Blatt 5

16)

a) Nur Winkelabhängigkeit: $Y_{l,m}(\theta,\varphi)$, $l=2$, $\varphi=0$

$$Y_{2,0} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}}\,(3\cos^2\theta - 1)$$

$\theta = 0$: $3\cos^2\theta - 1 = 2$

$\theta = 90^\circ$: $3\cos^2\theta - 1 = -1$

$3\cos^2\theta - 1 = 0$: $\theta = 54{,}74^\circ$

$$Y_{2,\pm1} = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\,\cos\theta\sin\theta\, e^{\pm i\varphi}$$

$\cos\theta\sin\theta$:

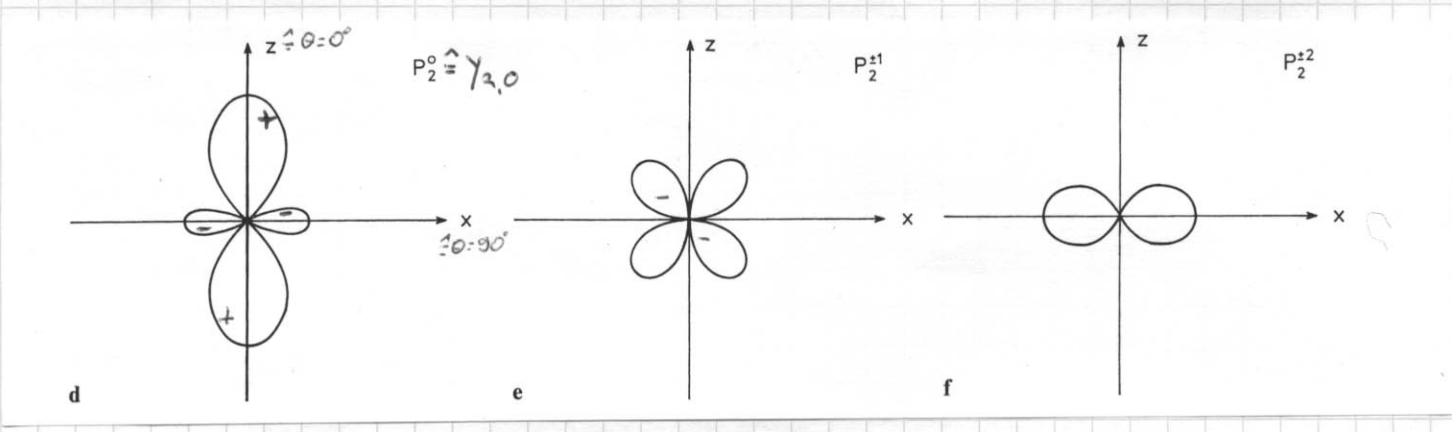
$= 0$ für $\theta = 0$

$= 0$ für $\theta = 90$

$= \frac{1}{2}$ für $\theta = 45^\circ$

$= \frac{\sqrt{3}}{4} = 0{,}43$ für $\theta = 30^\circ$

$$Y_{2,\pm2} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}}\,\sin^2\theta\, e^{\pm i2\varphi}$$



aus Haken, Wolf: „Atom- und Quantenphysik" b)

Kugelsymmetrisch, ungleich von Null für $r \Rightarrow 0$: s-Orbital $(l=0)$

Aus Vorlesung: Anzahl nicht-trivialer Nullstellen:

$$n-(l+1) \overset{!}{=} 4 \Rightarrow n=5$$

$\Longrightarrow$ 5s-Orbital

17)

$$L_z \hat{=} \frac{\hbar}{i}\partial_\varphi$$

$$L_z \psi = \frac{\hbar}{i}\partial_\varphi \left[A r^2 e^{\frac{-r}{3a_0}} \sin\Theta \cos\Theta e^{i\varphi} \right]$$

$$= \frac{\hbar}{i} i \psi = \hbar\psi \Longrightarrow \underline{\underline{m=1}}, \text{ denn}$$

$$\text{denn } \langle L_z \rangle = \iiint \psi^* L_z \psi \, dV = m\hbar$$

$$\underset{\text{s.o.}}{=} \iiint \psi^* \hbar \psi \, dV = \hbar \iiint \psi^* \psi \, dV = \hbar$$

$$\langle \vec{L}^2 \rangle = l(l+1)\hbar^2$$

(nicht $\vec{L}\psi$, da nur Betrag und eine Komponente bestimmbar)

wie oben:

$$\vec{L}^2 \psi = -\hbar^2 \Big(\underbrace{\frac{1}{\sin\Theta}\partial_\Theta (\sin\Theta\,\partial_\Theta)}_{1.\ \text{Teil}} + \underbrace{\frac{1}{\sin^2\Theta}\partial_\varphi^2}_{2.\ \text{Teil}} \Big)\psi$$

