1921)

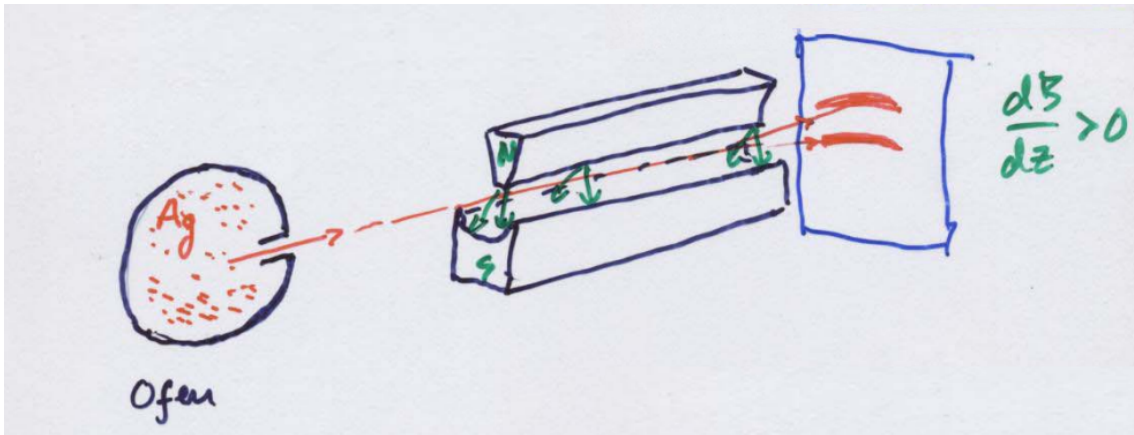


Abbildung 7.11: Aufspaltung der Atomstrahlen zu 2 Flecken

Deutung: mit $V_{\text{mag}} = -\vec{m} \cdot \vec{B}$:

$$\vec{F} = -\nabla V \quad (7.77)$$

$$= \nabla(\vec{\mu} \cdot \vec{B}) \quad (7.78)$$

$$\Rightarrow F_z = \mu \cdot \frac{dB}{dz} \cos \alpha \quad (7.79)$$

$$= \pm g_s \cdot \mu_B \cdot \frac{dB}{dz} m_s \quad (7.80)$$

$$= \pm \frac{dB}{dz} \mu_B \quad (7.81)$$

7.4 Spin- Bahnkopplung,

7.4.1

i) Potentielle Energie der Elektronen durch magn. Kopplung:

$$V_{ls} = -\vec{\mu}_s \cdot \vec{B}_l \quad (7.82)$$

$$= -g_s \frac{l}{2m} \cdot \vec{s} \cdot \vec{B}_l \quad (7.83)$$

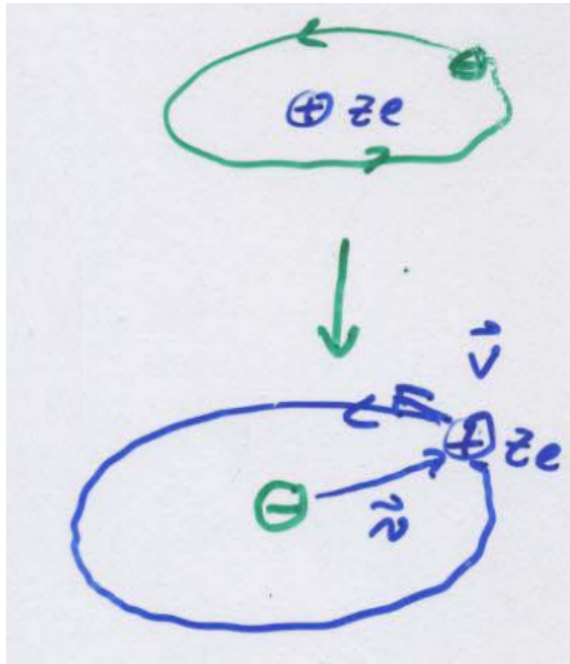


Abbildung 7.12

Elektron sieht Kreisstrom:

$$I = \frac{q}{T}; V = \frac{2\pi r}{T} \Rightarrow I = \frac{Ze \cdot v}{2\pi r} \quad (7.84)$$

Kreisstrom erzeugt ein Magnetfeld (Biot-Savart):

$$\vec{B} = \frac{I \cdot \mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\vec{s} \times \vec{r}}{r^3} \quad (7.85)$$

$$= -\frac{Ze}{4\pi\epsilon_0 c^2 r^3} \vec{v} \times \vec{r} \quad (7.86)$$

(r konstant)

Mit Bahndrehimpuls $\vec{l} = \vec{r} \times m\vec{v}$

$$\Rightarrow \vec{B}_l = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0 c^2 r^3 m} \vec{l} \quad (7.87)$$

$$V_{ls} = -\vec{\mu}_s \cdot \vec{B}_l = \frac{Ze^2}{8\pi\epsilon_0 c^2 m r^3} \vec{l} \cdot \vec{s} \quad (7.88)$$

$$= \alpha \frac{|\vec{l}| |\vec{s}|}{\hbar^2} \cos(\vec{l}, \vec{s}) \quad (7.89)$$

$$= \Delta E \quad (7.90)$$

ii) Drehimpuls

$$|\vec{j}| = \sqrt{j(j+1)}\hbar \quad (7.91)$$

$$|\vec{s}| = \sqrt{\frac{3}{4}}\hbar \quad (7.92)$$

$$|\vec{l}| = \sqrt{l(l+1)}\hbar \quad (7.93)$$

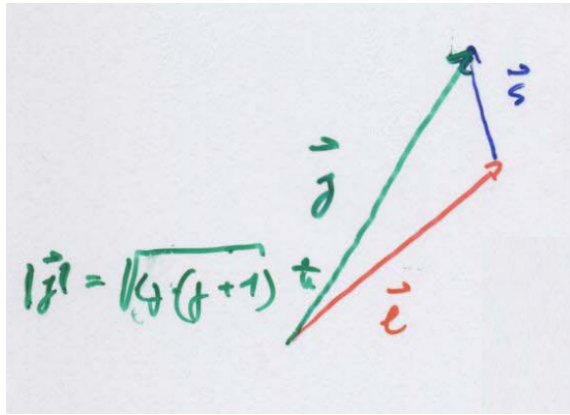


Abbildung 7.13

$$\text{Mit } \vec{j} = \vec{l} + \vec{s} \quad (7.94)$$

$$|\vec{j}|^2 = \vec{l}^2 + \vec{s}^2 + 2 \cdot \vec{l} \cdot \vec{s} \quad (7.95)$$

$$\Rightarrow \vec{l} \cdot \vec{s} = \frac{1}{2}(\vec{j}^2 - \vec{l}^2 - \vec{s}^2)\Delta E = \frac{a}{2}(j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4}) \quad j = l + \frac{1}{2} \text{ oder } l - \frac{1}{2} \quad (7.96)$$

ΔE : Feinstruktur im atomaren Spektrum durch Spin-Bahn-Kopplung

$$\Delta E = \begin{cases} l \cdot \frac{a}{2} & \text{für } j = l + \frac{1}{2} \\ -(l+1) \frac{a}{2} & \text{für } j = l - \frac{1}{2} \end{cases} \quad (7.97)$$

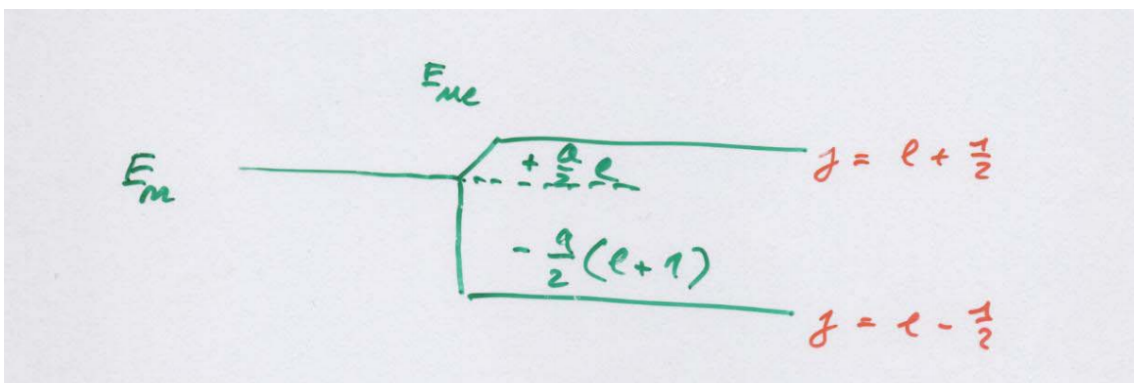


Abbildung 7.14

Bsp.: H-Atom mit $Z=1$

Aufhebung der Entartung der Energieniveaus

$$E_n = -\frac{Z^2 \cdot e^4 m}{6 \cdot \pi^2 \cdot \epsilon_0^2 \hbar^2} \quad (7.98)$$

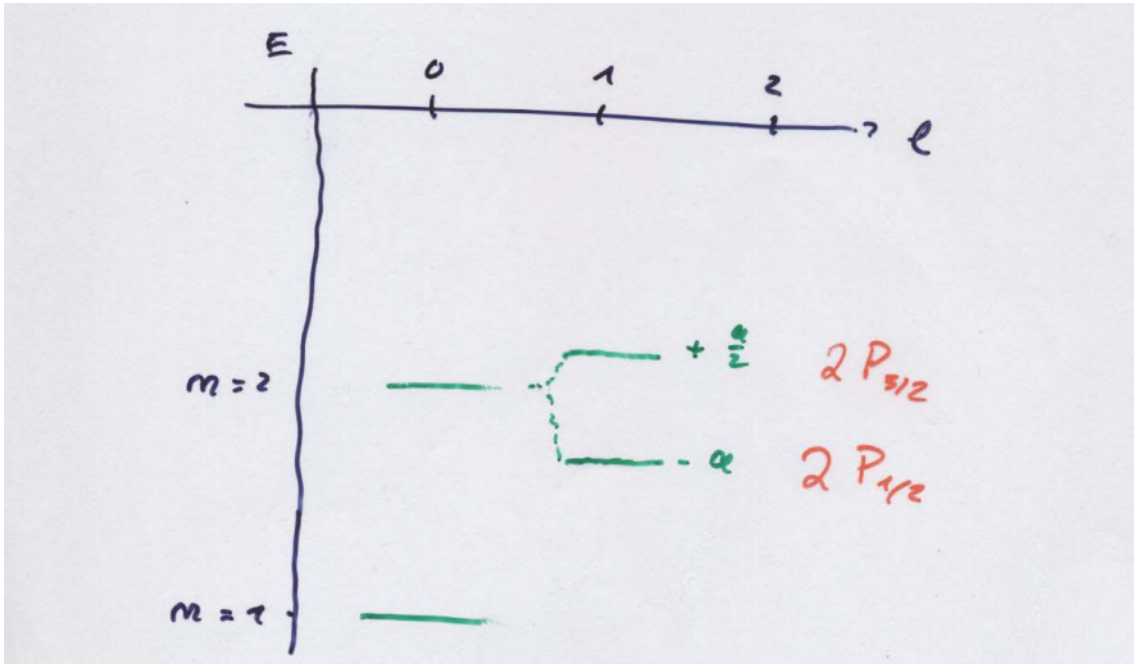


Abbildung 7.15

7.4.2 Relativistische Effekte

$$E \ll m_e \cdot c^2 \quad \text{aber } E \neq 0 \quad (7.99)$$

Näherung: Schrödingergleichung + $\gamma m = m_e$
 statt $H = \frac{p^2}{2m} + V$

$$H = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} - m c^2 + V \quad (7.100)$$

$$= m c^2 \sqrt{\frac{p^2}{m^2 c^2} + 1} - 1 + V \quad (7.101)$$

$$\approx m c^2 \left(1 + \frac{p^2}{2 m^2 c^2} - \frac{p^4}{8 m^4 c^4} - 1 \right) + V \quad (7.102)$$

$$= \frac{p^2}{2m} - \underbrace{\frac{p^4}{8 m^3 c^2}}_{\text{rel. Korrektur}} + V \quad (7.103)$$

$$\Delta E_{\text{rel}} = - \int u_{nl}^*(r) \frac{\hbar^2}{8 m_0^3 c^2} \Delta^2 u(r) d^3 r \quad (7.104)$$

$$= - \frac{m c^2}{2} (z \alpha^4) \left(\frac{1}{n^3 (l + \frac{1}{2})} - \frac{3}{4 n^4} \right) \quad (7.105)$$

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \quad (7.106)$$

7.4.3 Zusammenfassung

Gesamtenergie:

$$E_{n,j} = E_n + \underbrace{\delta E_{ls} + \Delta E_{rel}}_{\text{Feinstruktur}} \quad (7.107)$$

$$= E_n \left(1 + \frac{[Z\alpha]^2}{n} \left(\frac{1}{j + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4n} \right) \right) \quad (7.108)$$

7.5

Einfluss des Ervarte beim

$$\vec{\mu} = \frac{g_P e}{2m_P} \vec{s}; \quad (7.109)$$

$$\mu_P = \frac{1}{1836} \mu_l \quad (7.110)$$

Neutronen:

$$\vec{\mu} = 0 \quad (7.111)$$

Aber:

$$\text{Da aus Quanten zusammengesetzt} \begin{cases} g_P = 5,58 \neq 2 \\ g_n = 3,6 \neq 2 \end{cases} \quad (7.112)$$

Zu erwartender Effekt: Aufspaltung der Energieniveaus je nach Orientierung $\vec{j}$ (Gesamtdrehimpuls) und $\vec{I}$ (Kernspin). Gesamtdrehimpuls eines Atoms:

$$\vec{F} = \vec{I} + \vec{J} \quad (7.113)$$

$$|\vec{F}|^2 = I^2 + J^2 + 2\vec{I} \cdot \vec{J} \quad (7.114)$$

$$\vec{I} \cdot \vec{J} = \frac{1}{2} (F(F+1) - I(I+1) - J(J+1)) \quad (7.115)$$

$$\Delta E_{HFS} = -\frac{A}{2} (F(F+1) - I(I+1) - J(J+1)) \quad (7.116)$$

Das gilt allgemein, für das Wasserstoffatom:

Ergebnis für $n = 1, j = s = \frac{1}{2} f ==$ oder 1:

Abbildung 7.16

7.6 ()

Berücksichtigung der Quantisierung der Felder

→ Strahlungskorrektur

a) Grund-Diagramm für Coulomb-Feld:

b) Höhere Korrektur

Elektron Bittert"

Korrektur der Masse m_e

Korrektur der Magn. Momente

$$g_s \approx 2 \cdot \left(1 + \frac{\alpha}{2\pi} \right)$$

Korrekturen führen zu einer Energieverschiebung (Lamb)

$$\Delta E_{Lamb} = \alpha^5 m c^2 \frac{1}{4n^3} \left(0,05 \pm \frac{1}{\pi \cdot (j + \frac{1}{2})(l + \frac{1}{2})} \right) \text{ für } j = l \pm \frac{1}{2} \hat{=} 10\% \text{ von } E_{ls}$$

Abbildung 7.17

Abbildung 7.18

Abbildung 7.19: Möglich wenn $\Delta E \cdot \Delta t \leq \hbar$

Abbildung 7.20: Vakuumpolarisation

Abbildung 7.21

7.7 Alkali-Atome

Atome mit Elektronen in $m - 1$ Schalen und 1 Leuchtelektron in äußerster Hülle n .

