Physik IV – Atome und Moleküle

Sommer 2005, Prof. Wim de Boer, Universität Karlsruhe

Übungsleiter: Frank Hartmann, Forschungszentrum Karlsruhe,
Tel.: 07247 82 6330; Email: Frank.Hartmann@cern.ch

LÖSUNGEN Übung 6

1. Positronium → H-ähnliches Atom
   Unten wird recht ausführlich gerechnet, im Prinzip können die Bohr-Sommerfeldschen Formeln für das H-Atom benutzt werden unter Berücksichtigung der effektiven Masse:
   (0) effektive Masse: $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} = \frac{m_e m_e}{2m_e} = \frac{m_e}{2}$
   (1) Bohr-Modell: $E = \frac{1}{2}\mu v^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$; $[E = E_{pot} + E_{kin}]$
   (2) Kräftegleichgewicht: $\frac{\mu v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$
   (3) Quantisierung des Drehimpulses $\mu v r = n\hbar$
   (2) $\mu\omega^2 r = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$
   (3) $\mu\omega r^2 = n\hbar \rightarrow r = \sqrt{\frac{n\hbar}{\mu\omega}}$ (4)
   in (2): $\mu\omega^2(\frac{n\hbar}{\mu\omega})^{3/2} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \rightarrow \sqrt{\omega} = \frac{e^2\mu^{1/2}}{4\pi\epsilon_0(n\hbar)^{3/2}} \rightarrow \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\mu e^4}{32\pi^3\epsilon_0^2\hbar^3}\frac{1}{n^3}$
   Im Grundzustand n=1: $\mu = \frac{m_e}{2} \rightarrow \frac{\omega}{2\pi} = \frac{m_e e^4}{64\pi^3\epsilon_0^2\hbar^3} = 3.288 \times 10^{15}\frac{1}{s}$
   in (4): $r = (\frac{n\hbar}{\mu})^{1/2}\sqrt{\frac{16\pi^2\epsilon_0^2\hbar^3}{\mu e^4}n^3} = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{\mu e^2}n^2 = (mit\, n = 1\, und\, \mu = m_e/2)\ \frac{8\pi\epsilon_0\hbar^2}{m_e e^2} = 1.059 \times 10^{-10}m.$

   in (1): $E = \frac{1}{2}\mu\omega^2 r^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{1}{2}\mu(\frac{\mu e^4}{16\pi^2\epsilon_0^2\hbar^3}\frac{1}{n^2})^2 \times (\frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{\mu e^2}n^2)^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mu e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar^2}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{32}\frac{\mu e^4}{\pi^2\epsilon_0^2\hbar^2}\frac{1}{n^2} = -\frac{1}{64}\frac{m_e e^4}{\pi^2\epsilon_0^2\hbar^2} = -6.80eV$

2. Myon-Atom
   (a) (siehe letzte Aufgabe, gleiche Rechnung)
   $\mu = \frac{m_\mu m_e}{m_\mu + m_e} = \frac{207 m_e m_e}{207 m_e + m_e} = 1.625 \times 10^{-28}kg$
   $E_n = -\frac{1}{32}\frac{Z^2\mu e^4}{\pi^2\epsilon_0^2\hbar^2} = -2531\frac{Z^2}{n^2}eV$ (Achtung im Haken-Wolf wurde statt μ nur m_μ eingesetzt, deswegen das abweichende Ergebnis)
   (b) $r_n = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{Z\mu e^2}n^2 = 2.84 \times 10^{-3}\frac{n^2}{Z}\mathring{A}$
   (c) $h\nu = E_{n=2} - E_{n=1} = -\frac{1}{32}\frac{Z^2\mu e^4}{\pi^2\epsilon_0^2\hbar^2}(1/4 - 1) = 1898Z^2eV$

3. Beim Franck-Hertz-Versuch entspricht der Abstand der Minima (bzw. Maxima) ΔU_B in der Strom-Spannungs-Kennlinie einer charakteristischen Energie eines Übergangs eines Elektrons in den Atomen bzw. Molekülen des Füllgases.
   (a) Die Spannung $U_B = 4V$ liegt zwischen dem ersten und zweiten Minimum. Die Wellenlänge dieses charakteristischen Übergangs ist $\lambda = \frac{hc}{e\Delta U_B} = 589nm$. Das Füllgas leuchtet also im gelben Spektralbereich. Für $U_B = 5V$ leuchtet es ebenfalls gelb.
   (b) Bsp.: Natriumdampf und ^{86}Krypton leuchtet im gelben Spektralbereich. Es könnte sich also um Natriumdampf oder ^{86}Krypton handeln.
   (c) Die kinetische Energie der Elektronen E_{kin} muss mindestens so groß sein, wie die Energie des charakteristischen Übergangs, d. h. $E_{kin} \geq e\Delta U_B$. Da $E_{kin} = \frac{m}{2}v^2$, muss $v \geq \sqrt{2e\Delta U_B/m} = 8.6 \times 10^5 m/s$ sein.

4. Ist eines der beiden Elektronen entfernt, so benötigt man die Energie Z^2E_i, wobei $E_I = 13.6eV$ die Ionisierungsenergie des H-Atoms ist. Für He (Z=2) ergibt dies 54.4eV. Die Differenz zu 79eV (24.6eV), ist dann die Ionisierungsenergie des ersten Elektrons.

5. Der Rückstoßimpuls p_H des Atoms ist gleich dem Impuls $h\nu/c$ des Photons. Die Übergangsenergie E ist $E = h\nu + p_H^2/(2M_H)$. Aus diesen beiden Gleichungen erhält man mit Hilfe einer einfachen Näherung ($h\nu \ll 2M_Hc^2$) die Rückstoßenergie $T_R \approx E^2/(2M_Hc^2)$. Mit $E_n = -\frac{Rhc}{n^2}$; $E_1 = -13.6eV$ und $E_2 = \frac{E_1}{2^2} = -3.4eV \Rightarrow n = 2 \rightarrow n = 1$ $E_{2\rightarrow 1} = 10.2eV$ (auch aus Diagramm Haken-Wolf S 104 oder ähnlichem Termschema). Mit E=10.2eV ergibt sich sich $T_R = 5.5 \times 10^{-8}eV$. Die natürliche Linienbreite beträgt $\Delta E = \hbar/\Delta t = e \times 10^{-7}eV$. Wegen $\Delta E > 2T_R$ ist Resonanzabsorption möglich.