$\vec{L}^2$ in Kugelkoordinaten z.B. aus Nolting „QM 2"

1. Teil: $\frac{1}{\sin\Theta}\partial_\Theta(\sin\Theta\,\partial_\Theta)\sin\Theta\cos\Theta$

$$= \frac{1}{\sin\Theta}\partial_\Theta \sin\Theta\left(\cos^2\Theta - \sin^2\Theta\right)$$

$$= \frac{\cos\Theta}{\sin\Theta}\left(\cos^2\Theta - \sin^2\Theta\right) - 4\cos\Theta\sin\Theta$$

2. Teil $\frac{1}{\sin^2\Theta}\partial_\varphi^2 \sin\Theta\cos\Theta e^{i\varphi} = -\frac{\cos\Theta}{\sin\Theta} e^{i\varphi}$

$$\Rightarrow \vec{L}^2\psi = A r^2 e^{-\frac{r}{3a_0}} \left[\frac{\cos\Theta}{\sin\Theta}\left(1-2\sin^2\Theta\right) - 4\cos\Theta\sin\Theta - \frac{\cos\Theta}{\sin\Theta} \right] e^{i\varphi} (-\hbar^2)$$

$$= 6\hbar^2\psi \overset{!}{=} l(l+1)\hbar^2\psi \longrightarrow \underline{\underline{l=2}}$$

„$e^{-\frac{r}{3a_0}}$" $\Longrightarrow n=3$

18) $n = 4$

$$\begin{aligned} l &= 0 & m &= 0 \\ l &= 1 & m &= 0, \pm 1 \\ l &= 2 & m &= 0, \pm 1, \pm 2 \\ l &= 3 & m &= 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \end{aligned}$$

magnetisches Moment und Bahndrehimpuls antiparallel

$\left(\vec{\mu}_l = -\frac{e}{2m_e}\vec{L}\right)$, gesucht: $\langle L_z \rangle$ möglichst parallel zur $-z$-Richtung:

$l = 3, \; m_l = -3$

$$\cos\Theta = \frac{|m|}{\sqrt{l(l+1)}} = \frac{3}{\sqrt{3 \cdot 4}} \longrightarrow \Theta = 30^\circ$$

19)

a) $\vec{\mu} = -g_J \frac{\mu_B}{\hbar}\vec{J}$ mit $g_l = 1$ für $\vec{J} = \vec{L}$ Bahnmagnetismus

$g_s = 2$ für $\vec{J} = \vec{S}$ Spinmagnetismus

$$|\vec{\mu}| = \frac{\mu_B}{\hbar}\hbar\sqrt{l(l+1)} = \sqrt{2}\,\mu_B \qquad \text{Bahnmagnetismus}$$

b) plötzliches Einschalten d. Feldes

$\uparrow B$

$$\underbrace{\left.\begin{matrix}\uparrow \vec{\mu} \\ \downarrow \vec{L}_e\end{matrix}\right\} \Longrightarrow \uparrow \vec{\omega}}_{\text{Drehimpulserhaltung}}$$

~~Spin~~ Elektron: magnetisches Moment und Drehimpuls antiparallel

c) $L_e = N_{Fe}\,\hbar$

$$L_{Zyl} = I_{Zyl} \cdot \omega = \frac{1}{2} m R^2 \omega$$

$$= \frac{1}{2}\frac{N_{Fe}}{N_A} m_{Fe} R^2 \omega \overset{!}{=} L_e$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\frac{N_{Fe}}{N_A} m_{Fe} R^2 \omega \overset{!}{=} N_{Fe}\,\hbar$$

$$\omega = \frac{2\hbar N_A}{m_{Fe} R^2} \qquad f = \frac{\omega}{2\pi} = 1{,}44 \cdot 10^{-5}\,\frac{1}{s} \qquad (T \approx 19\,h\;!)$$

20) Resonanz $g \mu_B B_0 = h\nu$

$$g = \frac{h\nu}{\mu_B B_0} = \frac{h}{\mu_B} \frac{9{,}2\ \text{GHz}}{327{,}74\ \text{mT}} = 2{,}0056$$

Resonanzbedingung für $\nu = 9{,}80$ GHz für <u>diesen</u> g-Faktor:

$$B_0\,(9{,}80\ \text{GHz}) = 349{,}11\ \text{mT}$$