Für das effektive Potential gilt nicht mehr die Proportionalität $\sim \frac{1}{r}$. Diese Proportionalität war für l -Entartung verantwortlich. Serienformel für Emissionsfrequenz neutraler Alkaliatome:

$$E_{n,l} = -\frac{Z^2 e^4 m}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2} \cdot \frac{1}{\underbrace{(n - \Delta(n,l))^2}_{n_{eff}}} \quad (7.117)$$

$\Delta(n,l)$: zu n und l gehörender Quanteneffekt, der empirisch die unterschiedliche Abschirmung der spd.-Elektronen der inneren Schale erfasst.

Abbildung 7.22

Abbildung 7.23

8. Atome im magnetischen und elektrischen Feld

8.1 Zeeman-Effekt (1896)

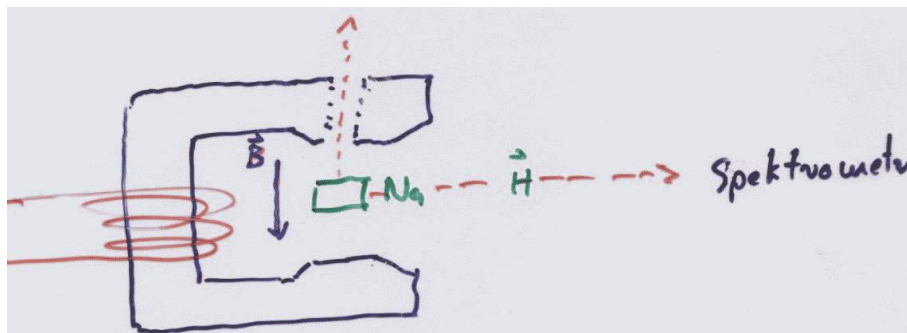
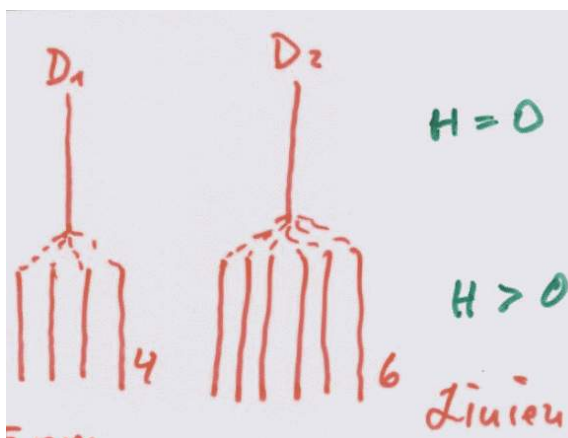


Abbildung 8.1: Zeeman-Effekt

Beobachtung:



$$D_1 = 589,5 \text{ nm}$$

$$D_2 = 588,4 \text{ nm}$$

Abbildung 8.2: Beobachtung

1. Interpretation der Aufspaltung

Für $H \leq 10^3 \text{ Gauß}$ ("kleine Felder"):

$$V_B = -\vec{\mu} \vec{B} = -m_j \cdot g_j \cdot \mu_B \cdot B$$

Für 1-Elektronensystem:

$$\begin{aligned} m\vec{u} = \vec{\mu}_s + \vec{\mu}_l &= -\frac{\mu_B}{\hbar}(g_s \cdot \vec{s} - g_l \vec{l}) \\ &= -\frac{\mu_B}{\hbar}(\vec{s} + \vec{j}) \end{aligned}$$

$\vec{\mu}_s$ magnetisches Spinmoment

$\vec{\mu}_l$ magnetisches Drehmoment

Für Mehr-Elektronensystem:

$$\begin{aligned} \vec{S} &= \sum \vec{s}_i & \vec{L} &= \sum \vec{l}_i \\ \vec{J} &= \vec{S} + \vec{L} & \vec{\mu} &= -\frac{\mu_B}{\hbar}(\vec{S} + \vec{J}) \end{aligned}$$

2. Fälle:

a) „Anormaler“ Zeeman-Effekt

$$\vec{L} \neq 0, \quad \vec{S} \neq 0$$

*LS Kopplung: Präzession von $\vec{S}, \vec{L}$ um die $\vec{J}$ Achse.

Hinweis:

Dies ist der Normalfall! Die Bezeichnung „anormaler“ Zeeman-Effekt hat historische Gründe und dient heute nur der Verwirrung. Die Überlagerung von Spin- und Bahnmagnetismus ist der allgemeine Fall.

Die beiden am optischen Übergang beteiligten Terme haben unterschiedlichen Anteil von Spin- und Bahnmagnetismus $\Rightarrow$ unterschiedliche g-Faktoren. Sie sind durch Gesamtdrehimpuls bestimmt.

$\Rightarrow g_j$ -Faktoren.

Berechnung der J Komponente von μ_j

$\vec{\mu}_l$ antiparallel zu $\vec{l}$

$\vec{\mu}_s$ antiparallel zu $\vec{s}$

$\vec{\mu}_j$ nicht antiparallel zu $\vec{j}$

Frage unterschiedlicher g-Faktoren ($g_s = 2, g_l = 1$)

$$\langle |\vec{\mu}_j| \rangle = |\vec{\mu}_j| \cdot \cos(\vec{\mu}_j, \vec{j}) \quad (8.1)$$

$$= \vec{\mu}_j \cdot \frac{\vec{j}}{|\vec{j}|} \quad (8.2)$$

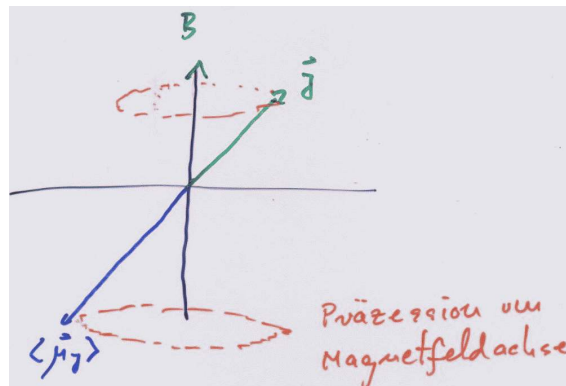
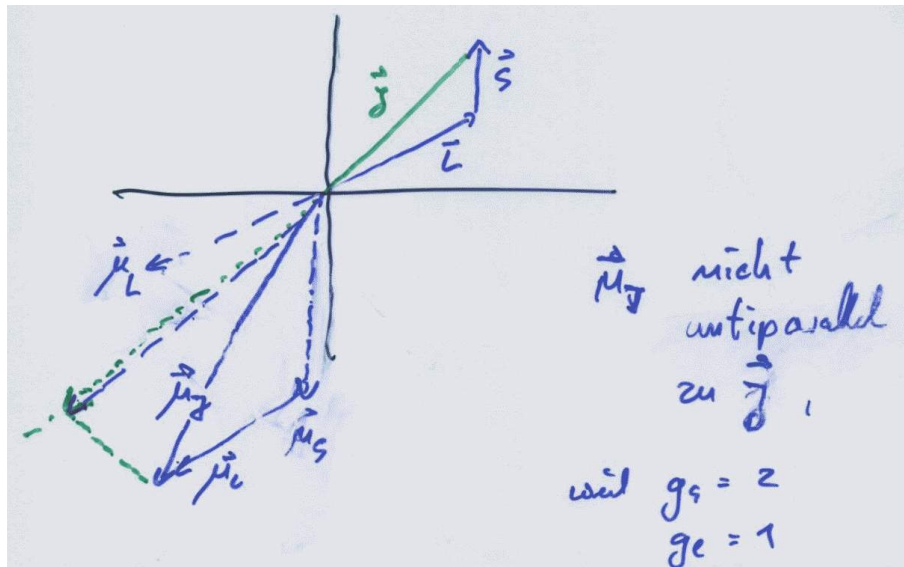
$\vec{\mu}_j$ präzediert um $\vec{J}$

Starke Kopplung $\Rightarrow$ schnelle Präzession

Zeitmittel: Projektion auf $\vec{J}$

Nur Projektion $\langle |\vec{\mu}_j| \rangle$ beobachtbar.

$\langle |\vec{\mu}_j| \rangle$ präzediert im äußeren B_0 -Feld um B_0 .



$$V_B = -\langle |\vec{\mu}_j| \rangle B \cdot \cos(\langle \vec{\mu}_j \rangle, \vec{B}) \quad (8.3)$$

$$= -\frac{\mu_j \cdot \vec{J}}{|\vec{J}|} \cdot \frac{\vec{J} \cdot \vec{B}}{|\vec{J}|} \quad (8.4)$$

$$= +\frac{\mu_B}{\hbar} \frac{(\vec{J} + \vec{S}) \cdot \vec{J} \cdot (\vec{J} \cdot \vec{B})}{|\vec{J}|^2} \quad (8.5)$$

$$= \frac{\mu_B}{\hbar} \cdot J_z \cdot B \cdot \frac{\vec{S} \cdot \vec{J} + \vec{J}^2}{|\vec{J}|^2} \quad (8.6)$$

$$(8.7)$$

$$\text{Mit } \vec{L} = \vec{J} - \vec{S}, \vec{S} \cdot \vec{J} = \frac{1}{2}[\vec{J}^2 + \vec{S}^2 - \vec{L}^2]$$

$$\Delta E_B = \langle V_B \rangle \quad (8.8)$$

$$= \frac{\mu_B}{\hbar} J_z \cdot B \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2J(J+1) + J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{J(J+1)} \quad (8.9)$$

$$= \mu_B B m_j \left(1 + \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)}\right) \quad (8.10)$$

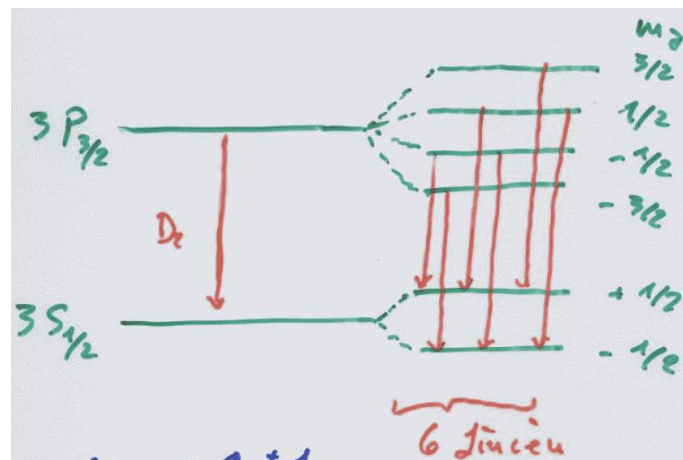
$$= \mu_B \cdot B \cdot m_j \cdot g_j \quad (8.11)$$

$$g_j = \begin{cases} 1 & \text{für } \vec{S} = 0 \\ 2 & \text{für } \vec{L} = 0 \\ 1 \dots 2 & \text{sonst} \end{cases} \quad (8.12)$$

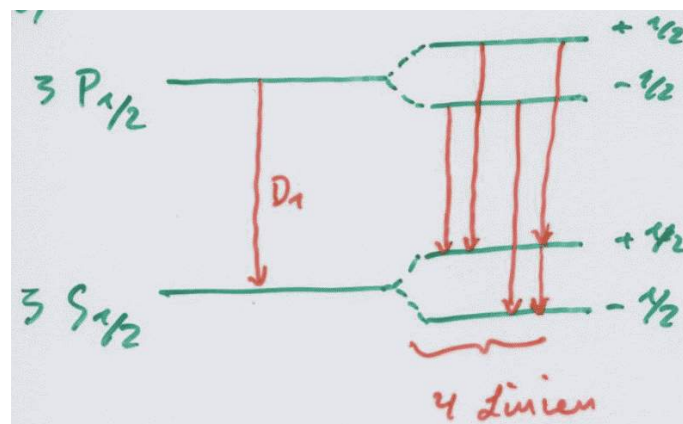
Energieübergänge:

$$\frac{\Delta E_1 - \Delta E_2}{\hbar} = \frac{\mu_B \cdot B}{\hbar} (m_{J1} g_{J1} - m_{J2} g_{J2}) \quad (8.13)$$

Beispiel für Na-D-Linien



i) $\Delta m = 0, \pm 1$



ii)

- b) Normaler Zeeman-Effekt: $\vec{S} = 0$
 Reine Bahndrehimpuls-Präzession
 $\vec{J} = \vec{L}$, $g_J = 1 = g_L$

$$\Delta E_B = \mu_B \cdot m_L \quad (8.14)$$

Frequenz:

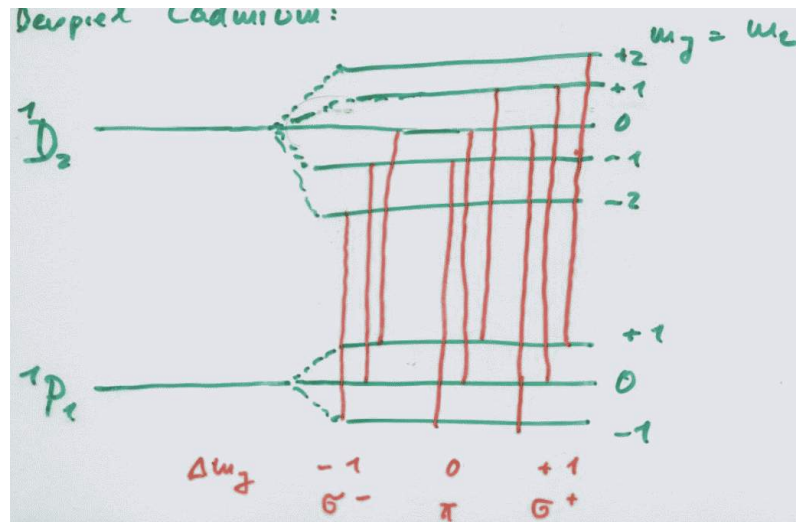
$$\Delta\omega = \frac{\Delta E_{B1} - \Delta E_{B2}}{\hbar} \quad (8.15)$$

$$= \frac{\mu_B}{\hbar} B \cdot \Delta m_L \quad (8.16)$$

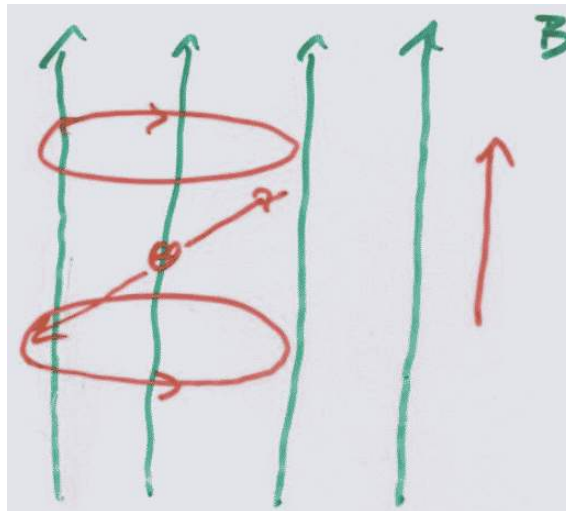
$$\Delta m_L = 0, \pm 1 \quad (8.17)$$

$$= 0, \pm \frac{eB}{2m} \quad (8.18)$$

Beispiel Cadmium:



c) Klassische Veranschaulichung



Mögliche Elektronenbahn: 3 Komponenten:

1 Oszillation

1 Linksorientierte Kreisbewegung

1 Rechtsorientierte Kreisbewegung

Erwarte: $\perp \vec{B}$: Dipolschwingung keine Energieänderung

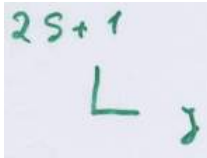
$\parallel \vec{B}$: Zirkular polarisiertes Licht

$$S_\omega = \pm \frac{e}{2m} B \quad (8.19)$$

$$= \pm \frac{\mu_B}{\hbar} B \quad (8.20)$$

$$\begin{aligned} \text{Für: } \omega &\rightarrow \omega + \Delta\omega & : \sigma^+ \\ \omega &\rightarrow \omega - \Delta\omega & : \sigma^- \\ \omega &\rightarrow \omega & : \pi \end{aligned}$$

Notation bei Mehrelektronatomen:



S Gesamtspin
 L Gesamtdrehimpuls
 J Hüllendrehimpuls

Bs: Cd-Atom:

$$^1D_2: \quad S = 0, L = 2, J = 2$$

$$^1P_1: \quad S = 0, L = 1, J = 1$$

Bs: Na-Atom:

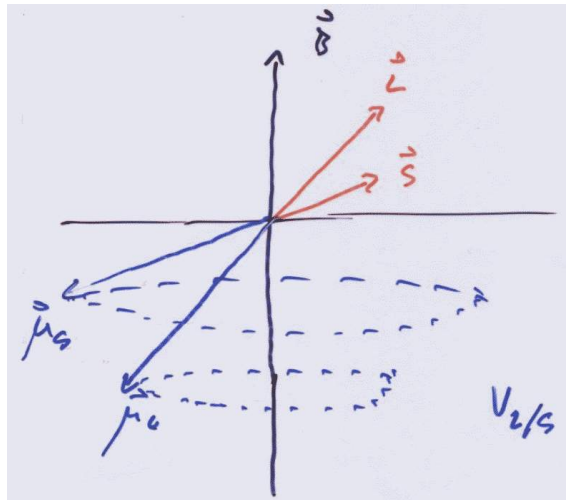
$$^2P_{\frac{1}{2}}: \quad S = \frac{1}{2}, L = 1, J = \frac{1}{2}$$

$$^2S_{\frac{1}{2}}: \quad S = \frac{1}{2}, L = 0, J = \frac{1}{2}$$

8.2 Paschen-Back-Effekt

$$B \leq 1T$$

Magnetische Kopplung zw. $\vec{L}$ und $\vec{S}$ aufgelöst, da Magnetfeld B > als Magnetfeld durch L .

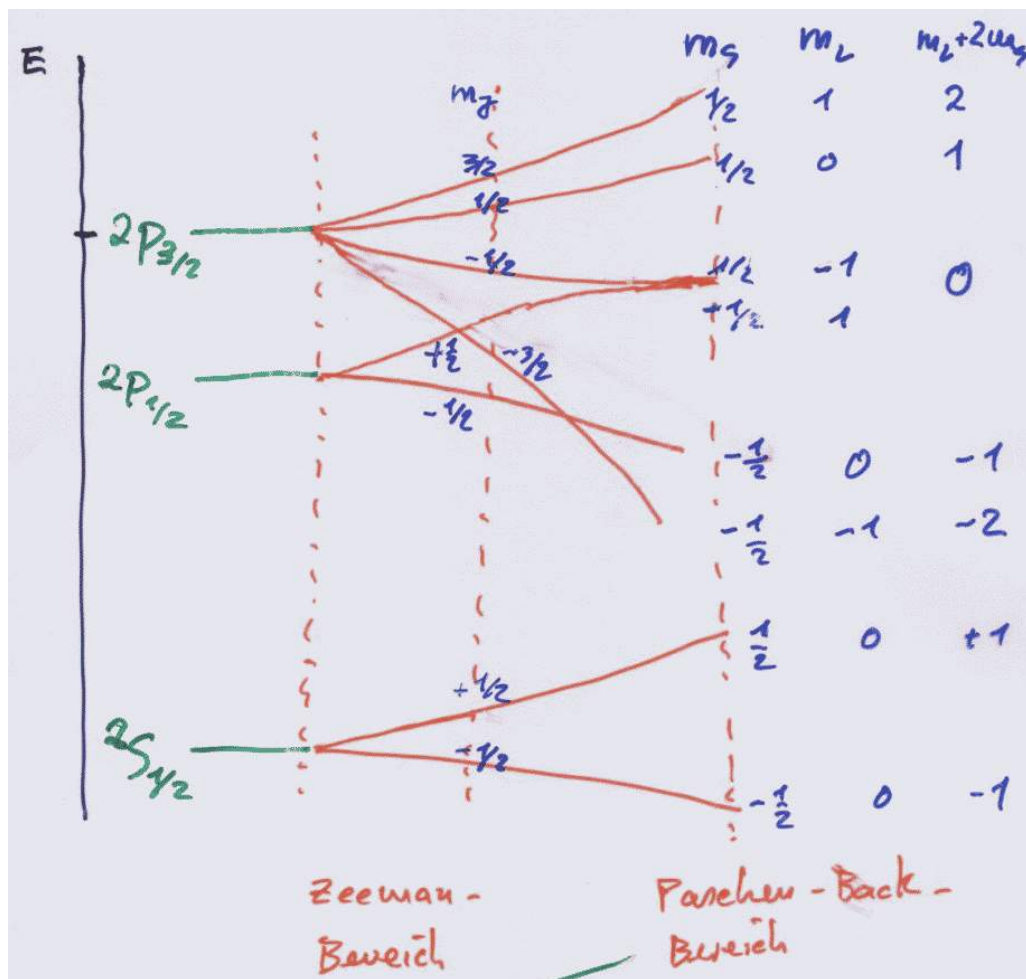


$$V_{\frac{L}{S}} = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = \vec{\mu}_L \vec{B} - \vec{\mu}_S \vec{B} \quad (8.21)$$

$$\Rightarrow \text{Energieniveaus: } \Delta E_{\frac{L}{S, B}} = (m_L + 2m_S)\mu_B B$$

$$\Rightarrow \text{Aufspaltung der Spektrallinien } \Delta\omega = (\Delta m_L + 2\Delta m_S) \frac{M_B}{\hbar} B$$

Bs: Na



Keine LS-Kopplung

Aufspaltung in 3 Linien bei den Übergängen:

$$\Delta m_S = 0 \quad (8.22)$$

$$\Delta m_L = 0, \pm 1 \quad (8.23)$$

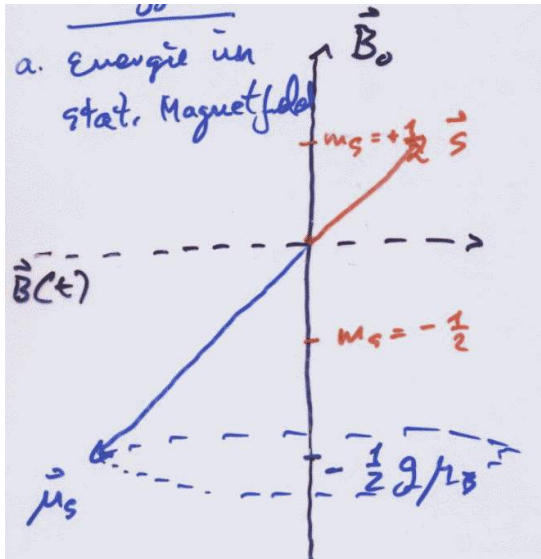
$$\Rightarrow \Delta \omega = 0, +\frac{\mu_B}{\hbar} B, -\frac{\mu_B}{\hbar} B \quad (8.24)$$

8.3 Elektronenspinresonanz ESR

ESR: Resonanzartige Übergänge zw. 2 Spinorientierung von Elektronen (oder Protonen)

1. Effekt

a) Energie im stat. Magnetfeld



$$\begin{aligned} V_{SB} &= -\vec{\mu}_S \cdot \vec{B}_0 \\ &= \frac{g_S \mu_B}{2m} \vec{S} \cdot \vec{B}_0 \\ \langle V_{SB} \rangle &= m_S g_S \mu_B B_0 \end{aligned}$$

mit $\Delta m_S = 1, g_S = 2$:

$$\Delta E = 2\mu_B B_0 \text{ Energieunterschied} \hat{=} m \cdot \nu \text{ mit } \nu = 2,8 \cdot 10^{10} \frac{\text{Hz}}{\text{T}} B_0$$

b) Bei Einstrahlung eines magn. Wechselfeldes:

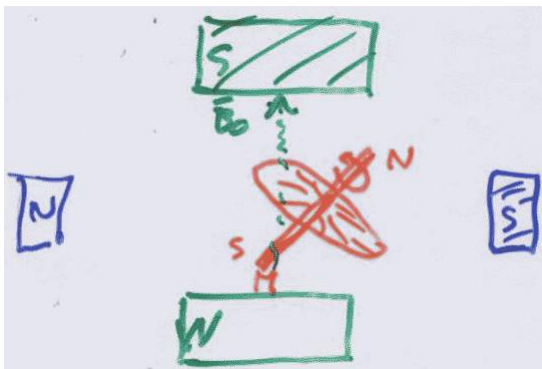
$$B(t) = B \cdot \sin \omega t$$

$$\text{Für } \omega = \frac{2\mu_B \cdot B_0}{\hbar} = \frac{\Delta E}{\hbar}:$$

Resonanzartiges Umkappen des Elektronenspins

⇒ Absorption, isotrope Abstrahlung dieser Energie.

2. Mechanische Illustration

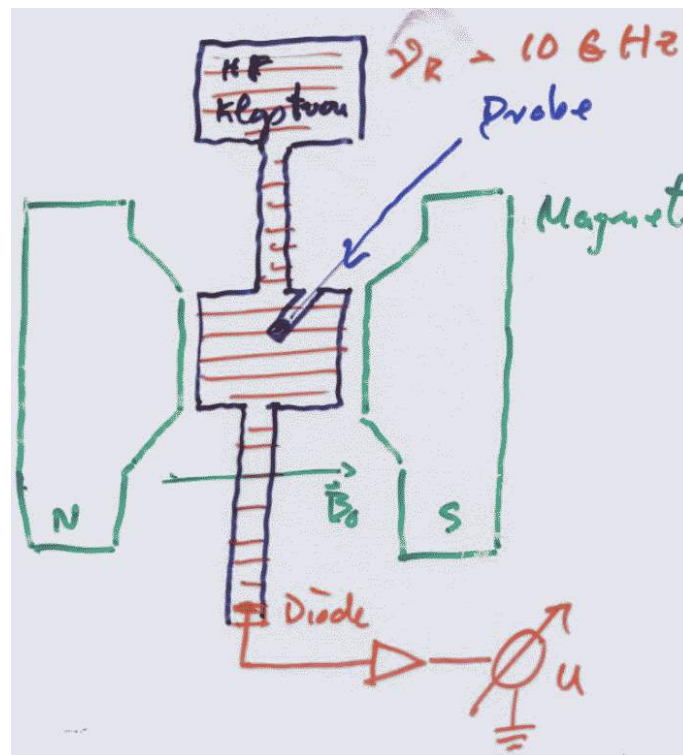


Im stat. Magnetfeld: Präzession um B_0 .

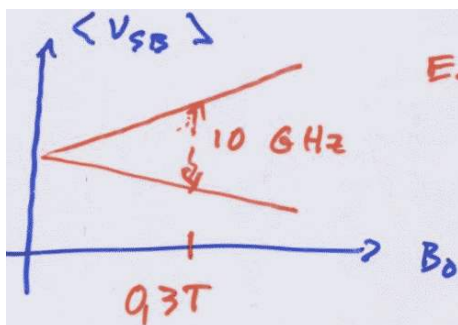
Zusätzliches zeitliches Magnetfeld:

Schwingung der Drehachse (zusätzlich veränderliches Drehmoment)

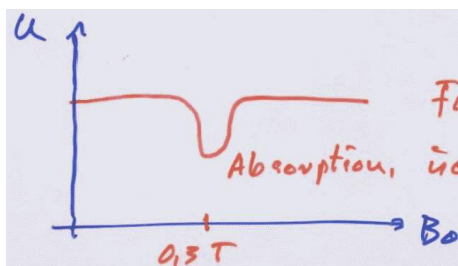
3. Experiment zu ESR



Einstrahlung von $B(t)$



Energieaufspaltung



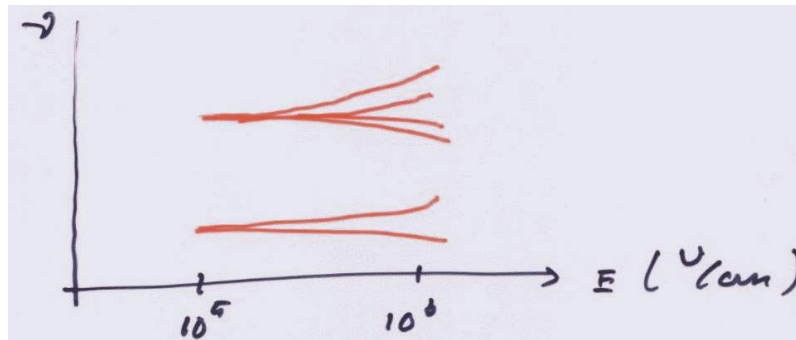
Für $\nu = 10 \text{ GHz}$
Absorption, isotrope Abstrahlung

4. Anwendung:

Bestimmung von g_s, g
Magnetische Eigenschaften chemischer Stoffe
Für Protonspinresonanz:
NMR
(Nukleare Magnetische Resonanz)
bei $\nu = 42 \frac{\text{MHz}}{\text{T}} \cdot B$

8.4 Stark-Effekt (1915)

Aufspaltung von Linien im El. Feld.



Hintergrund: El. Feld erzeugt
Dipol in Atomhülle
 $\vec{d} = \alpha \cdot \vec{E}$
 α Polarisierbarkeit
 $V_{el} = \frac{1}{2} \vec{d} \cdot \vec{E} = \frac{1}{2} \alpha E^2$

9. Mehrelektronensysteme (Pauliprinzip)

9.1 Das Heliumatom

9.1.1 Energiezustände

He: $2e^-$, $2n$, $2P$

a) 0. Näherung: $2e^-$ im Coulompotential $z = 2$

$$H = H_1 + H_2 \quad (9.1)$$

$$\Psi = \Psi_1(\vec{r}_1) \cdot \Psi_2(\vec{r}_2) \quad (9.2)$$

$$E = -\frac{R_{He} \cdot \hbar c Z^2}{n_1^2} - \frac{R_{He} \cdot \hbar c Z^2}{n_2^2} \quad (9.3)$$

$$[R_{He} = \frac{me^4}{64\pi^2\epsilon_0^2\hbar^3c}] \quad (9.4)$$

$$E = -4 \cdot 13,6 \text{ eV} \cdot \left(\frac{1}{n_1^2} + \frac{1}{n_2^2} \right) \quad (9.5)$$

$$= 108 \text{ eV} \quad \text{für } n_1 = n_2 = 1 \quad (9.6)$$

Erwarte Ionisationsenergie:

$$E_\infty = 54 \text{ eV/Elektron} \quad (9.7)$$

Beobachtet:

$$E_{\infty 1} = 24,6 \text{ eV} \quad (9.8)$$

$$E_{\infty 2} = 54,4 \text{ eV} \quad (9.9)$$

$$E = 79 \text{ eV} \quad (9.10)$$

Erwarte Ionisationsenergie:

$$E_\infty = 54 \text{ eV/Elektron} \quad (9.11)$$

Beobachtet:

$$E_{\infty 1} = 24,6 \text{ eV} \quad (9.12)$$

$$E_{\infty 2} = 54,4 \text{ eV} \quad (9.13)$$

$$E = 79 \text{ eV} \quad (9.14)$$

b) 1. Näherung: Beziehe V_{12} mit ein!

$$\Delta E = \int \int \Psi^*(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_{1/2}} \Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) d\tau_1 d\tau_2 \quad (9.15)$$

$$d\tau_1 = r_1^2 \sin \theta_1 d\theta_1 d\psi_1 dr_1 \quad (9.16)$$

$$d\tau_2 = r_2^2 \sin \theta_2 d\theta_2 d\psi_2 dr_2 \quad (9.17)$$

Für Grundzustand: Wasserstoffwellenfunktion:

$$\Psi = \Psi_{100}(r_1) \cdot \Psi_{100}(r_2) \quad (9.18)$$

$$\Rightarrow \Delta E = \frac{5}{4} \frac{me^4}{2\hbar^2(4\pi\epsilon_0)^2} = 34 \text{ eV} \quad (9.19)$$

$$\Rightarrow E = E_0 + \Delta E \quad (9.20)$$

$$= (-108,8 + 34) \text{ eV} = -74,8 \text{ eV} \quad (9.21)$$

5 % Fehler

c) Termschema: Wasserstoffähnlich

1. e^- sitzt bei $r = 1, l = 0$

2. e^- sitzt bei $r \geq 1, l \geq 0$

Guter Ansatz, **aber**: Beobachtung von 2 Systemen des He:

$$\rightarrow \text{Parahelium (Singulettssystem Spin } \uparrow\downarrow S = 0) \quad (9.22)$$

$$\rightarrow \text{Orthohelium(Triplettssystem Spin } \uparrow\uparrow S = 1) \quad (9.23)$$

Es fehlt der 1^3S_1 - Zustand!

$\Rightarrow$ Pauliprinzip: es gibt keine Zustände bei Fermionen mit identischen Quantenzahlen.

Grafik:

Abbildung 9.1: Termshema von Helium

9.1.2 Wellenfunktion

a) Ansatz:

Symmetrische Gesamtfkt.

$$\Psi_S(1, 2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Psi_1(1) \cdot \Psi_2(1) + \Psi_2(1) \cdot \Psi_1(2)) \quad (9.24)$$

Antisymm. Gesamtfkt.

$$\Psi_A(1, 2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Psi_1(1) \cdot \Psi_2(2) - \Psi_1(2) \cdot \Psi_2(1)) \quad (9.25)$$

Symmetrie bezieht sich auf Austausch Elektron 1 mit Elektron 2 Vertauschung $1 \rightarrow 2$ bzw. $2 \rightarrow 1$:

$$P \cdot \Psi_S = \Psi_S \quad (9.26)$$

$$|P\Psi_S|^2 = |\Psi_S(2, 1)|^2 = |\Psi_S(1, 2)|^2 \quad (9.27)$$

$$P \cdot \Psi_A = -\Psi_A \quad (9.28)$$

$$|P\Psi_A|^2 = |-\Psi_A(2, 1)|^2 = |\Psi_A(1, 2)|^2 \quad (9.29)$$

$$\Rightarrow |\Psi_S|^2 = |\Psi_1(1)|^2 \cdot |\Psi_2(1)|^2 \quad \text{für id. Koordinaten, d.h. } r_1 = r_2 \quad (9.30)$$

$$|\Psi_A|^2 = 0 \quad (9.31)$$

"Anwendun": $\underbrace{\Delta_{3/2}^{++}}_{\text{Baryon } l=0}$ Resonanz

b) Symmetrieeigenschaften von Teilchen Pauli: gekoppelt an Spin

Für identische Teilchen

Bosonen: Ψ_S

Abbildung 9.2

Spin 0,1, ..

Bsp.:

$$\underbrace{H}_0, \underbrace{\gamma, g, \omega^\pm}_1, \underbrace{z, G}_{\geq 2},$$

Phononen,

He^4

Alle Quantenzahlen können übereinstimmen

Bose-Einstein-Statistik (Im thermischen Gleichgewicht)

$$N(E) = \frac{1}{a \cdot e^{E/kT} - 1} \quad (9.32)$$

Fermionen Ψ_A

Spin $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$

Bsp.:

Quarks, Leptonen

Phononen, $p, m, He^3, \Delta_{3/2}^{++}$

Besitzen ungleiche Quantenzahlen

Fermi-Dirac-Statistik (Im thermischen Gleichgewicht)

$$N(E) = \frac{1}{a \cdot e^{E/kT} + 1} \quad (9.33)$$

Für nicht ident. Teilchen:

Maxwell-Boltzmann-Statistik

$$N(E) = \frac{1}{a \cdot e^{E/kT}} \quad (9.34)$$

c) Spinzustände für Systeme mit 2 id. Teilchen

Spins können $\uparrow\uparrow, \downarrow\downarrow, \downarrow\uparrow$ oder $\uparrow\downarrow$ sein

Triplet:

$$\chi_S(1, 2) = \chi^+(1) \cdot \chi^+(2) \quad (9.35)$$

$$= \chi_1^1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} [\chi^+(1) \cdot \chi^-(2) + \chi^+(2) \cdot \chi^-(1)] = \chi_1^0 \quad (9.36)$$

$$\chi^-(1) \cdot \chi^-(2) = \chi_1^{-1} \quad (9.37)$$

Singulett:

$$\chi_A(1, 2) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\chi^+(1) \cdot \chi^-(2) - \chi^+(2) \cdot \chi^-(1)] = \chi_0^0 \quad (9.38)$$

Gesamtwellenfunktion: Antisymmetrie:

$$\Psi_A = \Psi_S(1, 2) \cdot \chi_A(1, 2) \quad \text{oder} \quad (9.39)$$

$$\Psi_A = \Psi_A(1, 2) \cdot \chi_S(1, 2) \quad (9.40)$$

Für 2 ideale Fermionen

Beispiel:

i) Helium im Grundzustand $\uparrow\downarrow$

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Psi_1(1) \cdot \Psi_2(2) + \Psi_2(1) \cdot \Psi_1(2)) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(\chi^+(1) \cdot \chi^-(2) - \chi^-(1) \cdot \chi^+(2)) \quad (9.41)$$

$$= \Psi_{100}(r_1) \cdot \Psi_{100}(r_2) \cdot \chi^+(1)\chi^-(2) - \chi^-(1)\chi^+(2) \quad (9.42)$$

$$(9.43)$$

ii) Helium im angeregten Zustand $\downarrow\uparrow$ oder $\uparrow\uparrow$

$$\Psi_{sing.} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Psi_1(1) \cdot \Psi_2(2) + \Psi_2(1) \cdot \Psi_1(2)) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(\chi^+(1) \cdot \chi^-(2) - \chi^-(1) \cdot \chi^+(2)) \quad (9.44)$$

$$(9.45)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\Psi_{100}(r_1) \cdot \Psi_{100}(r_2) + \Psi_{200}(r_1) \cdot \Psi_{200}(r_2) \cdot \chi_0^0 \Psi_{Trip.} = \frac{1}{\sqrt{2}}[\Psi_{100}(r_1)\Psi_{200}(r_2) - \Psi_{200}(r_1)\Psi_{100}(r_2)] \quad (9.46)$$

$$(9.47)$$

d) Energieniveaus 1^1S_0 :

$$\Delta E = \int \int \Psi^* V_{12} \Psi d\tau_1 d\tau_2 \quad (9.48)$$

$$= \int \int |\Psi_{100}(r_1) \cdot \Psi_{100}(r_2)|^2 \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} d\tau_1 d\tau_2 \quad (9.49)$$

$$= \langle V_{12} \rangle \quad (9.50)$$

$$\chi^* \chi = 1 \quad (9.51)$$

$$= \frac{5}{4} \frac{me^4}{2\hbar(4\pi\epsilon_0)^2} \quad (9.52)$$

$$= 34 \text{ eV} \quad (9.53)$$

Erinnerung:

$$E_0 = -54,4 \text{ eV} 1e^- \quad (9.54)$$

$$E_0 = -24,6 \text{ eV} 2e^- \quad (9.55)$$

2^1S_0 :

$$\Delta E = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \int \int [\Psi_{100}^2(r_1) \cdot \Psi_{200}^2(r_2) + \Psi_{100}^2(r_2) \cdot \Psi_{200}^2(r_1) + \Psi_{100}^*(r_1)\Psi_{200}^*(r_2) \cdot \Psi_{100}(r_2) \cdot \Psi_{100}(r_1) + \Psi_{100}^*(r_2)\Psi_{200}^*(r_1) \cdot \Psi_{100}(r_1) \cdot \Psi_{100}(r_2)] \quad (9.56)$$

$$(9.57)$$

2^3S_1 :

$$\Delta E = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \int \int [-] d\tau_1 d\tau_2 \quad (9.58)$$

$$\langle V'_{12} \rangle - \Delta E_{Austausch} \Delta E_{Austausch} = 0,4 \text{ eV} \quad (9.59)$$

9.1.3 Aufbau der Elemente ($z > 1$)

- a) Ohne Pauliprinzip: Alle Elektronen auf Niveau $m = 1$
- b) Mit Pauliprinzip:

Abbildung 9.3: Schema zum Pauliprinzip

K- Schale: $n = 1, l = 0, m_l = 0, m_s = \pm \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow n_l = 2$$

K- Schale: $n = 2, l = 0, m_l = 0, m_s = \pm \frac{1}{2} \quad l = 1 \quad m_l = 1, 0, -1$

$$\Rightarrow n_l = 8$$

M- Schale: $n = 3, l = 0, m_l = 0, m_s = \pm \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow n_l = 2$$

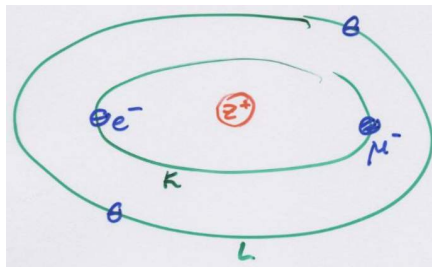
$l = 1 \quad m_l = 1, 0, -1 \quad l = 2, m_l = 2, 1, 0, -1, -2$

$$\Rightarrow n_l = 18$$

Allgemein: $n = n$: n Werte von l $2l + 1$ Orientierungen von $m_l \Rightarrow \sum_{l=0}^{n-1} 2(2l + 1) = 2n^2$

10. Exotische Systeme

10.1 Myonische Atome



Ersetze Elektron
durch μ^-

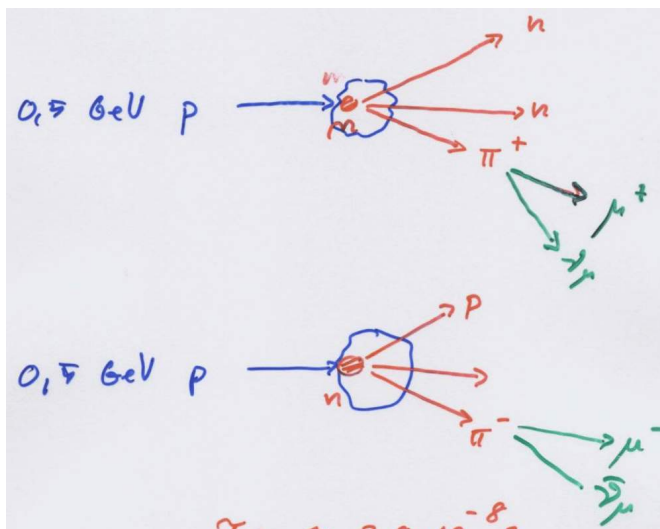
$$E_n^{(\mu)} = -\frac{Z^2 \alpha^2 m_\mu c^2}{2n^2} \quad (10.1)$$

$$\approx 207 \cdot E_n^{(l)} \quad (10.2)$$

$$r_n^{[\mu]} = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2 \text{keine Ahnung}}{Ze^2 m_\mu} n^2 = \frac{r_n^{(l)}}{207} \quad (10.3)$$

Bs: 12 Magnesium:	$E_1^{(l)}$	$= -2 \text{ keV}$
	$r_1^{(l)}$	$= 4,5 \cdot 10^{-12} \text{ m}$
12 Magnesium (μ^-):	$E_1^{(\mu)}$	$= -414 \text{ keV}$
	$r_1^{(\mu)}$	$= 2,2 \cdot 10^{-14} \text{ m} \hat{=} 22 \text{ fm In Kernnähe}$

Erzeugung von $\mu^\pm$ am Beschleuniger



$$\tau_\pi \sim 2,8 \cdot 10^{-8} \text{ s}$$

$$\tau_\mu \sim 2 \cdot 10^{-6} \text{ s}$$

10.2 Positronium

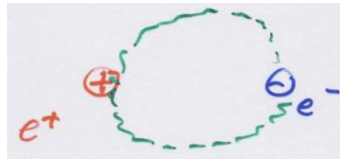


Abbildung 10.1: Positronium

Analog zum H-Atom:

$$E_n^{(pos)} = -\frac{\alpha^2 m c^2}{2n^2}, \quad (10.4)$$

$$\left(m = \frac{m_{e^+} \cdot m_{e^-}}{m_{e^+} + m_{e^-}} = \frac{m_e}{2} \right) \quad (10.5)$$

$$= \frac{1}{2} E_n^{(H)} \quad (10.6)$$

$$\Delta E_{FS}^{(Pos.)} = \frac{1}{2} \Delta E_{FS}^{(H)} \quad (10.7)$$

$$\Delta_{HFS}^{(Pos.)} \approx \Delta E_{FS}^{(Pos.)} \quad (10.8)$$

$$\text{da } \mu_{Pos.} = -\mu_{e^-} \approx 2000 \cdot \frac{2}{5,6} \mu_P \quad (10.9)$$

„Ende“ von Positronium:

Verschwimmt durch Vernichtung von e^+ , e^-

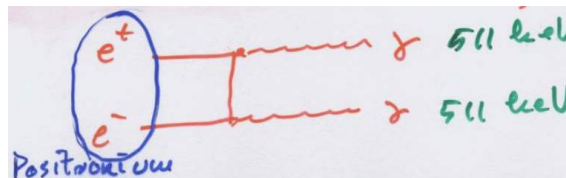


Abbildung 10.2: Vernichtung des Positroniums

10.3 Myonium

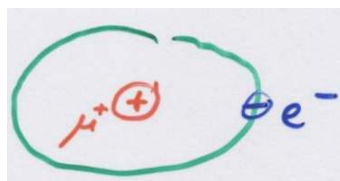


Abbildung 10.3: Myonium

Berücksichtige

$$m = \frac{m_\mu m_e}{m_\mu + m_e} = m_e \cdot \frac{207}{208} \quad (10.10)$$

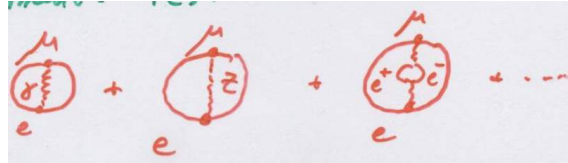
$$\Rightarrow \Rightarrow E_n^{(\mu_e)} = 0,995 \cdot E_n^{(H)} \quad (10.11)$$

Entspricht ganz dem H-Atom

HFS: Aufspaltung von $1^2S_{1/2}$: $\Delta\nu_{HFS} = 4463 \text{ MHz}$ für Myonium
 1419 MHz für H

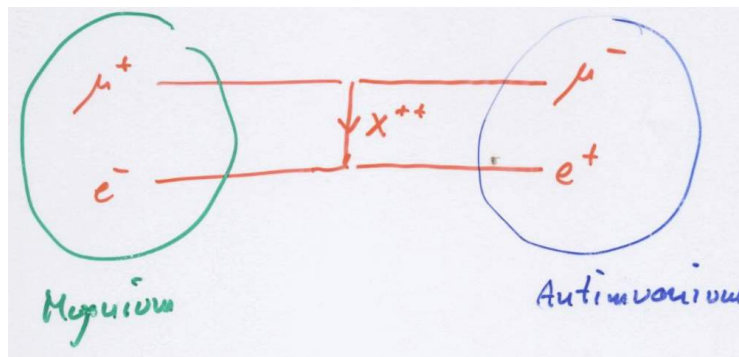
$$\Rightarrow \frac{\mu_\mu}{\mu_P} = 3,2 \quad \left(\frac{m_\mu}{m_P} \approx 9 \right) \quad (10.12)$$

Interessant: Test der QED



„Anwendung:“

Suche nach Myonium-Antimyonium-Konversion



$$P_{\text{Konversion}} < 8 \cdot 10^{-9} \quad (10.13)$$

$$m_{X^{++}} > 1,1 \text{ TeV}/c^2 \quad (10.14)$$

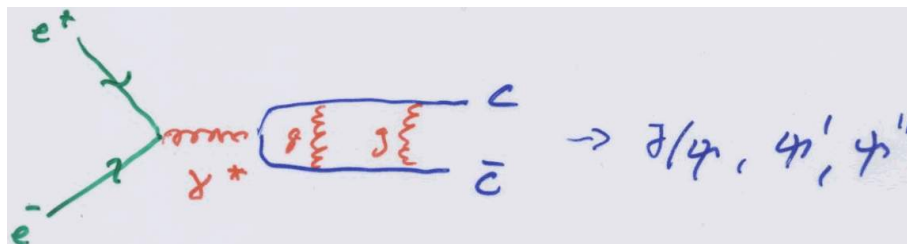
10.4 Gebundene Quarksysteme

„Atome“ von $q + \bar{q}$, durch starke Wechselwirkung gebunden.

a) $J/\Psi, \Psi'$

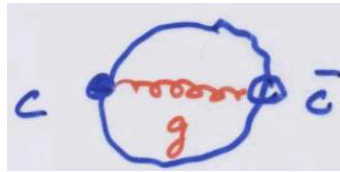
J : Ting

Ψ : Rechter



$$m_{J/\psi} c^2 \triangleq E_{e^-} + E_{e^+} = 3097 \text{ MeV} \quad (10.15)$$

$$m_c = m_{\bar{c}} \sim 1,5 \text{ GeV}/c^2 \quad (10.16)$$



Bindung durch Coulombartiges Potential (spektroskopische Untersuchung)

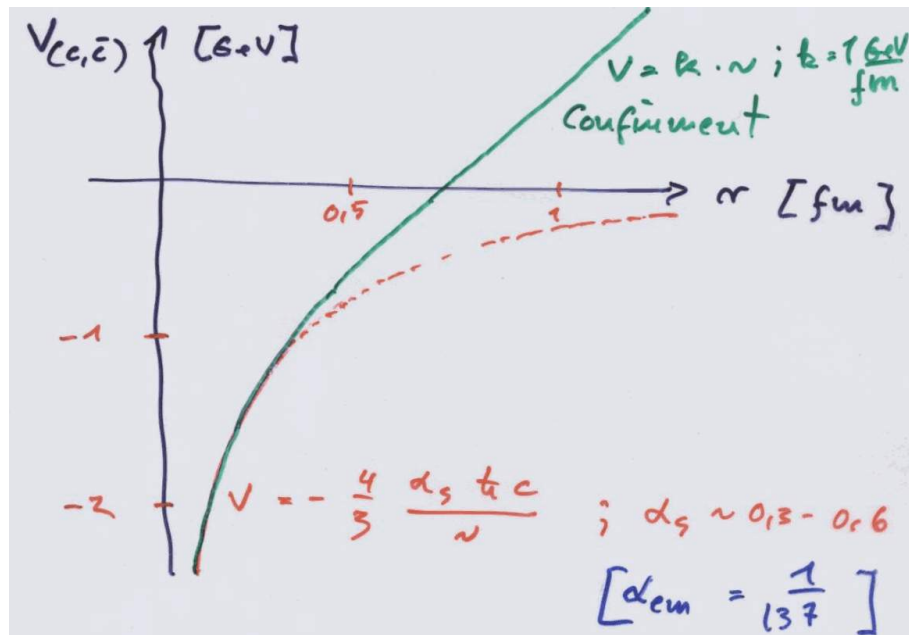


Abbildung 10.4: Potential

Grund für Confinement:

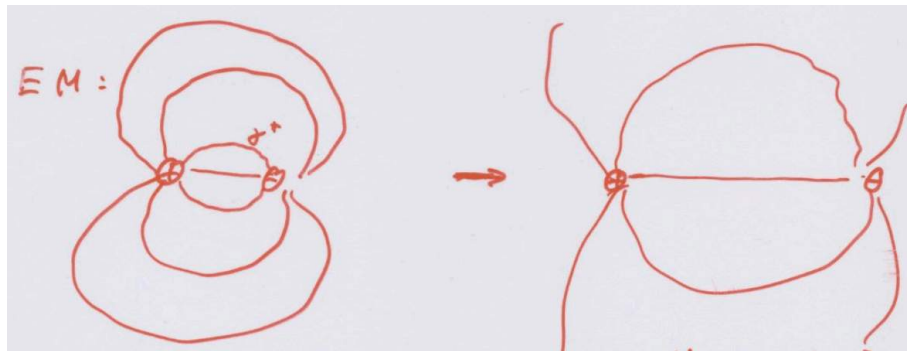


Abbildung 10.5: Kraft nimmt mit $\frac{1}{r^2}$ ab.

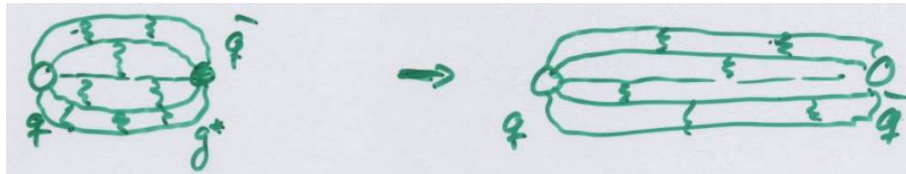
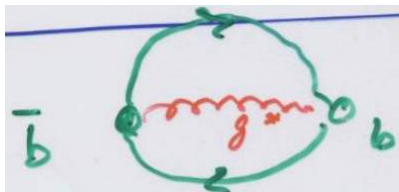


Abbildung 10.6: F ist konstant: Gluonen „ziehen sich an“

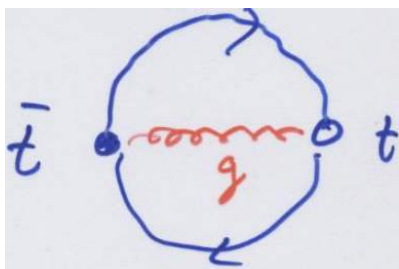
b) Υ -Teilchen



$$m_{\Upsilon} = 9460 \text{ MeV}/c^2 \quad (10.17)$$

$$m_b = m_{\bar{b}} \approx 4,5 \text{ GeV}/c^2 \quad (10.18)$$

c) Toponium



$$m_t = m_{\bar{t}} = 172 \text{ GeV} \quad (10.19)$$

Gibt es nicht, da
 $\tau_t \sim 6 \cdot 10^{-25} \text{ s}$,
 kein gebundenes System möglich.

11. Emission von Lichtquanten

11.1 Linienbreite, Lebensdauer

1. Dopplereffekt Für eine mit v_x bewegte Lichtquelle:

$$\nu = \nu_0 \left(1 \pm \frac{v_x}{c}\right) \quad (11.1)$$

Bsp. im Gas: Atome besitzen Energie nach Boltzmannverteilung

$$dN(v_x) = N_0 \underbrace{e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}} dx}_{\text{Geschwindigkeitskomponente in 1 Richtung}} \quad (11.2)$$

$$I(\nu) = I_0 \cdot e^{-\frac{mc^2}{2kT} \left(\frac{\nu_0 - \nu}{\nu_0}\right)^2} \quad (11.3)$$

Abbildung 11.1

Halbwertsbreite:

$$\Delta\nu_{1/2} = 2\sqrt{2 \ln 2 \frac{kT}{mc^2}} \nu_0 \quad (11.4)$$

$$= 7,2 \cdot 10^{-7} \nu_0 \sqrt{\frac{T}{m}} \text{ Hz} \quad (11.5)$$

T in K, m in u Bsp: $H, T = 300K$

$$\frac{\Delta\nu_{1/2}}{\nu} = 1,2 \cdot 10^{-5} \quad (11.6)$$

2. Natürliche Linienbreite

- a) Übergangsrate $N(t)$ Atome im angeregten Zustand zur Zeit t . Übergänge im Zeitraum Δt

$$\Delta N = -\lambda \cdot \Delta t \cdot N \quad (11.7)$$

λ Übergangsrate des Systems.

$$\Rightarrow N(t) = N_0 e^{-\lambda t} \quad (11.8)$$

τ : Mittlere Lebensdauer eines angeregten Zustandes

$$\tau = \int_0^\infty t \cdot e^{-\lambda t} dt / \int_0^\infty e^{-\lambda t} dt \quad (11.9)$$

$$= \frac{1}{\lambda} \quad (11.10)$$

$$N(t = \tau) = N_0 / e = 0,37 N_0 \quad (11.11)$$

Mit $\Psi_k(t)$ Wellenfunktion des Atoms im Zustand k : Wahrscheinlichkeit Atome im Zustand k zu finden.

$$P_k(t) = |\Psi_k(t)|^2 \quad (11.12)$$

$$\propto N(t) \propto e^{-\lambda t} \quad (11.13)$$

$$\Rightarrow \Psi_k(t) = \Psi_{k0} \cdot e^{-\frac{\lambda}{2}t} \quad (11.14)$$

im stabilen (nicht strahlenden) Zustand

$$\Psi_{k0} = u_k \cdot e^{i\omega_k t} \quad (11.15)$$

$$\Psi_k(t) = u_k e^{i\frac{E_k}{\hbar}t} \cdot e^{-\frac{\Gamma}{2\hbar}t} \quad (11.16)$$

mit $E_k = \hbar\omega_k$

$$\Gamma = \lambda \cdot \hbar \quad (11.17)$$

b) Intensitätsverteilung Allgemein:

$$\Psi_k(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} C(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (11.18)$$

$$= u_k e^{i\omega_k t} \cdot e^{-\frac{\lambda}{2}t} \quad (11.19)$$

Fouriertransformierte:

$$C(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_k(t) e^{-i\omega t} dt \quad (11.20)$$

$$\Rightarrow C(\omega) = -u_k \left(\frac{1}{i(\omega_k - \omega) - \frac{\lambda}{2}} - \left(\frac{1}{i(\omega_k + \omega) - \frac{\lambda}{2}} \right) \right) \quad (11.21)$$

mit $\omega_k - \omega \ll \omega_k + \omega, \frac{\lambda}{2} \ll \omega_k + \omega$

$$C(\omega) = \frac{u_k}{i(\omega - \omega_k) - \frac{\lambda}{2}} \quad (11.22)$$

$$|C(\omega)|^2 = \frac{u_k^2}{(\omega - \omega_k)^2 + \frac{\lambda^2}{4}} \quad (11.23)$$

Abbildung 11.2

$$|C(E)|^2 = \frac{\hbar^2}{(E - E_\nu)^2} + \frac{\Gamma^2}{4} \quad (11.24)$$

Intensitätsverteilung

$$I(E) \sim |C|^2 \quad (11.25)$$

$$I(E) = I_0 \cdot \frac{(\Gamma/2)^2}{(E - E_k)^2 + (\Gamma/2)^2} \quad (11.26)$$

Abbildung 11.3

Γ Halbwertsbreite Bsp. Wasserstoff:

$$2p \rightarrow 1s \quad (11.27)$$

$$\tau = 1,6 \cdot 10^{-9} s \quad (11.28)$$

$$\Gamma = 4 \cdot 10^{-7} \text{ eV} \quad (11.29)$$

$$\Gamma/E = 4 \cdot 10^{-8} \quad (11.30)$$

11.2 Röntgenspektren

[K. Röntgen 1895 x-Strahlen entdeckt, Strahlen unsichtbar, keine Ablenkung im B-Feld, Refraktion in Kristallen. 1901 erster Physik-Nobelpreis]

1. Allgemeines

Licht mit $\lambda \sim 0,1 \dots 10 \text{ \AA} \hat{=} 100 \dots 10000 \text{ eV}$

a) Erzeugung

Abbildung 11.4: Röntgenerzeugung

b) Nachweis Photoemulsion, Halbleiterdetektoren, Zählrohr

Abbildung 11.5: Röntgennachweis

$$E \sim u_0 \cdot \frac{1}{r \ln \frac{r_A}{r_B}} \quad (11.31)$$

$$u_0 \sim 1000 \text{ V} \quad (11.32)$$

$$r_A \sim O(\text{cm}) \quad (11.33)$$

$$r_B \sim O(10 \mu\text{m}) \quad (11.34)$$

$$\Rightarrow E(r = r_B) \sim 50 \frac{\text{kV}}{\text{cm}} \quad (11.35)$$

In Drahtnähe: Sekundärionisation = Ausbildung einer Elektronenlawine $\Rightarrow V \sim 10^4 \dots 10^6$

c) Anwendung Materialforschung, Medizin, Chemie, Oberflächenphysik

2. Physikalische Prozesse

a) Bremsstrahlung Spektrum für Bremsstrahlung:

Abbildung 11.6: Bremsstrahlung

$$I(\nu) = I_0 \cdot z(\nu_{max} - \nu) \quad (11.36)$$

b) Charakteristische Strahlung Für $E_0 \sim$ Bindungsenergie des e^- in innerer Schale: Ionisation

Rekombination mit Emission

Bindungsenergie:

$$E_{K,L,M\dots} = -13,6 \text{ eV} (Z - S)^2 \cdot \frac{1}{n^2} \quad (11.37)$$

Abbildung 11.7**Abbildung 11.8**

S : Korrigiert Abschirmung durch Hüllenelektron

K : $S = 1$

L : $S = 7,4$

Bsp.: Blei $Z = 82$

$$E_k = (82 - 1)^2 \cdot 13,6 \text{ eV} \cdot \frac{1}{1} \quad (11.38)$$

$$= 88 \text{ keV} \quad (11.39)$$

* K -Schale ionisiert:

$$M \rightarrow K : \nu_{K\beta} = R \cdot (z - 1,8)^2 \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2} \right) = \frac{8}{9} R (z - 1,8)^2 \quad (11.40)$$

* L -Schale ionisiert:

$$M \rightarrow L : \nu_{L\alpha} = R \cdot (z - 7,4)^2 \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right) \quad (11.41)$$

$$= \frac{5}{36} \cdot R \cdot (z - 7,4)^2 \quad (11.42)$$

$$\nu_{L\beta} = \dots \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2} \right) \quad (11.43)$$

Termschema:

Abbildung 11.9

c) Absorptionsspektren

Bei Absorption: I nimmt ab

$$I = I_0 e^{-\mu x} \quad \mu \text{ ist der Absorptionskoeffizient} \quad (11.44)$$

$$= \frac{Z^{5...4}}{(h\nu)^3} \quad (11.45)$$

$$d = \frac{1}{\mu} \ln 2 \quad (11.46)$$

Halbwertsdicke:

$$I(d) = \frac{1}{2} I_0 \quad (11.47)$$

Bsp.: $E_0 = 10 \text{ keV}$:

$$d(Al) = 10^{-2} \text{ cm} \quad (11.48)$$

$$d(Pb) = 7,5 \cdot 10^{-4} \text{ cm} \quad (11.49)$$

$E_0 = 100 \text{ keV}$:

$$d(Al) = 1,6 \text{ cm} \quad (11.50)$$

$$d(Pb) = 10^{-2} \text{ cm} \quad (11.51)$$

Abbildung 11.10**Abbildung 11.11**

- d) Augen-Effekt statt Röntgenemission Ionisation: Elektronabstrahlung mit charakteristischer Energie Bsp.: $L \rightarrow K$ Übergang

$$E_l = (h \cdot \nu)_{K_\alpha} - E_L \quad (11.52)$$

$$= E_K - E_L - E_L \quad (11.53)$$

$$= E_K - 2E_L \quad (11.54)$$

Ebenfalls höhere Übergänge möglich:

$$E_e = E_K - 2E_M E_e = E_K - 2E_N \quad (11.55)$$

Abbildung 11.12

Abbildung 11.13

11.3 Maser und Laser

11.3.1 Allgemeines

Maser: Molecular amplification by stimulated emission

Laser: Light amplification by stimulated emission Induzierte Emission: Einstein Z. Physik 18 (1917)

Maser '53 - '54: Gordon, Townes, Zeiger Phys. Rev 95 (1954)

'54: Basov, Fabrikant, Prokhorov

Laser '60: T. Maiman

Prinzip: kohärente Deexcitation von Molekülen oder Atomen nach Stimulation.

Konventionelle Emission:

Abbildung 11.14: Emission von N γ nach Anregung, diskrete Linien

a)

Abbildung 11.15: Strahlung eines schwarzen Körpers, Anregung durch thermische Stöße, kontinuierliches Spektrum

b)

c)

Induzierte Emission: B_{21} (Boltzmannverteilung:)

$$\frac{N_2}{N_1} = e^{-\frac{E_2 - E_1}{k \cdot T}} \quad (11.56)$$

$$= e^{-\frac{h\nu}{kT}} \quad \text{für } T \rightarrow \infty : \frac{N_2}{N_1} \rightarrow 1 \quad (11.57)$$

Bsp.: Wasserstoff $T = 293 \text{ K}$

$$\frac{N_2}{N_1} = e^{-\frac{10,2 \text{ eV} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \frac{\text{J}}{\text{eV}}}{2093 \text{ K} \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}}} \quad (11.58)$$

$$= e^{-404} \approx 0 \quad (11.59)$$

Für $T = 600 \text{ K}$ (Sonne):

$$\frac{N_2}{N_1} = e^{-20} \quad (11.60)$$

dh: von außen induzierte Emission nicht möglich.

Nötig: $N_2 > N_1$!

Lösung:

Methode 1: Separation von Atomen oder Molekülen im Zustand E_2 von denen im Zustand

E_1

z.B. Wasserstoff-Maser

Abbildung 11.16: Im thermischen Gleichgewicht

Abbildung 11.17: Übergangswahrscheinlichkeit: B_{12}

Separation der HFS Zustände (je kleiner ΔE , desto mehr N_2 Zustände)

Verwendung von Teflon auf Quarz im Hohlraum: Stöße an der Wand führen nicht zur Deexzitation. (Sextupol)

Kraft auf Magn. Momente

$$F = \mu \cdot \frac{dB}{dr} \sim \mu \cdot r \quad (11.61)$$

Effekt: Fokussierung der angeregten Atome

$$m_J = +\frac{1}{2} \quad (11.62)$$

Methode 2: Anregung von $E_1 \rightarrow E_2$ (Pumpen)

a) Rubinlaser (Maiman 1960)

Rubin $Al_2O_3 + 0,5\%Cr^{3+}$ - Ionen [Cr ersetzt Al $\Rightarrow$ rote Emission]

Hg-Blitzlicht: Pumpen in die F_1, F_2 -Bänder des Cr^{3+} . Schneller Übergang in das E-Niveau Hohe Lebensdauer des E-Zustandes erlaubt induzierte Emission

b) He-Ne-Laser (Ähnlich auch CO_2 -N-Laser)

Anregung des He durch Gasentladung

Stoßanregung des Ne durch angeregtes He: ähnliche Energieniveaus

Emission von γ , Übergang in P-Zustand

Abbildung 11.18: Spontane Emission: A_{21}

Abbildung 11.19

Abbildung 11.20

Abbildung 11.21

Abbildung 11.22

Abbildung 11.23

Abbildung 11.24

Abbildung 11.25

11.3.2 Anwendung des Lasers

Vermessungswesen [Bsp: $\Delta d(\text{Erde-Mond}) \sim 15 \text{ cm}$]

Opt. Kommunikation

Schneiden [Bsp: Autoindustrie, Bekleidungsindustrie, Medizin]

Holographie

Fusion

Kompression um $\times 1000$

Abbildung 11.26

$$T \sim 10^7 - 10^8 K$$

Für 1 Kugel/Pellet:

Fusionsenergie $\hat{=} 1 \text{ Fass Öl}$

12. Einführung in die Physik der Moleküle und Festkörper

12.1 Bindungen

Molekül: Ansammlung von Atomen, die durch elektrische Kräfte stabil gebunden sind.

1. Heteropolare Bindungen (Ionenbindungen)

Anziehung zwischen positiv und negativ geladenen Ionen

Beispiel: Na Cl: Ionisches Molekül

Abbildung 12.1: Na: ($Z = 11$)

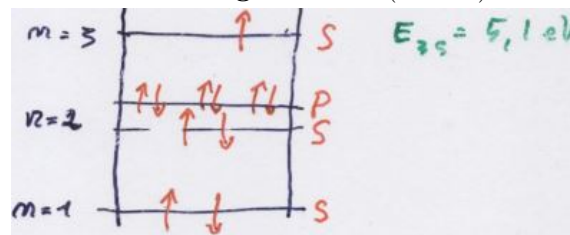
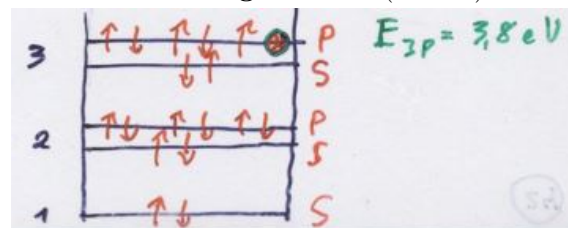


Abbildung 12.2: Cl: ($Z = 17$)



Bindung: Übergabe eines e^- von Na zum Cl:

$$\Delta E = E_{Na} - E_{Cl} = 1,3 \text{ eV}$$

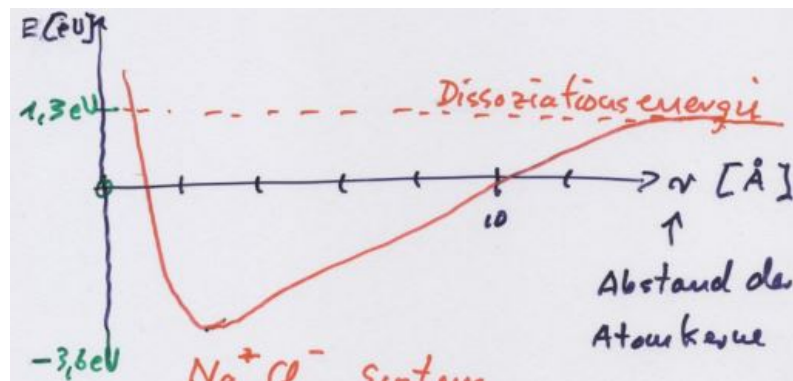
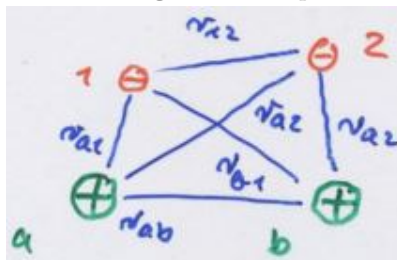


Abbildung 12.3: Na^+Cl^- System, durch Coulombkraft gebunden

2. Homöopolare Bindungen, auch kovalente Bindungen: Elektronenaustausch zwischen gleichen Partnern

Abbildung 12.4: Beispiel: H_2



Berücksichtigt alle Kräfte zwischen 1, 2, a, b.

Ansatz:

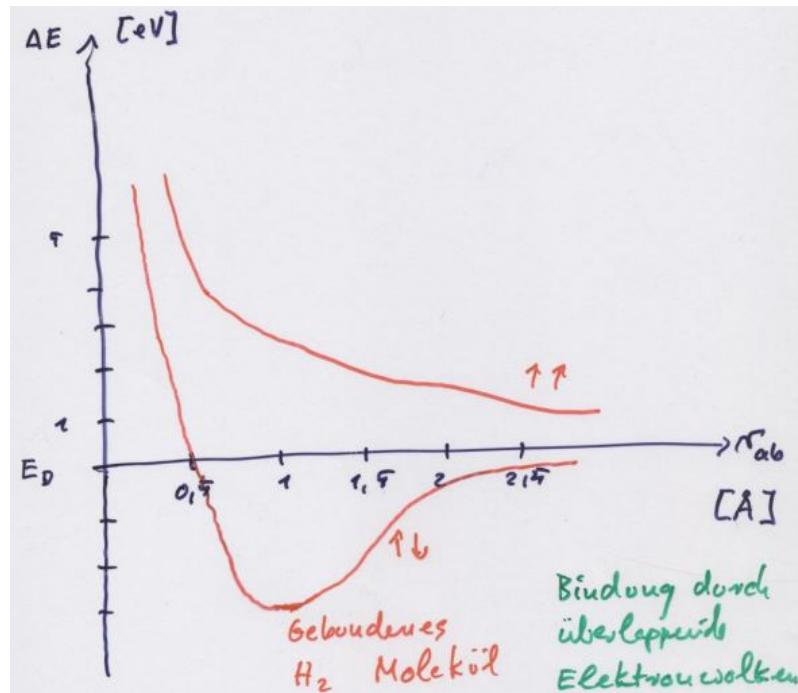
$$\begin{aligned}
 H = & \underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla_1^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_{a1}}}_{H_1} \\
 & \underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla_2^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_{b2}}}_{H_2} \\
 & \underbrace{-\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_{b1}} + \frac{1}{r_{a2}}\right)}_{\text{Überlappungskräfte}} \\
 & \underbrace{+\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_{ab}} + \frac{1}{r_{12}}\right)}_{\text{Abstoßende Kräfte}}
 \end{aligned}$$

Wellenfunktion:

$$\begin{aligned}
 \Psi &= \Psi_A \cdot \chi_S \quad \uparrow\uparrow \\
 &= \Psi_S \cdot \chi_A \quad \uparrow\downarrow \\
 &\rightarrow \text{Räumliche Wellenfunktion}
 \end{aligned}$$

$$\Psi_{S/A}(1,2) = [\Psi_a(1) \cdot \Psi_b(2) \pm \Psi_b(1) \cdot \Psi_a(2)] \cdot \underbrace{c}_{\text{Normierung}}$$

Setze in Schrödingergleichung ein, iteriere (Hartree-Fock-Verfahren)



12.2 Energiezustände

Ansatz:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2M_1} \nabla^2 - \frac{\hbar^2}{2M_2} \nabla^2 + V(r_{12})$$

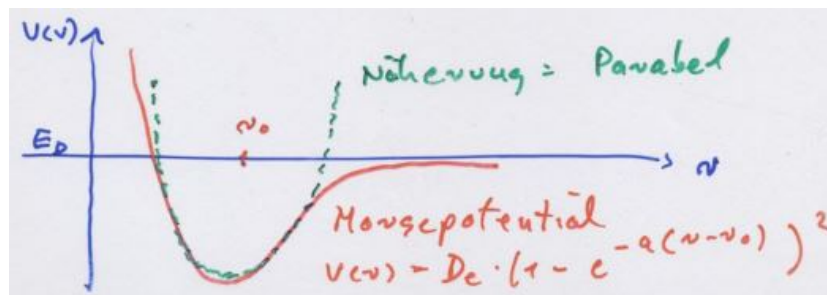
Bewegung von Kern 1 und 2 im Verbund

$$\rightarrow \vec{r} = \vec{r}_{12}, \quad \mu = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2}$$

Schwerpunktssystem

$$\Rightarrow H = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right) + V(r) + \frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{J(J+1)}{r^2}$$

2 Energieanteile: Rotation und Vibration der Kerne



Energieniveaus der bewegten Kerne

1. Rotation:

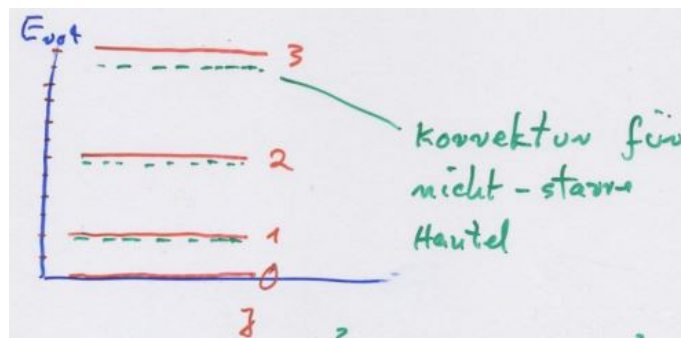
Annahme: starre Hantel

$$E_{rot} = \frac{\hbar^2}{2\theta} \underbrace{J(J+1)}_{J=0, 1, \dots}$$

θ Trägheitsmoment $= \mu r_0^2$

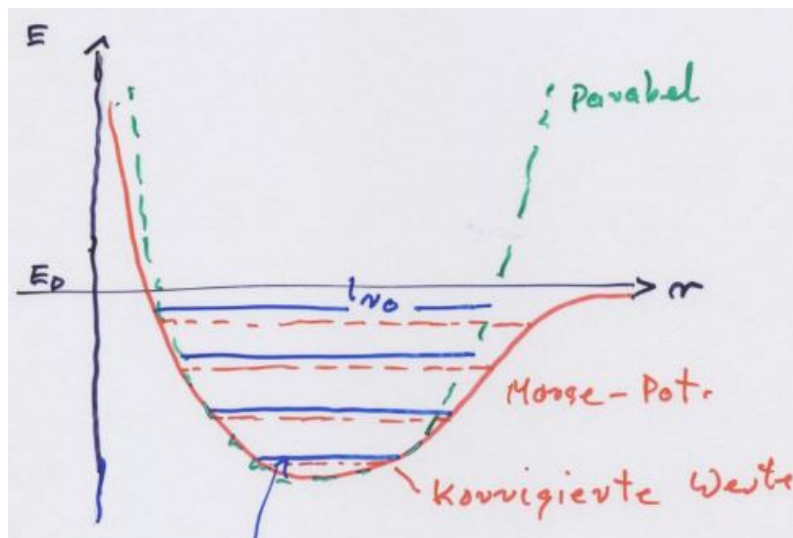
Übergangsenergie:

$$\begin{aligned} \Delta E_{rot}(J_1, J_2) &= E_{rot}(J_1) - E_{rot}(J_2) \\ &= \pm \frac{\hbar^2}{2\mu r_0^2} \cdot 2J \\ &\text{für } \Delta J = \pm 1 \end{aligned}$$



$$E_{rot} = \frac{\hbar^2}{2\mu r_0^2} (J(J+1)) - C J^2 (J+1)^2 + \dots$$

2. Vibration

Annahme Parabel $\hat{=}$ harmonischer Oszillator

$$E_{vib} = \hbar\omega\left(\frac{1}{2} + v\right)$$

$v = 0, 1, 2, \dots$, Vibrationsquantenzahl

$$E_{vib} = \hbar\omega\left(\frac{1}{2} + v\right) - c\hbar\omega\left(\frac{1}{2} + v\right)^2 + \dots$$

Beispiel: H Cl

$$E_D = 4,4 \text{ eV}$$

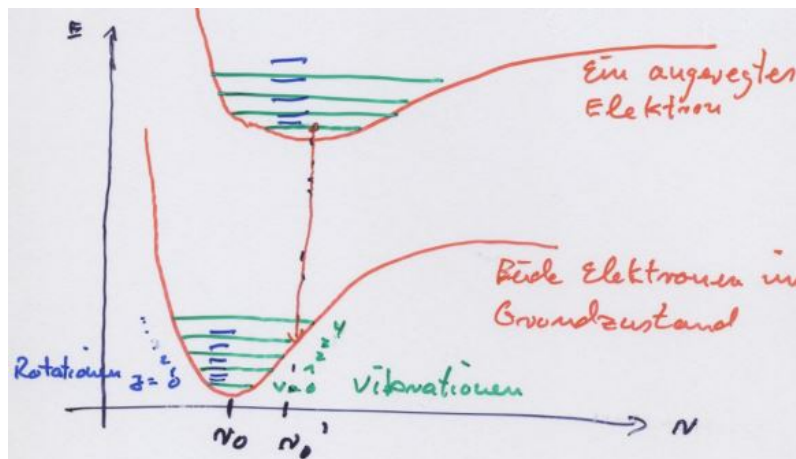
$$r_0 = 1,3 \text{ \AA}$$

$$\frac{\hbar^2}{2\mu r_0^2} = 1,3 \cdot 10^{-3} \text{ eV}$$

$$\Rightarrow \Delta E_{rot} = 2,6 \cdot 10^{-3} \text{ eV} \cdot J$$

$$\Delta E_{vib} = 0,3 \text{ eV} \cdot v$$

3. Anregung in der Hülle



Übergang zwischen angeregtem System und abgeregtem System geht in einem hoch angeregten Vibrationszustand [Frank-Condon-Prinzip]
(Da Kerne nicht so schnell näher kommen können wegen ihrer Trägheit)

12.3 Systeme mit vielen gebundenen Atomen

1. Bindungen

a) Heterpolare Bindungen: Anziehung von Ionen

Beispiel: $\text{Na}^+ \text{Cl}^-$
 $\text{K}^+ \text{Cl}^-$ Gebunden durch
 $\text{Li}^+ \text{F}^-$ Elektronenaustausch,
 $\text{Mg}^{++} \text{O}^{--}$ Elektrostatische Anziehung
 $2 \text{Na}^+ \text{S}^{--}$

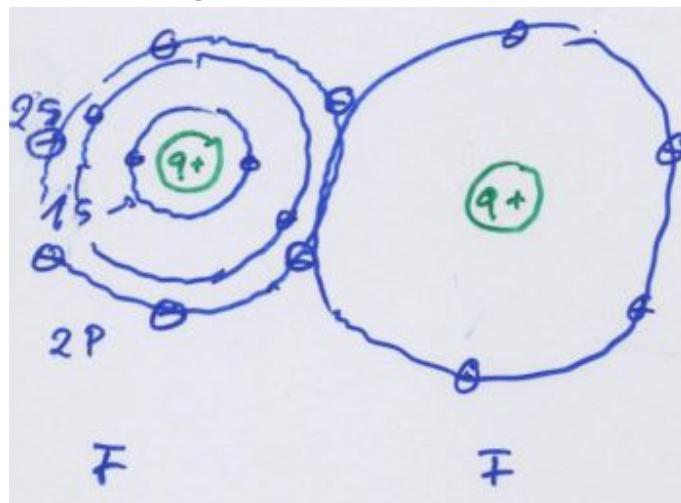
b) Homöopolare Bindung: Austausch von Elektronen der äußeren Hülle

Beispiel: H - H

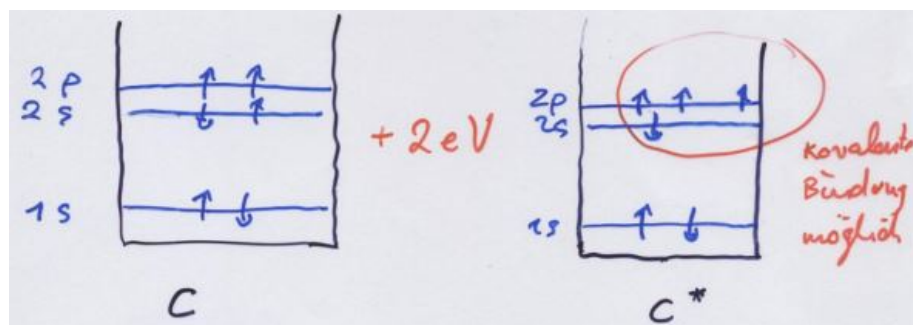


Beispiel: F - F ($Z = 9$)

Abbildung 12.5: Hüllenabschluss in 2 P Schale.



Spezialfall: Kohlenstoffbindung



Beispiel: Methan

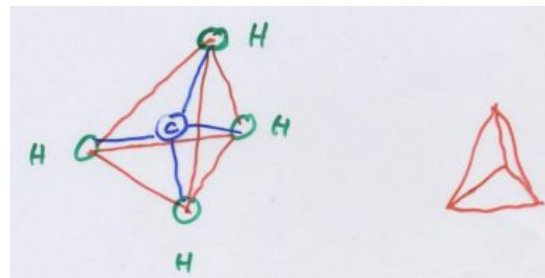
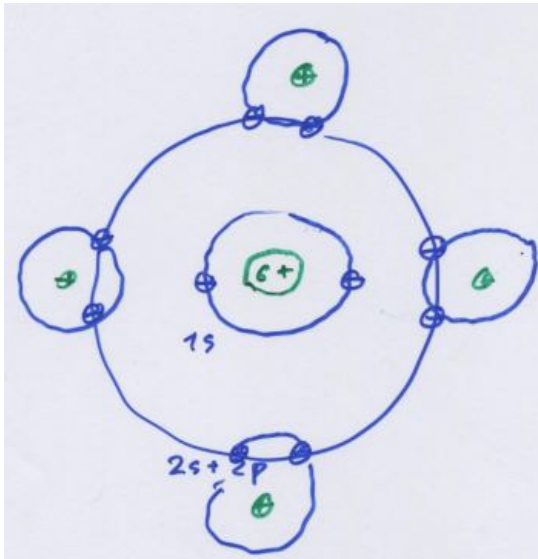
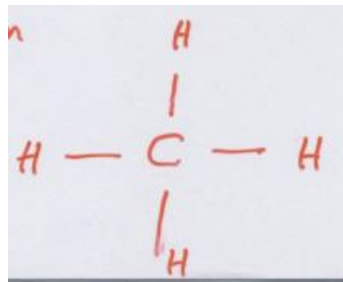


Abbildung 12.6: Räumliche Anordnung

c) Von der Waals-Bindung

Edelgasatom mit abgeschlossener Hülle.

Van der Waal: Deformation der Hülle
Bildung von Dipolen
Ausrichtung und Anziehung

Beispiel: He - He: $V_{min} = -0,8 \cdot 10^{-5} \text{ eV}$

vergleiche: H - H: $V_{min} = -4,5 \text{ eV}$

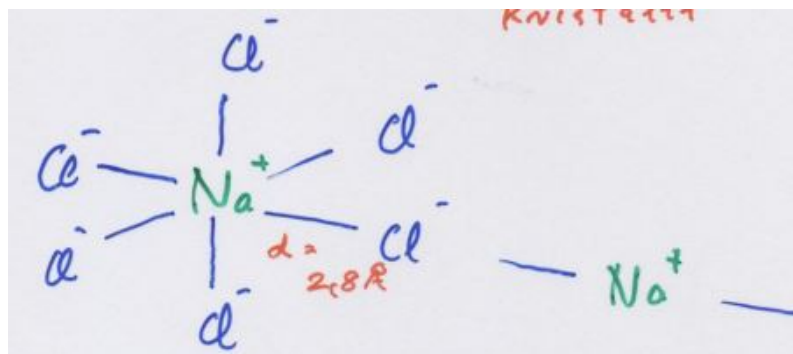
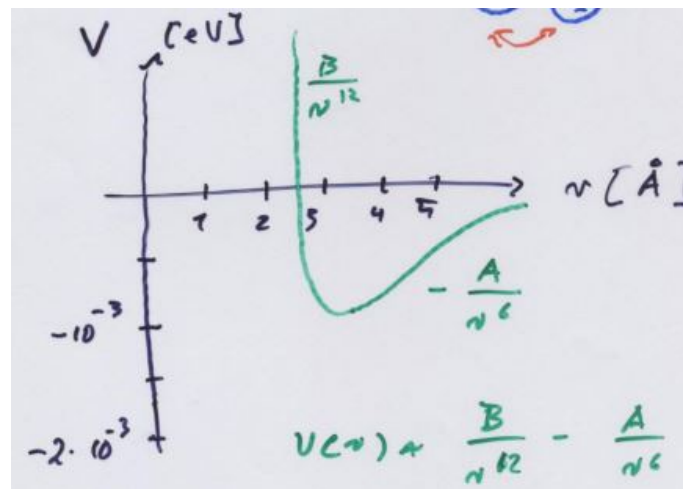
⇒ Bindung nur bei sehr tiefen Temperaturen

2. Festkörper und Kristalle

a) Ionische Kristalle

Alkali-, Halogene: kubische ionische Kristalle

Feste Bindungen durch elektrostatische Anziehung $V = -16,5 \text{ eV}$ pro Ionenpaar.



b) kovalente Kristalle

zB. C, zum Beispiel Diamanten

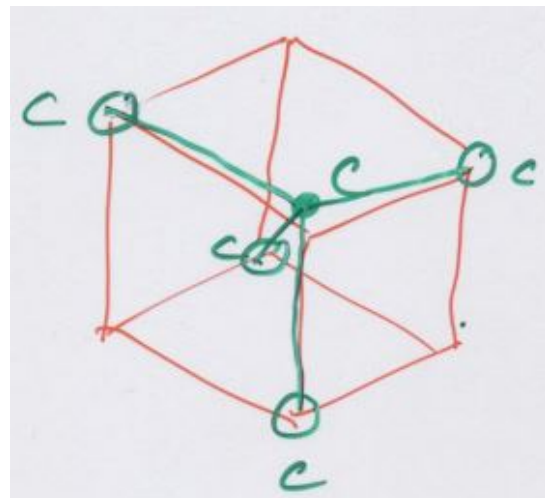
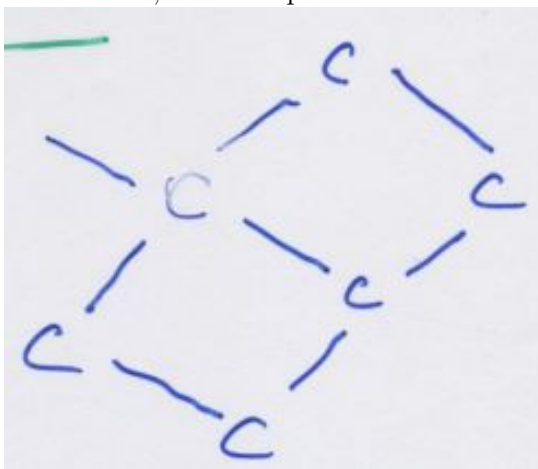


Abbildung 12.7: Räumliche Anordnung

c) Metallische Kristalle

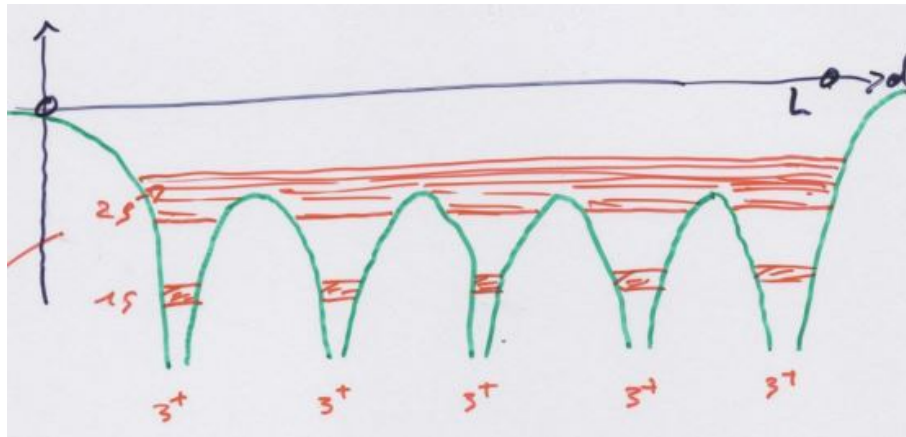
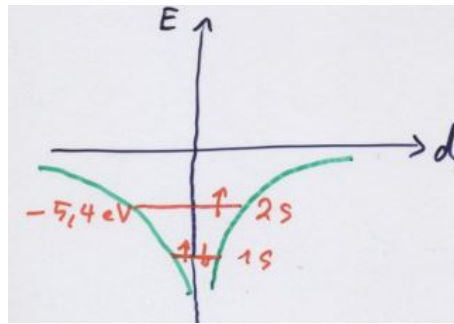
Gitter aus positiven Ionen mit freien Valenzelektronen.

Beispiel: Lithium ($Z = 3$)

Lithiumkristall (1d)

Valenzelektronen: Frei bewegliches Gas im Valenzband

Beschreibung durch Annäherung eines Kastenpotentials (Fermi Gas Modell)



3-d Kasten:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi = E\psi$$

$$\psi = A \sin k_x x \cdot \sin k_y y \cdot \sin k_z z$$

$$\psi = 0 \text{ für } x, y, z < 0, > L$$

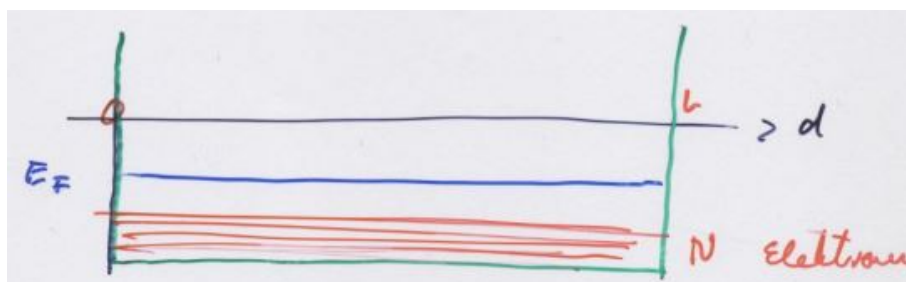
$$\Rightarrow k_x = \frac{n_x \pi}{L} \quad n_x = 1 \dots n_{\max}$$

$$\Rightarrow k_y = \frac{n_y \pi}{L} \quad n_y = 1 \dots n_{\max}$$

$$\Rightarrow k_z = \frac{n_z \pi}{L} \quad n_z = 1 \dots n_{\max}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow E &= \frac{\hbar^2}{2m}(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \\ &= \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \end{aligned}$$

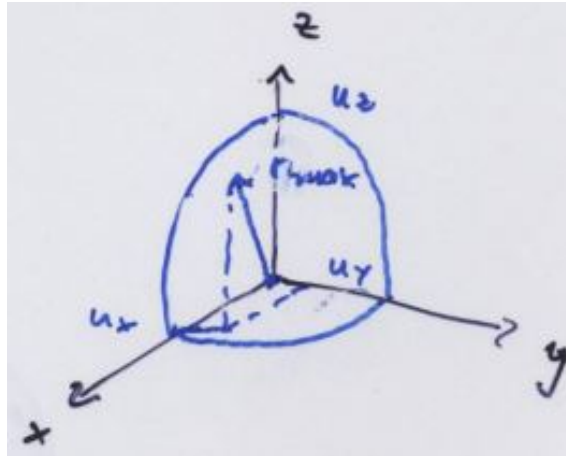
Jedes Elektron hat Zustand (n_x, n_y, n_z)



$$n_{zmax} = \frac{L}{\pi\hbar} \sqrt{2mE} \quad (n_x = n_y = 0)$$

$N(E_i \leq E_F)$ Zahl aller Elektronen im Kasten

$$= \underbrace{2}_{\downarrow \text{ und } \uparrow\downarrow} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^3}_{1/8, \text{ Kugel}} \cdot \underbrace{\frac{4}{3}\pi}_{\text{Oberfläche einer Kugel}} n_{max}^3$$



$$\Rightarrow N = \frac{L^3}{3\pi^2\hbar^3} \cdot (2mE)^{\frac{3}{2}}$$

$$E_F = \frac{3^{\frac{2}{3}} \cdot \pi^{\frac{4}{3}} \cdot \hbar^2}{2m} \left(\frac{N}{V}\right)^{\frac{2}{3}}$$

(Volumen $V = L^3$)

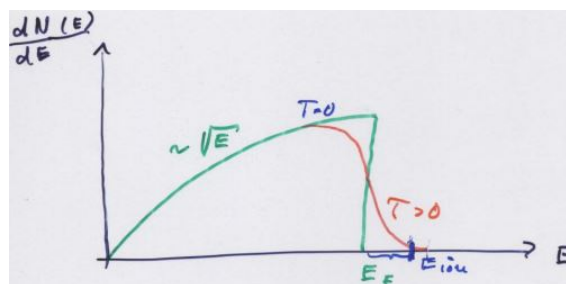
Fermienergie: max. Energie der Elektronen im Kastenpotential bei $T = 0$ K

Beispiel: Cu:

$$\frac{N}{V} = \frac{6 \cdot 10^{23} \frac{1}{\text{mol}} \cdot 8,9 \cdot 10^6 \frac{\text{g}}{\text{m}^3}}{63,5 \frac{\text{g}}{\text{mol}}}$$

$$= 8 \cdot 10^{28} \text{ e}^- / \text{m}^3$$

$$E_F = 7 \text{ eV}$$



$$\frac{dN}{dE} = \frac{(2m)^{\frac{3}{2}} \cdot V \cdot \sqrt{E}}{2\pi^2\hbar^3} \cdot \frac{1}{1 + \underbrace{e^{(E-E_F)/kT}}_{\text{Fermi-Dirac-Statistik}}}$$

Index

- Υ-Teilchen, 85
- Absorptionsspektren, 89
- Alkali-Atome, 64
- Allgemeines, 88
- Alpha-Zerfall, 48
- Anwendung, 88
- Augen-Effekt, 90
- Avogadrozahl, 3
- Bohrsche Postulate, 18
- Bremsstrahlung, 88
- Compton-Effekt, 28
- Das Heliumatom, 76
- Dispersionsrelation, 40
- Elektronenspinresonanz, 73
- Energieniveau, 18
- Energiezustände, 52, 60, 76
- Erzeugung, 88
- Feinstruktur, 58
- Franck-Hertz-Versuch, 21
- Frank-Condon-Prinzip, 99
- Gebundene Quarksysteme, 83
- Hamiltonoperator, 41
- Heteropolare Bindungen, 95
- Heteropolare Bindungen, 99
- Homöopolare Bindung, 99
- Homöopolare Bindungen, 96
- Hyperfeinstruktur, 62
- Induzierte Emission, 25
- Ionisationsenergie, 20
- Kastenpotential, 44
- Kernradius, 13
- Kernspins, 62
- Klassisch, 53
- Klein-Gordon-Gleichung, 40
- Lamb, 62
- Lamb-Verschiebung, 62
- Laser, 91
- Loschmidtzahl, 3
- magnetisches Moment, 56
- Magnetismus, 53
- Maser, 91
- Materiewellen, 35
- Myonium, 82
- Nachweis, 88
- Nicht-relativistische Materiewellen, 39
- Normaler Zeeman-Effekt, 69
- Paschen-Back-Effekt, 71
- Photoeffekt, 25
- Physikalische Prozesse, 88
- Plank'sche Strahlungsformel, 23
- Positronium, 82
- Proton, 62
- QED-Effekte, 62
- Röntgenbeugung, 4
- Röntgenspektren, 88
- Ramsauer-Effekt, 32
- Resonanzfluoreszenz, 15
- Rutherford Streuung, 11
- Schalenstruktur, 80
- Schrödnergleichung, 50
- Schwarzer Strahler, 22
- Sommerfeldsche Erweiterung, 19
- Spezifische Ladung, 5
- Spin, 53, 56
- Spin-Bahn-Momente, 58
- Spontane Emission, 24
- Stark-Effekt, 75
- Streuexperimente, 8
- Thomsonsstreuung, 10
- Toponium, 85
- Tunneleffekt, 45
 - Tunnelwahrscheinlichkeit, 46
- Verdampfungsenergie, 3
- Versuch von Lenard, 9

Versuch von Rutherford, 10

Wärmestrahlung, 22

Wahrscheinlichkeitsinterpretation, 37

Wasserstoff, 52

Wasserstoffspektrum, 15

Wellenfunktion, 77

Wellenpakete, 37

Wellenzahlen, 18

Zeeman, 66